



ЕНЦИКЛОПЕДІЯ КІБЕРНЕТИКИ

А · Л

1

ЕК



Е

**ЕНЦИКЛОПЕДІЯ КІБЕРНЕТИКИ**

К

**АКАДЕМІЯ НАУК  
УКРАЇНСЬКОЇ РАДЯНСЬКОЇ СОЦІАЛІСТИЧНОЇ РЕСПУБЛІКИ**

**НАУКОВА РАДА  
ГОЛОВНОЇ РЕДАКЦІЇ УКРАЇНСЬКОЇ РАДЯНСЬКОЇ ЕНЦИКЛОПЕДІЇ**

М. П. БАЖАН (голова Наукової ради), Б. М. БАБІЙ, І. К. БІЛОДІД,  
П. А. ВЛАСЮК, В. М. ГЛУШКОВ, Г. В. ГОЛОВКО, В. Н. ГРІДИСЬ, В. С. ГУ-  
ТИРЯ, Г. М. ДОВРОВ, О. З. ЖМУДСЬКИЙ, Р. С. КАВЕЦЬКИЙ, В. І. КАСІЯН,  
І. І. КОМПАНИСЬ (заст. голови Наукової ради), В. М. КОРЕЦЬКИЙ,  
І. Д. НАЗАРЕНКО, Л. М. НОВИЧЕНКО, О. С. ПАРАСЮК, В. С. ПАТОК,  
В. Ф. ПЕРЕСІПКИ, І. Р. ПІДОПЛІЧКО, В. В. ПОРФИР'ЄВ, Л. М. РЕ-  
БУЦЬКИЙ, М. С. СІВЧАЧЕНКО, А. Д. СНАБА, К. Ф. СТАРОДУБОВ, С. І. СУБ-  
БОТІН, В. М. ТЕРЛЕЦЬКИЙ, П. Т. ТРОНЬКО, О. Я. УСИКОВ, П. М. ФЕЛ-  
ЧЕНКО, І. М. ФЕДОРЧЕНКО, І. М. ФРАНЦЕВИЧ, В. В. ЦВЕТКОВ,  
Р. В. ЧАГОВЕЦЬ, М. З. ШАМОТА, Г. А. ШВЕД (відповідальний секретар  
Наукової ради), Г. Г. ШЕВЕЛЬ, В. І. ШИНКАРУК, С. М. ЯМПОЛЬСЬКИЙ,





# ЕНЦИКЛОПЕДІЯ КІБЕРНЕТИКИ

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ  
ЕНЦИКЛОПЕДІЇ КІБЕРНЕТИКИ

В. М. ГЛУШКОВ (відповідальний редактор), М. М. АМОСОВ, І. П. АРТЕМЕНКО, О. О. БАКАСВ, В. В. ІВАНОВ, Л. А. КАЛУЖНІН, В. А. КОПАЛЕВСЬКИЙ, В. С. КОРОЛЮК, М. І. КРАТКО, В. М. КУНЦЕВИЧ, О. І. КУХТЕНКО (заст. відповідального редактора), Б. М. МАЛИНОВСЬКИЙ, В. С. МИХАЛЕВИЧ, П. В. ПОХОДЗІЛО (відповідальний секретар), Г. С. ПУХОВ, В. М. ПШЕНИЧНИЙ, З. Л. РАБИНОВИЧ, Б. Б. ТИМОФЄЄВ, К. Л. ЮЩЕНКО.

ТОМ ПЕРШИЙ

---

А — Л

ГОЛОВНА РЕДАКЦІЯ  
УКРАЇНСЬКОЇ РАДЯНСЬКОЇ ЕНЦИКЛОПЕДІЇ  
КИЇВ 1973

СП2.154.1(62)

© ГОЛОВНА РЕДАКЦІЯ УРЕ. 1973 р.

Том підписано до друку 31 травня 1973 р.  
КИЇВСЬКА КНИЖКОВА ФАБРИКА

Б  $\frac{3-3-006}{\text{М}-222(04) \text{Б}}$

Видання Енциклопедії кібернетики (ЕК) у двох томах здійснено відповідно до постанови Центрального Комітету Комуністичної партії України і Ради Міністрів Української РСР. Створення ЕК є результатом творчої співпраці Головної редакції Української Радянської Енциклопедії та ордена Леніна Інституту кібернетики Академії наук Української РСР.

Кібернетика — наука про загальні закономірності, принципи й методи керування в складних системах — перебуває нині на самому вістрі науково-технічного прогресу. Важко назвати галузь науки, техніки чи народного господарства, де б не застосовували її методів і засобів. Кібернетикою користуються інженери і математики, економісти і соціологи, лікарі й біологи, археологи, лінгвісти, педагоги та фахівці багатьох інших галузей. Більш як у 500 сферах життя застосовують нині електронні обчислювальні машини — ці універсальні перетворювачі інформації, що є основними знаряддями сучасного науковця чи інженера.

Роль кібернетики в народному господарстві нашої країни зростатиме й далі. В Резолюції XXIV з'їзду КПРС вказано на необхідність «... ширше застосовувати організаційну і електронно-обчислювальну техніку, автоматизовані системи і наукові методи управління та планування» (Матеріали XXIV з'їзду КПРС. К., 1971, стор. 227).

Інтерес як до самої науки, так і до її застосувань зростає з кожним днем. Створення ЕК є першою спробою задовольнити все зростаючий попит на енциклопедичні видання з цієї галузі знань. Більшість статей енциклопедії за змістом і формою зрозуміла широким колом науковців та інженерно-технічних працівників, однак є в ній і статті, доступні лише фахівцям з окремих розділів кібернетики.

На сторінках енциклопедії читач познайомиться з проблемами й питаннями теоретичної кібернетики — її математичного апарату, теорії систем, теорії інформації, основ і методів програмування, побудови алгоритмічних мов, теорії автоматів.

У статтях з економічної кібернетики розглянуто питання про застосування методів і засобів кібернетики для вивчення економічних систем і управління ними — створення економіко-математичних моделей, розв'язування задач розподілу, транспортних задач, створення автоматизованих систем управління підприємствами, галузями народного господарства, розробка і застосування методів наукової організації праці, методів наукового прогнозування і т. ін.

Велике місце в енциклопедії посідають статті з технічної кібернетики, які охоплюють питання автоматичного керування складними технічними системами і комплексами, автоматизації наукового експерименту, створення оптимальних систем керування технологічними процесами, оптимізації взаємодії людини і машин у складних системах керування, розробки методів і пристроїв керування.

В статтях з обчислювальної техніки подано відомості про принципи побудови та конструкцію технічних засобів кібернетики — електронних обчислювальних машин і моделюючих пристроїв. В енциклопедії описано майже всі вітчизняні й найважливіші зарубіжні обчислювальні машини.

У циклі статей з біологічної кібернетики й біоніки розглянуто проблеми, пов'язані з процесами керування біологічними системами — створення моделей мозку, моделей органів людини і регулюючих систем організму для лікування і профілактики

захворювань, створення і застосування засобів кібернетичної техніки для автоматизації встановлення діагнозу, вироблення оптимальних засобів лікування, перенесення досконалостей живої природи в технічні пристрої і засоби.

Велику групу статей присвячено питанням прикладної й обчислювальної математики, в них викладено найуживаніші методи обчислювання й розв'язування окремих класів математичних задач і дано рекомендації з оптимізації обчислювань.

Окремі цикли статей охоплюють філософські й соціологічні питання кібернетики, питання застосування її методів і засобів для автоматизації інформаційної роботи, лінгвістичних досліджень, програмованого навчання і т. ін.

Усього в двох томах ЕК вміщено близько 1800 статей, до значної більшості яких додано бібліографію. Статті енциклопедії ілюстровано середньомасштабними схемами, кресленнями, малюнками і кольоровими вклейками, що уявляють висвітлення найважливіших питань чи сфер застосування кібернетики.

ЕК розраховано на широкі кола фахівців з найрізноманітніших галузей науки, техніки й народного господарства, вона покликана стати також універсальним довідником для студентів і аспірантів фізико-математичних, технічних, економічних і медичних профілів. Енциклопедія має дати відповідь на найважливіші питання всім, хто тією чи іншою мірою займався проблемами і питаннями обробки інформації і керування чи управління, і тим, хто цим тільки-но зацікавився.

У створенні ЕК взяли участь (як автори, рецензенти і консультанти) понад 600 вчених та інших спеціалістів різних галузей народного господарства із 102 організацій, установ і підприємств Москви, Ленінграда, Новосибірська і союзних республік СРСР.

Головна редакція Української Радянської Енциклопедії і редакційна колегія ЕК складають щиро подяку Вченій раді та всьому колективу Інституту кібернетики АН УРСР, а також усім організаціям і особам, які брали участь у підготовці цього видання.

Редакційна колегія щиро вдячна акад. АН СРСР А. І. Бергу, А. О. Дороничину, Г. М. Марчуку, А. М. Тихонову; чл.-кор. АН СРСР А. П. Ершову, Ю. Л. Ершову, О. М. Льотову, Б. С. Сотскову, С. В. Яблонському; акад. АН Узб. РСР В. К. Кабулову, акад. АН Киргиз. РСР Ю. Є. Неболюбову, акад. АН Латв. РСР Е. О. Якубайтісу; чл.-кор. АН Ест. РСР Б. Г. Тамму та чл.-кор. АН Груз. РСР В. В. Чавчавідзе за науково-методичну допомогу, яку вони подали при підготовці Енциклопедії кібернетики.

Зауваження і побажання просимо надсилати на адресу: 252650, Київ-30, «ГСП», вул. Леніна, 51, Головні редакції Української Радянської Енциклопедії АН УРСР.



В Енциклопедії кібернетики статті розміщено за алфавітом. Назви статей подано переважно в одиниці («АЛГОРИТМ», а не «Алгоритми», «ПІДАВТОМАТ», а не «Підаватомати»); у множині — лише тоді, коли є необхідність висвітлити в одній статті узагальнений термін, прийнятий у науці («ІГРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ»), або коли стаття вміщує в собі кілька понять («АВТОМАТИ НЕСКІНЧЕННІ», «КАНАЛИ ЗВ'ЯЗКУ», «МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ»). Назви статей про російські періодичні видання подано російською мовою. Розміщено ці статті за українським алфавітом. Назви статей про іноземні й міжнародні організації та промислові об'єднання (федерації, корпорації, фірми тощо) подано в українській транскрипції.

Якщо назви статей складаються з іменника й прикметника, то на перше місце здебільшого поставлено іменник (напр., «СЛОВНИК АВТОМАТИЧНИЙ», а не «Автоматичний словник»). Прикметник ставиться на перше місце лише тоді, коли він разом з іменником становить єдине усталене поняття («ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД ПРОГРАМУВАННЯ») або коли на прикметник падає логічний наголос, що підкреслює специфічний зміст статті («КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗПІЗНАВАННЯ», «ЗАПАМ'ЯТУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ»).

У назвах деяких статей, що складаються з кількох слів, звичайний порядок слів змінено для того, щоб на початку стояли слова, головні за значенням («АНОТУВАННЯ АВТОМАТИЧНЕ», а не «Автоматичне анотування»). В статтях про методи або пристрої, названі за прізвищем людини, яка запропонувала цей метод чи пристрій, на першому місці стоїть прізвище цієї людини («ТЬЮРІНГА МАШИНА», «ПОСТА КОМБІНАТОРНА ПРОБЛЕМА»).

Назви статей набрано напівжирним шрифтом, великими літерами. Якщо назвою статті є науковий термін, що має один або кілька синонімів, то їх подано після назви статті розбивкою й відокремлено від основного терміна комою (напр., МАШИНИЙ ПЕРЕКЛАД, автоматичний переклад).

Як правило, в статтях, де згадано прізвище вченого, в дужках зазначено дату його народження і смерті. Усі дати подано за новим стилем.

Якщо назва статті потребує певного уточнення, то слово чи групу слів, які уточнюють цю назву, набрано після назви розбивкою (напр., АДРЕСА у п р о г р а м у в а н н і).

Щоб допомогти читачеві повніше ознайомитися з питанням, що його цікавить, а також запобігти зайвому повторенню матеріалу в споріднених статтях, в Енциклопедії застосовано систему посилань. Назву статті, на яку робиться посилання, набрано курсивом. В Енциклопедії вміщено ряд коротких статей-посилань, серед яких є: розширені посилання (з визначенням терміна), напр., ІНСТРУМЕНТАЛЬНА ПОХИБКА, приладова похибка, — похибка, що виникає внаслідок недосконалості вимірювальних приладів, розв'язувальних елементів або складових частин обчислювальних машин (див. *Похибка розв'язувального елемента, Похибка обчислювальної теорії*); зворотні посилання, спричинені зміною в основній статті порядку слів, прийнятого в Енциклопедії (напр., ІМОВІРНОСТЕЙ РОЗПОДІЛ — див. *Розподіл ймовірностей*); синонімічні посилання з термінів, що широко застосовуються в спец. літературі (напр., ЗОВНІШНЄ ОБЛАДНАННЯ — те саме, що й *зовнішні пристрої*, ІМОВІРІСНИЙ ПРОЦЕС — те саме,

що й випадковий процес); посилання з термінів на статті, в яких розкрито зміст цих термінів (напр., ІЕРАРХІЧНІСТЬ КЕРУВАННЯ — див. *Ієрархічні системи керування*). Систему посилань подано згідно з граф-схемами, складеними відповідно до кожного тематичного розділу Енциклопедії.

Знак наголосу у набраних чорним шрифтом термінах поставлено над наголошеними голосними в усіх словах (крім односкладових), які входять до назви статті. У складних словах позначено лише головний наголос (напр., БАГАТОПІЛЮСНИК КОНТАКТНИЙ). У словах, які вживаються з подвійним наголошенням, поставлено два наголоси.

Умовні позначення і скорочення застосовано, щоб заощадити місце. Окрім загальноприйнятих скорочень, ажито й скорочення, встановлені для Енциклопедії кібернетики (див. «Основні скорочення й умовні позначення», с. 9—10). Коли слова, що становлять назву статті, повторюються в її тексті, їх позначено початковими літерами. Наприклад: у статті «АВТОМАТ» — А., в статті «КОРЕЛЯЦІЙНА ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ» — К. т. в. п. Найменування величин і одиниць величин та їхні позначення, застосовані в Енциклопедії кібернетики, відповідають Міжнародній системі одиниць, запровадженій в СРСР з 1963 року.

Підтекстову бібліографію, як правило, наведено мовою видання. Середтекстову бібліографію зазначено українською мовою — незалежно від мови оригіналу. В дужках указано місце й рік видання. Періодичні російські й українські видання в тексті подано лише мовою оригіналу. Назви періодичних видань іншими мовами в тексті статті подано мовою оригіналу, а в дужках дано український переклад назви. Праці В. І. Леніна подано за українським перекладом з 4-го російського видання Творів та за українським перекладом Повного зібрання творів (5-го видання). Праці К. Маркса і Ф. Енгельса наведено за українським перекладом з 2-го російського видання Творів.

Важливим доповненням до статей служать ілюстрації: кольорові вклейки, текстові малюнки, графіки тощо. Кольорові вклейки подано до найважливіших статей. Текстові ілюстрації, як правило, вміщено поряд зі статтею. Якщо з технічних причин ілюстративний матеріал не вміщено поряд із статтею, то в кінці статті дано посилання на ту сторінку, де міститься відповідний ілюстративний матеріал (наприклад: «Іл. на с. 36» або «Іл. між с. 24—25»). Коли посилання дано на ілюстрації, які вміщено в інших статтях або в іншому томі, то зазначається лише назва статті, без номера тому і номера сторінки (напр.: «Іл. див. до ст. Дешифратор»).

Малюнки до ряду статей подано переважно на таблицях з відповідними підтекстовками. Коли підпису під малюнком не подано, то це означає, що сам текст статті є поясненням до цього малюнка.

|                  |  |                       |   |                       |                          |
|------------------|--|-----------------------|---|-----------------------|--------------------------|
| <b>А</b>         | ангстрем (з числом)                          | <b>ДЗП</b>            | довготочасний                           | <b>коб</b>            | коефіцієнт корисної      |
| <b>а</b>         | ампер (з числом)                             |                       | запам'ятовувальний                      |                       | дії                      |
| <b>абс</b>       | абсолютний                                   |                       | пристрій                                | <b>км</b>             | кілометр (з числом)      |
| <b>абс. од.</b>  | абсолютна одиниця                            | <b>лєрн.</b>          | державний                               | <b>км<sup>2</sup></b> | квадратний кілометр      |
| <b>абш.</b>      | абш.   | <b>дма</b>            | дма                                     |                       | (з числом)               |
| <b>авіац.</b>    | авіаційний                                   | <b>дмс</b>            | дмс                                     | <b>км<sup>3</sup></b> | кубичний кілометр        |
| <b>автомат</b>   | автоматичний                                 | <b>дм</b>             | дм                                      |                       | (з числом)               |
| <b>АІМ</b>       | амплітудно-імпульс-                          | <b>дм<sup>2</sup></b> | дециметр (з числом)                     | <b>км/сек</b>         | кілометрів на секунду    |
|                  | на мо. уляція                                |                       | квадратний дециметр                     |                       | (з числом)               |
| <b>акад.</b>     | академік                                     |                       | (з числом)                              | <b>км/год</b>         | кілометрів на годину     |
| <b>алгебр.</b>   | алгебраїчний                                 | <b>дошк.</b>          | дошка                                   |                       | (з числом)               |
| <b>АМ</b>        | амплітуда                                    | <b>д-р</b>            | доктор                                  | <b>коэф.</b>          | коефіцієнт               |
|                  | мо. уляція                                   | <b>е</b>              | екстед (з числом)                       | <b>КОМ</b>            | керуюча                  |
| <b>амер.</b>     | американський                                |                       | електрон-вольт                          |                       | обчислювальна            |
| <b>англ.</b>     | англійський                                  |                       | (з числом)                              |                       | машина                   |
| <b>АН СРСР</b>   | Академія наук СРСР                           | <b>енон.</b>          | енонічний                               | <b>коорд.</b>         | координати               |
| <b>АН УРСР</b>   | Академія наук УРСР                           | <b>екстрем.</b>       | екстремальний                           | <b>КП</b>             | керуючий пристрій        |
| <b>АОМ</b>       | авіаційна обчислювальна машина               | <b>електр.</b>        | електричний                             | <b>к-т</b>            | комітет                  |
|                  |  | <b>ЕОМ</b>            | електронна обчислювальна машина         | <b>л</b>              | літр (з числом)          |
| <b>АП</b>        | арифметичний пристрій                        |                       | ерг (з числом)                          | <b>лат.</b>           | латинський               |
| <b>АПЧ</b>       | автоматичне підтримання частоти              | <b>ерс</b>            | електро-рушійна сила                    | <b>літ</b>            | література, літературний |
|                  |  | <b>ерс</b>            | експонента                              | <b>лж</b>             | ложка (з числом)         |
| <b>арб.</b>      | арбітрний                                    | <b>ЕЦОМ</b>           | електронна цифрова обчислювальна машина | <b>лм</b>             | логарифм.                |
| <b>а-сек</b>     | ампер-секунда (з числом)                     |                       | світлоїсський                           | <b>логіч.</b>         | логічний                 |
| <b>асинхр.</b>   | асинхронний                                  | <b>вароп.</b>         | варіаційний                             | <b>м</b>              | метр (з числом)          |
| <b>АСУ</b>       | автоматизована система управління            | <b>заг.</b>           | загальний                               | <b>м<sup>2</sup></b>  | квадратний метр          |
|                  |  | <b>заг.зашч.</b>      | загальний                               | <b>м<sup>3</sup></b>  | кубичний метр            |
| <b>АСУП</b>      | автоматизована система управління            | <b>завк.</b>          | заводський                              |                       | (з числом)               |
|                  |  | <b>ЗЗП</b>            | запам'ятовувальний                      | <b>м/сек</b>          | метрів на секунду        |
| <b>біол.</b>     | біологічний                                  |                       | пристрій                                | <b>м/год</b>          | метрів на годину         |
| <b>бл.</b>       | близько (з числом)                           | <b>ЗП</b>             | запам'ятовувальний                      |                       | (з числом)               |
| <b>буд.</b>      | будівельний                                  | <b>зх</b>             | запам'ятовувальний                      | <b>ма</b>             | мега                     |
| <b>в</b>         | вольт (з числом)                             | <b>зх. див. с.</b>    | запам'ятовувальний                      | <b>магн.</b>          | магнітний                |
| <b>в т. ч.</b>   | в тому числі                                 |                       | ма                                      | <b>макс.</b>          | максимальний             |
| <b>ва</b>        | вольт-ампер (з числом)                       | <b>им</b>             | імпульс                                 | <b>матем.</b>         | математичний             |
|                  |  | <b>бок.</b>           | боксер (з прізвищем)                    |                       | (з терміном)             |
| <b>в-сек</b>     | вольт-секунда (з числом)                     | <b>ін-т</b>           | інститут                                | <b>маш</b>            | машинний                 |
|                  |  | <b>інтегр.</b>        | інтегральний                            | <b>маш-буд.</b>       | машинобудівний           |
| <b>верх.</b>     | верхній                                      | <b>ІПС</b>            | інформаційно-документна система         | <b>ма</b>             | мільвольт (з числом)     |
| <b>вип.</b>      | випуск                                       | <b>к</b>              | кулон (з числом)                        | <b>мг</b>             | міліграм (з числом)      |
| <b>виробн.</b>   | виробництво                                  | <b>канд.</b>          | кандидат                                | <b>Мгц</b>            | мегагерц (з числом)      |
| <b>вис.</b>      | висота                                       | <b>капіталістич.</b>  | капіталістичний                         | <b>Мев</b>            | мегаелектрон-вольт       |
| <b>військ.</b>   | військовий                                   | <b>ка.</b>            | кавалерійський                          |                       | електрон-вольтів         |
| <b>внутр.</b>    | внутрішній                                   | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          |                       | (з числом)               |
| <b>вт</b>        | ват (з числом)                               | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мед.</b>           | медичний                 |
| <b>вт-год</b>    | ват-година (з числом)                        | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>метод</b>          | методичний               |
| <b>вт-сек</b>    | ват-секунда (з числом)                       | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мех</b>            | механічний               |
|                  |  | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>міннар.</b>        | мінеральний              |
| <b>г</b>         | грам маси або ваги (з числом)                | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мікроскоп.</b>     | мікроскопічний           |
| <b>гс. або Г</b> | грам сили (з числом)                         | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          |                       | міліметр                 |
| <b>г-во</b>      | гравітація                                   | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>геом.</b>     | геометричний                                 | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр, те, що        |
| <b>ГЕС</b>       | гідроелектростанція                          | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>гн</b>        | генератор (з числом)                         | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>год</b>       | година                                       | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>гол. чин.</b> | головним чином                               | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>госп.</b>     | господарський                                | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>°С</b>        | градус стоградусної шкали Цельсія (з числом) | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
|                  |  | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>°К</b>        | градус абсолютної шкали Кельвіна (з числом)  | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
|                  |  | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>грец.</b>     | грецький                                     | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |
| <b>гц</b>        | герц (з числом)                              | <b>кад.</b>           | кавалерійський                          | <b>мкс</b>            | мікрометр (з числом)     |

[illegible]



**АБСТРАКТНА ТЕОРІЯ АВТОМАТІВ** — напрям в автоматній теорії, який характеризується тим, що, вивчаючи автомати, абстрагуються від їхніх структурних особливостей. За такого підходу внутр. станів автомата, його вхідні й вихідні сигнали розглядають як певні абстрактні символи, що утворюють відповідно алфавіти:  $Q$  (внутр.),  $X$  (вхідний) і  $Y$  (вихідний).  $X$  і  $Y$  вважають за скінченні алфавіти,  $Q$  — за загальному випадку нескінченний. Автомат детермінований визначають як п'ятірку  $\Pi = \langle Q, X, Y, \Psi, \Phi \rangle$ , де  $\Phi$  — цін функцій переходів  $\Psi$  відображує  $Q \times X$  в  $Q$ , а  $\Psi$  — функція виходів  $\Phi : Q \times X \rightarrow Y$ . Автомат недетермінований визначають аналогічно, але з тією лише різницею, що  $\Psi$  і  $\Phi$  можуть бути багатозначними функціями. Якщо ж визначають автомат ймовірнісний, то під  $\Psi$  і  $\Phi$  слід розуміти матриці переходних і вихідних ймовірностей, тобто функції, що відображують  $Q \times X \times Q$  і  $Q \times X \times Y$  у числовий проміжок  $(0,1)$  і мають відповідно сенс:  $\Psi(q_i, x_j, q_k)$  — ймовірність того, що вхідний символ  $x_j$  переводить стан  $q_i$  в стан  $q_k$ , а  $\Phi(q_i, x_j, y_r)$  — ймовірність того, що при вхідному символі  $x_j$  і внутр. стані  $q_i$  буде вироблено вихідний символ  $y_r$ .

Наведені поняття дуже загальні й неконструктивні в разі, коли  $Q$  — нескінченний. Вужчі класи можна виділити, накладши різні обмеження на компоненти  $Q, X, Y, \Psi, \Phi$ . Оскільки ці обмеження не формують у структурних термінах, то вони стосуються гол. чин. потужності алфавітів (напр., якщо  $Q$  скінченний, то й автомат наз. скінченним) або заг. властивостей функцій  $\Psi$  і  $\Phi$ . З рази виводження, коли той чи ін. алфавіт складається з одного символа. Зручніше розглядати модифіковані визначення, що їх одержують, видаливши з відповідних компонент. Напр., детермінований автомат без виходу — це трійка  $\langle Q, X, \Psi \rangle$ , де  $Q, X$  і  $\Psi$  мають попередній сенс, ймовірнісний автомат автономний — це пара  $\langle Q, \Psi \rangle$ , де  $\Psi$  — матриця переходних ймовірностей для станів з  $Q$  (тобто такий автомат є ланцюгом Маркова).

В А. т. а. вивчають переважно такі концепції поведінки (див. *Поведінка автомата*), у яких словами, що їх перетворюють або приймають автомати, є слова, зображені алфавітом  $X$  (вхідні слова), а результатами перетворення чи породження є слова, зображені алфавітом  $Y$  (вихідні слова). Здебільшого це — реалізація операторів в автоматі й представлення множин слів за реальний час. Через надмірну загальність і неконструктивність згаданих понять автомата, навіть у разі детермінованих автоматів, реалізовуваних яким оператором (представлювані множини) можуть виявитися неефективними. В А. т. а. осн. конструктивними об'єктами, що їх вивчають, є *автомати скінченні* та реалізовані яким оператором й представлювані ним множини (скінченно-автоматні оператори й множини). В А. т. а. широко застосовують методи й поняття алгебри, ле-



жких математичної та алгоритмічної теорії. Центр. проблемами А. т. а. є проблеми синтезу й аналізу та пов'язана з ними теорія експериментів з автоматами. Ці проблеми виникли в практичних завданнях конструювання та експлуатації обчислювальної техніки й набули великого теоретичного розвитку.

Аналіз і синтез автомата в А. т. а. Проблема синтезу полягає в пошуку й побудові автомата, виходячи від вимог, що їх ставлять до реалізованого ним оператора чи до представленої ним множини, причому в А. т. а. год. чин. мають на увазі реалізацію чи представлення за реальний час. Здебільшого припускають, що ці вимоги викладено досить чіткою й формалізованою мовою (т. в. мова замовника), напр. у вигляді формули  $\mathcal{M}$  цієї мови. Крім того, вважають, що шуканий автомат належить до наперед окресленого класу автоматів, які допускають конструктивне описування. Формальну мову, що її засобами здійснюють це описування (мова виконавця), також вважають заданою. Коли йдеться про скінченні автомати, описування автомата, звичайно, полягає в представленні його системи команд через графічне або табличне задання функцій  $\Psi$  і  $\Phi$  (матриці переходних і вихідних ймовірностей, якщо автомат ймовірнісний). Побудований наслідком абстрактного синтезу автомат можна використати надалі як первісний матеріал на етапі синтезу автомата структурного. В межах заг. проблеми абстрактного синтезу виникають окремі вужчі проблеми: 1) І с я в а н и я. Чи існує оператор, який задовольняє умову, виражену ф-лою  $\mathcal{M}$ , і який можна реалізувати (можливе представлення) в автоматі обумовленого типу? 2) С д л и н і с т ь. Чи єдиний цей оператор? 3) К о н с т р у к ц і я. Для якого-небудь оператора, що задовольняє умову  $\mathcal{M}$ , побудувати автомат, який його реалізує, й зазначити відповідне налаштування: початковий стан і заключні стани, а в разі ймовірнісного автомата — допустимий рівень надійності. 4) М і н і м і з а ц і я. Побудований автомат  $\mathcal{M}$  звести за допомогою еквівалентних перетворень до еквівалентного йому автомата, який задовольняє певні критерії оптимальності. Напр., якщо автомати скінченні, — мінімізувати кількість станів склеюванням нерозрізнених станів і усуненням недосяжних станів.

Розв'язування зазначених проблем уявляють у вигляді алгоритмів, які за заданою формулою  $\mathcal{M}$  подають відповіді на запитання

1) — 2) й здійснюють потрібні конструкції та перетворювання для проблем 3) — 4). Відповідна теорія істотно залежить від мов, що їх застосовує замовник; як мову виконавця здебільшого розглядають різні класи автоматичних діаграм. Вибираючи мову замовника, природно керуватися такими двома (антагоністичними) вимогами: 1) щоб мова була зразковою, щоб замовникові було зручно викласти неш умови, поставлені до поведінки проектуваного автомата, і 2) щоб алгоритми, які розв'язують проблему синтезу загалом і окремі її задачі, були прості (аналогія: в теорії програмування — виразність вхідної мови й простота транслятора). Цю ситуацію докладно досліджено щодо скінченних автоматів. З погляду простоти алгоритмів переваги надають алгебр. мовам (див. *Регулярні мови та вирази*). Виразнішими є мови, основані на застосуванні фрагментів логіки предикатів (див. *Мова логічна для задавання автомата*), але й алгоритми синтезу для них стають громіздкими.

Проблема аналізу є оберненою проблемі синтезу: за заданим автоматом потрібно описати його поведінку засобами мови замовника. В істотно розумінні аналіз і синтез можна розглядати як переклади в однієї мови на іншу, причому переклад, який відповідає аналізу, здебільшого простіший. Розроблено багато алгоритмів синтезу й аналізу гол. чин. для скінченних детермінованих автоматів. Як складова частина алгоритму синтезу детермінованого автомата до нього часто входить побудова недетермінованого автомата з наступним перетворенням його на еквівалентний йому детермінований автомат. Розробляючи алгоритми абстрактного синтезу з застосуванням логіч. мов виявилось пов'язаним з деякими алгоритм. проблемами матем. логіки й сприяло розв'язанню їх.

Експерименти й синтез. Нехай є детермінований автомат ініціальний  $\langle X, q_0 \rangle$ , що відомий експериментаторові або (за деяких ін. постановок) відома лише якась верхня оцінка для кількості станів автомата  $X$ . Припускають, що в цій «чорній ящику» можна експериментувати в тому розумінні, що можна подавати вхідні слова й спостерігати відповідні вихідні слова. Завдання полягає в тому, щоб організувати експеримент, який дав би змогу одержати корисну інформацію про поведінку «чорного ящика», тобто про оператор  $T(X, q_0)$ , який цей «ящик» реалізує за реальний час; у кращому випадку — побудувати автомат, еквівалентний  $\langle X, q_0 \rangle$ , або принаймні встановити які-небудь характеристики властивості оператора  $T(X, q_0)$ . Це завдання пов'язане й з проблемою абстрактного синтезу в такій ситуації, що часто буває в інженерній практиці (див. *Мова анкетна для задавання автомата*). Замовник задумав цілком певний оператор, який має реалізувати проектуваний автомат, проте він не може описати цей оператор мовою виконавця. В такому разі виконавець намагається відповідним опитуванням замовника (що виступає тут у ролі

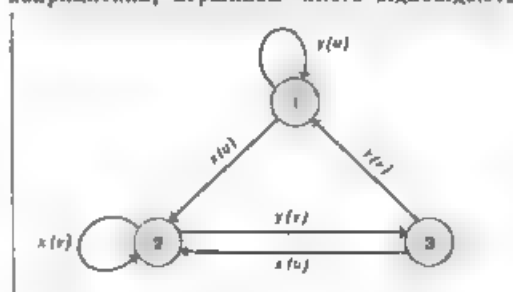
«чорного ящика») розгадати задуманий ним оператор. Ось, результати належать до експериментів із скінченними автоматами. Останнім часом деяких успіхів досягнуто й у теорії класів нескінченних автоматів.

Для скінченних автоматів  $\langle X, q_0 \rangle$  є алгоритми експериментування, який за наявності верх. оцінки для кількості станів автомата  $X$  повністю встановлює (розшифровує) його поведінку, тобто буде автомат, еквівалентний «чорному ящику». Якщо ж експериментатор не має такої верх. оцінки, то алгоритм розшифровування неможливий; проте й у цій ситуації розроблено процедуру (їх називають частковими алгоритмами розшифровування), які для переважної більшості «чорних ящиків» (якщо розумно визначити «більшість») все ж встановлюють поведінку. В теорії експериментів встановлено й достатньо оцінки складності алгоритмів розшифровування (напр., оцінку довжини вхідних слів, для яких потрібно вести спостереження). Якщо алгоритм розшифровування частотні, вони істотно залежать від того, з якою частотою гарантується правильне розшифровування. Ці результати ґрунтуються на докладних оцінках параметрів і спектрів поведінки.

Ігри автоматів. В А. т. а. значають і *автоматні ігри*. На відміну від класичної теорії, в якій гравці наперед знають наслідки тих чи ін. дій (своїх і супротивникових), тут запропоновано дослідити ситуацію, коли учасники гри — автомати — не мають такої апріорної інформації. Виявилось, що можна побудувати такі скінченні автомати, які успішно діють і в цій ситуації. Результати такого роду успішно інтерпретуються в термінах доцільної поведінки одного індивідуума чи колективу.

Лит. Глушков В. М. Синтез цифрових автоматів. М., 1962 [Діалог, с. 464—469]; Бюха Д. Р. О разрешении задачи для ограниченной арифметики второго порядка. В кн. Интерметрический сборник, т. 8 М., 1964 [Летим М. П. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., 1969 [Діалог, с. 308—316]; Трахтенброт В. А., Барздяк Н. М. Конечные автоматы (Поведение в синтезе). М., 1970 [Діалог, с. 369—385]. В. А. Трахтенброт

**АБСТРАКТНОГО АВТОМАТА ГРАФ** — граф



Граф переходів автомата.

станів автомата, а дугам — вхідні сигнали. Якщо вхідний сигнал  $x_i$  викликає перехід автомата зі стану  $a_j$  в стан  $a_k$ , то на гра-

фі автомата цьому сигналові відповідає позначена буквою  $z_i$  дуга, що з'єднує вершину  $a_i$  з вершиною  $a_{i+1}$ . Такий граф задає ф-цію переходів автомата. Щоб задати ф-цію виходів, дуги цього графа позначають ще й відповідними вихідними сигналами (мал.). Задання автомата за допомогою графа в особливо наочним при незначній кількості його станів.

С. С. Герасименко

**АБСТРАКЦІЯ АКТУАЛЬНОЇ НЕСКІНЧЕНОСТІ** — одна з основних абстракцій математики й логіки. Полягає в абстрагуванні від незавершеності (й незавершності) процесу побудови нескінченної множини А. а. н. дає змогу розглядати нескінченні множини, напр., нескінченні числові множини натуральних, цілих, дійсних і т. д. чисел, які побудовані (існуючі) об'єкти, незалежно від процесу утворення всіх їхніх елементів. При цьому може існувати спосіб побудови довільного елемента такої множини, але напевно не існує способу побудови нескінченної множини як даної відразу всіма своїми елементами. Перетворюючи нескінченні множини на допустимі, існуючі об'єкти (існуючим вважаючи будь-який об'єкт, визначення якого не примушує до логічних суперечностей), А. а. н. відкриває цим шлях до такого вивчення їх, у якому використовують засоби логіки (зокрема, виключеного третього закону), відпрацьовані на скінченних множинах. А. а. н. становить ідейну основу ланкою теорії й математики, що ґрунтується на ній, т. з. класичної математики і класичної логіки. Проте цю абстракцію відкидають прихильники інтуїціонізму й представники конструктивізму. Для конструктивістів неприйнятним є механістичний характер об'єктів, що їх виводять за допомогою А. а. н., і вони розвивають таку побудову математики й логіки, яка не використовує А. а. н.

Літ.: Кантор Г. Основи общего учения о многообразиях. Вия Новизне идеи в математике. Сб. 24. 4. СПб., 1914. Богомолов С. А. Актуальная бесконечность. Т. 1. М., 1934. Петр. в Ю. А. Логические проблемы абстракции бесконечности и осуществимости. М., 1967 (библиогр. с. 160—162).

В. В. Бирюков, Ю. О. Петров.

**АБСТРАКЦІЯ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЗДІЙСНУВАННОСТІ** — одна з абстракцій математики й логіки, що полягає в абстрагуванні від реальних меж конструктивних можливостей, вумовлених обмеженістю нашого життя в просторі, в часі та в матеріалах. А. п. з. дає змогу розглядати об'єкти, не враховуючи можливості реалізації їх (напр., не враховуючи засобів, потрібних для цього, місця, часу тощо), а беручи до уваги лише можливість побудування їх у тому розумі, чин, що є ефективний (конструктивний) спосіб (алгоритм) для такого побудування. В межах А. п. з., напр., послідовність натуральних чисел є потенційно здійсненним об'єктом, бо неважко задати індуктивне визначення, яке породжує будь-яке натуральне число. Але множина всіх натуральних чисел не є потенційно здійсненним об'єктом, бо її не можна побудувати

в межах А. п. з.: неможливий ефективний спосіб побудування всіх разом натуральних чисел. А. п. з. лежить в основі поняття потенційної нескінченності такого дискретного процесу, що коли з потенційної здійсненності якогось кроку процесу побудування об'єкта випливає потенційна здійсненність наступного (безпосередньо) кроку, то потенційно здійсненням є будь-який крок процесу (отже, відоме правило повної індукції передбачає А. п. з.). Конструктивна математика та конструктивна матем. логіка, відкидаючи абстракцію актуальної нескінченності, визнають А. п. з. Хоч А. п. з. — природна передумова багатьох розділів теор. кібернетики, в теор. кібернетиці будують і теорії, що в тій чи іншій формі обмежують цю абстракцію, бо в дійсних кіберн. системах неможливі потенційно нескінченні процеси. Літ.: Шаляк Н. А. О конструктивном понимании математических суждений. Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1958, т. 52. Козмиджак В. А. О конструкциях, разрешимых и разрешимых автоматах. В кн. Проблемы логики. М., 1964. Петров Ю. А. Логические проблемы абстракции бесконечности и осуществимости. М., 1967 (библиогр. с. 160—162).

В. В. Бирюков, Ю. О. Петров.

**АВТОКОД** — мови програмування, орієнтована на конкретну обчислювальну машину. З усіх їх машина-орієнтованих мов А. є формою й за змістом найбільшій до мов машинних команд, тобто до мови, яку безпосередньо інтерпретує машина. А. дає змогу використовувати при програмуванні всі можливості мови машинної. Але при цьому треба знати операції машини, формати й функції машинних команд, формати даних, способи адресації пам'яті ЦОМ та ін. особливості архітектури машини. А. дає адекватні засоби для записування машинних команд і даних та засоби для описування допоміжних ф-цій, корисних при готуванні та документуванні програм. Програма, написана А., є осмисленою для програміста, ніж програма, написана машинною мовою. Трансляцію програм з А. на машинну мову здійснює асемблер. Незважаючи на те, що А. є якоюсь мірою специфічною для кожної машини (в ній враховано її особливості), заг. структура мови зберігається в усіх А. Основу мови становить набір мнемонічних символів, призначених для задавання всіх машинних операцій та операцій, виконуваних асемблером. Крім того, ця мова допускає конструкції, що дають можливість у командах посилатися на операції, використовуючи при цьому мітки, які в машинних командах і командах асемблера.

Зручність А. значною мірою залежить від набору допоміжних ф-цій, які властиві асемблерові і задаються командами його. Команди дають змогу визначати дані в допустимих представленнях, резервувати ділянки пам'яті, визначати мітки як значення виразів, указувати вхідні й вихідні мітки програми для сегментації та незалежної трансляції програм, керувати присвоєнням адрес і задавати правила документування програми. Щоб написати програму автокодом, адебілішого викори-

стовують бланк, у якому записують поля для мітки, операції, операндів, коментаря і поле ідентифікації рядка. На кожному рядку бланка має бути записано А. одне речення. Розширення А. можна досягти, використавши макрокоманди, які позначають групу дій, що їх задає користувач у макровизначеннях. А. становлять основу *математичного забезпечення ЦОМ* і, як правило, їх використовують, щоб створити *операційні системи* і *транслятори* та прикладні програми, що ставлять особливі вимоги до ефективного використання можливостей машин.

Ю. М. Балановський.

**АВТОКОЛИВАННЯ** — стійкі незгадуючі коливання, що виникають у нелінійних динамічних системах внаслідок інерційних і нелінійних властивостей системи, і коли немає зовнішніх періодичних впливів. А. характерні тим, що їхня амплітуда не залежить від зміни в певних межах початкових умов системи. Системи, в яких відбуваються А., наз. автоколеблювальними.

Нелінійну динамічну систему описують диференціальним або різницевим рівнянням

$$\dot{X}(t) = F[X(t)] \quad (1)$$

або

$$X_{n+1} = \Phi(X_n), \quad (2)$$

де  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ ;  $X_n = X(t_n) = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n})$  — вектори фазових координат, що однозначно визначають динамічні стани неперервної та відповідно дискретної систем. У режимі А. має місце співвідношення  $X(t) = X(t+T)$  або  $X_n = X_{n+N}$ , де  $T$  і  $N$  — відповідно періоди А. неперервної і дискретної систем.

У фіз. системі А. можливі лише тоді, коли надходження енергії від її джерела за період дорівнює втраті (розсіянню) енергії за той самий час. Ця умова балансу енергії є умовою існування А.

У нелінійній системі з нестійким положенням рівноваги А. виникають самовільно слідо за виникненням системи. В системах із стійким у певній області положенням рівноваги для збудження А. потрібне зовн. початкове відхилення фазових координат від їхніх значень у положенні рівноваги.

Автоколеблювальні системи дуже поширені в радіотехніці (для побудови генераторів коливань), в автомат. регулюванні (для створення в браційних регуляторах), у цифровій обчисл. техніці (в схемах *мультиімбраторів*), у технічній кібернетичі (для побудови автоколебувальних екстремальних систем керування й самоналаджуваних систем) тощо. Для багатьох систем автомат. регулювання А. є шкідливими й недопустимими, щоб усунути їх, у систему вводять різні коректувальні ланки, які змінюють динамічні й статичні властивості системи.

Д.м. Харкевич А. А. Автоколебания. М., 1954 [Бібліогр. с. 169-170]. Андронов А. А., Витт А. А., Хаїкин С. Э. Теория колебаний. М., 1959 [Бібліогр. с. 905-912]. В. М. Кукученко.

**АВТОКОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ** — функція, що характеризує ступінь зв'язку між двома значеннями випадкового процесу  $x(t)$  у моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ .

Для комплексного випадкового процесу  $x(t)$  А. ф. визначають так:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M \{ [x(t_1) - m_x(t_1)] [x(t_2) - m_x(t_2)]^* \}$$

(риска вгорі означає комплексно-спряжену ф-цію). Для дійсного випадкового процесу

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M \{ [x(t_1) - m_x(t_1)] [x(t_2) - m_x(t_2)] \}, \quad (1)$$

де  $M$  — знак матем. сподівання,  $m_x(t) \rightarrow$  матем. сподівання процесу  $x(t)$ .

А. ф. можна виразити через двовимірний диференціальний закон розподілу (двовимірну сумісну щільність ймовірності)  $p[x(t_1), x(t_2)]$  випадкових величин  $x(t_1)$  й  $x(t_2)$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)] [x(t_2) - m_x(t_2)] p[x(t_1), x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2).$$

З А. ф. можна робити висновки про вплив одного значення випадкової ф-ції  $x(t_1)$  на друге  $x(t_2)$  і характеризувати мілілізність випадкової ф-ції.

В заг. випадку А. ф. залежить від значень двох аргументів  $t_1$  і  $t_2$ . Для стаціонарних у широкому розумінні процесів А. ф. залежить лише від різниці цих аргументів  $\tau = t_2 - t_1$ , тобто  $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau)$ .

Якщо  $x(t)$  — нормальна випадкова ф-ція, то для її повного опису досить знати матем. сподівання  $m_x(t)$  й кореляційну ф-цію  $R_{xx}(t_1, t_2)$ .

Під час практичних досліджень часто використовують нормовані А. ф.

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{R_{xx}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_{xx}(t_1, t_1) R_{xx}(t_2, t_2)}}$$

А. ф. має ряд важливих властивостей 1) Якщо  $t_1 = t_2 = t$ , тоді дорівнює дисперсії випадкової ф-ції  $x(t)$  й характеризує її середню потужність  $D_{xx}(t) = R_{xx}(t, t)$ ; 2) Для комплексної випадкової функції  $x(t)$   $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}^*(t_2, t_1)$ , а для стаціонарного випадку  $R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau)$ . Якщо  $x(t)$  — дійсна ф-ція, то останній вираз можна переписати відповідно

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2, t_1); R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

3) А. ф. є спадною ф-цією

$$|R_{xx}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1) R_{xx}(t_2, t_2)}$$

а для стаціонарного випадку

$$R_{xx}(0) = D_{xx} \geq R_{xx}(\tau)$$



4) Для широкого класу випадкових процесів

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} |R_{xx}(t_1, t_2)| \rightarrow 0.$$

Для ергодичного випадкового процесу А. ф. можна обчислювати за однією реалізацією (див. *Ергодична теорія*); при цьому

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \{ [x(t) - m_x][x(t - \tau) - m_x] dt$$

Для скінченної тривалості реалізації  $x(t)$  можна одержати лише оцінку А. ф., обчислювану як

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [x(t) - m_x][x(t - \tau) - m_x] dt,$$

де  $T_p$  — тривалість реалізації. Завдяки розвитку цифрових та імпульсних систем почали широко використовувати т. з. дискретні А. ф. дискретного випадкового процесу  $x(nT)$ . Тут  $T$  — інтервал дискретності, а  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  — дискретний час. Дискретні А. ф. подібно (1) визначаються як

$$R_{xx}(t_1 T, t_2 T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t_1 T) - m_x(t_1 T)][x(t_2 T) - m_x(t_2 T)] p(x(t_1 T), x(t_2 T)) dx(t_1 T) dx(t_2 T)$$

і мають властивості, аналогічні властивостям неперервних А. ф. Див. також *Випадкові процеси* теорія, *Кореляційна теорія випадкових процесів*. Б. Ю. Мандроський-Соколов. **АВТОМАТ** (від грец. αὐτός — самодіючий) — 1) пристрій, що виконує якийсь процес без безпосередньої участі людини. Появу А. відносять до глибокої давнини. Це були в основному годинники та різні мех. іграшки, яким надавали форми людини чи тварин. З 2-ї пол. 18 ст. А. почали широко застосовувати в пром-сті. До недавня А. будували, щоб замінити ними людину при виконанні фіз. праці. В 40—50-х рр 20 ст виникли А., що виконують деякі види розумової праці. Це різні автомат. обчисл. машини та ін. кібернетичні пристрої. Застосування А. значно підвищує продуктивність праці, швидкість і точність виконання операцій. А. застосовують ще й для того, щоб звільнити людину від стомливої, одноманітної праці, уберегти її від умов, небезпечних для життя чи шкідливих для здоров'я; використовують їх і там, де присутність людини неможлива (висока т-ра, тиск, прискорення тощо). Тепер А. широко застосовують в усіх галузях нар. г-ва, вони є основою тех. прогресу (див. *Кібернетика* технічна, *Цифрова обчислювальна машина*).

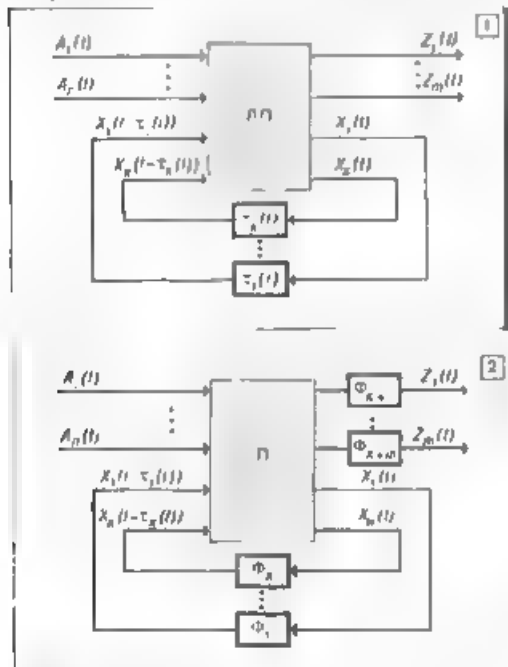
2) Матем. поняття, *модель математична* реальних (технічних) А. Абстрактно А. можна представити як певний пристрій («чорний ящик»), що має скінченну кількість вхідних і вихідних каналів і певну множину внутр.

станів. На вхідні канали А. ззовні надходять сигнали, й залежно від їхнього значення та від того, в якому стані перебуває А., він переходить у наступний стан і видає сигнали на свої вихідні канали. З часом вхідні сигнали змінюються, відповідно змінюються й стани А. та його вихідні сигнали. Отже, А. функціонує в часі (див. *Автоматичне керування теорія*, *Автоматизація теорія*). У вузькому розумінні термін А. вживають для позначення т. з. синхронних дискретних А. Такі А. мають скінченні множини значень вхідних і вихідних сигналів, що їх наз. вхідними і вихідними алфавітами. Час поділено на проміжки однакової тривалості (такти); протягом усього такту вхідний сигнал, стан і вихідний сигнал не змінюються. Зміни відбуваються лише на межах тактів. Отже, час можна вважати за дискретний  $t = 1, 2, \dots, n$ . Такі А. формально описують п'ятіркою  $A = (X, Y, Q, \delta, \lambda)$ , де  $X$  і  $Y$  — відповідно вхідний і вихідний алфавіти,  $Q$  — множина станів  $\delta: X \times Q \rightarrow Q$  — ф-ція переходів  $\lambda: X \times Q \rightarrow Y$  — ф-ція виходів. За кожний такт часу А. перебуває в одному з станів, і на його вхід надходить певна буква алфавіту  $X$ . Якщо в такт  $t$ , на вхід А. надходить буква  $x_t \in X$  і А. перебуває в стані  $q \in Q$ , то значення виходу в цьому самому такті дорівнює  $\lambda(x_t, q)$ . І в наступному такті А. перебуватиме в стані  $\delta(x_t, q)$ . За  $n$  тактів роботи А. перетворить послідовність вхідних букв довжини  $n$  на послідовність вихідних букв тієї самої довжини, тобто А. визначить певне відображення множини послідовностей вхідних букв на множини послідовностей вихідних букв. Див. також *Автоматизація теорія автоматів*. М. І. Кратко.

**АВТОМАТ АВТОНОМНИЙ** — автомат, функціонування якого не залежить від поданих на його вхід букв. У цьому розумінні кажуть, що А. а. є автоматом без входів. Формально А. а. — це четвертка  $(Q, Y, \Phi, \Psi)$  й функціонування його визначається рекурентними співвідношеннями:  $q(t+1) = \Psi[q(t)]$ ,  $y(t) = \Phi[q(t)]$ . Нескінченним А. а. є *Тьюрінга машина*, коду множину всіх її конфігурацій розглядають як множину станів даного автомата. Якщо А. а. є *автоматом скінченним*, то його вихідна послідовність — періодична, причому період не перевищує числа станів. Див. *Поведінка автоматів*. М. І. Кратко.

**АВТОМАТ АСИНХРОННИЙ** — математична модель пристрою для переробки послідовностей вхідних дискретних сигналів  $A_1(t), \dots, A_n(t)$  на послідовності вихідних дискретних сигналів  $Z_1(t), \dots, Z_m(t)$ . При цьому вважають, що чергова зміна значень вхідних сигналів відбувається лише тоді, коли в А. а. закінчиться перехідний процес, викликаний попередньою зміною цих сигналів. Схему А. а. можна побудувати лише на безінерційних логічних елементах ЦОМ. Але для зменшення кількості логічних елементів до схеми його здебільшого додають затримки — елементи, кожен з яких здійснює зсування сигналу, що

подається на його вхід. Найпоширенішу схему А. а. показано на мал. 1. У цій схемі  $A_1(t), \dots, A_n(t)$  — вхідні,  $X_1(t), \dots, X_k(t)$  — проміжні,  $Z_1(t), \dots, Z_m(t)$  — вихідні сигнали. Вел. в безінерційних логічних елементах зібрано в логічному перетворювачі (ЛП). Затримки  $\tau_1(t), \dots, \tau_k(t)$  вивнесено окремо. У заг. випадку величина кожної затримки є випадковою ф-цією часу з обмеженням:  $t_{\max} > \tau_1(t) > 0$ , де  $i = 1, \dots, k$ ;  $t_{\max}$  — задана



1. Схема асинхронного автомата без затримки на виході.  
2. Схема асинхронного автомата з затримкою на виході.

гранична величина. Іноді в А. а. вважають, що  $\tau_i(t) = \text{const}$ . Оскільки практично безінерційних логічних елементів немає, то найпоширенішою є схема, наведена на мал. 2. У цій схемі перетворювач ЛП являє собою з реальних логічних елементів, кожен з яких виконує певне логічне перетворення і жує на  $\tau_i(t)$  сигнал, одержаний внаслідок цього перетворення. У заг. випадку величина розглядуваного зсуву є випадковою ф-цією часу з обмеженнями:  $t_{\max} > \tau_i(t) \geq 0$ , де  $t_{\max}$  — задана гранична величина. Щоб цю схему (мал. 2) можна було описати тією самою системою логічних рівнянь, що й попередню (мал. 1), до неї вводять  $k + m$  фільтрів. Фільтром  $\Phi_i$ , де  $i = 1, \dots, k + m$ , наз. елемент, що пропускає зі зсуванням на  $\tau_i(t)$  зміну сигналу на його вході тільки в тому разі, коли наступна його зміна відбудеться пізніше, ніж через  $\tau_i(t)$ . Величину виконуваного

фільтром зсуву (затримки) вважають випадковою ф-цією, на яку накладено обмеження:  $t_{\max} > \tau_i(t) \geq 0$ , де  $t_{\max}$  — максимально можливий час перехідного процесу в перетворювачі П, що виникає після зміни одного або кількох (одночасно) вхідних сигналів. А. а., в якому  $k = 0$  (тобто немає жодного контуру зворотного зв'язку), наз. комбінаційним, або примітивним. При  $k > 0$  А. а. наз. послідовним і синхронним. Практичне значення має тільки скінченний А. а., в якому параметри  $n, k, m, v$  і кількість станів кожного елемента — скінченні. Скінченний А. а. задається множиною вхідних  $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ , стійких внутрішніх  $K = \{k_1, \dots, k_n\}$  та вихідних  $L = \{l_1, \dots, l_m\}$  станів і ф-ціями переходів та виходів, що дають однозначне відображення множини пар станів  $R, K$  у множини пар станів  $K, L$ . Скінченний А. а. є матем. моделлю, що визначає осн. характеристики електронних об'єктів, та інформаційних машин, релейних пристроїв і дискретних (логічних) автоматів. Важливою проблемою, пов'язаною з синтезом скінченного А. а., є модування станів автомата.

Ця проблема викликана тим, що в схемах, як на мал. 1 і 2, затримки можуть мати різні значення. Звідси випливає, що в скінченному А. а. можуть виникати змивання між його колами, а це призводить до виникнення помилок під час переходу в одного стійкого стану в інший. Усувають ці помилки правильним кодуванням внутр. станів. Див. також Асинхронних автоматів теорія. Літ. Лазарев В. Г., Пивль Е. М. Синтез асинхронних комбінаторних автоматів. М., 1964 [Сб.огр. с. 252—257]; Лазарев В. Г., Пивль Е. М. Синтез універсальних автоматів. М., 1971 [Сб.огр. с. 392—396]; Якубайтис Э. А. Синтез асинхронних комбінаторних автоматів. Рига, 1970. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. Пер. с англ. М., 1962. Petzold I. P., Denouette M., Dacquin R. Synthèse logique, t. 1—2. Paris, 1967. К. О. Пивль.

**АВТОМАТ БЕЗ ПАМ'ЯТІ** — автомат скінченний, що має один внутрішній стан. Оскільки в процесі функціонування стан такого автомата не може змінюватися, то вихідний символ  $i$  залежить лише від вхідного символу  $x$  в даному такті  $t$  і не залежить від попередніх символів. Оператор, що його реалізує такий автомат, здійснює буквене переведення вхідних символів у вихідні. Такі оператори називаються істинівськими. Вони по суті є функціями багатозначної логіки.

**АВТОМАТ ВІЛЬНИЙ** Автомат можна розглядати як унарну універсальну алгебру  $A = \langle Q, f_1, \dots, f_k \rangle$  (див. Автоматів способи задавання). Автомат наз. вільним, якщо алгебра  $A$  — вільна. Напр., хай дано дві неперетинні множини  $Q$  і  $X$ . Утворимо множину слів  $A$  таких, що перша її буква — елемент множини  $Q$ , а решта (якщо вони є) — елементи множини  $X$ . Утворимо тепер з одержаної множини слів  $A$  автомат  $\mathcal{U}(Q, X)$  таким чином. Кожне слово з  $A$  назвемо станом автомата  $\mathcal{U}(Q, X)$ , а кожний елемент  $x \in X$  — входом

М. І. Кратко.

автомата  $\bar{Q}(\Omega, X)$  і, за визначенням, взаємнимемо, що стан  $q \in A$  під дією входу  $x$  переходить у стан  $qx$ , де  $qx$  — слово з  $A$ , одержане шляхом приписування сирява до слова  $q$  букви  $x$ . Одержаний автомат буде  $A$ . в. (з множиною відносітвірних станів  $Q$  і відносітвірних входів  $X$ ). Справджується твердження: будь-який інший автомат (з множиною твірних станів  $\bar{Q}$  і твірних входів  $\bar{X}$ ) є гомоморфним образом  $A$ . в.

М. І. Кратню.

**АВТОМАТ ДЕТЕРМІНОВАНИЙ** — автомат, функція переходу якого є всюди означеною (однозначною) функцією  $\Psi: Q \times X \rightarrow Q$ , де  $Q$  — мн-на станів і  $X$  — мн-на входних букв (вхідний алфавіт).

**АВТОМАТ ДЕФІНІТНИЙ** — автомат скінченний, для якого існує таке число  $i$ , що кожне вхідне слово довжини  $i$  переводить автомат в будь-якого стану в той самий стан, який залежить від цього вхідного слова. А. д. набули різного застосування, зокрема, при розробці теорії кодування. Схеми цих автоматів можна будувати з елементами зотримки й функцій алгебри логіки без петель зворотного зв'язку.

**АВТОМАТ З МАГАЗИННОЮ ПАМ'ЯТТЮ** — див. Автомат магазинний.

**АВТОМАТ ЗВЕДЕНИЙ** — автомат, у якому ототожнено всі еквівалентні між собою стани. Див. Алгебра теорія автоматів.

**АВТОМАТ ЗВ'ЯЗНИЙ** — автомат, що має такий стан, який за допомогою подання підходящого вхідного слова можна перевести в будь-який інший стан. Ініціальний автомат називають зв'язним, якщо зазначений вище стан є його початковим станом.

А. М. Чеботарьов.

**АВТОМАТ ІМОВІРНІСНИЙ** — дискретний стаціонарний потактний перетворювач інформації з пам'яттю, функціонування якого в кожному такті залежить лише від стану пам'яті в ньому й можна описати статистично. Властивості  $A$ . і, як вхідного-вихідного перетворювача вивчають на такій моделі. Нехай  $X, Y$  і  $Q$  — скінченні або лічбові множини входних і вихідних букв і станів  $A$ . і, відповідно. Тоді на декартовому добутку мн-в  $Q \times X \times Y$  визначено умовний імовірнісний розподіл  $\mu(a', y|x)$ , заданий на кожному елементі декартового добутку мн-в  $Q \times X \times Y$ .  $A$ . і. означають як  $(X, Y, Q, \mu(a', y|x))$ . Функціонування  $A$ . і. полягає в тому, що в дискретні моменти часу на вхід пристрою подається послідовність букв вхідного алфавіту  $X$ . За умови, що  $A$ . і. перебуває в стані  $a \in Q$  і на вхід подано букву  $x \in X$ , автомат переходить у наступний стан  $a' \in Q$  і видає букву  $y \in Y$  з імовірністю  $\mu(a', y|x)$ . В першому такті зафіксовано початковий стан  $A$ . і. або початковий розподіл  $\mu(a)$  імовірностей станів. Для теорії  $A$ . і. істотним є те, як саме позначається закон функціонування, визначений вище для  $A$ . і. як одноктактного перетворювача інформації, на законі його функціонування («загалом» як багатотактного пристрою, що переробляє послідовності вхідних букв на послідовності вихідних з тією самою кількістю

букв. Властивості  $A$ . і. як ідентифікатора подій амачають на моделі  $A$ . і., вихід якого не розглядають. Тоді на мн-ні станів  $Q$  визначається умовний розподіл імовірностей  $\mu(a'|a, x)$ , заданий на кожному елементі декартового добутку множин  $Q \times X$ . Нехай  $P \subset Q$  — підмножина  $Q$  і  $\mu(a)$  — розподіл імовірностей початкових станів.  $A$ . і. наз. об'єкт  $(X, Q, P, \mu(a'|a, x), \mu(a))$ . Функціонування такого  $A$ . і. визначається майже аналогічно, з тією лише різницею, що умовний імовірнісний розподіл визначає переходи тільки для його станів.  $A$ . і. наз. скінченним, якщо мн-ни  $X, Y$  і  $Q$  скінченні. Нехай  $n$  — к-сть стнів  $A$ . і. Тоді розглядають  $A$ . і. і як систему  $(n \times n)$ -матриць з невід'ємними елементами виду  $M(y|x)$ ,  $x \in X, y \in Y$ , де елементи матриць визначено як  $m_{ij}(y|x) = \mu(a_j, y|a_i, x)$ , або як систему стохастичних  $(n \times n)$ -матриць  $A(x)$ ,  $x \in X$ , де їхні елементи визначено як  $a_{ij}(x) = \mu(a_j|a_i, x)$ . Зручно розглядати й розподіл імовірностей  $\mu(a)$  у векторній формі. Тоді формально функціонування  $A$ . і. можна описати матрицею перетворення  $M(q|p)$ . Позначимо слово, що подається на вхід  $A$ . і.,  $p = x_1 \dots x_r$ . Нехай  $\bar{\mu}(p)$  — вектор, складений з імовірностей початкових станів  $A$ . і. Тоді вектор імовірностей скінчених станів  $A$ . і. має вигляд  $\bar{\mu}(p) = \mu(p) A(p)$ , де  $A(p)$  — відповідна матриця.

Одне з ося, завдань теорії  $A$ . і. — описати клас подій, що представляються в скінчених  $A$ . і. Нехай  $\bar{\lambda}_A(p) = \bar{\mu}(p) A(p) \bar{p}$ , де координати вектора-стовпця  $\bar{p}$  дорівнюють одиниці для номерів, відповідних станам з  $F$ , і нулем — для решти номерів. Нехай  $F_x$  — мн-на всіх слів, зображених алфавітом  $X$ . Кажуть, що подію  $S \in F_x$  представлено в  $A$ . і. початковим вектором станів  $\bar{\mu}(a)$ , мн-ною відзначених станів  $F$  і точкою перетину  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , якщо будь-яке слово  $p$  з  $F_x$  тоді й тільки тоді належить  $S$ , коли виконано умову  $\bar{\lambda}_A(p) > \lambda$ . Клас представних подій є континуальною мн-ною. Він характеризується тим, що визначає в просторі  $L$  числових послідовностей  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сума яких сходиться абсолютно до одиниці, деяку лінійну еквівалентність  $\equiv_T$  так, що фактор-простір  $L/\equiv_T$  визначається скінченно-вимірним. Є приклади нерегулярних представних подій і приклади непередставних подій, які, проте, є примітивно-рекурсивними мн-пам. Щоб урахувати реальні можливості статистич. експерименту з розпізнавання належності даного слова представній події, доводиться запроваджувати поняття ізольованої точки перерізу  $\lambda$  відносно автомата  $A$  як числа, що задовольняє умову  $(p \in F_x \rightarrow \rightarrow |\bar{\lambda}_A(p) - \lambda| > \delta)$ , де  $\delta > 0$ . Скінченний  $A$ . і. з ізольованою точкою перетину представляє лише регулярні події. Проте можна навести й приклади регулярних подій, що їх

представляють скінченні А. і. з неоміжною кількістю станів, ніж детерміновані.

Проблема стійкості А. і. полягає в характеристиці класу А. і., які при досить малих збуреннях перехідних ймовірностей  $\mu(a'|e, x)$  і фіксованій точці перетину представляють одну й ту саму подію. Клас скінчених А. і., усі перехідні ймовірності яких більші за нуль, є стійким відносно ізольованої точки перетину.

А. і. як вхідний—вихідний перетворювач визначає багатотактні канали зв'язку умовою

$$T_{\mu(e)}^M(q|p) = \bar{\mu}(e) M(q|p) \bar{e}, \text{ де вектор-стовпець } \bar{e} \text{ складається лише з одиниць. Істотною властивістю цих каналів зв'язку полягає в тому, що відношення виду } \frac{T(q_1, q_2|p_1, p_2)}{T(q_1|p_1)}$$

якщо вони визначені, мають бути умовними ймовірнісними розподілами. Станя  $a$  й  $b$  одного чи різних А. і. еквівалентні, якщо  $T_a^M(q|p) = T_b^N(q|p)$ ,  $p \in F_A$ ,  $q \in F_B$ . Для розпізнавання еквівалентності пари станів одного А. і. досить простого діагн. експерименту довжини  $(n-1)$ , а для різних А. і.—довжини  $(n+m-1)$ , де  $n$  і  $m$ —к-сті станів відповідних автоматів. Два А. і. є еквівалентними, якщо для кожного стану одного з них знайдеться еквівалентний йому стан другого. Нехай А. і. А в станах має пару еквівалентних станів  $a_1$  і  $a_2$ . Система матриць  $B(y|x)$ , одержана з системи матриць  $A(p|x)$  викреслюванням рядків й стовпців  $a_1$  і заміною стовпця  $a_1$  на суму стовпців  $a_1$  і  $a_2$ , визначає А. і. з  $(n-1)$  станом, еквівалентний першому. На відміну від теорії детермінованих автоматів ми-не міміл. А. і., еквівалентних даному, загалом кажучи,— континуальна.

А. і. А гомоморфний А. і. В, якщо існує така прямокутна матриця повного рангу  $H$ , що  $A(y|x)H = H B(y|x)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  і  $Z_A H = Z_B$ , де  $Z_A$  і  $Z_B$ —допустимі множини векторів станів відповідних автоматів. З гомоморфізму А і В випливає, що це—еквівалентні автомати, а з їхньої еквівалентності випливає й існування псевдо-ймовірнісного автомата С, якому вони гомоморфні, тобто автомата, що його формально визначають як ймовірнісний, але його перехідні ймовірності можуть набувати й від'ємних значень. Варто відзначити, що А. і. А еквівалентний детермінованому автомату В. на вхід якого встановлено генератор випадкових кодів, керований послідовністю вхідних букв А. Структурну теорію А. і. розвинуто поки що недостатньо.

Методи теорії А. і. спираються на властивості стохастичних матриць, матриць з невід'ємними елементами та визначуваних цими матрицями лінійних перетворень. Істотне значення мають і чисто автоматичні методи, оскільки формально А. і.—це лінійний перетворювач розподілів ймовірностей на мн-ні Q, тобто лінійний автомат з нескінченною к-стю станів  $\mu(p)$ ,  $p \in F(x)$ .

Вивчення А. і. має важливе значення для розробки методів аналізу дискретних при-

строїв, що проявляють статистично закономірну випадкову поведінку, для з'ясування функціональних можливостей таких пристроїв та обґрунтування меж доцільності використання їх, а також для розв'язування завдань синтезу пристроїв, які задовольняють дану систему вимог, зокрема для розвитку теорії конструювання спеціалізованих електронних об'єктів. ماشین, що розв'язують завдання методами статистич. моделювання й випадкового пошуку.

Лит. Бухарав Р. Г. Вероятностные автоматы. Казах., 1970; Прохоров Д. А. Вероятностные автоматы. М., 1970 (Сбл. стр. с. 64–87); Рабкин М. О. Вероятностные автоматы. В кн.: Кибернетический сборник № 9 М., 1964; Стакке Р. Н. Theorie stochastischer Automaten. «Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik», 1965, Bd. 1, H. 1–2; Карлава Н. В. Приведенные формы для стохастических последовательных машин. В кн.: Кибернетический сборник Новая серия, в. 2 М., 1966.

Р. Г. Бухарав

**АВТОМАТ ІНІЦІАЛЬНИЙ**—автомат, у якому один із станів виділено як початковий стан. Саме в цього стану А. і. завжди й починає роботу. Див. *Поведінка автоматів*.

**АВТОМАТ КЕРУЮЧИЙ**—поняття, пов'язане з розглядом композиції двох автоматів, один з яких (напр., автомат А) наз. керуючим, а другий (автомат В)—операційним. А. к. А являє собою ініціальний Мура автомат або *Misr автомат* із заклучним станом. Визначають композицію автоматів А та В так, як подано на мал. Вихідні сигнали  $y \in Y_A$ . А. к. А є вхідними сигналами операційного автомата В, і навпаки, вихідні сигнали  $x \in X$  операційного автомата є вхідними сигналами А. к. Кожен сигнал у задає певне відображення множини В станів операційного автомата у цю саму множину. Ці відображення наз. мікроопераціями. Структура вхідного сигналу А. к., як правило, задається у вигляді скінченного набору значень логічних умов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , визначених за множини В. До розгляду описаної схеми взаємодії двох автоматів вводиться ряд задач прикладної алгоритмічної теорії, таких, як проектування структур обчисл. машин, чимало задач теорії програмування тощо. У зв'язку з цим значний інтерес становить вивчення різних форм еквівалентності А. к. Див. також *Автомат перетворювач*.

А. М. Чеботаров.



Композиція керуючого і операційного автоматів.

**АВТОМАТ ЛІНІЙНИЙ**—один із спеціальних видів автоматів. Його вхідні значення  $x(t)$ , внутр. стан  $a(t)$  й вихідні значення  $y(t)$  є векторами над якоюсь скінченною полем P (розмірів  $l$ ,  $n$  і  $m$  відповідно), а ф-ції переходів і виходів визначено так.

$$a(t+1) = R \cdot a(t) + S \cdot x(t); \\ y(t) = U \cdot a(t) + V \cdot x(t),$$



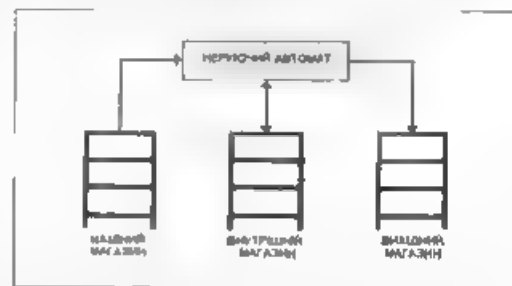
де  $R = [r_{ij}]_{m \times n}$ ;  $S = [s_{ij}]_{n \times k}$ ;  $U = [u_{ij}]_{m \times k}$ ;  $V = [v_{ij}]_{m \times k}$  — матриці над тим самим полем  $P$ . А. л. широко застосовують, проектуючи керуючі пристрої ЦОМ і створюючи *давні випадкові числа*, при виборі станів *кодів коректуючих* тощо. Ці автомати розглядають як проміжну ланку між *автоматами скінченними* й *лінійними динамічними системами*.

**М. І. Кратко**  
**АВТОМАТ МАГАЗИННИЙ** — автомат спеціального виду (як правило, нескінченний), в основі якого лежить поняття *пам'яті магазинної*, або *магазинна*. Магазин зручно представляти у вигляді нескінченної в один бік стрічки, що складається з комірок, пронумерованих числами 1, 2, 3...; стрічку розміщено вертикально так, що перша комірка найвища. У кожний момент часу в магазині записане якесь слово. Першу його букву записано в першій комірці, другу — в другій і т. д. Решта комірок магазину «пусті», тобто заповнені спец. «пустими» символами. Магазин працює в двох режимах — читання і записування. Під час читання сприймається тільки верхня буква слова, записаного в магазині. Ця буква стирається, а та частина слова, що залишилася, піднімається на одну комірку вгору. Якщо записують у магазин слово  $k$  довжини  $m$ , то слово, записане там, зсувається на  $m$  комірок униз, а в звільнені комірки записуються символи слова  $k$ . Таким чином, читання слова в магазині відбувається в оберненому порядку порівняно з порядком його запису.

Структуру А. м. наведено на мал. Цей автомат складається з скінченного керуючого автомата, в якому є три канали для роботи з магазинами — вхідним, вихідним і внутрішнім. При цьому вхідний магазин працює завжди тільки в режимі читання, вихідний — у режимі записування, а внутрішній — у режимі читання й записування. Множину  $A$  станів керуючого автомата поділено на дві неперетинні підмножини  $A_1$  і  $A_2$ . Якщо стан керуючого автомата належить першій підмножині  $A_1$ , то відбувається зчитування в вхідного і внутр. магазинів, а якщо він належить другій підмножині  $A_2$ , то відбувається зчитування тільки з внутрішнього магазину. У цей самий момент автомат переходить у новий стан і записує у внутрішній та вихідний магазини деякі слова.

Нехай  $X$ ,  $Y$  та  $Z$  — алфавіти вхідного, вихідного і внутр. магазинів, що не містять «пустої» букви. Тоді А. м. задають двома ф-ціями  $\delta_1$ :  $A_1 \times X \times Z \rightarrow A \times F(Z) \times F(Y)$  та  $\delta_2$ :  $A_2 \times Z \rightarrow A \times F(X) \times F(Y)$ . Значення цих ф-цій  $\delta_1(a, x, z)$  та  $\delta_2(a, z)$  вказують на новий стан і слова, які записуються у внутр. і вихідний магазини. Дії автомата при пустоті вхідного або внутр. магазину незначені. Ф-ції  $\delta_1$  і  $\delta_2$  можуть бути частковими і багатозначними (тобто задавати не відображення, а відношення між елементами відповідних множин). У цьому випадку А. м. наз. *недетермінованим*. У недетермінованому А. м. множини  $A_1$  та  $A_2$  можуть перетинатися.

Розрізняють розпізнавальні А. м., або *акцептори* (вихідний алфавіт пустий), *порядкувальні* А. м. (вихідний алфавіт пустий), і *магазинні перетворювачі*, або *трансдюсери* (заг. випадок). Щоб визначити спосіб функціонування А. м., розглянемо поняття *конфігурації* й *відношення переходу* на множині *конфігурацій*. Конфігурацією наз. четвертку  $(p, a, w, q)$ , де  $p \in F(X)$ ,  $a \in A$ ,  $w \in F(Z)$ ,  $q \in F(Y)$ . Конфігурація  $(p, a, w, q)$  безпосередньо переходить у конфігурацію  $(p', a', w', q')$ , якщо  $p = p'x$  і  $(a', w', q') \in$



Структура магазинного автомата

$\in \delta_1(a, x, z)$  або  $(a', w', q') \in \delta_2(a, z)$ . Конфігурація  $k$  переходить у конфігурацію  $k'$ , якщо існує послідовність  $k = k_1, k_2, \dots, k_m = k'$  конфігурацій, у якій кожна попередня безпосередньо переходить у наступну. Конфігурацією наз. *заключною*, якщо вона має вигляд  $(e, a^*, a, q)$ , де  $a^* \in A^*$  ( $a^*$  — *пусте слово*).

Для розпізнавальних автоматів у випадковій конфігурації слід відкинути четверту компоненту, а для *порядкувальних* — першу. У множині  $A$  виділяють ще й *початковий стан*  $a_0$  і *множину заключних станів*  $A^*$ , а в множині  $Z$  — *початковий символ*  $z_0$ . Розпізнавальний А. м. представляє (розпізнає) мову, що складається з усіх слів  $p$ , таких, що конфігурація  $(p, z_0, e)$  переходить в одну з заключних конфігурацій. *Породжувальний* автомат породжує мову, що складається з усіх слів  $q$ , таких, що конфігурація  $(a_0, z_0, e)$  переходить у заключну конфігурацію вигляду  $(a^*, e, q)$ .

Клас мов розпізнаваних (порядкуваних) недетермінованими А. м. збігається з класом контекстно-вільних мов, а клас відношень, представлених недетермінованими магазинними перетворювачами, збігається з класом відношень, породжуваних контекстно-вільними граматиками перекладу.

Лит. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. Пер. с англ. М., 1970 [616-лнор с 310—319]. О. А. Летичевский.

**АВТОМАТ МІКРОПРОГРАМНИЙ** — 1) в техніці — автомат, що реалізує мікропрограму функціонування дискретного пристрою; 2) матем. поняття — див. *Автомат регістровий*.

**АВТОМАТ МІНІМАЛЬНИЙ** — автомат, який у класі всіх автоматів, що реалізують даний оператор автоматний, має найменшу можливу кількість станів. Див. *Мінімізація числа станів автомата*.

**АВТОМАТ НЕДЕТЕРМІНОВАНИЙ** — автомат, який при даному входному символі і внутрішньому стані може переходити в кілька різних внутрішніх станів. Формально  $A$  н. — це п'ятірка  $\langle X, Y, Q, \Phi, \Psi \rangle$  така, що відображення  $\Psi: X \times Q \rightarrow Q$  не є однозначним. За аналогією до теорії автоматів детермінованих можна запровадити поняття представлення (породжування) множини для  $A$  н. Якщо два автомати скінченні, що представляють одну й ту саму множину, вважати за еквівалентні, то існує алгоритм, який дає змогу за кожним скінченим  $A$  н. побудувати еквівалентний йому скінченний детермінований автомат. При цьому, звичайно, детермінований автомат має більшу кількість станів, ніж  $A$  н. У загальному випадку для будь-яких автоматів таке твердження є неправильним. Напр., клас множин, породжуваних недетермінованими автоматами в магазинною пам'яттю, ширший за клас множин, породжуваних такими самими детермінованими автоматами.

Літ. Лупанов О. Б. Осередки двох типів коінетних істориків. В кн. Проблеми нелінійності, т. 9 М., 1963. Літ. Ю. П. Оценки числа состояний, возникающих при детерминизации недетерминированного автомата. «Доклады АН СССР», 1966, т. 155, № 1. М. І. Кратко

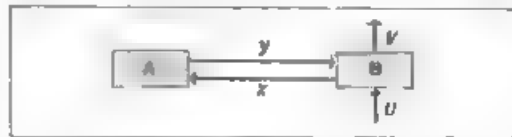
**АВТОМАТ ОПЕРАЦІЙНИЙ** — пристрій цифрової обчислювальної машини, в якому здійснюються перетворення кодів чисел або гнів. Складається з набору *регистрів* з комбінаційною логікою на входах заданого набору елементів регистрів. Вхідні сигнали  $A$  о. ототожнюють з вихідними сигналами *автомата керуючого* — сигналами мікрооперацій. Ці сигнали визначають перетворення множини станів  $A$  о. Вихідні сигнали  $A$  о. є рядки значень логіч. умов, що характеризують стани його регистрів. У теорії зручно розглядати  $A$  о. як нескінченний *Мура автомат* спец. виду (багаторегістровий автомат).

С. С. Горюховський.  
**АВТОМАТ ПУШ-ДАУН** — те саме, що й *автомат магазинний*.

**АВТОМАТ РЕГІСТРОВИЙ** — спеціального виду автомат (як правило, нескінченний), що його запроваджено як математичну модель, близьку до структур сучасних *цифрових обчислювальних машин*. В основі визначення  $A$  р. покладено поняття *регистру*. Регістром (точніше,  $p$ -позиційним регістром) наз. множину змінних (елементів регистру) з однією й тією самою  $p$ -елементною областю визначення  $R$ , пронумерованих послідовними цілими числами й упорядкованих відповідно до цієї нумерації.

В реальних машинах будь-який регістр складається зі скінченної кількості елементів. Проте в деяких ситуаціях зручніше вважати їх за нескінченні. Якщо для нумерації елементів регістра використано всі цілі раціональні числа (додатні й від'ємні), то регістр наз. *двостороннім*. Якщо для нумерації використано всі числа інтервалу  $(m, +\infty)$  або  $(-\infty, m)$ , то регістр наз. *одностороннім нескінченим*.

Станами регістра наз. різноманітні набори значень (станів) його елементів. Щоб задати перетворення множини станів регистрів, використовують *перетворення періодично-визначене*. Кожна така перетворення задають  $p$ -значною ф-цією  $f(x_1, \dots, x_p)$  та базисом рівняння  $y_i = f(x_{i+1}, \dots, x_{i+p})$ , що визначають значення  $i$ -ї змінної регістра після виконання перетворень через значення  $x_j$  його змінних до виконання перетворення. Набір чисел  $(t_1, \dots, t_p)$  наз. *базисом періоду*.



Абстрактна модель центрального процесора обчислювальної машини:  $A$  — керуючий автомат,  $B$  — операційний автомат

Для нескінченного регістра в обидва боки базис рівняння однозначно визначає перетворення. Для регістра, нескінченного в один бік, або для скінченного регістра може бути крайовий ефект, коли частини або всі аргументи  $x_{i+1}, \dots, x_{i+p}$  при деяких  $i$  виходять за межі розглядуваного регістра. В цих випадках розглядуваний регістр доповнюють фіктивними елементами, які завжди мають постійні значення.

Інший тип перетворень множини станів регістра (від часто трапляється на практиці) дають періодично-визначені перетворення з допоміжними змінними. В цьому разі кожній основній змінній  $x_i$  ставлять у відповідність певну кількість  $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}$  допоміжних змінних. Значення змінних після виконання перетворення задають у цьому разі на допоміжному базисі рівнянь:  $y = f_i$ ;  $x_i^{(1)} = f_1, x_i^{(2)} = f_2, \dots$ , праві частини яких залежать від змінних  $x_{i+1}, \dots, x_{i+p}$  регістра й допоміжних змінних  $x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_{i+1}^{(n)}$ . При

цьому треба, щоб рівняння були коректними, тобто щоб однозначно визначали результат виконання перетворення. Крім зазначених двох типів перетворень, застосовують ще т. в. скінченно-визначені перетворення, що змінюють стан лише скінченної кількості змінних регістра, і установні перетворення, що переводять регістр в будь-якого стану з якихсь фіксованих для даного регістра станів.

Усі розглянуті перетворення легко застосувати й щодо кількох регистрів. У цьому разі можна визначити множину станів і ф-цію переходу  $A$  р.  $B$ . Цей автомат складається з якогось скінченного набору регистрів  $R_1, \dots, R_n$ , а станами його є набори станів регистрів. Кожному вхідному сигналові  $y \in \mathcal{Y}$  вхідного алфавіту  $\mathcal{Y}$  автомата  $B$  відповідає якийсь перетворення  $f_y$  множини  $B$  одного з

визначених типів. Щоб задати  $\Phi$ -цію виходів  $A$ , р., розглядають поділ  $\Gamma$  множини його станів на класи, що попарно не перетинаються, і розглядають  $\Phi$ -цію виходів як  $\Phi$ -цію, що належить лише від класу, якому належить стан автомата і вхідного сигналу. Поділ  $\Gamma$  вибирають здебільшого скінченним, а його класи одержують, застосовуючи будівні операції до т. з. допустимих множин. До цих множин відносять, насамперед, скінченно-визначені множини, тобто такі, що в них задані елементи якогось регістра (в скінченній кількості) набувають заданих значень. Загалом, допустимими є й множини, в яких заданий регістр містить певну скінченну конфігурацію значень змінних або в стані якого задана конфігурація періодично повторюється. Збудований так автомат наз. багаторегістровим конфігураційно-періодичним автоматом.

Застосовуючи названу ковенієнцію нескінченного автомата, можна побудувати абстрактну модель центр. процесора обчисл. машини. Ця модель являє собою композицію двох автоматів — *автомата керуючого*  $A$  та *автомата операційного*  $B$  (мал.). Керуючий автомат  $A$  є *автоматом скінченним*, а операційний автомат  $B$  — нескінченим конфігураційно-періодичним автоматом. До автомата  $B$  додають здебільшого ще й вхідний канал  $U$ , сигнали в якому спричиняють установні перетворення, та вихідний канал  $V$ , що по ньому передають інформацію про стан деяких регістрів операційного автомата. Сигнали алфавіту  $V$  спричиняють лише періодично-визначені перетворення (можливо, з допоміжними змінними). Крім того, ці сигнали дозволяють або забороняють надходження сигналів по каналу  $U$ . Сигнали в каналах  $U$  й  $V$  наз. ще й векторними. Ці канали зв'язують центр. процесор з зовн. пристроями, напр., з *оперативним запам'ятовувальним пристроєм ЦОМ*.

В автоматі  $A$  здебільшого легко знайти стани, в яких починається чи закінчується виконання тієї чи ін. мікрооперації машини (додавання, множення тощо). Вибравши ці стани як початковий і як заключний стан, одержимо дискретний перетворювач, який діє на множині станів операційного автомата  $B$ . Елементарні оператори цього перетворювача є мікроопераціями процесора.

З теорією  $A$ , р., основи якої заклав рад. математик В. М. Гаушков (п. 1923), тісно пов'язана теорія *автоматів ітеративних*. Літ. Глушков Я. М. Теорія автоматів и вопросы проектирования структур цифровых машин. «Кибернетика», 1985 № 1. О. А. Тимчасовий.

**АВТОМАТ САМОВІДТВОРЮВАНИЙ** — автомат, що в процесі функціонування будує свою копію. Дослідження з теорії самовідтворювання автоматів уперше проробив Дж. фон Нейман і пояснив наведеное визначення таким чином. Хай задано автономний скінченний автомат  $A$  і певний набір  $\Omega$  скінчених автоматів (елементів).

Якщо вихідні сигнали  $A$  вдається інтерпретувати як вказівки про те, який елемент з набору  $\Omega$  треба взяти і до яких елементів з

уже наявного з'єднання елементів його приєднати, то послідовність вихідних сигналів автомата  $A$  можна розглядати як процес побудови певного з'єднання елементів. Хай серед вихідних сигналів автомата  $A$  є сигнал, що інтерпретується як «побудувати завершено». В цьому випадку автомат  $A$  за якийсь скінченне число кроків «будує» певну логічну мережу  $\Omega$  над  $\Omega$ . Хай ця мережа реалізує автомат  $B$ . Тоді кажуть, що  $A$  в процесі функціонування будує автомат  $B$ . Автомат  $B$  наз. «нащадком»  $A$ , а автомат  $A$  — «батьком» автомата  $B$ . За звичайною термінологією скажемо, що автомат  $A$  побудований в  $\Omega$ , якщо його реалізовано в якійсь логічній мережі над  $\Omega$ . Коли б елементи набору  $\Omega$  було виконано у вигляді реальних фіз. пристроїв і автомат  $A$  мав виконавчі органи, які давали б йому змогу вибирати потрібні елементи й робити потрібні з'єднання, і автоматів  $A$  дати достатню кількість елементів, то він міг би насправді побудувати певний пристрій у вигляді з'єднання елементів.

Розглянемо такий набір елементів  $\Omega$ , коли «батьком» будь-якого автомата, побудованого в  $\Omega$ , сам може бути побудований у  $\Omega$ . Можна припустити, що для будь-якого автомата  $A$  його «батьком» —  $p(A)$  має бути в певному розумінні складнішим за  $A$ , бо  $p(A)$  повинен мати всю інформацію про структуру автомата  $A$ . Необхідно знайти такий  $A$ , щоб  $p(A) = A$ , тобто автомат, що будує свою копію (автомат  $A$  в такому разі наз. самовідтворювальним). При цьому становить інтерес не будь-яке самовідтворювання автомата, а лише самовідтворювання автомата, які мають досить складну будову. Зазначимо, що коли  $A \in A$ , с., то породжені ним автомати також будуватимуть автомати  $A$ , причому їхні «нащадки» будуть не тільки функціонально, а й структурно еквівалентні «батькам», тобто збігатимуться логічні мережі, що реалізують «батьків» і «нащадків».

Дж. фон Нейман розглядав дві моделі самовідтворювання. У першій, т. з. кінематичній моделі, автомат  $A$  «плаває» у резервуарі, де плавають «іка», тобто невичерпний запас елементів набору  $\Omega$ . Друга, т. з. клітинна модель, становить нескінченну двовимірну ітеративну мережу (див. *Автомати ітеративні*). Конфігурація  $Z$  цієї мережі наз. самовідтворюваною, якщо для будь-якого натурального  $n$  знайдеться такий такт  $t$ , що коли в такт  $t = 0$  ми задамо на клітинній моделі одну конфігурацію  $Z$ , то в такт  $t$  наша модель мистатиме в неперетинних конфігураціях  $Z$ . Клітинну модель можна розглядати як певне абстрактне середовище, в якому простір і час дискретні, а пересування елементів замінено передаванням сигналів.

В обох випадках для доказу можливості самовідтворювання досить складних автоматів Дж. фон Нейман запропонував скористатися т. з. універсальним конструктором. Суть цієї пропозиції зводиться от до чого. Зафіксуємо якийсь набір елементів  $\Omega$ . Замість автономного автомата

А розглянемо автомат  $K$  зі входом. Якщо, подавши на  $K$  входню послідовність  $\xi$ , одержимо вихідну послідовність, яку можна розглядати як процес побудови певного автомата  $A_\xi$ , то  $\xi$  наз. кодом автомата  $A_\xi$  (при фіксованому  $K$ ). Код автомата  $A$  позначають через  $\xi(A)$ . Автомат  $K$  наз. універсальним конструктором, якщо для будь-якого автомата  $M$  у  $\Omega$  знайдеться така входня послідовність  $\xi(M)$ , що при поданні її на вхід  $K$  на виході буде побудовано автомат  $M$ . Оскільки фактично всю інформацію про структуру автомата, який треба побудувати, можна записати його кодом, то універсальний конструктор можна побудувати навіть при досить простих наборах елементів. Код  $\xi$  також можна подати у вигляді підходящого з'єднання елементів, що реалізує автономний автомат  $\Psi(\xi)$ , який видає цей код. Якщо з'єднати вихід автомата  $\Psi(\xi)$  зі входом автомата  $K$ , що відповідає поданню входньої послідовності  $\xi$  на вхід автомата  $K$ , то одержимо автономний автомат  $[\Psi(\xi):K]$  і він породжуватиме автомат  $A_\xi$  (символічно  $[\Psi(\xi):K] = A_\xi$ ). У такому разі автомат  $[\Psi(\xi(K)):K]$  — це автомат  $K$ , що має опис свого ж коду. Очевидно, що цей автомат не є  $A$ , с., бо він буде тільки автомат  $K$  без коду. Для побудови  $A$ , с. треба до автомата  $K$  додати т. з. пристрій копіювання  $P$ , тобто автомат, який, одержавши на вхід код  $\xi$ , буде на виході копію цього коду  $\bar{\xi}$  керуючий пристрій  $R$  (призначення його буде пояснено далі). Одержаний автомат  $K - P - R$  має один вхід і працює таким чином. Якщо на його вхід подати код  $\xi$ , то спершу  $K$  побудує автомат  $A_\xi$ , потім  $P$  побудує копію коду  $\xi$ , і нарешті ця копія  $\bar{\xi}$  буде подана на вхід автомата  $A_\xi$ , тобто буде побудовано автомат  $[\Psi(\xi):A_\xi]$ . Керуючий пристрій  $R$  стежить за тим, щоб описаний вище дії було виконано в зазначеній послідовності. Подамо тепер на вхід автомата  $K - P - R$  його власний код, тобто побудуємо автомат  $[\Psi(\xi(K - P - R)):K - P - R]$ . Очевидно, що він будуватиме автомати  $[\Psi(\xi(K - P - R)):K - P - R]$ , тобто буде  $A$ , с. Описаний тут механізм самовідтворення дивовижно схожий на процес самовідтворення найпростіших (одноклітинних) живих організмів.

До аксіоматичної побудови теорії самовідтворення задався амер. математик Дж. Майхл. Він довів теорему, яка є узагальненням теорії про існування  $A$ , с. для широкого класу нумерацій автоматів має місце такий факт: для будь-якої обчисленої функції  $g(x)$  існує автомат з номером  $x$  такий, що породжуваний ним автомат має номер  $g(x)$  (при  $g(x) = x$  маємо теорему про існування  $A$ , с.). Він довів і теорему про існування т. з. самовдосконалюваних автоматів. Вважають, що автомат  $A_2$  досконаліший за автомат  $A_1$  ( $A_1 < A_2$ ), якщо при природному уточненні поняття обчислювальної здатності можна сказати, що автомат  $A_2$  може обчислити все те, що й автомат  $A_1$ , і ще що-небудь, окрім цього. Справджується теорема: існує така

нескінченна послідовність автоматів  $\{A_i\}$ , що одночасно  $A_i < A_{i+1}$  і  $A_i \rightarrow A_{i+1}$ , де  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Але щоб довести ці обидві теореми, необхідно мати такий набір елементів, з яких можна було б побудувати універсальний конструктор, пристрій копіювання коду тощо.

Амер. математик Е. Мур довів, що в будь-якій клітинній моделі з досить широкого класу таких моделей існують конфігурації, які не можуть самовідтворюватися. Робилися спроби фізичної побудови моделей самовідтворювання. Наприклад, англійський генетик Л. Пенроуз побудував механічні елементи двох видів  $A$  і  $B$  так, що вони можуть з'єднуватися один з одним якимсь із двох способів  $AB$  або  $BA$ . Якщо в піднос, де містяться незчеплені один з одним елементи  $A$  і  $B$ , помістити «батька»  $AB$  і потім піднос стрясати, то в ньому породжуватимуться тільки зчеплення  $AB$ , тобто  $AB$  відтворюватиме себе. Якщо ж туди помістити  $BA$ , то породжуватимуться з'єднання  $BA$ . Амер. учений Г. Джекобсон побудував таку електронну модель самовідтворення: складені в різних вагончиків іграшкові поїзди, використовуючи системи роз'їзних колій, так перетинали незчеплені між собою вагончики, що складали поїзд, схожий на них самих.

Лит. Нейман Лм фон. Общия и логическая теория автоматов. В кн. Тьюринг А. Может ли машина мыслить? Пер с англ. М., 1960. Реполов Л. Automatic mechanical information processing. «New Biology», 1959, № 28. Джекобсон Г. О моделях воспроизведения. В кн. Кибернетический сборник, № 7. М., 1963. Нейман Лм фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Пер с англ. М., 1971. Библиогр. с. 32, 138; М а я з и л я Дж. Абстрактная теория самовоспроизведения. В кн. Об теории систем. Пер с англ. М., 1966. Мур Э. Ф. Математические модели самовоспроизведения. В кн. Математические проблемы в биологии. Пер с англ. М., 1966. А р б и б М. Most, машина и математика. Пер с англ. М., 1968. Библиогр. с. 217—224; C o d e E. F. Cellular automata. New York — London, 1968. Библиогр. с. 118.

**АВТОМАТ СКІНЧЕННИЙ** — автомат, у якому множина внутрішніх станів і множина входних значень (а, отже, й множина вихідних значень) є скінченними множинами. Абстрактно,  $A$ , с. — це п'ятірка  $(A, X, Y, \delta, \lambda)$ , де  $A, X, Y$  — скінченні множини, що їх наз. відповідно множинами внутр. станів, множинами входних сигналів і множинами вихідних сигналів, а  $\delta$  і  $\lambda$  — однозначні ф-ції, а саме  $\delta: A \times X \rightarrow A$  — ф-ція переходів,  $\lambda: A \times X \rightarrow Y$  — ф-ція виходів. Поняття  $A$ , с. було запропоновано як математичну модель тех. пристроїв дискретної дії, бо будь-який такий пристрій (через скінченність своїх розмірів) може мати лише скінченне число станів. Теорія  $A$ , с., яка є осн складовою частиною заг. теорії автоматів, має велике застосування значення, зокрема, її методами користуються, проектуючи ЦОМ та ін. автомат. дискретн. пристрої.

Лит. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962. Библиогр. с. 464—469. М. І. Кратке. **АВТОМАТ ЧАСТКОВИЙ** — автомат, у якого функція переходів  $\Phi(a, x)$  чи функція виходів  $\Phi(a, x)$  або обидві ці функції визначені

пе для всіх пар значень їхніх аргументів  $a$  і  $b$ . У зв'язку з цим поняття еквівалентності цілком визначених автоматів та їхніх станів у випадку  $A$ . Ч. замінюють загальнішим поняттям сумісності, що ґрунтується на збігові індуктивних відображень у перетині їхніх ділянок визначення. *А. М. Чеботарьов.*

**АВТОМАТА ДІАГРАМА** — те саме, що й абстрактного автомата зграф.

**АВТОМАТА МАТРИЦЯ ПЕРЕХОДІВ** — один із способів задавання скінченного абстрактного автомата. Для автомата  $A$ , що має  $n$  станів,  $A$ . м. п.  $\|A\|$  є квадратною матрицею порядку  $n$ . Нехай  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — множини станів автомата  $A$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  та  $y_1, y_2, \dots, y_k$  — відповідно вхідний і вихідний алфавіти. Для ініціального автомата  $a_1$  завжди означає початковий стан. Елементом  $(i, j)$  матриці  $\|A\|$  є множина пар виду  $(x_{i1}/y_{j1})$ , таких, що від ділення вхідного сигналу  $x_{i1}$  автомат  $A$  переходить із стану  $a_i$  у стан  $a_j$  і видає при цьому вихідний сигнал  $y_{j1}$ . Для позначення множини, що складається з пар  $(x_{i1}/y_{j1}), (x_{i2}/y_{j2}), \dots, (x_{i\ell}/y_{j\ell})$  збільшеного виписують ці пари, відділяючи знаком диз'юнкції:  $(x_{i1}/y_{j1}) \vee (x_{i2}/y_{j2}) \vee \dots \vee (x_{i\ell}/y_{j\ell})$ . Від  $A$ . м. п. незалежно перейти до будь-якого іншого способу задавання абстрактного автомата, напр., до таблиць переходів і виходів, графа автомата та ін. Див. також *Автоматів способи задавання*.

*А. М. Чеботарьов.*

**АВТОМАТА ПАМ'ЯТЬ** — кількість станів автомата; іноді під терміном  $A$ . п. розуміють логарифм цієї кількості. Див. *Алгебрична теорія автоматів*.

**АВТОМАТА ТАБЛИЦЯ** — прямокутна таблиця розміром  $n \times m$ , де  $n$  — число станів автомата,  $m$  — число вхідних букв. Стовпчиками таблиці відповідають стани автомата, рядками — вхідні букви. На перетині  $i$ -го стовпчика і  $j$ -го рядка вказано двоє значень: стан автомата, в який він перейде з стану  $q_i$  від ділення вхідної букви  $x_j$ , і значення його виходу при цьому. Див. *Автоматів способи задавання*.

**АВТОМАТА ФУНКЦІЯ** — термін, який застосовують у трьох значеннях: 1) те саме, що й автомате відображення, або *оператор автоматний*; 2) функція переходів автомата  $\delta(q, x)$ , тобто відображення  $Q \times X \rightarrow Q$ ; 3) рідше — функція виходів автомата  $\lambda(q, x)$ , тобто відображення  $Q \times X \rightarrow Y$ , де  $Q$  — множина станів,  $X$  — вхідний алфавіт,  $Y$  — вихідний алфавіт автомата. В якому саме значенні вжито термін « $A$ . ф.», визначають з контексту. Див. *Автоматів способи задавання*.

**АВТОМАТИ ЗРОСТАЮЧІ** — об'єкти, які характеризуються тим, що в кожний момент часу будь-який з них складається зі скінченної кількості елементів, у певний спосіб пов'язаних між собою. З часом одні елементи

знижають (відкирають) і з'являються (народжуються) інші, зникають стани елементів, зникаються й зв'язки між ними (внаслідок цього можуть з'являтися не пов'язані зпервинним об'єктом частини, що потім функціонують самостійно). Отже, до класу  $A$ . з. належать усі біол. організми або колективи таких організмів, які зростають самі й створюють собі нащадків. Формалізацією та вивченням таких  $A$ . з. займаються відповідні природничі науки. В певному розумінні до класу  $A$ . з. можна віднести й будь-якого обчислювача (людяну чи машинну), що в процесі обчислювання пише цифри чи інші знаки; ці знаки можна розглядати як елементи, що їх він породжує в процесі обчислювання.

Розглянемо математично точні концепції  $A$ . з. (див. *Автоматів теорія*). Ці концепції є окремим випадком загального поняття керуючої системи. Їх можна розглядати й як конструктивне уточнення нескінченного автомата. За призначенням математично точні концепції  $A$ . з. можна поділити на дві групи: 1) концепції, які правлять за мову для описування реально існуючих (технічно реалізованих) автоматів, зокрема для описування алгоритмів, процесів, що протікають у таких автоматах, 2) концепції, які правлять за мову для уточнення інтуїтивного поняття алгоритму, процесу. До 1-ї групи  $A$ . з. можна віднести *автомати ітеративні*, «розміщені» в евклідовому просторі (такі автомати, зокрема, розглядав Дж. фон Нейман, коли вивчав проблему *автоматів самовідтворення*). До цієї групи  $A$ . з. можна віднести й автомати, що їх описали А. Беркс і Дж. Холланд. До 2-ї групи  $A$ . з. можна віднести *Тьюрінга машини*, поняття алгоритму, що його описали А. М. Колмогоров і В. А. Успенський,  $A$ . з., описані Я. М. Барабаном, та інші абстрактні машини, використовувані для уточнювання інтуїтивного поняття алгоритму. При розгляді 2-ї групи  $A$ . з. постає проблема створення якомога загальнішої концепції  $A$ . з., яка не суперечила б вимозі, щоб кожний елемент у кожний дискретний момент часу виконував лише одню обмеженої складності. Розгляньмо, напр., машини Тьюрінга. Вони характеризуються надзвичайною простотою допустимих засобів при запитуванні й переробці інформації. Зокрема, інформація в них записується на одновимірній стрічці й зростає стрічка може лише з країв. Але інформація по суті може бути записана й у вигляді матриці, графа тощо і, щоб обробляти її на машині Тьюрінга, її треба перекодувати. Сам процес перекодування може бути досить складним, іноді навіть складнішим за саме обчислювання. Звідси випливає ідея А. М. Колмогорова про алгоритм, який переробляє довільну інформацію. Цей алгоритм, на відміну від машини Тьюрінга, може переробляти довільні комплекси (напр., графі з фіксованим розгалуженням). Проте самі перетворення, як і в випадку машини Тьюрінга, є локальними: за кожний такт може бути перетворено лише окіл обмеженого радіуса

одного фіксованого елемента, що наз. початковим.

Загальнішу концепцію А. з. (далі він тут називатиметься узагальненим А. з.) описав Я. М. Барадин. Вона випливає з таких інтуїтивних міркувань. Кожний автомат складається з елементів обмеженої кількості типів (можна навіть вважати — з елементів одного типу). Елементи можуть бути пов'язані між собою зв'язками обмеженої складності, що також належать до обмеженої кількості типів. Робота автомата загалом складається з роботи його елементів. Кожний елемент у кожний дискретний момент може здійснити лише дію обмеженої складності. Формалізуючи описане інтуїтивне поняття А. з., приходимо до поняття узагальненого А. з. Воно характеризується тим, що інформація, як і в випадку алгоритму Колмогорова — Успенського, задається у вигляді довільного графа з фіксованим розгалуженням, але на відміну від попередніх випадків перетворювання інформації відбувається паралельно: можна вершина графа вважати собою елемент, який у кожний дискретний момент часу «переглядає» свій окіл обмеженого радіуса й залежно від цього околу (розглядуваного з точністю до ізоморфізму) вміює свої зв'язки з елементами околу й породжує нові елементи; при цьому правило функціонування в усіх елементах автомата одне й те саме. Постає питання про існування універсального правила функціонування елементів, тобто про існування такого правила функціонування  $A_z$ , що будь-який узагальнений А. з. можна моделювати на певному узагальненому А. з., елементи якого функціонують відповідно до  $A_z$ . Прочому під моделюванням розуміють блокове моделювання, коли окремі блоки моделюючого автомата точно відтворюють функціонування складових елементів модельованого автомата й кожному тактові модельованого автомата відповідає один макротакт фіксованої довжини моделюючого автомата. Доведено, що таке універсальне правило функціонування існує, й до того ж воно відносно нескладне.

Великий інтерес становить моделювання А. з. на автоматах, які мають досить просту тех. реалізацію. Одержані результати показують, що існує *сітка логічна* з кількістю елементів порядку  $\log_2^2 n$ , яка моделює з розтягом порядку  $\log_2^2 n$  будь-який узагальнений А. з., якщо він складається не більше як з  $n$  елементів (при довільно фіксованому правилі функціонування елементів). Інтерес становлять і питання, пов'язані з побудовою надійних автоматів з ненадійних елементів, проте ці питання ще мало досліджено.

Лит. Колмогоров А. Н., Успенський В. А. К определению алгоритма. «Успехи математических наук», 1958, т. 13, в. 4; Барадин Я. М. Проблемы универсальности в теории растущих автоматов. «Доклады АН ССР», 1964, т. 157, № 3; Офман Ю. П. Моделирование самоконструирующейся системы на универсальном автомате. «Проблемы передачи информации», 1966, т. 2, в. 1; Hollnagel J. H. Iterative circuit computers.

В кн.: Proceedings of the western joint computer conference. New York 1964. Буркис А. У. Исследование, поведение и структура нежизненных и растущих автоматов. В кн.: Самоорганизующиеся системы. Пер. с англ. М., 1964, Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Пер. с англ. М., 1971 (библиогр. с. 323—326). Я. М. Барадин.

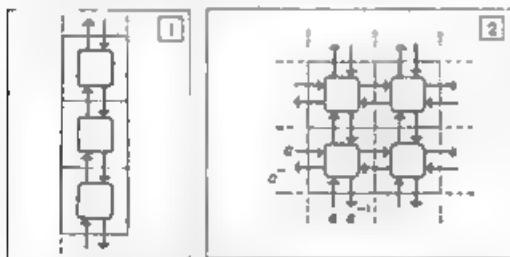
**АВТОМАТИ ІТЕРАТИВНІ** — логічні сітки, що складаються з однакових елементів — скінчених автоматів, — з'єднаних певним регулярним способом.

Поняття А. і. можна вважати узагальненням поняття *Тьюрінга* машини. В цій машині в інформації, що її записано на стрічці, у кожний такт роботи машини відбуваються локальні зміни, тобто змінюється стан не більше як однієї комірки стрічки. Замінивши цю вимогу локальності на вимогу повсюдності, паралельності обчислювань у кожній комірці, приходять до поняття однови́рного А. і., якщо комірку стрічки розглядають як *автомат скінченний*, а букви, що їх вилікують у комірку, — як *стан* цього автомата. Стан будь-якої комірки стрічки в момент часу  $t + 1$  однозначно визначається станом цієї комірки й станом двох сусідніх з нею комірок у момент  $t$  (мал. 1). Таке узагальнення машини Тьюрінга, яке включає й двови́рні та багатови́рні структури, вперше запропонував амер. математик Дж. фон Нейман (1903—57) і А. Черч (н. 1903). Тому такого роду *автомати* часто наз. *автоматами Неймана* — Черча. Зокрема, фон Нейман, вивчаючи проблеми самовідтворювання в теорії автоматів (див. *Автомат самовідтворюваний*), розглядав площину, поділену на однакові квадрати (двови́рну, або плоску стрічку), в кожному з яких вміщувався заданий скінчений автомат, при цьому кожний такий автомат з'єднувався лише з чотирма своїми сусідами (мал. 2). Дж. фон Нейман уперше висунув і заг. вимогу однорідності структури автомата, яку задовольняють А. і. Ця вимога полягає в тому, щоб усі елементи автомата були євклідовими, і щоб жоден з них не мав переваги перед ін. навіть завдяки спец. з'єднанню. Напр., вимоги однорідності буде додержано, якщо замість  $n$ -ви́рного евклідового простору, в якому розміщено елементи А. і., розглядати довільні скінченно-поряджені (комутативні) групи  $G$  з евклідовою скінченною системою тітрівих  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Кожному елементу  $g$  групи  $G$  ставлять у відповідність копію автомата  $A$  з  $n$  вхідними й  $n$  вихідними каналами. Цей автомат з'єднується із сусіднім так, що його  $i$ -й вихідний канал з'єднується з  $i$ -м вхідним каналом автомата, поставленого у відповідність елементу  $ga_i$  групи  $G$ . Її цілі, загальніші, визначення А. і.

Для А. і. ставили й розв'язували найрізноманітніші задачі (напр., проблеми самовідтворювання). Крім того, розглядали питання функціонування (поведінки) А. і. та обчислювання на них, розпізнавання різних їхніх властивостей, «затурення» довільних логіч. сіток в А. і., аналізу й синтезу А. і. тощо. Виячали адебітного А. і., «розміщені» в евклі-

довому просторі. Найбільше значено одновимірні та двовимірні (аплоскіє) А. і. Скінченні А. і., що мають вигляд прямокутника (n-вимірного паралелепіпеда), наз. ітеративними сітками, а сукупність усіх ітеративних сіток, побудованих із того самого елемента, — ітеративною системою.

Розглядає різні способи введення зовнішньої інформації в А. і. Так, напр., американський математик Ф. Хенні, вивчаючи перетворювання та розпізнавання просторових образів на А. і., тобто прямокутних масивів з ну-



1. Схема одновимірного ітеративного автомата.

2. Схема двовимірного ітеративного автомата.

лів і одиниць (або в заг. випадку n-вимірних «паралелепіпедів» з нулів та одиниць), припускає, що кожна компонента образу надходить у відповідну комірку А. і. Процес «обробки» образу відбувається до встановлення стійкого стану А. і., в якому й подається результат. При цьому упрощається, що в процесі обчислювання решта комірок А. і. перебувають у стані спокою і в них не надходить ніякої зовнішньої інформації. Інакше кажучи, А. і. функціонує як скінченна ітеративна сітка, розмір якої обмежено відданим образом. Хенні одержав багато результатів про властивості А. і., пов'язаних з такими обчислювальними. Він довів алгоритм, нерозв'язності багатьох проблем у теорії А. і. і дав методи синтезу А. і., що розпізнають деякі класи образів. Введення зовнішньої інформації може відбуватися й ін. способом, коли вона надходить послідовно у спеціально виділену комірку або групу комірок.

Дж. фон Нейман розглядав нескінченні А. і. як *автомати зростаючі* з такого погляду: у комірки А. і. серед їх внутр. станів є й т. в. стан спокою А, який характеризується тим, що коли якась комірка і всі безпосередні її сусіди в момент  $t$  перебувають у стані А, то в момент  $t+1$  ця комірка також перебуватиме в стані А. Комірку, що перебуває в стані спокою, можна розглядати як таку, що не існує. Якщо в початковий момент часу скінченна кількість комірок перебуває у стані, що відрізняється від А (таку сукупність комірок з зазначеним станом можна з них наз. *конфігурацією*), а решта комірок — в А, то ця конфігурація може зростати за рахунок «приспівання» нових комірок, тобто комірок, що вийшли з стану А. Як довів амер. математик Е. Мур, для дуже широкого класу А. і. існують такі конфігура-

ції (їх наз. *сравськими садами*), які не може створити жодна інша конфігурація (тобто такі, що можуть існувати лише в початковий момент часу). Польський математик С. Улам дослідив експериментально на ЦОМ різноманітність конфігурацій, що їх можна одержати в дво- і тривимірних А. і. в досить простих початкових конфігураціях за простих правил функціонування А. і. За допомогою таких досліджень, на думку Улама, можна з'ясувати питання, скільки «інформації» потрібно, щоб описати структури живих організмів, які мають на вигляд надзвичайно складну будову. В А. і. є чимало властивостей, що роблять їх дуже цікавими з інженерного погляду. Це, наприклад, технологічність; досить спроєктувати лише один елемент — комірку. Елементи з'єднані один з одним просто. Завдяки цьому можна легко зрощувати сітку до потрібних розмірів, не перебудовуючи тих з'єднань, які в ній уже є. Така структура полегшує обслуговування таких сіток. На А. і. можна легко «розпаралелювати» деякі обчислювання. Структури, аналогічні А. і., наявні в живій природі (напр., сітківка ока, деякі ділянки кори головного мозку, молекули ДНК тощо). Прикладами застосування ітеративних структур в обчислювальній техніці можуть бути пристрої *пам'яті ЦОМ, регістри й суматори*. У зв'язку з розвитком технології *інтегральних схем*, де сама специфіка виробу, така, що там зручно будувати пристрої з ітеративною структурою, інтерес до теорії А. і. ще далі зростає.

З теорією А. і. тісно пов'язана теорія т. з. *автоматів регістрів*, основи якої заклали математик В. М. Глушков (п. 1923). Вона спрямована на вивчення мікропрограмування ЦОМ.

Див. Глушков В. М. Теорія автоматів і формальне преформування мікропрограм «Кибернетика», 1965; М. С. Барандин, П. М. Мелешко «Логические сети на автоматах Неймана — Черча» «Проблемы кибернетики», 1961, в. 17; Мур Э. Ф. Математические модели самонастраивающихся систем с процессом роста фигур. В кн. Математические проблемы биологии. Пер с англ. М., 1965; Hennie F. C. Iterative arrays of logical circuits. New York — London, 1961.

**М. І. Кратко, Г. С. Плеснетик**  
**АВТОМАТИ НЕСКІНЧЕННІ** — автомати, множина станів яких є нескінченною. Формально А. н. — це «п'ятірка»  $\mathcal{A} = \langle X, A, Y, \delta, \lambda \rangle$ , де  $X$  і  $Y$  — відповідно вхідний і вихідний алфавіти (вони можуть бути скінченними й нескінченними),  $A$  — множина станів автомата (нескінченна),  $\delta: X \times A \rightarrow A$  — ф-ція переходів і  $\lambda: X \times A \rightarrow Y$  — ф-ція виходів автомата. Здебільшого розглядають А. н. зі скінченними вхідним і вихідним алфавітами і лічбовою множиною внутр. станів. Для класу всіх А. н. ще не вдалося одержати значних результатів, це пояснюється тим, що поняття А. н. дуже загальне. Такі результати є для окремих спеціально визначених класів А. н. Визначають ці класи здебільшого у двох напрямках: а) автомат  $\mathcal{A}$  розглядають як абстрактний автомат, тобто як п'ятірку  $\langle X, A, Y, \delta, \lambda \rangle$ , де множина  $A$  є певною матем. струк-



турою (за Н. Бурбакі), напр., лінійним, топологічним, метричним просторами, Групою тощо, а ф-ції  $\delta$  і  $\lambda$  є якимись природно визначуваними в цих термінах ф-ціями чи операторами, напр., операторами лінійними; б) автомат  $\Pi$  задають у структурному вигляді, тобто як автомат, реалізований у тій чи іншій *сміці логіки*. Структура логіч. сітки та її елементи характеризують структуру множини  $A$  та операцій  $\delta$  і  $\lambda$ . Таке визначення класів  $A$ , н. переважне в дослідженнях з теорії  $A$ , н. Ті  $A$ , н., що їх задано в структурному вигляді, часто наз. абстрактними машинами (напр. Тюрінга машина). Визначають їх у зв'язку з тим, що на них можна виконати ті чи інші класи алгоритмів. Вважають, що саме поняття алгоритму можна уточнити лише на основі поняття  $A$ , н. (див. *Автомати зростають*). Хоч усі реальні дискретні пристрої, призначені для переробки інформації, можуть мати лише скінченну кількість внутр. станів, тобто їхніми абстрактними моделями є автомати скінченні, кращіше розглядають один  $A$ , н. як модель цілого класу таких пристроїв. Це дає змогу вживати спільні для всіх таких пристроїв закономірності й часто має велике застосування значення. Прикладом можуть бути *автомати реєстрів*, основи теорії яких заклав рад. математик В. М. Глушков.  $A$ , н. широко вживають у теор. кібернетиці, в *алгоритмічній теорії лінійності математичній* тощо.

*Лит.*: Глушков В. М. Теорія автоматів і нові напрямки проектування структур цифрових машин. «Кибернетика», 1965, № 1. Маланов А. М. Алгоритми і рекурсивні функції. М., 1965 [bibliogr. с. 375-381]. Асбів М. А. Automatic theory and control theory - a rapprochement. «Automatica» 1966, v. 2, No 3. Horowitz J. E., Ullman J. D. An approach to a unified theory of automata. «The bell system technical journal», 1967, v. 46, № 5.

М. І. Криво.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ КЕРУВАННЯ ВИРОБНИЧИМ ПРОЦЕСОМ** — комплекс заходів, які забезпечують керування виробничим процесом (ВП) за допомогою системи автоматичного керування.

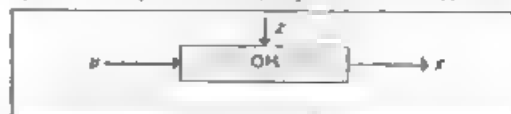
Осн. мета  $A$ , к. в. н. — удосконалювати керування ВП, щоб поліпшити технічні й економічні показники цього процесу. Іноді здійснювати ВП навіть неможливо, не автоматизувавши керування цим процесом (напр., автоматизація нестійких фіз.-хім. процесів). В основу  $A$ , к. в. н. покладено методи *автоматичного керування теорії, інформації теорії, обчислювальної техніки, операцій досліджування* тощо.  $A$ , к. в. н. — складна комплексна інженерна проблема, в якій об'єднують багато завдань. Осн. етапи її такі: техніко-економічний аналіз, який оцінює доцільність  $A$ , к. в. н.; моделювання виробничого процесу, як об'єкта керування; розробка структури системи  $A$ , к. в. н. і розв'язання задачі синтезу алгоритму керування; технічна реалізація  $A$ , к. в. н. Між цими етапами є тісний зв'язок, зумовлений, насамперед, техніко-економ. міркуваннями. Наявність цього зв'язку викликає необхідність повторювати весь цикл досліджень або частину його, орга-

нізовувати своєрідну процедуру послідовних наближень, щоб відшукати прийнятний варіант автоматичної системи керування (АСК).

Комплексний розгляд проблем створення АСК ще не забезпечено цілком теорією й відповідними інженерними методами розрахунку й проектування. При  $A$ , к. в. н. може виявитися, що якісь завдання є нерозв'язними з погляду теорії автоматич. керування й тоді ці завдання повинні розв'язувати людина, яка виявляється ключовою в систему керування й діє відповідно до свого досвіду й інтуїції. Таку систему (з участю людини) називають *системою автоматизованою*. Людина, яка функціонує в цій системі, діє в рамках своєї компетенції на основі певного набору правил — якогось *алгоритму*; її можна розглядати як елемент у складі автоматизованої системи управління.

Розглядаємо докладніше етапи побудови АСК. Щоб провести техніко-економ. аналіз, треба прийняти певні критерії, які кількісно оцінювали б якість керування. Найпростішим критерієм є собівартість виробництва одиниці продукції. Складніші критерії можуть враховувати якість виготовленої продукції, собівартість на якійось інтервалі часу й ін. характеристики ВП. Грубою ознакою певного нерівного ВП є значна *дисперсія* критерію якості, коли цикли виробництва повторюються багато разів. Щоб одержати точніші висновки, треба провести матем., фіз. чи натурне моделювання ВП з певніми теоріями керування. Широко використовувану схему об'єкта керування (ОК) подано на мал., де позначено:  $x$  — вихідні параметри ОК, до яких належать вхід ВП (в загальному випадку — потік енергії, речовини, виробів тощо),  $u$  — вхідні величини ОК, до яких відносять регульовані потоки компонент, потрібних, щоб здійснювати ВП, і параметри, які характеризують перебіг ВП. В ОК відбуваються перетворення вхідних потоків  $x$  на вихідні  $z$ .

Складність сучас. технологій значно утруднює одержання (а іноді й наступне використання) моделі ВП. Ці утруднення зумовлені насамперед великою вибірністю входів і виходів ОК (порядку десятків і сотень), складною структурою й невизначеністю перетворень вхідних потоків усередині ОК. До того ж, у багатьох випадках характер цих перетворень випадковим змінюється в часі. Ці зміни прийнято відображати випадковим



Спрощена схема об'єкта керування при автоматизації керування виробничим процесом.

*збурювальним діямкам* (як мал. —  $z$ ). В дуже складних ВП застосовують т. з. *декомпозиційні методи* — розділяють моделі ВП на її складові частини, кожен з яких розглядають як модель самостійного ОК.

Матем. модель ВП як ОК потрібна й на наступній стадії — коли вибирають структурну схему системи й визначають алгоритм керування. Тут дуже істотною є інформація про стан ОК. У заг. випадку характеристики стану ОК добувають із спостережень за його входами й виходами (див. *Ідентифікація об'єкта керування*). Це й зумовлює необхідність вивчати питання про можливість вимірювання входних і вихідних величин, про помилки вимірювань, ступені вірогідності одержуваних результатів тощо.

Динамічні властивості ВП зумовлюють і необхідність включати до інформації про ОК ангажиція не лише поточних входних і вихідних величин, а й у моменти минулого часу. Обсяг потрібної інформації при цьому значно зростає, й організація інформаційних потоків стає складним тех. завданням, для розв'язування якого потрібні спец. підсистеми попередньої обробки даних.

У тому разі, коли в моделі ОК є безпосередньо неспостережувані (приховані) збурення (параметри), застосовують системи керування замкненим, що мають зворотний зв'язок, по якому надходить інформація про ці збурення чи параметри.

Після вибору структурної схеми визначають інформацію, яку можна використати в керуючому пристрої (КП). Задача КП — на основі цієї інформації виробити рішення про керуєчі дії на вході ОК, для того щоб випередити його вихідну величину  $x$ . При цьому треба встановити певне співвідношення між інформацією про стан ОК, що зводиться в КП, і керуючим діянням, яке надходить з КП на вхід ОК (алгоритм керування).

На етапі тех. реалізації вибирають тех. засоби для виконання операцій щодо організації або первинної обробки інформації про ОК й операцій щодо обчислення керуючих діянь. Треба, щоб застосування ЦОМ як КП було глибоко обґрунтованим економічно. Іноді для реалізації алгоритму керування доцільно використовувати спец. аналогову або комбіновану обчислювальну машину, забезпечивши цим загальний виграш щодо багатьох техніко-економічних характеристик системи.

Необхідно додержувати системного підходу для автоматизації керування процесами, які відбуваються у великих комплексах різних агрегатів, у цехах, на підприємствах тощо, і при цьому правильно розв'язувати проблему вибору критерію якості керування й проблеми інтерпретації складних виробничих процесів як ОК. Автоматизація керування цехами, підприємствами й складнішими об'єднаннями часто буває частковою (автоматизованими є, в основному, системи обробки інформації), а рішення щодо оперативного планування й керування виробництвом приймає людина.

Лит. Трапезніков В. А. Автоматическое управление и экономика «Автоматизация и телеуправление», 1966, № 1, Бжр С. Кибернетика и управление производством. Пер. с англ. М., 1963.

В. І. Големченко.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ КОМПЛЕКСНА** — системне охоплення автоматизацією виробничих та економіко-адміністративних процесів у рамках агрегату, окремого технологічного процесу, цеху, підприємства та вищих виробничих і господарських формацій. А. к. базується на досягнутому рівні розвитку кібернетики й, зокрема, її розділів — кібернетики технічної та кібернетики економічної. Див. також Автоматизація керування виробничим процесом, Автоматизовані системи управління підприємством і Систематизація.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ ЛІНГВІСТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ** — використання обчислювальних машин для лінгвістичного — переважно комбінаторного й статистичного — аналізу тексту як послідовності лінгвістичних форм. Суть лінгвістичного аналізу полягає в тому, що на множині лінгвістичних форм одного рівня (напр., на множині звуків мови, переданих у тексті буквами, або на множині слів тексту) визначають відношення еквівалентності й порядку, які ставлять у відповідність кожній формі клас, до якого вона належить, і кожній парі в послідовності форм — напрям синтаксичного зв'язку між ними. Мінім. класами форм є лінгвістичні одиниці — фонем, конкретними представниками яких є звуки мови, морфем (мінім. значущі одиниці мови), які в тексті позначають морфем (мінім. значущими частинами слів), лексем, що їх у тексті передають словосполучення, моделі словосполучень і моделі речень. На множині лінгвістичних одиниць може бути визначено відношення еквівалентності й знайдено класи лінгвістичних одиниць, такі, як голосні й приголосні фонем, службові, повнозначні морфем, дієслова тощо і знову визначено відношення порядку. Такі процедури лінгвістичного аналізу мають алгоритмічний характер і великою мірою спираються на інформацію про те, як часто вживаються разом лінгвістичні форми в текстах. При цьому враховують не тільки інформацію про склад лінгвістичних форм, а й умовну частоту появи одних форм, якщо в'яляються інші. Одна з типових задач автомат. лінгвістичного аналізу полягає в переведенні тексту, заданого як послідовність знаків алфавіту, в послідовність лінгвістичних форм заданого рівня, в ототожнюванні різного вживання тієї самої форми, а в побудові класів лінгвістичних форм і одиниць.

Залежно від того, чи перед автоматич. обробкою тексту обробляє його людина чи ні, розрізняють лінгвістичний й автомат. аналіз. При машині автоматичному аналізі текст спочатку розчленовують на форми заданого рівня (напр., на слова) і кожну форму забезпечують набором ознак, у якому зазначають належність цієї форми до певного класу форм, його підкласів і зв'язок цієї форми з іншими формами тексту. Проаналізований так лінгвістичний текст переносять на носії запису інформації (перфокарти та ін.), і він надходить для обробки в ЦОМ

Значущими завданнями такої обробки є: 1) ототожнювання індивідуального формовживання всередині кожного з класів форм або одиниць; 2) підрахунок числа ототожнених еквівалентних формовживань; 3) підрахунок умовної частоти живлення разом форм або одиниць, або класів одиниць; 4) побудова інвентарів лінгвістичних форм, одиниць і класів; 5) структурний і лінгвостатистичний аналіз інвентарів (див. *Лінгвістична статистика*) тощо. Розрізняють такі види інвентарів: інвентарі фонем і графем (буки) та їхніх сполучень, інвентарі складів, морфем і морфем, а іноді й основ слів; інвентарі слівослов і лексем (списки — індекси — слів, словених частот); інвентарі словосполучень.

Якщо лінгвіст попередньо не обробляє текст, йдеться про автоматичний аналіз. Зокрема, автомат аналіз з осей частини машинного дешифрування писемностей (див. *Дешифрування текстів*). Автомат. лінгвістичний аналіз провадиться або порівнянням форм та їхнього оточення в тексті з заданими в таблицях *еталонами*, яким поставлено у відповідність набори ознак, або методами комбінаторного чи комбінаторно-статистичного аналізу живлення разом форм. У цьому разі автомат. аналіз базується на припущенні, що статистично адекватні відхилення частоти спільної зустрічності форм від матем. сподівань, обчислених у припущенні про їхню випадкову появу разом у тексті, свідчать про певну близькість цих форм. Так являється встановити морфологічні типи форм, синтаксичні структури, семантичні групи (поля). Автомат. аналіз тексту, який перекладають, є першим етапом *машинного перекладу*. Крім задач, пов'язаних безпосередньо з лінгвістичним аналізом текстів, ЦОМ використовують і як засіб автоматизації праці лінгвіста, напр., під час каталогізації лінгвістичних явищ, при якій треба сортувати й підраховувати кількість явищ за групою ознак. Як правило, машини використовують у лінгвістичних дослідженнях, пов'язаних з обробкою великих масивів лінгвістичної інформації, що містять сотні тисяч формовживань. При цьому часто власне лінгвістичний аналіз супроводжується обчислюваннями різних статистик (частоти форм, одиниць і класів, довжини форм — слів, речень), перевіркою статистичних гіпотез про рівність ймовірностей, з якими ті самі форми, одиниці або класи живляються в різних текстах, і гіпотез про наявність кореляцій між частотами форм у різних текстах. З допомогою ЦОМ розв'язують і власне лінгвістичні задачі, пов'язані з вивченням механізму функціонування мови в статистичному аспекті — вивчення функцій розподілу лінгвістичних статистик у словнику і в тексті.

Літ. Шайневич А. Н. Распределение слов в тексте и выделение семантических полей. В кн. Иностранные языки в высшей школе, а. 2. М., 1963. Фрумкина Р. М. Автоматизация исследовательских работ в лингвистике и текстологии. «Вопросы языкознания», 1964, № 2. Автоматизация в лингвистике. М., 1966. Засорина Л. Н. Автоматизация и статистика в текстологии. Д.

1966. Москвитин В. А. Автоматизация некоторых аспектов лингвистической работы «Вопросы языкознания», 1966, № 1. Сябко Н. П. Структура связанного текста и автоматизация реферирования. М., 1969. Перебийніс В. С. Кількісні та якісні характеристики системи фонем сучасної української літературної мови. К., 1970. В. М. А. Криченко.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ МЕДИЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ** — комплекс математичних і технічних прийомів, здійснюваних, щоб підвищити зрозумілість і надійність медичного діагнозу та щоб прискорити його. А. м. д. передбачає часткову чи повну передачу функцій лікарів приладам і автоматам. Встановлення діагнозу складається з таких етапів: 1) збирання інформації про хворого та про прояви захворювання; 2) оброблення та оцінювання зібраних даних; 3) власне встановлення діагнозу. Автоматизувати можна кожний з етапів встановлення діагнозу або весь процес повністю. При цьому цілком автоматизувати можна лише ті завдання медичної діагностики, для яких існують *алгоритми* й які в принципі можна розв'язати без участі медичного персоналу.

На 1-му етапі розробляють *стандартизовані історії хвороби* різних профілів, питаннями та ін. Зібрану інформацію про хворого записує лікар (або сам хворий) у цифровій чи текстовій формі до відповідних граф стандартизованих документів. Такий запис дає змогу формалізувати інформацію про хворого і зберігати її в пам'яті ЦОМ. Завдяки представлення інформації в такій формі формалізовану природну медичну мову можна сумішувати з мовою ЕОМ. Отже, результат обстеження конкретного х-го хворого можна зобразити у вигляді трійкового вектора  $f_{xj}(s_i)$ , де  $s_i = 1$ , якщо є даний  $s_i$ -ий симптом,  $s_i = 0$ , якщо цього симптому немає;  $s_i = -1$ , якщо цей симптом не досліджували ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

На 2-му етапі встановлення діагнозу виділяють, обробляють та оцінюють зібрану інформацію. Виділяти симптоми може лікар або, після попереднього навчання, ЕЦОМ. Потім оцінюють значення одержаних симптомів для різних захворювань. Це робить лікар або ЦОМ за спец. матрицями та різними вирішувальними правилами. Так, напр., використовуючи методику Бродмена, можна одержати діагностичну цінність  $p(s_i, d_j)$  симптому  $s_i$  для діагнозу  $d_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) в такому вигляді.

$$p(s_i, d_j) = \frac{p(s_i/d_j) - p(s_i)}{2(\sum p(s_i))_j} \pm 1$$

Як міру інформативності можна використати дивергенцію Кульбака

$$p(s_i, d_j/d_i) = [p(s_i/d_j) - p(s_i/d_i)] \log \frac{p(s_i/d_j)}{p(s_i/d_i)}$$

або інформаційну міру Шеннона

$$p(s_i/d_j) = -p(s_i/d_j) \log p(s_i/d_j)$$

та ін.

На 3-му етапі лікар або автомат, пристрій буде моделює захворювання (встановлення діагнозу) відповідно до тих вирішувальних правил, за якими одержано оцінки симптомів. Використовуючи детерміністську логіку, модель захворювання будують, порівнюючи даний невідомий вектор  $f_k$  з еталоном. Побудова еталонов ґрунтується на *логічних операціях* і даних медицини. Еталон зберігається у вигляді запису, на ручних перфокартках або в пам'яті ЦОМ у вигляді *булевої функції*  $F = (s_1 + a_1 + \dots + s_i + \dots + a_m) \wedge (s_1 + s_2 + \dots + s_m + \dots + s_l) \wedge (d_1 + d_2 + \dots + d_j + \dots + d_n)$ . При цьому рішення приймають так: вирішують, що  $f_k \in d_j$  (або множини  $\{d_j\}$ ), якщо  $F = 1$  при  $d_i = 1$  (або  $\{d_i = 1\}$ ).

Використовуючи статистичні методи, модель захворювання будують, виходячи максимально правдоподібну оцінку. При мінімізації середнього ризику діагностування (див. *Риск розпізнавання*) використовують оптим. *Байєсівське вирішувальне правило*, сформульовано так: даний вектор  $f_k \in d_i$ , якщо  $\delta(d_i/f_k) = \max_i p(f_k/d_i)_{\text{сн}}$ . Значення  $i$ , при якому досягається максимум, є шуканим. При  $i = 0$  приймається рішення про відмову від діагностування даного вектора  $f_k$ .

При використанні методик багатоваріантного послідовного аналізу вирішувальне правило твердить: продовжувати підраховувати оцінки (коефіцієнти правдоподібності), якщо  $\log B_{ij} < A < \log A_{ij}$ , вирішують, що  $f_k \in d_j$ , коли  $A > \log A_{ij}$ ; вирішують, що  $f_k \in d_i$ , коли  $A < B_{ij}$ , де  $d_j, d_i$  ( $j, i = 1, \dots, n, i \neq j$ ) — класи захворювань (діагнози);  $A_{ij}$  та  $B_{ij}$  — пороги, визначувані за заданою вірогідністю діагностування (або ж при наявності) для кожної пари порівнюваних класів,

$$A = \sum_{i=1}^m \log \frac{p(s_i/d_i)}{p(s_i/d_j)}$$
 — коеф. правдоподібності,  $p(s_i/d_j)$  та  $p(s_i/d_i)$  — апіорні ймовірності появи  $s_i$ -го симптому в  $d_j$ -му та  $d_i$ -му класах. У деяких випадках, будуючи модель захворювання, доцільно використовувати складене нелінійне вирішувальне правило, яке дає змогу повніше враховувати інформацію про хворого.

Слід зазначити, що, будуючи модель захворювання, лікар або ЦОМ виходять з відповідної структури діагнозу, тобто приймають рішення за оцінками (вагою) відповідної інформації про хворого, вказують осн. і супутні захворювання та стан окремих функцій органів і *регулюючих систем організму*. Отже, автоматизувати цей етап встановлення діагнозу можна лише після того, як створено програмне забезпечення для ЦОМ по формуванню моделей захворювання. Проте остаточний висновок лишається за лікарем (див. також *Медицина інформаційна система*)

Лит. Момсеева Н. И. Проблемы машинного диагноза в неврологии. Л., 1967 (Бібліогр. с. 218—231). Медицинская информационная система. №, 1971 (616 стр. с. 238—253). Бродягин К. Постановка диагноза при помощи вычислительных машин. В кн. Электроника и кибернетика в биологии и медицине. Пер. с англ. М., 1983. Ледли Р., Ластер Дж. Медицинская диагностика и современные методы выбора решения. В кн. Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1988.

В. Г. Мельников, А. О. Попов, В. М. Яценко.  
**АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОГРАМУВАННЯ** — розділ програмування, що розробляє методи автоматичного складання програм і розв'язування задач на цифрових обчислювальних машинах за даними, представленими в якомусь формалізованому вигляді, — *модерно формальною*. А. п. ґрунтується на застосуванні засобів обчисл. техніки, призначених полегшувати сполучення користувача з ЦОМ. Основу побудови системи А. п. становлять *алгоритмічні моєи*, орієнтовані на практичне застосування, та *моєи програмування*, що базуються на них. Системи А. п. потрібні для того, щоб закласти створенню відповідного математичного забезпечення ЦОМ підвищити ефективність використання цих машин у різних сферах застосування їх. Т. ч., проблематика А. п. викрєла в практичних потреб програмування та розв'язування задач на ЦОМ.

Робота користувача ЦОМ при розв'язуванні задач розчленовується на ряд етапів: вивчення задачі (процесу перероблення інформації); вироблення *алгоритму розв'язування задачі* (алгоритму, що моделює цей процес); складання *програми*, яка реалізує цей алгоритм на обраній машині; опрацювання алгоритму й перевірка його (налаштування); підготування даних; розв'язування задачі та оформлення результатів. З розширенням сфер застосування ЦОМ найбільшою гостротою набуває проблема автоматизації етапів складання програм і налаштування їх, як найбільш механічних й найтрудомісткіших. Справді, описування скільки-небудь складного алгоритму в дрібних *операціях машинних пов'язаних з великими тех. труднощами*, оскільки при ручному програмуванні треба чітко уявляти розміщення в *пам'яті ЦОМ* (здебільшого багатоступінчастої структури) всіх потоків інформації на всіх етапах роботи програми й зв'язки та співвідношення між окремими командами програми. У зв'язку з такими труднощами описування алгоритмів уже на ранніх етапах використання ЦОМ набули розвитку прийоми, що полегшують працю по складанню програм. Це, напр., метод описування алгоритмів у вигляді блок-схем, метод символічних (або умовних) адрес, метод підпрограм і ім. Метод складання блок-схем оснований на поділї задач на кілька підзадач-блоків, з яких компонують заг. програму. Метод символічних адрес полягає в застосуванні буквених позначень для кодів операцій та адрес програм. Запровадження підпрограм розширює набір елементарних машинних команд. Автомат. використання стандартних підпрограм у межах однієї задачі пов'язане з побудовою інтерпретаторів (т. з. *інтерпре-*

туючих систем), або спец. трансляторів, що являють собою алгоритми компонування програм з окремих підпрограм. Серед ранніх витягів, праць у цьому плані найвідомішими стали праці щодо створення інтерпретуючих систем («виконробів»), які відзначуються виключенням операцій над об'єктами складної структури (векторами й матрицями), та система стандартних підпрограм, створена для машини «М-20». Метод підпрограм полегшує й спрощує завдання складання програм, але він ґрунтується на мовах, які принципово мало відрізняються від мов машинних. Ці останні не могли стати засобом переборення труднощів програмування, що зростають у зв'язку зі збільшенням кількості та різноманітності машин, зростанням їхніх можливостей і зростанням складності розв'язуваних задач. Виникла проблема описування алгоритмів у термінах досить великих операцій — проблема складання схем програм. З цією метою О. А. Ляпунов розробив операторний метод програмування; було побудовано алгебру програм, що її операції являють собою абстрактне вираження найістотніших і таких, що найчастіше зустрічаються в практиці, композицій програм. Подальше уточнення поняття оператора й чіткіше виділення основних типів операторів у поєднанні з бібліотечним методом дали змогу використовувати операторний метод програмування як основний засіб А. п. на базі створення спец. трансляторів. Для операторних схем алгоритмів розроблено системи еквівалентних перетворень, які дають змогу одержувати ефективні в тому чи ін. розумінні програми. На основі методу операторного програмування було створено транслятори для машин «Стрела» та «БЭСМ». Так почала розвиватися в СРСР А. п. на основі використання трансляторів.

Складання програм за допомогою машини було першим серйозним використанням машини в «нерифметичному» методі. Праці з А. п. дали змогу по-новому усвідомити можливості машин, стали поштовхом не лише до того, щоб поставити й розв'язати питання про ін. нерифметичні використання їх, а й вплинули на характер обчисл. програм, які давали частіше виявляються значною мірою нерифметичними. Успіх перших трансляторів став стимулом до створення аналогічних програм на ін. обчисл. машинах. Проте мови перших трансляторів мали певні риси мов конкретних ЦОМ і тому були певною мірою *машино-орієнтованими* й лише незначною мірою полегшували працю програміста.

Починаючи з 1956, укр. математики запропонували кілька способів записування алгоритмів та методів програмування: метод граф-схем алгоритмів, метод спеціалізованих програмувальних програм і метод адресного програмування, оснований на спец. алгоритм. мові, названій *адресною мовою*. Метод граф-схем набув поширення як метод формалізації поняття *блок-схем програм* і вплинув на розвиток питань теорії програмування. Метод спеціалізованих програмувальних програм на-

був розвитку й застосування в працях щодо складання *бібліотек стандартних підпрограм* і надав його було покладено в основу розробки серії обчисл. машин з розвинутою системою безпосередньої інтерпретації («Промінь», «МНР» та ін.).

Використання алгоритм. мов і побудованих на них машинно- та процедурно-орієнтованих мов програмування як засобів для описування алгоритмів стало новим етапом у розвитку систем А. п.; воно дає змогу розв'язувати завдання сумісності алгоритмів для реалізації їх на різних ЦОМ, спрощувати процес одержування й налагоджування програм (див. *Налагоджувані програми*), одержувати точну документацію алгоритмів, організовувати обмін програмами, створювати умови для зберігання й модифікації програм, розробляти для оптимізації їх методи, що дають змогу поліпшувати ті чи ін. їхні характеристики, а також виробляти певні вимоги щодо алгоритмічних структур ЦОМ.

Праці щодо створення адресної мови вплинули на вибір параметрів при конструюванні кількох вітчизн. обчисл. машин, зокрема «Кіев», «Дніпр», «Промінь» і «Дніпр-2»; адресна мова поширилася як вхідна мова систем автомат. програмування для машин «Кіев», «М-20» та ін.

За рубежем праці щодо А. п. розвивалися з 50-х років 20 ст. в тому самому напрямі, тобто в напрямі автоматизації використання бібліотек стандартних підпрограм, побудови мов програмування, таких, як ЮНІКОД, ФЕРАНТ і та багатьох ін. Разом з тим велика кількість таких систем призводила до відокремлення колективів, що працювали на різних системах, і утруднювала процес обміну розробленими алгоритмами. В зв'язку з цим виникла ідея створити *універсальні мови процедурно-орієнтовані*. Однією з таких мов є ФОРТРАН. Універсальність мови часто призводить до того, що одержані програми мають гірші параметри щодо витрат пам'яті або часу обчислювань за ними (порівняно з програмами, одержуваними за допомогою умілих прийомів, які враховують ті чи ін. особливості машини). Проте зростання *швидкості ЦОМ* і кількості їх робить цю втрату маловідчутною порівняно з тими вигодами, які дає застосування універсальних мов. У 1958 створено проект міжнародної мови програмування, орієнтованої на клас задач обчисл. математики, відомої під назвою АЛГОЛ-58, дороблений варіант якої схвалено 1960 і названо *АЛГОЛ-60*. Ця мова в середині 60-х років 20 ст. стала основою для багатьох розроблюваних мов і трансляторів.

Осн. призначенням трансляторів є забезпечувати істотне прискорення процесу одержування програм у машинних мовах і повніше використання машинних ресурсів. Крім перекладу алгоритмів з однієї мови (мови машинної вхідної) на іншу (мову проміжну чи мову ЦОМ), трансляюча система забезпечує ще виявлення синтаксичних і ряду семан-

тичних помилок в алгоритмах, і цим частково розв'язується завдання налаштування програм. Крім того, завдяки аключенню в систему відповідних оптимізаційних блоків, які обробляють алгоритми, застосовуючи еквівалентні перетворення на рівні вхідної або вихідної мови, трансляюча система ще може забезпечити одержання програм, які задовольняють певні вимоги щодо їх якості.

Окрім трансляючих систем, дадачі більшого значення забувають інтерпретуючі системи, що їх (як і трансляційні) можна реалізувати програмними й схемними засобами. Інтерпретатор здійснює поопераційне послідовне оброблення (переклад на машинні команди) операторів алгоритмів, записаних йогою вхідною мовою, та інтерпретацію їх — виконання машинних команд, які реалізують цей оператор. Процеси перекладу виконуваного алгоритму та реалізації (інтерпретації) його при використанні цих систем тісно пов'язані, і це дуже зручно для підпрацювання й налаштування програм, зокрема, коли ставлять на ЦОМ задачі дослідницького характеру. Системи такого роду набули найбільшої актуальності в зв'язку зі здійсненням на ЦОМ режиму *real-time* часу. Проте повторне виконання того самого оператора в таких системах пов'язане з повторним перекладом його на мову інтерпретації (як правило, мову машини), внаслідком цього є той факт, що за швидкістю виконання готових програм системи інтерпретації поступаються перед системами трансляції.

Проблема трансляції та інтерпретації мов програмування поділяється, по суті, на проблему аналізу й проблему синтезу. В основі побудови перших трансляторів покладено ідею компонування робочої програми з програм, що відповідають окремим операторам первісного алгоритму. Транслятори такого роду стали багатопроходовими, тобто трансляторами, що під час їхньої роботи запис оброблюваного алгоритму чи його еквівалента проглядається кілька разів. Так, під час одного з проглядів можна обробляти всі описові частини алгоритму, в яких наводять характеристики оброблюваних об'єктів інформації, під час другого проглядання перекладають на проміжку мову арифм. оператори й т. д. нарешті, здійснюється заг. *linking* *program* і присвоєння справжніх адрес. У разі, коли вхідна мова системи А. п. виявляється придатною для описування алгоритмів трансляції, створенням таких систем значною мірою розв'язується проблема автоматизації самого процесу конструювання трансляторів. Перший крок у цьому напрямі в СРСР було зроблено на основі адресної мови й відповідного транслятора з неї для розширення вхідної мови й створення трансляторів для їх. цифрових обчислювальних машин.

Поява мов для описування граматик мов програмування (т. з. *метамов*) створила передумови для побудови алгоритмів синтаксичного контролю й аналізу, здатних за заданим описом грамматики одного з даних класів

мов і алгоритму пією мовою видавати його синтаксичне «дерево». Істотно при цьому, що процес синтаксичного контролю чи аналізу для багатьох мов виявляється неважким від конкретних особливостей ЦОМ. Завдяки цьому блок аналізу транслятора стає універсальним і обслуговує трансляцію для кількох мов деякого класу. Транслятори, в яких аналіз оброблюваної програми здійснюється на основі формального опису синтаксису первісної мови (певною метамовою), наз. *синтаксично керованими*.

Проблема конструювання синтаксично керованих трансляторів, орієнтованих на широкий клас граматик, які мають апарат для свого розширення, стимулювала появу нових праць щодо формалізації синтаксису й семантики мов програмування. Ці останні ґрунтуються на природному методі задання семантики як допомогою індукції за синтаксичною структурою речень мови. Поряд з цим до проблеми формалізації алгоритмів мови додучастись й проблема формалізації синтаксичного й семантичного описів П. Цю проблему розв'язують, створюючи метамови для описування синтаксису й на його основі — метамови для описування семантики алгоритмів мов. Процеси трансляції та інтерпретації, які для досить широкого класу мов програмування відбуваються завжди в тих самих умовах, можна описувати алгоритмами, які залежно від значень деяких параметрів, що визначають конкретну мову, виконують задане перетворення інформації. В разі, коли запис первісною мовою транслюється на якусь універсальну машинно-незалежну мову, досить близьку до внутр. мов певного класу ЦОМ, формальне описування синтаксису й семантики мови набуває машинно-незалежної форми, й це дає змогу автоматизувати процес побудови трансляторів.

Дальший розвиток ідей А. п. привів до створення *операційних систем*, у яких, крім процесу програмування (чи перекладу алгоритмів на мову інтерпретації), автоматизовано комплекс усіх етапів розв'язування задач на ЦОМ — від аналізу задачі до синтезу програм й одержання результатів у вигляді, придатному для зберігання, документування чи розмноження.

Разом з тим, використовуючи спец. системні програми, операційна система повністю автоматизує роботу обслуговуючого персоналу ЦОМ. Сучасні операційні системи являють собою організовану сукупність алгоритмів, програм стандартних і *програм обслуговувальних, інформаційно-допоміжних систем* і архівів даних, а також систем трансляції та інтерпретації, які забезпечують пакетну обробку програм і багатопрограмну роботу в режимі розподілу часу та в реальному масштабі часу.

Праця спеціаліста з програмування при наявності таких систем набуває більш творчого характеру, бо тепер вона пов'язана з розроблянням нових і досконаліших методів розв'язування задач на ЦОМ та зі створенням

потужних систем матем. забезпечення ЦОМ і їхніх комплексів. Разом з тим, розвиток систем А. ш. істотно впливає на проектування алгоритм. структур обчислювальних систем, укажуємо шляхи дальшого вдосконалювання їх, насамперед внаслідок підвищення рівня безпосередньої інтерпретації цих систем.

Осп. тенденцією в розвитку А. ш. є прагнення створити засоби, які забезпечують реалізацію задач (програмування, налаштування й розв'язування їх та нагромадження й зберігання програм і даних) при мінімальних затратах праці програміста. Розв'язання цього завдання зумовить дальше застосування ЦОМ у спец. галузях. У плані цих праць особливої гостроти набуває проблема уніфікації й стандартизації засобів матем. і тех. забезпечення ЦОМ.

Розширення сфер застосування ЦОМ, у свою чергу, пов'язане з розробленням відповідних спец. адізованих мов і бібліотек. Спроби створити мовосирий мови (СНМУЛА-87, ПЛ-1 і АЛГОЛ-68) стверджують закономірність розвитку мов, орієнтованих на проблеми. При цьому на перший план випадає проблема автоматизації процесу розроблення засобів матем. забезпечення, які задовольняють ефективну реалізацію цих мов, і в зв'язку з цим створення метатрансляторів — систем програмування, в яких вихідні й вихідні мови відіграють роль параметрів (описуваних певними метамовами).

Літ., Ершов А. П. [та ін.]. Алгоритмические языки и программирование. В кн.: История отечественной математики, т. 4, кн. 2. К., 1978.

К. Л. Юнгисов.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЕКТУВАННЯ ЦОМ** — використання автоматичних засобів у процесі проектування цифрової обчислювальної машини. Автоматизувати проектування ЦОМ необхідно для того, щоб полігшити це проектування насамперед у тій його частині, яка стосується виконання найбільш трудомісткої для проектувальника роботи, щоб надати в його розпорядження засоби для швидкої реалізації прийнятих ним рішень, формалізовані засоби спілкування з іншими проектувальниками, ефективні засоби для удосконалювання процесу проектування і, відповідно, проекту. У зв'язку з розвитком обчислювальної техніки і розробкою нових машин завдання А. п. ЦОМ став дедалі важливішим і актуальнішим. Особливий інтерес становить використання для А. ш. ЦОМ універсальних обчислювальних машин. У цьому разі А. п. ЦОМ полягає в створенні й використанні спеціального матем. і тех. забезпечення універсальних обчисл. машин, орієнтованого на розв'язування задач проектування ЦОМ. В історії розвитку А. п. ЦОМ можна виділити три стадії. На першій стадії розробляли конкретні автомат. пристрої, розраховані на виконання певної конкретної дії в процесі проектування ЦОМ. На наступній стадії розробляли програми для універсальних ЦОМ, які реалізували той чи інший алгоритм розв'язування порівняно невеликої задачі, яка зв'

никала в процесі проектування. Третя стадія характеризувалася розробкою систем програм. Тепер, автоматизуючи проектування ЦОМ, використовують комплексний підхід, який полягає в розробці системи тех. і матем. засобів.

А. п. ЦОМ припускає наявність методики проектування, яка відображає процес проектування ЦОМ. Методика проектування являє собою сукупність моделей, алгоритмів та інших матем. засобів, у термінах яких можна здійснювати розв'язування задач проектування. Процес проектування ЦОМ складається з системного, алгоритмічного, логічного, технічного й технологічного проектування. На етапі системного проектування ЦОМ здійснюється проектування архітектури обчисл. машини й розробка її заг. блок-схеми. Алгоритмічне проектування стосується розробки алгоритмів функціонування таких блоків машини, як центр, процесор, вибору команд системи машини, а також розробку алгоритмів реалізації обраної системи команд тощо (див. *Алгоритмічний синтез ЦОМ*). Логічне проектування передбачає одержання логіч. структури пристроїв обчисл. машини стосовно до обраної елементної бази (див. *Блокний синтез ЦОМ*, *Елементний синтез ЦОМ*). На етапі технічного проектування розробляють конструкцію обчисл. машини. Суть технологічного етапу полягає в розробці технологічного оснащення й документації для виготовлення. Подія процесу проектування на етапі досить умовний, він залежить від стану розвитку теорії й практики проектування ЦОМ.

Оскільки історія розробки ЦОМ порівняно коротка, теорії проектування їх у строгому розумінні ще немає. Досвід проектування конкретних ЦОМ дає змогу виділити в процесу проектування лише якусь сукупність задач проектування. Строга постановка задачі проектування може бути тільки при наявності засобів для точного описування проектованої ЦОМ. Такими засобами є мови описування пристроїв ЦОМ. В основі будь-якого опису ЦОМ лежить опис її структури (схеми), з якого роблять висновок про те, з яких компонент вона складається і які між ними зв'язки. Крім того, треба, щоб було описано процес функціонування цієї структури.

В процесі проектування роблять кілька описів проектованої ЦОМ. Вони відрізняються один від одного мірою деталізації й докладності. Напр., на системному етапі проектування традиційної ЦОМ описують блок-схему машини, яка становить структуру пристрою керування, операційного пристрою, вхідних і вихідних пристроїв, запам'ятовувального пристрою тощо; на тех. етапі проектування описують структуру, що складається з конструктивних блоків, напр., плат і таблиць мікшлатових з'єднань; на логіч. етапі описують структуру, що являє собою сітку з логічних елементів ЦОМ тощо. Повний опис проекту становить ієрархію



структурних описів з певними алгоритмами функціонування компонент.

Залежно від характеру результатів проєктування ЦОМ і використовуваної інформації про проєкт задачі проєктування можна поділити на задачі синтезу, аналізу, оптимізації та оцінки. Задачі синтезу полягають у з'ясування в побудові структур наступного ієрархічного рівня. Задачі аналізу передбачають визначення різних якісних характеристик проєкту ЦОМ. Оптимізаційні задачі полягають у тому, щоб перетворювати наявні описи проєкту відповідно до заданих критеріїв, щоб змінити характеристики проєкту. Нарешті, задачі оцінки мають на увазі прогнозування значень характеристик майбутніх структурних описів, тобто схем машини.

Техніка розв'язування задач проєктування має на меті прогнозування й від використання матом апарату. Напр., на етапі доцільності проєктування ЦОМ задачею синтезу є задача синтезу автоматів структурно, задача синтезу комбінаційної схеми, задача блокового синтезу ЦОМ тощо; задачами аналізу є задача перевірки правильності функціонування автомата, задача аналізу комбінаційної схеми, задача синхронізування роботи автоматів композиції і т. ін.; задачами оптимізації є задача мінімізації кількості *ресурсів* операційного пристрою, задача оптимізації кількості рівнів *мікропрограмного керування* ЦОМ, задача мінімізації затрат апаратури тощо.

З погляду задач проєктування системний та алгоритмічний етапи проєктування характеризуються передусім задачею аналізу. При цьому об'єктом аналізу є архітектура ЦОМ. Одним із поширених засобів розв'язування задач цього етапу є техніка моделювання, яка ґрунтується на представленні заг. блок-схеми ЦОМ як моделі *масового обслуговування системи*. Системний та алгоритмічний етапи проєктування — найменш формалізовані етапи. На логіч. етапі проєктування є всі зазначені типи задач. Методи розв'язування задач ґрунтуються на результатах сучасної алгебри, *автоматів теорії*, *алгоритмів теорії*, *логіки математичної* тощо. Задачі тех. й технологічного етапу, які найбільше потребують автоматизації, не становлять принципових труднощів. Але постановка їх на обчисл. машині виявилася дуже важкою, бо для цього потрібна складна система обслуговування.

Для того, щоб використовувати як осн. засоби А. п. ЦОМ універсальні обчисл. машини, потрібно спочатку розв'язати такі задачі, як розробка алгоритмів і програм розв'язування задач проєктування, а також розробка організації, зберігання, перемішування інформаційних масивів про проєктування ЦОМ та інших додаткових даних, необхідних у процесі проєктування. При цьому передбачається розробка спец. техніки такого призначення: для обслуговування внесення змін у проєкт, обслуговування проєктування в *діалогов режимі* кількох проєктувальників,

обслуговування периферійних автомат. пристроїв, що їх використовують у процесі проєктування й виготовлення схем ЦОМ; програмування задач проєктування та обслуговування процесу проєктування.

В чимало експериментальних систем А. п. ЦОМ. Як правило, вони не універсальні. Їхня призначення обмежується колом розв'язування задач проєктування. Як приклад розглянемо такі системи А. п. ЦОМ: систему, яка обслуговує проєктування машин сімейства «IBM-360», систему «ПРОЕКТ» і систему А. п. ЦОМ, яка ґрунтується на використанні мови ЛЯПАС. Система А. п. ЦОМ, яка обслуговує проєктування «IBM-360», складається з сукупності алгоритмів і програм на «IBM-7090», призначення розв'язувати задачі тех. й технологічного проєктування. Для цієї системи характерним є те, що в ній є стипування універсальної обчисл. машини, на яку розроблено систему, з спец. стендами та пристроями, які дають змогу автоматично розв'язувати деякі задачі типу перевірки правильності та надійності схем. Програми цієї системи поділяють на моделювальні й конструювальні. За допомогою моделювальних програм можна одержати результати моделювання схеми порядку 2—4 тис. логіч. елементів протягом 10—12 синхронізувальних тактів менше як за 30 хв. До конструювальних програм належать, напр., такі програми, як розподіл логіч. елементів по комітках та панелях, розміщування комірок на панелі, розміщування кабелю, що з'єднує панелі; проєктування друкованого монтажу на панелі.

Система «ПРОЕКТ», що її розроблено в Ін-ті кібернетики АН УРСР, являє собою сукупність засобів спец. матом. забезпечення на ЕЦОМ «М-220», призначених розв'язувати задачі алгоритм., логіч. й тех. проєктування центр. процесора ЦОМ. Ця система характеризується гнучким набором засобів для реалізації довільної методики проєктування. Розв'язування задач проєктування здійснюється в термінах директив проєктування. Набір директив проєктування досить багатий. Напр., на логіч. етапі проєктування використовують такі осн. директиви: виділення функціонального, керуемого та операційного блоків, блоковий синтез пристрою, синтез керуемого й функціонального блоків тощо. Крім власне директив проєктування, в системі є великий набір зручних для користування директив обслуговування *пам'яті розподілу*, діалога, введення й виведення *даних* тощо.

Система А. п. ЦОМ, основана на використуванні мови програмування ЛЯПАС, складається з *бібліотеки стандартних підпрограм*, у яких реалізовано алгоритми синтезу дискретних автоматів, розроблені в сучасній теорії автоматів.

Бурхливий розвиток ЦОМ, використання великих *інтегральних схем*, ускладнення логіч. структури й схеми реалізація частин *математичного забезпечення ЦОМ* ведуть до зростання значення й до ускладнення за-

собів А. с. о. е. д. ЦОМ. Розробляється методика проектування ЦОМ сумісно з її матем. забезпеченням і комплексом тех. й матем. забезпечення її реалізації.

Лит.: Глушков В. М., Каритова Ю. В., Лещевский А. А. Об автоматизации проектирования вычислительных машин «Кибернетика», 1967, № 4. Применение вычислительных машин для проектирования цифровых устройств. М., 1968 (Библиогр. с. 232-234). Глушков В. М., Каритова Ю. В., Лещевский А. А. Математическое обеспечение автоматизированной системы проектирования вычислительных машин в системе ПРОЕКТ. «Кибернетика», 1970, № 4. Глушков В. М., Каритова Ю. В., Лещевский А. А. О методах описания данных в автоматизированной системе проектирования вычислительных машин (ПРОЕКТ) «Кибернетика», 1970, № 6. Глушков В. М., Каритова Ю. В., Лещевский А. А. О методике проектирования вычислительных машин в системе ПРОЕКТ «Кибернетика», 1971, № 2. Зверевский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М., 1971 (Библиогр. с. 302-304). Кайе П. (та ін.). Автоматизация проектирования вычислительных систем с использованием логических схем на транзисторах. В кн. Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965. В. М. Глушков, Ю. В. Каритова, О. А. Лещевский.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ МИСЛЕННЯ** — див. *Алгоритмізація творчих процесів*, *Доведення теорем на ЕОМ* і *Штучний розум*.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ УПРАВЛІНСЬКОЇ ПРАЦІ** — комплексна перебудова управлінської праці за основні створення автоматизованих систем управління різних рівнів. Для нижчих ланок завдання А. у. в. розв'язують, створюючи автоматизовані системи управління підприємством або установою, для вищих — системи управління галуззю пром-сті або нар. г-вом (див. *Автоматизовані системи управління в народному господарстві*).

**АВТОМАТИЗОВАНА СИСТЕМА ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ** — обчислювальна система, що здійснює машинну обробку результатів вимірювання величин або параметрів досліджуваного об'єкта чи явища й формування їх у зручному для зберігання й наступного аналізу вигляді та забезпечує у процесі функціонування (програмами й апаратними засобами) обмін інформацією з експериментатором. Оброблену інформацію для експрес-аналізу виводять на пристрої короточасного відображення (екран, електронопроменеві трубки), для тривалого зберігання — на магнітні, паперові та перфобаричні стрічки, перфокартки тощо. Осн. ланкою сучас. А. с. о. е. д. є ЦОМ. Залежно від того, чи входять досліджувані об'єкти до складу керування системою пристроїв, А. с. о. е. д. може бути або безпосередньо зв'язана з об'єктом, або автономна. Діапазон можливостей А. с. о. е. д. щодо керування об'єктом досліджень дуже широкій. Від керування апаратурою вимірювань і знімання експериментальних даних до керування станом й динамікою об'єкта в процесі експерименту. Керуючі дії на об'єкт, вироблені в А. с. о. е. д. за результатами обробки знятих експериментальних даних і

прикладені до об'єкта в межах заданого періоду вимірювань, утворюють у процесі керування *зворотний зв'язок*. В основу розробки А. с. о. е. д. можна прийняти алгоритм керування експериментом, що являє собою замкнений цикл операцій розкривання невідомості (див. мал. 1 у ст. *Система керування науковим експериментом*). А. с. о. е. д. складається з двох взаємозв'язаних частин: матем. забезпечення й тех. оснащення. Матем. забезпечення — це програми обчислювань, запрограмовані процеси сортування, перетворення, редагування, нагромадження, відображення, введення, виведення й керування цими процесами, включаючи вироблення керуючих дій на зовн. об'єкт. Тех. оснащення — це пристрої обчислювальної техніки й зв'язку, що здійснюють операції з потоками дискретних й неперервних сигналів, які представляють величини, символи та їхні відношення. Тех. оснащення забезпечує виконання всього комплексу матем. операцій та їхніх комбінацій. Розробляють і запроваджують А. с. о. е. д., як правило, поетапно. Створенню матем. забезпечення передують вибір або розробка методів обчислювань, програмувальної системи, фізич. і складу програмно-диспетчера. Створенню засобів тех. оснащення А. с. о. е. д. передують аналіз й формування операцій у людино-машинній системі «експериментатор — об'єкт досліджень — обчисл. комплекс» (як між с. 40—41). Розробляючи матем. забезпечення, беруть за основу сукупність матем. моделей  $M_n$  досліджуваних явищ, програм експериментів, алгоритмів обчислювань і форми представлення результатів. Тех. оснащення розробляють, враховуючи специфіку матем. забезпечення, склад операцій у людино-маш. системі та інформаційні характеристики експериментальних даних. Найважливішими з цих характеристик є інформаційна ємність експерименту  $C_E$  (bit) — кількість одиниць інформації, що їх знімають з об'єкта під час проведення одного експерименту, й потужність потоку експериментальних даних (bit/sec) — кількість одиниць інформації, що їх знімають за одиницю часу. Ємність нагромаджувачів, пам'ять машини та їх. елементи А. с. о. е. д. проектують, беручи за основу прийнятну інформаційну ємність експерименту. Потужність потоку даних визначає швидкість пристроїв передавання, перетворення та обчислювання даних.

Система «експериментатор — об'єкт досліджень — обчисл. комплекс» забезпечує виконання операцій керування (автоматичного чи ручного) об'єктом, процесів знімання експериментальних даних (активний експеримент) і вимірювання непрямих параметрів некеруваного об'єкта (пасивний експеримент) і операції перетворення й стискування даних. В А. с. о. е. д. можна здійснювати, крім того, експрес-аналіз одержаних результатів вимірювань, контроль за процесом індексації в маш. масивах і викликання з пам'яті машини як засоби відображення чи друкування

ня проміжних результатів перетворення, стискування та обчислювань. Режим роботи А. с. о. е. д. включає, як правило, переадресацію маш. масивів, переривання маш. лічбм, перетворення вивідних результатів обчислювань і первинне оброблення експериментальних даних. Маш. реалізацію зазначених операцій виконують за сервісними програмами, що входять у програму-диспетчер. Т. є. автоматизація експерименту на базі А. с. о. е. д. не лише забезпечує маш. реалізацію обчислювань, а й змінює алгоритми виконання всієї сукупності операцій у системі експериментатор — об'єкт дослідження — обчисл. комплекс.

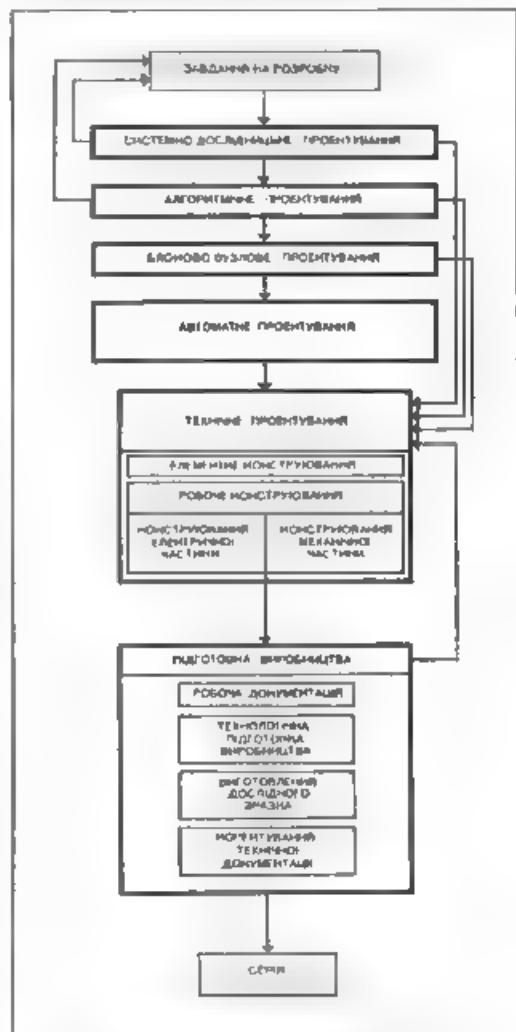
Структуру побудови А. с. о. е. д. визначають: а) за метою експерименту (визначення найкоротшої природи — гідро-, аеро- й геофіз. дослідження, дослідження технолог. процесів у хім., металург. та ін. галузях пром-сті, випробовування зразків нової техніки й дослідження космічного простору тощо); б) за видами експериментів (активний, пасивний) та в) за ступенем невизначеності явищ, моделі об'єкта досліджень. Ефективності функціонування А. с. о. е. д. оцінюють, як правило, за критеріями, що впливають на екстремальної властивості мінімізації часу ітерацій у замкненому циклі алгоритму керування експериментом. Осн. ефект роботи А. с. о. е. д. полягає в скороченні заг. часу експериментальних досліджень і досягають його завдяки швидкодії обчисл. пристроїв для обробки масивів експериментальних даних у максимально можливій кількості елементів замкненого циклу. Сучасні А. с. о. е. д. у сфері випробовування зразків нової техніки забезпечують скорочення часу повної обробки експериментальних даних — у 10 раз, у задачах експрес-аналізу — в 20—30 і більше разів. При гідро-, аеро- й геофіз. дослідженнях значення фактора зменшення часу поступатся, як правило, перед значенням ефекту стискування обсягів первинних експериментальних даних внаслідок обробки, обчислювань і формування результатів. Сумарний ефект стискування обсягів інформації внаслідок застосування А. с. о. е. д. може досягати 50-кратної величини (відношення обсягу первинних даних до обсягу збережуваних даних у біт). Робота А. с. о. е. д., оснащеної сучас. матем. забезпеченням і ЕОМ зі швидкістю до мільйона операцій за секунду, еквівалентна роботі сотень обчислювачів і техніків при ручних методах обробки експериментальних даних.

Літ.: Вычислительные системы, в. 35. Новосибирск, 1989; Жук К. Д. Автоматизация научного эксперимента, «Вестник АН УССР», 1970, № 3; Механизация и автоматизация управления, № 5, К., 1970.

К. Д. Жук.

**АВТОМАТИЗОВАНА СИСТЕМА ПРОЕКТУВАННЯ** — комплекс технічних і математичних засобів, призначених для автоматизації процесів проектування з участю людини. Сукупність етапів проектування, пов'язаних певною технологічною послідовністю, спрямовано на розв'язування осн. задачі системи

(ОЗС). Природно, що ОЗС, її процедурний зміст щодо А. с. п. значною мірою залежить від сфери застосування проектованих на цій системі тех. засобів. Так, напр., А. с. п. у сфері суднобудування у функціональному відношенні значно відрізняється від А. с. п. у сфері обчислювальної техніки. У першому випадку А. с. п. має добре розвинуті пристрої відтворювання великих форматів яресленків та введення їх у ЦОМ. У другому — ці пристрої поступаються перед пристроями виведення електр. схем, друкованих плат та ін.



Типова блок-схема процесу проектування на основі автоматизованої системи проектування.

конструкторсько-технологічних документів. У матем. забезпеченні ці системи характеризуються алгоритм. забезпеченням фіз. розрахунків, що супроводять процес проектування, змістом інформаційних структур, нов. мовами системи тощо. Типову блок-схему процесу

проектування на базі А. с. п. показано на мал. Дослідження ОЗС дає змогу визначити склад і тех. вимоги до тех. і матем. засобів А. с. п.

Основу технічних засобів А. с. п. становить центр, обчислювач (процесор), у ролі якого, як правило, виступає ЦОМ більшої потужності з ЦОМ-супутником або без нього (якщо потужності першої вистачає для розв'язання ОЗС). Оскільки А. с. п. видає графічну (креслярську) документацію, то зрозуміло, що ця система повинна мати добре розвинуті засоби введення, виведення й розмноження графічної інформації та документації. Оскільки розв'язування ОЗС алгоритмізовано недостатньою мірою, людина повинна втручатися в процес проектування, щоб керувати ним. Тому в складі тех. засобів повинні бути пристрої оперативного відображення графічної інформації та спец. вузли керування системою.

Математичне забезпечення А. с. п. складається з двох осн. частин зовнішнього й внутрішнього. Зовнішнє матем. забезпечення — це матем. засоби спілкування людини (проектувальника) з системою. До його складу входять мови представлення первісної інформації, засоби поповнювання інформаційної системи та мови керування роботою А. с. п. (командно-операційні мови), які дають змогу вести діалог людина—система. Ці мови часто наз. есесіриними. Напр., запис наказу (команди) «ПОВЕРНУТИ КРЕСЛЕЖИ № 0024/а 30° ОХ екр. № 3», означає: повернути креслення на кут 30° відносно осі ОХ і вивести результат на екран № 3.

Внутр. матем. забезпечення — це матем. засоби, що забезпечують розв'язування ОЗС в автоматизованому режимі. Функціонально-внутрішнє матем. забезпечення А. с. п. складається з таких компонентів: з операційної системи, програмного забезпечення процедур розв'язування ОЗС та інформаційної системи (ІС). До складу операційної системи входять транслятори з мови А. с. п., програми розширення функціональних особливостей штатної операційної системи центр. обчислювача (програми, що забезпечують роботу нештатних тех. засобів центр. обчислювача) і т. д. програми завантаження (програми, які керують обчисл. процесом розв'язування процедур ОЗС в інтерпретуючому режимі).

Програмне забезпечення процедур розв'язування ОЗС складається, по-перше, з програм фіз. розрахунків, що забезпечують виконання всіх розрахунків, які супроводять проектування. Склад цих програм цілком залежить від того, в якій сфері застосовують А. с. п. Напр., у суднобудуванні — це розрахунки статик, динаміки й фіз. параметрів судна; з обчисл. техніки — це розрахунок електр. характеристик схем елементів, логічних ланцюгів та ін., по-друге, до програмного забезпечення входять програми геом. перетворень, напр., програми побудови класичних ліній, тіл і фігур, програми зміни масштабу й деформації креслення чи тіла, ново-

ротів, асувів та ін. маніпуляцій, а по-третє, програми організаційно-системного характеру, напр., програми відкривання й закривання програм, формування інформаційних (робочих) полів, програми забезпечення надійності зберігання інформації, доступу до масової інформації тощо.

Інформаційна система (ІС) включає в себе структуру та способи представлення інформації на носіях матем. пам'яті А. с. п.; програми функціонування ІС (поповнювання, вилучення на запит і забезпечення процедури розв'язування ОЗС), напр., програми пошуку креслення чи окремого його елемента, програми поповнювання креслення ліній тощо, програми, що забезпечують самозберігання і статистичну обробку інформації. До них належать програми, які забезпечують дублювання й переміщення в зв'язку з динамікою (показниками попиту) обчисл. процесу, програми внесення змін у всю структуру інформаційного масиву на проектуванні вироб, програми очищення масивів від невикористаної інформації тощо.

Вище розглянуто функціональне визначення складу тех. і матем. засобів А. с. п., виходячи з сукупності етапів проектування. Кількість вимог до цих засобів визначається в процесі досліджування ОЗС, при аналізі її окремих етапів та ступеня алгоритмізації їх. Слід відзначити, що саме вибирання оптим. складу тех. і матем. засобів та структури А. с. п. є предметом дослідження ОЗС у певній сфері людської діяльності.

Лит.: Глушков В. М. Перспективи автоматизації проектування чисельних машин «Вестник АН СССР», 1967, № 6. Глушков В. М., Капотокова Ю. Я., Листовський А. А. Об автоматизации проектирования вычислительных машин «Информатика», 1967, № 4. Глушков В. М. Основы принципов построения автоматизированных систем управления. К., 1969. Кейс П. Іта І. І. Автоматизация проектирования вычислительных систем с использованием логических схем на твердом теле. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, т. 1. М., 1964.

Я. П. Дришак, Ю. Т. Митусинський.

**АВТОМАТИЗОВАНИЙ ПОШУК ДОВЕДЕНЬ ТЕОРЕМ** — взаємодія людини з обчислювальною машиною, спрямована на пошук доведень теорем. Система А. п. д. т. включає комплекс засобів спец. матем. забезпечення ЕОМ, призначених для пошуку доведень теорем, а також для перевірки на очевидність і показу тих чи інших тверджень у розглядуваній теорії та для коригування гіпотез, побудови природного доведення, для інформаційно-довідкових цілей тощо. Особливістю більшості робіт в *доведенні теорем на ЕОМ* є прагнення створити універсальні програми, орієнтовані на самостійний пошук доведення теорем машиною. Такий підхід не відповідає досвідові, нагромадженню в інших галузях застосування ЕОМ. Природний шлях, яким йде машина математика, — це розвиток систем *автоматизації програмування* та засобів взаємодії людини з машиною. Цей шлях є, очевидно, одним з реалістичних шляхів розв'язання проблеми А. п. д. т. Він передбачає заміщення центра ваги роботи в цій галузі

від універсализації програм для ЕОМ до кооперації математики й ЕОМ, до створення спеціалізованих систем автоматизації програмування й операційних систем, які дають змогу в разі потреби швидко програмувати пошук доведення навіть однієї теореми і здатні працювати, коли потрібно, в реальному масштабі часу з математиком, котрий шукає доведення цієї теореми. Людина при цьому визначає принциповий напрям, план доведення, проміжні гіпотези, різні методи й прийом доведення, а машина реалізує накреслений план пошуку, застосовує методи, що їх рекомендувала людина, робить проміжні логічні викладки та видає інформацію про стан пошуку, про одержані нею результати і про невдачі — для прийняття людиною рішення.

У матем. забезпеченні А. ш. д. т. виділяють такі складові частини: засоби для описування даних у системі (зовн. та внутр. мови системи); систему алгоритмів для розв'язування різних задач, що виникають у процесі пошуку; засоби (мову) спілкування з системою в діалогов режимі; спец. операційну систему; автоматизацію і методику програмування. Треба, щоб формалізована мова для записування матем. теорій була зручна для практичного використання в процесі роботи з системою. Для цього до неї вводять досить багатий запас первісних предикатів, операцій та ф-цій. Частина їхніх властивостей (напр., асоціативність) враховується вже у внутр. представленні мови, і це може значно полегшити пошук. Щоб відкинути ступінь практичності мови, доцільно виключати до обсягу поняття ф-ції і певні конструкції, що їх часто використовують у звичайній мові. Під конструкцією в заг. випадку розуміють багатозначну  $n$ -місну функцію ( $n=0, 1, \dots$ ). Напр., вираз «істинножінна множини  $M$ » можна розглядати як одномісну багатозначну ф-цію «істинножінна» ( $M$ ), аргумент якої набуває значень із класу множин (тобто має тип «множина»). Інші приклади конструкцій: *група*, *підгрупа* ( $G$ ), *однина* ( $G$ ). Треба, щоб в описах конструкцій був опис можливості типу їхніх аргументів і типу значень конструкції. Завдяки цьому можна будувати дерево конструкцій у вигляді суперпозицій відповідних конструкцій. Вибір перватної конструкції є одним з вирішальних моментів, які забезпечують успіх доведення.

Пошук доведення за допомогою машини зручно організувати як роботу евристичних програм різних рівнів, які входять до комплексу засобів спец. матем. забезпечення ЕОМ. Ієрархічна побудова програм дає змогу швидко здійснити пошук одного з варіантів доведення. Програма нижнього рівня реалізує т. з. алгоритм очевидності й містить набір операторів — підпрограм, завданням яких є елементарні перетворення оброблюваної інформації. Ця програма перебирає варіанти виведення, які використовують найпростіші логічні й теоретико-множинні прийоми, та перевіряє конкретні приклади і

здійснює аналітичні викладки. Більшість перетворень, виконуваних у процесі роботи алгоритму очевидності, імітують дії спеціаліста у подібних ситуаціях. Програма вищого рівня (залежно від ситуації) перерозподіляє посадовість операторів 1-ї програми, задаючи тим самим якийсь новий метод доведення. Програми ще вищих рівнів призначені для адосконалювання програм нижчого рівня, нагромадження досвіду, самонавчання тощо. Якщо програми найнижчого рівня містять евристичні, основною яких є найзагальніші методи доведення (метод ланцюгового висновку, метод аналогії тощо), то програми 2-го рівня використовують евристичні, розробляють які набагато складніше (евристичні розпізнавання образів, що стосуються вибирання набагато менш ефективних методів або вибирання найбільш істинних цілей, семантичні евристичні, що ґрунтуються на використанні інтерпретації середовища, і багатокрокові евристичні планування). А програми найвищих рівнів використовують найскладніші евристичні евристичні узагальнення попереднього досвіду й евристичні індуктивних передбачень.

Оси. засобами програмування в системі А. ш. д. т. є мова процедурно-орієнтована програмування та мова директив. Мову директив використовують для авертання до окремих робочих програм у процесі пошуку доведення. Директивну мову може використовувати, її можуть породжувати робочі програми в процесі роботи. Система програм, яка складає спеціалізовану операційну систему, розподіляє ресурси (компоненти обладнання ЕОМ) і визначає порядок виконуваних інструкцій, що надходять від користувача.

Проблема А. ш. д. т. пов'язана з іншою складною й цікавою проблемою — моделюванням мислення й відрізняється від неї використанням передусім не якихось творчих здатностей машини, а їхніх потужних виконавчих можливостей при постійній взаємодії з людиною. З розвитком автоматизованих систем пошуку доведення і, насамперед, алгоритмів пошуку в напрямі побудови евристичної надбудови, роль математики полягатиме переважно у визначенні нових понять і в формулюванні нових пропозицій, а майстерність довести нову теорему, використовуючи машину, полягатиме у вмінні сформулювати ряд проміжних теорем і лем.

Лит. Черкнякський А. Л. Моделирование процесса решения сложных логических задач на вычислительных машинах (эвристические программирование). «Автоматика и телемеханика», 1987, № 1; Глушков В. М. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта. «Кибернетика», 1970, № 2; Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1987 (библиогр. с. 481—546).

Ф. В. Ануфриев, З. М. Асладаров, В. Ф. Кострико

**АВТОМАТИЗОВАНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ** в народному господарстві — системи управління підприємствами, установами, територіальними об'єднаннями, міським господарством, галузями, відомствами тощо, основані на регулярному застосуванні сучасних математичних методів і технічних засобів автоматичної обробки

інформації в обліку, аналізі, плануванні, організації, проектуванні й підготовці виробничо-господарської діяльності.

Можливості автоматизації різних інформаційних процесів є основними наук.-тех. передумовами створення автоматизованих систем управління (АСУ) в нар. г-ві. За допомогою розроблених тех. засобів можна докорінно змінити технологію реалізації інформаційних процесів в управлінні підприємств згідністю та оперативності даних, які відображають стан виробничо-госп. діяльності, спростити процес фіксування даних; поліпшити зберігання інформації й прискорити пошук і групування необхідних відомостей, залучити самі до мінімуму участь людини в підготовці звітної інформації; поліпшити зв'язки й інформованість різних ланок управління г-вом; упорядкувати документообіг, залучивши з облігу всі проміжні дані; поліпшити форми подання даних для управління (апаратура відображення даних); своєчасно розв'язувати складні задачі аналізу, прогнозування й оптимізації планування й організації нар. г-ва.

Тех. передумовою для побудови таких систем було створення й пром. виробництво ЕОМ, а потім і комплексних обробки даних систем, здатних автоматизувати інформаційні процеси. Створені за останні роки різні пристрої, які полегшують спілкування людини з тех. засобами обробки даних, особливо на етапах фіксування та відображення інформації, значно прискорили процес впровадження АСУ в народне господарство.

АСУ характеризується кількістю новою організацією інформаційних процесів, інтегрованим характером усієї системи інформації, автомат. плануванням розв'язування задач, організацією єдиного засобів, методів та організації розв'язування задач управління. На основі автоматизації інформаційних процесів можливе використання найдосконаліших моделей математичних і методів розв'язування задач оптим. планування, проектування й управління.

Відмінності АСУ від традиційних систем управління, які ґрунтуються на ручному й механізованому виконанні інформаційних процесів чи на разовому використанні ЕОМ, сформульовано у вигляді спец. принципів, які визначають осн. підходи до створення й організації функціонування АСУ. Автоматизація і механізація окремих процесів і стадій управління не зменшують обсягу робіт по підготовці даних до розв'язування задач. За цих умов велике місце займають питання введення й зведення інформації, низька типізація, а, отже, й розподілення в підготовці програмного апарата, трудомістка експлуатація програм і тех. комплексу обробки інформації. Ці вади утруднюють розв'язування задач перспективного довгострокового прогнозування на основі оперативних і об'єктивних даних, оперативне коректування планових завдань, збільшують зашанювання в поданні даних для управління.

Системи управління в нар. г-ві ефективні лише тоді, коли, по-перше, задачі обліку й управління розв'язують в єдиному комплексі, коли охоплено всю систему руху інформації — від первинної до видавання систематизованих даних керувачим органам. По-друге, для ефективності АСУ необхідно, щоб функціональну діяльність, на яку спрямовано управління, було охоплено єдиною матем. моделлю (комплексом взаємоузгоджених матем. моделей різних рівнів), коли на основі цієї моделі автоматично ставлять і розв'язують задачі оптим. планування й управління. При цьому важливіше, щоб матем. моделі й задачі оптимізації на основі цієї моделі були нерозривно пов'язані з внутрішньомашинною інформацією про хід виконання планових завдань і виключали участь людини на проміжних стадіях підготовки інформації для цих задач. Необхідно також, щоб розв'язування задач, порядок, організація й диспетчеризація визначалися й відбувалися здебільшого автоматично — лише в цьому разі система управління можуть бути справді ефективними, інакше значно зменшуються продуктивність машини й оперативність розв'язування задач, а, отже, знижується й ефективність управління.

Фундаментальне значення має для АСУ принцип одноразового введення даних у машину, згідно з яким багаторазове використання будь-яких відомостей під час розв'язування задач на ЕОМ не повинне приводити до повторного введення якихось даних у пам'ять ЕОМ.

Принцип автомат. фіксування інформації й фіксування відхилень вимагає макс. усунення людини від стадій фіксування фактів під час виконання процесів виробничо-госп. діяльності, спрямовує на відображення, де це можливо, тільки відомостей, які вказують на відхилення характеристик реального виконання якогось процесу від уявлень про нього. Цей принцип веде, в першу чергу, до скорочення інформації, яку вводять у машину, а тим самим і до зменшення помилок в інформації. Принцип суміщення повідомлень і принципів дає змогу зіставляти планову й технологічну інформацію з інформацією, яка відображає реальне виконання процесів, і організовувати ефективний контроль над змістом даних в АСУ. В цьому полягає одна з осн. переваг АСУ над іншими способами застосування технологічних засобів обробки даних в управлінні.

Організація інформаційних процесів в АСУ найефективніша в тому разі, коли інформація про події фіксується майже одночасно з подією, яка відбувається, й виконується принцип регламентованого машинного введення повідомлень, а також принцип одночасного з введенням автомат. контролю й відбракування повідомлень. Одночасності досягають за допомогою засобів автомат. фіксування інформації та внаслідок регламентованого оформлення виробничо-госп. документації на машинних носіях у вигляді, пристосованому

для введення даних у машину, або навіть одночасного з оформленням документів введення даних у машину. Для виконання цих принципів потрібно, загалом кажучи, щоб ЦОМ використовували в режимі *розподілу часу*. Принцип автомат. контролю повідомлень приводить до різкого зменшення кількості помилок у даних, створює сприятливі психологічні умови для роботи саулб інформації.

Наступним важливим принципом у проектуванні й організації функціонування АСУ є принцип базових масивів, який полягає в тому, що всю багаторазово використовувану інформацію треба спочатку згрупувати в сп-ці масиви. Завдання служб інформації полягає в тому, щоб підтримувати на рівні постійної готовності ці базові масиви. Принцип моделювального характеру базових масивів дає змогу визначати й організовувати ці масиви. Найповнішою й багаторазово використовуваною інформацією в АСУ є інформація, яка відображує узагальнені (моделі) про процес виробничо-госп. діяльності, факти виконання цих процесів, а також стан і динамічні характеристики об'єктів управління (інформаційна модель). Звідси стає зрозумілим принцип недоторковості базових масивів, який, у свою чергу, визначається принципом незалежності процесів фіксування інформації й розв'язування задач в АСУ. Цей принцип стверджує, що інформація, яка міститься в базових масивах, може змінитися тільки внаслідок виконання реальних процесів виробничо-госп. діяльності (інформаційна модель) або зміни проективної документації (конструкторсько-технічної, календарно-планові нормативи й т.п.). Важливим є й принцип організації базових масивів в електронних, пам'яті машини, бо перфокарткова організація пам'яті явно неефективна, потребує великої кількості обслуговуючого персоналу, приводить до використання застарілої техніки в орг-ції інформаційних процесів.

Характерною особливістю АСУ є й принцип внесення змін — постійне оновлювання базових масивів і самої схеми формування цих масивів, яке здійснюють, вносячи зміни в уже сформовані масиви. Велику роль у формуванні базових масивів, фіксуванні інформації й загалом у функціонуванні АСУ відіграє принцип замовчування. Якщо в повідомленні про певний факт не відображено якихось регламентованих параметрів, то їх можна взяти з приписів. Те саме й для програми обробки даних пропущений, незазначений параметр або показник беруть у загальноприйнятому (напр., середньостатистичному) значенні, щоб не прийняти розв'язування задачі. Принцип замовчування має наслідком значення на стадії впровадження систем, особливо під час підготовки нормативної й технологічної інформації, бо дає змогу сформувати ці дані, поступово уточнюючи параметри й величини, які було спочатку якось задано, виходячи з принципу замовчування.

Для розвитку системи важливим є й принцип «гостинності», зокрема, базових масивів:

розширення й інтенсифікація виробн. приводять до збільшення кількості одночасно фіксованих даних про об'єкти й процеси виробничо-госп. діяльності. Принцип інформаційної єдності даних вимагає однозначної (з врахуванням принципу замовчування) побудови структури даних, системи йменування даних, тобто, щоб одні й ті самі чи тотожні факти й об'єкти не можна було віднести до різних множин чи угруповань, щоб різні користувачі могли розуміти їх однаково. Принцип однозначності найменувань у системі визначає однозначний вибір ідентифікатора (які дорівнюють в АСУ найменуванню об'єкта чи властивості). Застосовувати цей принцип в АСУ не тільки не доцільно, а й шкідливо: на різних стадіях обробки даних (особливо внутрішньомашинної) одним і тим самим об'єктам і показникам для підвищення ефективності обробки даних можуть присвоюватися різні ідентифікатори, тому важливо, щоб нададі було забезпечено однозначне перетворення одних позначень в інші.

Сучас. засоби обробки даних різко зменшують вимоги до йменування даних — особливо порівняно з дичинно-перфорційними машинами. Тому в АСУ намагаються замінювати класифікатори, шифри й коди словесними та мовою інформаційними, які полегшують спілкування людини в системі. Інші вимоги ставлять в АСУ й до вхідних документів, і до форми відображення даних. Напр., в АСУ не треба уніфікувати форми первинної інформації — якоюсь мірою це навіть суперечить одному з найголовніших принципів, які лежать в основі ефективності АСУ, — принципів фіксування відхилів. Ця сама вимога правильна і щодо вихідної інформації. Тут найправильнішим є послідовне стилювання в життя принципу відображення даних у вигляді, максимально зручному для користування. Принцип уніфікації авертання до базових масивів важливий і для обміну інформацією між складовими й АСУ, а також між різними АСУ чи АСУ різних рівнів.

Часто говорять про принципи результативності інформації в АСУ, підкреслюючи тим самим, що проміжна інформація в процесі розв'язування задач — це «внутрішньомашинна» справа. Має значення й принцип автомат. інформаційного стикування задач, який полягає в тому, щоб уникати проміжного введення інформації між двома різними задачами, якщо тільки не потрібний аналіз і коректування даних на основі знань та інтуїції висококваліфікованого спеціаліста.

При створенні АСУ висунуто ще й принцип нових задач, відповідей до якого для нової техніки обробки даних, для найновіших матем. моделей і методів треба не просто переводити традиційно організовані інформаційні процеси на нову тех. базу, а докорінно реорганізовувати всю систему обробки даних та управління. Особливо легко простежити за цим на організації бухгалтерського обліку в АСУ (див. *Бухгалтерський облік автоматизовано*).



зац(я), де певною мірою відбувається повернення (по спіралі) до меморіально-ордерної форми рахівництва. Конкретизацією цього принципу є принцип моделювального характеру розв'язування планово-управлінських задач, який відображує загромадженій досвід розв'язування цих задач. Особливо важливим є те, що імітаційне моделювання як засіб розв'язування оптимізаційних задач інваріантне по відношенню до використання різних рішоманітних критеріїв, які залежать від ситуації. Принцип різноманітних моделей підкреслює необхідність будувати й використовувати моделі різного ступеня детальності й агрегації для різних цілей (прогнозування, прикидання плану, перспективного й поточного планування, оперативного планування та диспетчеризації). Однак при цьому треба, щоб було виконано замову автомат. інформаційного стикування цих моделей, у т. ч. імітаційних моделей та інформаційної моделі.

Керуючу інформацію в АСУ, як і пераказу, завжди можна віднести до якихось об'єктів і процесів. Отже, кабелементарніші відомості відображувального та приписувального характеру завжди мають об'єктно-процесну прив'язку. Принцип об'єктно-процесної прив'язки первинних і керуючих документів відіграє важливу роль на стадії розробки й створення систем. Не всі дані, які виробляються в АСУ, мають строгу спрямованість на функції, що їх реалізує ця система, т. з. звітна інформація в кіберні, аспекти здійснює те саме інформаційне стикування задач і моделей різних рівнів.

Добитися всіх переваг АСУ над іншими формами організації обробки даних у системах управління можна тільки тоді, коли виконано принцип автомат. організації й диспетчеризації розв'язування задач і реалізації інформаційних процесів в АСУ. З усього сказаного випливає, що необхідно сформулювати й принцип моделювального характеру матем. забезпечення АСУ — не тільки для того, щоб реалізувати моделювальні алгоритми розв'язування задач планування й управління і зобразити процеси та об'єкти у вигляді інформаційної моделі, а й для того, щоб розв'язувати задачі організації, диспетчеризації та реалізації інформаційних процесів. Тех. комплекс АСУ повинні забезпечувати виконання перелічених принципів.

АСУ аж ніяк не ліквідує функцій управління як функцій аналізу та прийняття рішень, докорінних змін зазнають тільки технологія й організація матеріальної основи управління — процесів фіксування, циркуляції, обробки та використання інформації. Вже перші розроблені та впроваджені АСУ довели свою життєздатність та ефективність. Впровадженню автоматизованих систем управління підприємством й АСУ технологічними процесами; автоматизації й системна організації інформаційних процесів набули великого поширення на транспорті, в торгівлі, у викладанні і в охороні здоров'я. ЕОМ використовують для оперативного перероз-

поділу ресурсів у галузях та відомствах, для розв'язування задач розмунування виробн. і матеріально-тех. постачання. В деяких міністерствах Шведедо в дію перші черги галузевих АСУ (ГАСУ). XXIV з'їзд накреслив розгоряту програму впровадження АСУ в народне г-во й поставив завдання розробити загальнодержавну автоматизовану систему збирання інформації, обліку, планування та управління нар. г-вом на базі єдиної держ. мережі обчисл. центрів (див. *Обчислювальні центри мережі*).

Лит. Автоматизовані системи управління підприємством. К., 1966. Кибернетика й вычислительная техника, в. 12. К., 1971. Механизация автоматизации управления. За 3 К., 1972. Актуальные проблемы управления, кн. 1. М., 1972. Гаушкова В. М. Внедрение в АСУ. К., 1972 [біб.погр. с. 304—308].

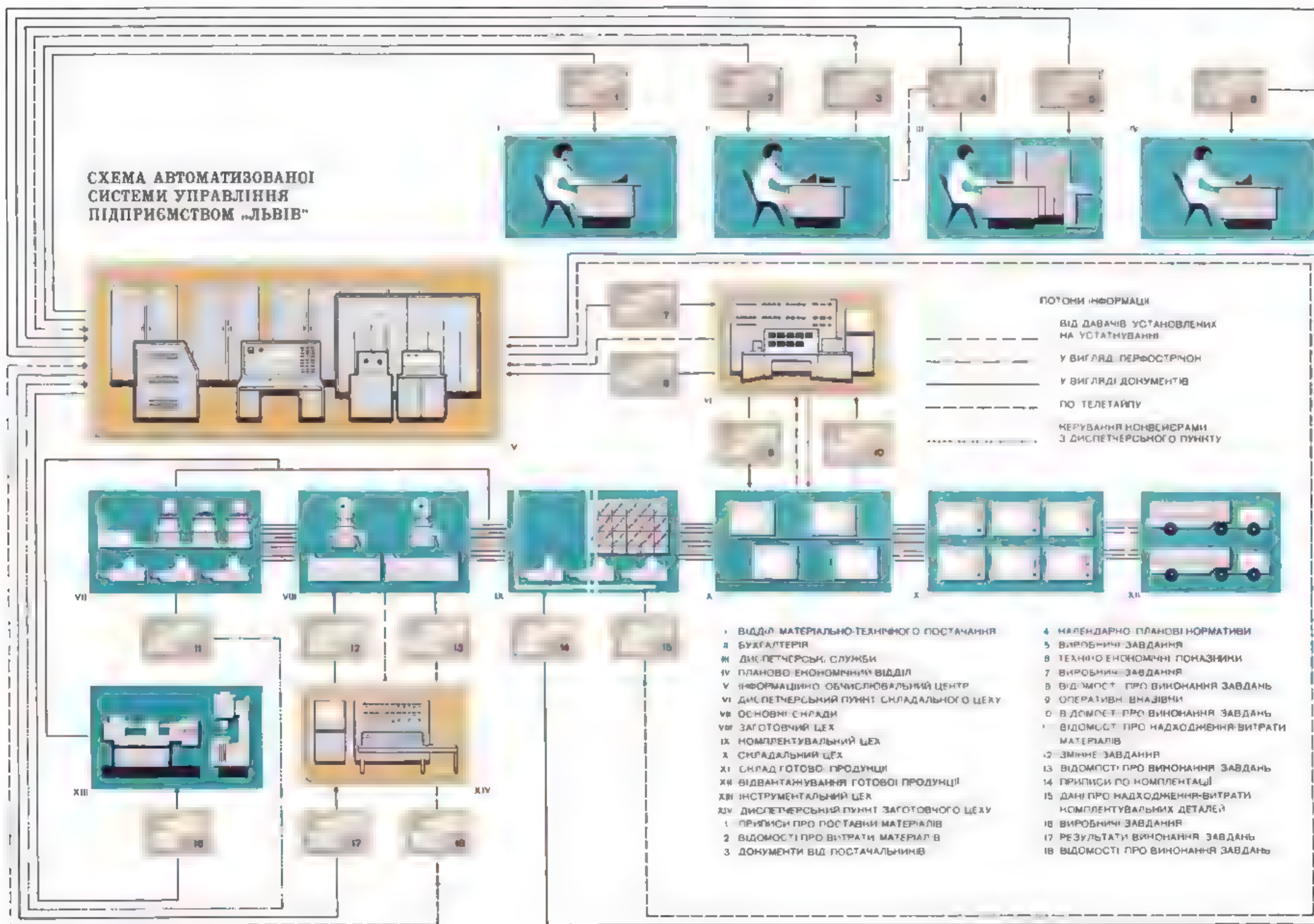
В. В. Штурба.

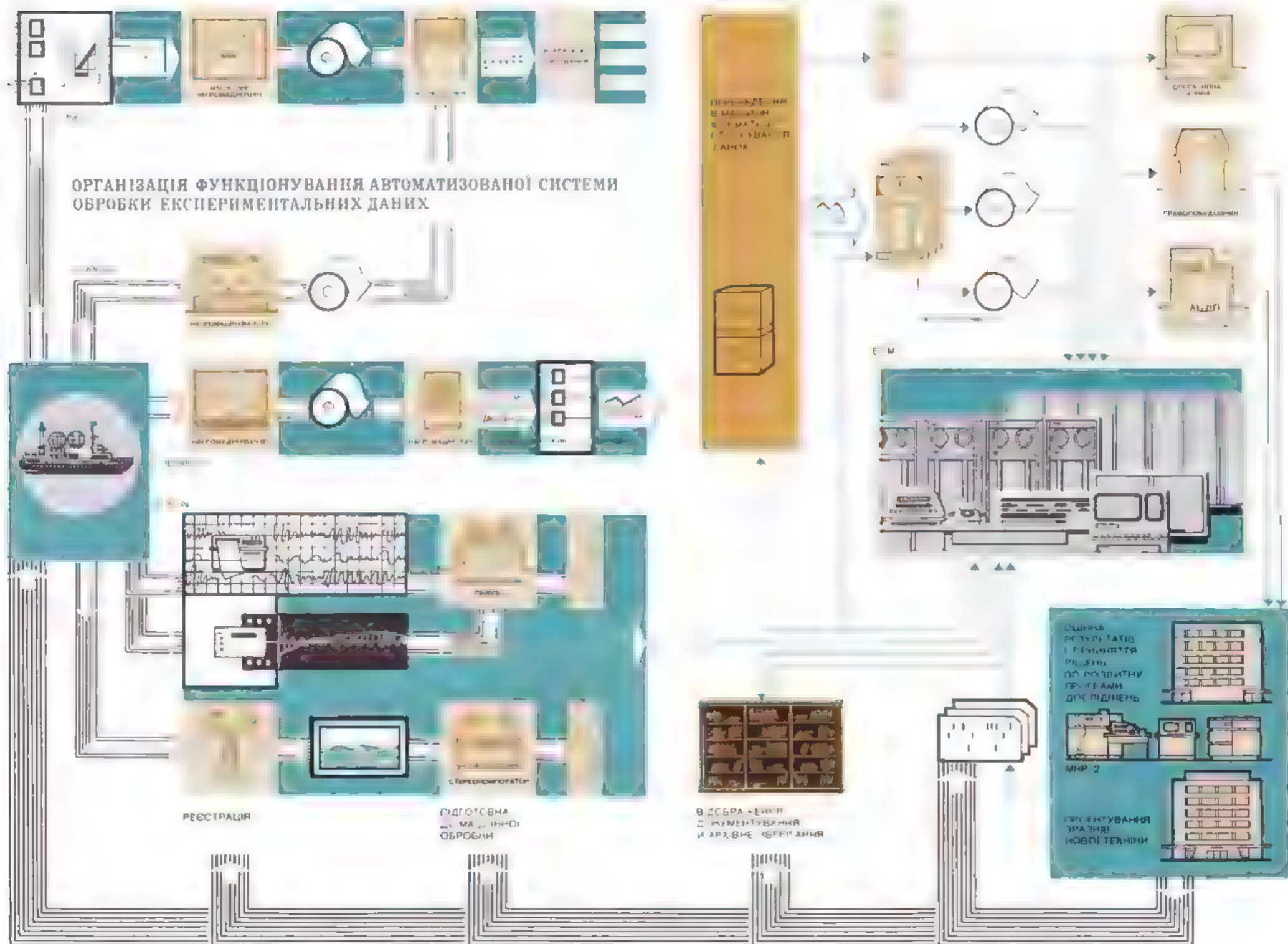
**АВТОМАТИЗОВАНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ПІДПРИЄМСТВОМ (АСУП)** — системи управління виробничо-господарською діяльністю підприємств, у які органічно входять інтегровані обробки даних системами, головною метою яких автоматизація інформаційних процесів на підприємстві й удосконалення форми організації виконання цих процесів.

Складність управління сучас. виробничим привела до заміни простого керівництва системами управління. Їх принципово нові форми управління, основані на суворій упорядкованості виконання багатьох функцій управління, зокрема на координуванні спец. функцій безпосереднього управління (див. *Базисна контурна система автоматичного керування*). Складність управління підприємствами зумовлюється багатьма причинами. Головні з них велика кількість елементів системи (устаткування, робітники, технологічні операції) й високий ступінь їхнього взаємозв'язку в процесі виробничо-госп. діяльності, невизначеність результатів виконання багатьох процесів (брак, абої, не своєчасне постачання, нерегулярність попиту) тощо. Істотним є те, що об'єктами й суб'єктами управління на підприємстві є люди, а регулювати поведінку людей можна не так ужо й легко та прямолінійно. Складні ситуації викликають ще й тому, що підприємства постійно змінюються, розвиваються як системи (в самоорганізовуваних системах), що до завдань управління ними належать і проектування, й управління процесами цієї зміни та розвитку.

Створення і впровадження на підприємстві АСУП приводить до того, що інформаційними процесам, організації їх, проектуванню, підготовці й виконанню приділяють таку саму увагу, як і виробничим. У структурі управління підприємством виникає спеціалізований підрозділ — інформаційно-обчислювальний центр підприємства (ІОЦ). Цей підрозділ відповідає за упорядкування, регламентацію та безпосереднє виконання інформаційних процесів на підприємстві. Осн. потоки інформації реалізуються на підприємстві через його ІОЦ.

# СХЕМА АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ПІДПРИЄМСТВОМ „ЛЬВІВ”





Додаток 1. Автоматизована система обробки експериментальних даних

Сучасні тех. засоби обробки даних дають змогу організувати виконання інформаційних процесів на основі принципово нової технології. На підприємствах в умовах АСУП внаслідок того, що рух і переробка інформації в багато разів прискорюється, вдається значно скоротити запізнення між відхиленням від нормального, запланованого ходу процесу, з одного боку, і прийняттям рішення — з другого; з'являється можливість бачити «температурний листок» підприємства, швидше виявляти виниклі чи можливі збої і одночасно запобігати їм чи ліквідувати їх. АСУП дає змогу розв'язувати й такі задачі, що їх раніше не розв'язували через труднощі, затрати часу і витрати, — це оптим. перспективне й оперативне планування виробн., оперативний розподіл і використання ресурсів. По-новому організовують і роботу апарату управління. Працівник управління стає невід'ємною ланкою в людино-машинній системі управління, що меює АСУП, праця його чіткіше проектується, планується, регламентується й контролюється.

Суть розроблення АСУП — удосконалення системи потоків інформації (як матеріальної основи всієї системи управління) на підприємствах, система вироблення й прийняття перспективних і оперативних рішень. Істотно змінюється й організація власне інформаційних функцій в управлінні. ІОЦ поступово «вбирає» в себе всі роботи (і служби) інформаційного характеру й перетворюється на єдиний координуючий-керуючий центр підприємства, де збирають, дослід і аналізують спеціалісти управління якнайкраще поєднуються з швидкодіючим автоматом, засобів переробки інформації. Більшість розв'язування на підприємстві задач (розроблення техпромфінплану підприємства, обчислювання затрат і собівартості продукції, прогнозування тех. показників і продуктивності праці) дають прийнятні вірогідні результати лише тоді, коли організовано людино-машинні методи розв'язування їх.

В автоматизованих системах управління (АСУ) за допомогою сучасних тех. засобів реалізуються процеси, характерні для інформаційних систем: фіксування інформації про ті процеси виробничо-госп. діяльності, які відбуваються, відображення стану й динаміки цієї діяльності в т. з. базових масивах, які виконують функцію інформаційної моделі підприємства. Інформаційна модель підприємства за допомогою програмного апарату матом. забезпечення АСУП дає змогу одержувати різні систематизовані дані про всі етапи виробничо-госп. діяльності. Інформаційна модель постачає й первісні дані під час розв'язування задач економ. прогнозування та планування. Реалізація в системі управління тільки функцій інформаційної системи значно скорочує документооборот на підприємстві, ліквідує різноманітні т. з. проміжні документи, введені, як правило, для раціоналізації традиційних ручних форм документообороту, приводить до підвищення

вірогідності та оперативності відомостей, поліпшує культуру виробн. й управління на підприємстві. Найбільшого економ. ефекту вдається досягти тоді, коли на підприємстві розв'язано задачі прогнозування і особливо оптим. планування виробн. Своєчасне прогнозування можливих збоїв у виробн. (напр., внаслідок некомплектності постачання матеріалів чи виробництва заготовок) дає змогу жити заходів по ліквідації цих збоїв чи їхніх наслідків. Розв'язання задач оптим. добору програм підприємства й розподілу їх за періодами дає змогу значно підвищити рентабельність виробн. Розв'язання задач оптим. календарного планування виробн., оптим. розподілу матеріальних та трудових ресурсів для виконання робіт сприяє поліпшенню фондівдодаті, завантаження устаткування та використання ресурсів.

Принципово «позамашинним» в АСУП залишаються: 1) первинні документи, в яких фіксуються безпосередньо результати виконання процесів виробничо-госп. діяльності; 2) приписи технологічного та організаційного характеру, що їх розробляє людина; 3) зв'язки на одержання тих чи інших даних, на розв'язування задач; 4) вихідні документи і дані, які виводяться з пам'яті ЕОМ на різні друкувальні чи індикаційні пристрої. Всі інша (проміжна) інформація, яка займала певне місце в традиційних системах управління, стає суто внутрішньомашинною.

В АСУ виділяють функціональні та забезпечувальні підсистеми. Функціональні підсистеми безпосередньо виконують функції управління виробничо-госп. діяльністю. Такими функціями є, напр., конструкторсько-технологічна підготовка виробн.; тех. підготовка виробн.; постачання, комплектування й складування; виробничтво (основне й допоміжне), збут, реалізація продукції, фінансові операції та бухгалтерський облік; економ. аналіз виробничо-госп. діяльності; облік кадрів. Залежно від складності управління тією чи іншою функцією та її виконання в АСУП і виділяють ту чи іншу підсистему, напр. підсистему тех. підготовки виробн. чи оперативного планування та диспетчеризації осн. виробництва.

Забезпечувальні підсистеми виконують власне інформаційні процеси в АСУП і відповідають за підготовку та організацію їх. Найчастіше виділяють системи матом., програмного, тех., інформаційного й організаційного забезпечення. До матем. забезпечення входять моделі, методи й алгоритми, їхнє обґрунтування розв'язування задач і виконання інформаційних процесів в АСУП. Програмне забезпечення — це комплекс програм та інструкцій до них для розв'язування задач на ЕОМ. Тех. забезпечення включає техніку автоматизації й механізації виконання інформаційних процесів в АСУ, а також інструкції щодо експлуатації їх та забезпечення надійного функціонування. Інформаційне забезпечення регламентує потоки й підготовку інформації в АСУП, організацію викону-

вання інформаційних процесів в ІОЦ Організаційне забезпечення регламентує дії кожного працівника управління, кожного робітника по відношенню до системи інформації і всієї схеми прийняття рішень в АСУП. Програмне забезпечення поділяється на спеціальне та загальне. Спец. програмне забезпечення спрямоване на одержання документів і відомостей виробничо-госп. значення. Загальне програмне забезпечення включає програми, призначені для перетворення даних (сортування, групування, запити) беззастережно до їхнього змісту. Чим вищий рівень загального програмного забезпечення, тим легше будувати спец. програмне забезпечення.

Найповніше всі перелічені елементи АСУП представлено, напри., у системі «Львів», яку розроблено і впроваджено на Львівському телевізійному заводі. В цій системі всі інформаційні процеси, включаючи фіксування й підготовку первинної інформації, яка відображує хід і стан виробн. і госп. діяльності, обробку цієї інформації й підготовку різної звітності, зосереджено в координаційно-керуючому центрі (ККЦ) підприємства. В ККЦ зосереджено інформаційно-обчисл. комплекс системи, в'єднаний *каналом зв'язку* з місцями виникнення інформації — робочими місцями, верстатами, складами, диспетчерськими пультами цехів та ділянками і пультами тех. контролю. Виконання виробничих процесів, надходження матеріалів та комплектувальних деталей, здавання готової продукції, фінансові операції фіксуються в спец. документах і передаються в ККЦ імпульсами від датчиків і мікроімпульсів. Уся ця інформація накопичується в загальному обчислювальному пристрої *електронних обчислювальних машин* і використовується для підготовки довідкових і звітних документів та розв'язування різних задач.

У системі «Львів» можна розв'язувати такі задачі. **Задачі управління виробництвам.** Оперативно-календарне планування заготівельних цехів: визначення величин партій деталей і періодичності їх пуску у виробн., перевірка достатності виробничих потужностей цеху, побудова оптимального плану-графіка з урахуванням коефіцієнта важливості пуску-випуску деталей, видавання цехові оперативного плану виробн. з урахуванням наявності деталей у незавершеному виробн.; щоденне видавання зведення результатів роботи цехів, видавання щоденних змінних завдань тощо.

**Управління цехами масового виробн.** (цех складання телевізорів, деревообробний цех), яке полягає у видаванні змінних завдань, змінних рапортів, добових рапортів та оперативних планів виробн. Управління комплектувально-заготівельними цехом полягає у видаванні чотириденного дефіциту, тризмінного дефіциту надходження, витрачання й наявності деталей на кожну добу. Визначення річної потреби в дублерах оснащення і місячному резерві для заготівельних цехів, складання графіків споживання й виробн. оснащення й інструменту.

**Задачі планування матеріально-тех. забезпечення виробн. і техніко-економ. планування:** визначення нормативних затрат на осн. виробництва (по телевізорах), відхилення від нормативних затрат, щоденного виконання плану реалізації, податку, обороту й прибутку по телевізорах, щоденного виконання плану цехами осн. виробництва в натуральному й грошовому виразах. Планування кількості осн. робітників за професіями та розрядами й фонду заробітної плати цехам осн. виробництва; визначення потреби в матеріалах і комплектувальних виробн. для цехів осн. виробництва, дефіциту матеріалів і комплектувальних виробн. різних запасів матеріалів на складах заводу, наднормативних і недієздатних на складах заводу, складання зведеної відомості щоденного виконання плану цехами осн. виробництва, плану реалізації, прибутку й рентабельності по заводу.

**Задачі обліку** включають: облік товарно-матеріальних цінностей на складах заводу, товарно-матеріальних цінностей у складах цехів і відділів, осн. засобів, готової продукції, реалізації телевізорів, масових операцій, банківських операцій, розрахунків з підв'язаними особами, розрахунків з дебіторами тощо, залишків, надходження й витрати сировини й матеріалів, залишків, надходження й витрати комплектувальних виробн., розрахунків з постачальниками за одержані матеріальні цінності, складання балансу деталей власного виробн.

У системі розв'язують задачі контролю над роботою і простоями осн. устаткування, завдяки цьому можна організувати дієвий облік завантаженості й використання устаткування по всьому заводу, а особливо на найвідповідальніших ділянках виробн.

Для забезпечення ефективного розв'язування цих задач управління виробн., планування та обліку, накопичення облікової й підготовчої довідкової інформації в системі «Львів» розроблено й функціонує суттєвий комплекс обробки даних, оснащений спец. програмно-матем. апаратом. Як центр, обчислювач комплексу використовують дві (спочатку була одна) універсальні ЕОМ «Мінск-22», доукомплектовані блоками переривання програм (БПП), блоком додаткових команд (БДК), блоком запиту пам'яті (БЗП), блоком динамічного аналізу збоїв (БДАЗ), блоком зв'язку з оператором (БЗО). В ЕОМ, що їх використовують як центр, обчислювач, передбачено об'єднання їх за допомогою блока обміну (БО) по зовнішній та оперативній пам'яті й зовнішньому пристрою (іл. між с. 40—41).

Характерною особливістю роботи ЕОМ у складі тех. комплексу АСУП є системний режим її використання: робота в замкненому контурі управління підприємством в реальному масштабі часу, автоматизоване розв'язування багатьох взаємопов'язаних задач управління окремими виробничими підрозділами підприємства й підприємством загалом, автомат. керування черговістю й по-

слідовністю розв'язування задач. Схемено-програмний апарат розподілу часу, яким керує програма-диспетчер, дає змогу сумістити безперервний обмін оперативною інформацією з процесами розв'язування осн. задач управління й обробки даних. Інші пристрої, що їх розроблено в тех. комплексі системи «Альві», забезпечують дистанційне введення в осн. об'єктовач оперативної виробничої інформації від різних джерел безпосередньо в момент її виникнення, а також введення необхідних повідомлень у різні виробничі підрозділи і служби апарату управління виробн. Визначено розв'язано в об'єкт. комплексі працюють розроблені спеціально для системи «Альві» диспетчерські пункти заводу й цехів, таблиці й лічильники для візуального стеження за параметрами, які визначають заг. динаміку виробництва.

Впровадження системи «Альві» привело до значного зростання ефективності управління підприємством, виробничо-госп. діяльності загалом, забезпечило додаткове збільшення випуску продукції на 7%, зниження рівня запасів на 20%, прискорення оборотності оборотних засобів на 10%, скорочення інженерно-технічного та адміністративного управлінського персоналу. Економіч. ефективність системи становить близько п'ятилітнього карбованця економії за рік, строк окупності 7 — одна рік.

7. Автоматизаційні системи управління підприємством. К. 1966. Автоматизированные системы управления предприятием, в 1-4 т. 1966-69. Автоматизация и автоматическое управление. № 3 К. 1969. Информатика и вычислительная техника в 12 К. 1971. Г. ут. м. в. В. М. Введение в АУ. К. 1972. Информатика в 3-х т. В. А. Ширин.

**АВТОМАТИЗОВАНОГО НАВЧАННЯ КЛАС** — учбопе приміщення, обладнане технічними засобами для реалізації програмованого навчання. Використовують його для поліпшення якості керування навчальним процесом, для повнішої реалізації потенціальних можливостей програмованого навчання та контролю. Осн. особливості автоматизованого навчання є керування самостійна робота слухача. Тех. пристрої А. н. к. призначено для забезпечення процесу навчання, в результаті якого слухачі набувають нових знань, умінь і навичок. Застосування А. н. к. в навчальному процесі призводить до збільшення продуктивності праці викладача й тих, кого навчають. Кожного слухача умиляють відносно самостійним об'єктом керування, тобто керування його діяльністю здійснюють і викладач, і навчальна програма. Система керування навчанням при цьому є двоступеневим. На верхньому ступені перебуває викладач, на нижньому — тех. навчальні пристрої (див. *Навчальна машина*). Така побудова системи керування дає змогу розподіляти перероблювану інформацію відповідно до пропускну здатності її ступенів.

Ступенева (ієрархія) побудова системи керування процесом групового навчання забезпечує перехід від одноканального (усередненого) розімкненого керування навчанням до багатоканального (диференційовано-

го) замкненого керування. Кожний слухач при цьому може вивчати матеріал на доступному йому рівні складності й у потрібному темпі. Викладач, завдяки тому, що частину його функцій покладено на навчальні пристрої, одержує змогу найактивніше й цілеспрямовано керувати навчально-виховним процесом. Одним з його гол. завдань на уроці в класах для автоматизованого навчання є заповнювати своєю діяльністю все те, чого не враховано чи не можна врахувати наперед у навчальній програмі, а також раціонально поєднувати програмовані методи навчання з традиційними. Вивільнення викладача від багаторазового дублювання однакових питань дає йому змогу якісніше проводити індивідуальну роботу з тими, кого навчають, покращити використовувати свою кваліфікацію й методичну майстерність.

За діпазоном виконуваних у навчальному процесі завдань А. н. к. поділяють на спеціалізовані та багатфункціональні. Відмітною рисою багатфункціональних класів є те, що в них форми взаємодії між людиною і тех. пристроями практично не залежать від змісту й мети навчання (або контролю). Це означає, що один і той самий клас можна використовувати для навчання (або контролю) в різних предметах. Основу устаткування будь-яких типів А. н. к. становлять навчальні або контрольні пристрої. Ними оснащують робочі місця тих, кого навчають. Крім цих пристроїв, у комплекті устаткування найдосконаліших А. н. к. включають міновипаратору й телевізори, діапроектори й епроектори, відображувальну й ресетруючу апаратуру та ін. Застосовують цю апаратуру, щоб раціоналізувати працю викладача на різних етапах навчання, щоб вивільнити його від виконання трудомістких і нетворчих функцій по збиранню та обробці статистичного матеріалу. Багато А. н. к. мають пульти керування всім комплексом тех. засобів, використовуваних у класі. Наявність таких пульти полегшує обслуговування та експлуатацію класів для автоматизованого навчання, дає змогу здійснювати оперативний контроль навчання всієї навчальної групи. Блок-схему типового А. н. к. наведено на мал. 1.

За характером керування робочими місцями розрізняють два типи А. н. к. До першого належать класи, устатковані тех. пристроями автономного виконання. Працюють в таких пристроях, як правило, індивідуалізовано, викладач лише спостерігає за навчанням і, коли треба, відповідно впливає на того чи ін. слухача. До 2-го типу належать А. н. к. з централізованим керуванням. Такі класи мають заг. систему зв'язу робочих місць (пульти) слухачів з пултом керування. Навчання й контроль у таких класах можуть здійснюватися в індивідуальному темпі й у темпі, що його встановлює викладач. Найдосконалішими й найперспективнішими А. н. к. з централізованим керуванням є навчальні комплекси, виконані на основі ЦОМ (іл. між с. 472—473). Завдяки великій швидкодії



та обсягові пам'яті машини А. н. к. є ефективним засобом керування навчанням великої кількості учнів (до сотень і тисяч чол.). При цьому є змога використовувати найдосконаліші (зокрема, адаптивні) навчальні програми й способи взаємодії людини з тех. пристроями, забезпечувати виконання ширшого кола навчальних завдань. Окрім реалізації навчальних програм, навчальний комплекс забезпечує ще й збирання та обробку статистичного матеріалу про якість засвоєння знань

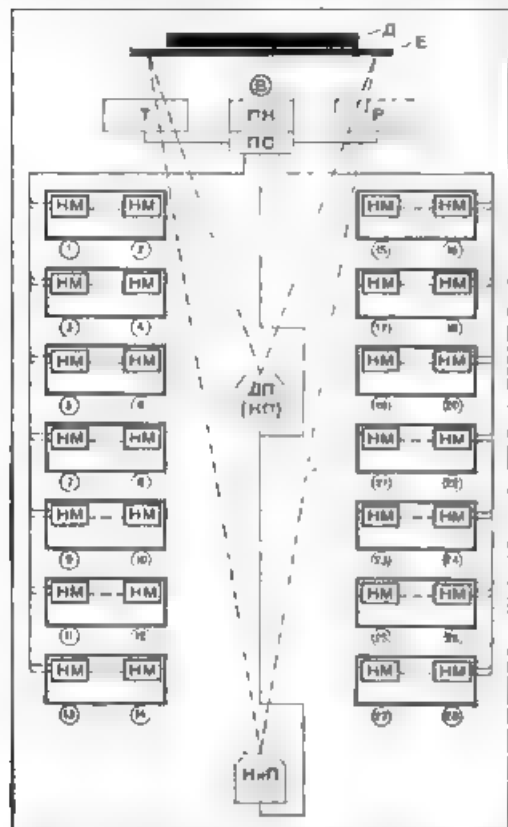


Схема типового класу автоматизованого навчання. 1 — 14 — робочі місця слухачів; В — робоче місце викладача, ПН — пульт керування, НМ — навчальні (інструкційні) машини, КНП — класна дошка, ДП (НП) — дисплеї (класна дошка); Д — класна дошка, Е — екран, Т — відображуване табло, Р — розростача апаратура, ПС — пристрій спринження ПН в технічних засобах.

і цим створює умови для точного кількісного аналізу й прогнозування процесу навчання.

До складу навчального комплексу, крім ЦОМ і робочих місць слухачів, входять пульт керування, засоби зберігання й видавання навчальної інформації та засоби відображення і реєстрації результатів навчання. Пульт керування призначено для здійснення поточного контролю за навчанням і керуванням тех. засобами комплексу. Засобами зберігання навчальної інформації можуть бути альбомы програваних матеріалів, діафільми, кінофіль-

ми або відеомagnetофонні записи. Залежно від типу цих засобів і способу видавання інформації визначають і конструкцію робочих місць слухачів. Перший тип робочих місць забезпечує адресацію слухача до певної сторінки чи параграфа навчальної програми, другий — експонування з екрана проектора, третій — експонування з екрана телевізора замкненої телевізійної системи і т. д. Перспективність використання навчальних комплексів зумовлюється й тим, що застосування їх для навчання великої кількості слухачів можна зробити економічно вигіднішим, ніж використання А. н. к., оснащених тех. засобами автономного виконання. Див. також *Взаємодія людини з обчислювальною машиною*. Лін. Ростунов Т. И. Программированное обучение и обучающие машины. М., 1967 [бібліогр. с. 124 — 129]; *Применение ЭВМ в учебном процессе*. М., 1969; Столаров Л. М. Обучение с помощью машин. Пер. с англ. М., 1965.

О. Г. Мизюков, М. А. Шимонюк.  
**АВТОМАТИКА** (грец. *αὐτομάτος* — самодіючий) — 1) Галузь теоретичних і прикладних знань про автоматично діючі пристрої й системи. Термін А. стосується значно ранішого періоду розвитку досліджень і практичних розробок у галузі автом. регулювання й керування. Зі становленням і швидким розвитком кібернетики в рамках цього нового наук. напрямку визначився великий розділ — *кібернетика механічна*, до якої складовою частиною звійшла й А. як *автоматичного керування теорія* разом з теор. і прикладними основами створення й організації функціонування відповідних тех. засобів (*керуючих обчислювальних машин, керуючих пристроїв, датчиків, виконавчих механізмів та пристроїв*, що забезпечують взаємодію людини з обчислювальною машиною в системах автоматизованих). 2) Сукупність механізмів і пристроїв, що діють автоматично.

Див. *Агрегатна уніфікована система, Пневмоніка, Телемеханіка й Універсальна система елементів промислової пневмоавтоматики*.

Б. В. Тиморєв.  
«АВТОМАТИКА» — український науково-технічний журнал. Висвітлює наукові дослідження в галузі теорії автоматичного регулювання, екстремальних, оптимальних, адаптивних і самонастроюваних систем, інформаційних та інтерполяційних систем, біоніки та евристичного програмування, комплексної автоматизації та застосування обчислювальної техніки, нових елементів і пристроїв автоматичних, надійності й технічної діагностики, теорії автоматів та цифрових обчисл. машин. Видає «А.» Інститут кібернетики АН УРСР з 1956. Виходить 6 раз на рік укр. мовою, а також англ. мовою у США.

**АВТОМАТИЧНА ОБРОБКА ДАНИХ** — виконання комплексу операцій над даними за допомогою цифрової обчислювальної машини (ЦОМ) для перетворення різних відомостей і фактів на відомості, що являють цінність з певного погляду. А. о. д. є обов'язковою складовою функцією АСУ. Осн. носіями відомостей на підприємствах, в установах і орг-ціях є документи — першоджерела, на-



громаджувані, технологічні — та графіки, креслення, схеми, номенклатура-цінники, прейскуранти, специфікації та ін.; даніми можуть бути й показники контрольних-вимірвальних приладів і лічильників, годинників і табло; вони можуть виникати під час листування, нарад, зборів і бесід. Все це характеризує різноманітність форм подання, джерел зникнення й засобів рестрування та зберігання даних. Прикладами типових завдань А. о. д. є нарахування зарплати на підставі відомостей про час, який затратили робітники, або обсяг продукції, яку вони виробили інвентаризація складського майна на основі аналізу накладних на одержані й виведені товари, визначення потреби в сировинних ресурсах підприємства на основі виробничого плану, облік збуту товарів, облік попередніх замовлень катків на літак, обробка історичних даних для збирання статистики і т. д. Як правило, А. о. д. піддають масам даних. Звичайно до масиву включають однорідні за формою й структурою організаційні записи; як правило, число записів у масиві не визначене, в кінці масиву після останнього запису дається запис про вичерпання масиву. Розрізняють осн. масиви, до яких включаються записи про стан певних об'єктів обліку або планування, і масиви поточних записів про зміни, які стосуються цих самих об'єктів. Основні масиви, що мають усі необхідні нормативно-роз'яснювальні, довідкові й ін. сталі дані, періодично оновлюються за осн. масивів поточних даних і підтримуються в стані готовності. Чим повніші за змістом основні масиви, тим економічніше можна провадити А. о. д.

Процес А. о. д. складається з одержування вихідних даних, перетворення їх за певним планом, з урахуванням нових даних, і повідомлення результатів. Одержування вихідних даних передбачає три стадії збирання, або первинний облік, переписування для надання фактам форми, вручної для обробки, та перевірку. При збиранні даних факти фіксують у момент звернення їх, а обробку даних можна виконати й пізніше, з міру потреби. Для автомат. збирання даних створюються спец. пристрої (табеляні годинники з перфострічками або перфокартами, буквоперфуючі пристрої, читачі автоматів та ін.). Механізація первинного збирання даних — одна з найважливіших передумов А. о. д., бо первинний облік трудомісткіший за обробку інформації. Осн. носіями інформації при первинному обліку є папір, перфокартки й перфострічки; однак для дальшої обробки за допомогою ЦОМ їх треба замінювати ефективнішими для алгоритмічної обробки на ЦОМ носіями, такими, як стрічки магнітні, диски магнітні та ін. Дані з одних носіїв на інші, як правило, переписуються автоматично програмами або спец. пристроями. Одержуючи вихідні дані, велику увагу приділяють перевірці їхньої повноти й точності та відповідності встановленим для них форматам і формам подання, а також — гра-

фічним області зміни (щодо числових величин). Перетворення даних полягає в перегруповуванні їх та зміні їхніх значень. Характерною рисою цього процесу є багаторазове повторювання однотипних операцій для послідовних груп даних. Перегрупування даних включає в себе зміну послідовності й вставлення, вилучення або вибір окремих позицій масивів. Необхідність перегруповувати дані виникає тоді, коли записи певного типу використовуються для складання кількох звітів; далі, в процесі збирання даних, у зв'язку з одночасною фіксацією їх, вони можуть бути й змішані довільно. Та оскільки процедури обробки й організації масивів ефективніше реалізуються над упорядкованими послідовностями записів, то записи звичайно піддають сортуванню даних. Типові процедури обробки даних в: пошук і вибирання записів масиву, що мають зазначену властивість; уцілювання масиву або вилучення деяких реквізитів із записів масиву; переконфонування реквізитів у запису, зливання записів кількох масивів у записи нового масиву, переміщення значень реквізитів з одних записів в інші; обчислювання значень вихідних даних за арифм. формулами; приймання елементарних рішень. Різноманітність форм подання даних у масивах, зумовлена різноманітністю пристроїв збирання й носіїв інформації, потребує виключення до системи А. о. д. процедур взаємних перетворення даних на різні форми подання й формати. Повідомлення одержаних результатів полягає в *редукції даних* і поданні їх у формі, зручній для споживачів вихідних даних; споживачам можуть бути й людина, й нова програма А. о. д.

Для ефективного проектування процесів А. о. д. широко застосовують мови програмування. Необхідними властивостями мови програмування, орієнтованої на А. о. д., є можливість оперувати зі складними ієрархічними структурами даних; різноманітність допустимих у ній форм подання й форматів даних; розвинутий апарат для введення й виведення даних; можливість звертатися до довільної вершини дерева даних, змінювати структуру дерева даних і будувати нові дерева; наявність засобів переконфонування, зливання, уцілювання, пошуку, вибирання і т. д. та можливість видавати документи заданої форми. Мовами програмування для описування процесів А. о. д. є КОБОЛ, який дуже поширився як стандартна мова, орієнтована на А. о. д., ТАБСОЛ, ФАКТ, ПЛ-1 та розроблені в Радянському Союзі мови АЛГЕК, АЛГЕМ та інші.

Внаслідок розширення масштабів і збільшення темпів виробництва та значного ускладнення зв'язків між галузями нар. г-на й підприємствами не можна раціонально керувати господарством, не перевірбляючи величезного обсягу інформації, що на окремих підприємствах і в орг-ціях обчислюється десятками мільйонів показників та мільярдами позначень. Потік інформації безперервно

збільшується внаслідок швидкого зростання суспільного виробл. й дедалі ширшого застосування математичних методів при визначенні різних показників діяльності підприємств та організацій. А. о. д. забезпечує не лише скорочення адм.-управлінського персоналу, а й, найголовніше, — швидко, повне й точно збирання даних, точну обробку їх для одержання рішень, які дають можливість оперативно керувати складним виробництвом.

Лит. Корольов М. А. Обработка экономической информации на электронных машинах. М. 1965. Киритов А. И. Программирование информации. Логические задачи. М., 1967 (Библиогр. с. 327). Лангун С. С., Гичарова Л. И. Автоматическая обработка данных. Химическая информация в памяти ЭВМ. М., 1973 (Библиогр. с. 156-160). S. Chittid R. N., Metcalfe W. E. Electronic Business Data Processing. New York - Chicago - San Francisco - Toronto - London. 1963. Грегори Р. Ван Горн Р. Система автоматической обработки данных. Пер. с англ. М., 1964. Современное программирование. Языки для электронных расчетов. Пер. с англ. М., 1967. Л. П. Бобенко

**АВТОМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕДИЧНО-БІОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ** — обробка даних про біомедичні процеси, представлені у формі кривих, яка виконується частково або повністю за алгоритмами, що реалізуються на обчислювальній машині широкого призначення чи на спеціалізованій ЕОМ. Об'єктом аналізу може бути будь-який із процесів, що відбуваються в організмі, лікувальному закладі чи в зовнішньому середовищі, представлений у вигляді графіка, кривих, ряду чисел, карт, розподілу біопотенціалів тощо. Графічними виразами медично-біол. процесів є електрокардіограма (ЕКГ), електроенцефалограма (ЕЕГ), електроміограма (ЕМГ), імпульсна активність (ІА) нервових клітин, графіки температури та ін. Розрізняють аналіз дискретних сигналів (напр., ІА) й аналіз неперервних сигналів (напр., ЕЕГ, ЕМГ та ін.).

Графічне представлення інформації застосовують у кібернетичній біології для вивчення властивостей біологічних систем для побудови її фіз. або матем. моделі за допомогою аналогових і цифрових ЕОМ. У кібернетичній медичній ця форма представлення інформації потрібна для діагностики, прогнозу, оцінки перебігу захворювання та впливу лікарських засобів при моделюванні лікувального процесу, зміні стану зовнішнього середовища та ін. Моделі аналізу медично-біол. інформації є переважно математичними. Широко застосовують автокореляційний і спектральний аналіз складного біол. процесу, напр., аналіз скоротливої функції міокарда можна здійснювати методом балістокардіографії. Цей метод аналізу дає змогу виділяти на ЕКГ випадкові й періодичні складові досліджуваного процесу навіть у тих випадках, коли дослідник не бачить нічого, крім безладно розподілених у часі хвиль і піків.

Все частіше використовують означення кроскореляційної ф-ції, яка показує ступінь зв'язку між двома-трьма процесами в певні моменти часу, напр., між частотами дихання й серцевого ритму, між тривалістю фаз серцевого циклу і ступенем підвищення тиску

крові в порожнинних серця та ін. Істотно, що ЕОМ при цьому не тільки обчислює ряди показників, а й будує графіки автокореляційної та ін. ф-цій. Дуже поширеною є автомат. побудова гістограм, амплітудних розподілів, часових інтервалів, фаз і датичних періодів. Перспективним є застосування алгоритмів багатофакторного аналізу, бо процес в живому організмі є результатом взаємодії багатьох факторів. Для побудови моделей цих процесів необхідні кількісні оцінки кожного фактора окремо.

Апарат математичної статистики й імовірностей теорії не є вичерпним для А. а. м. б. п., успішно можна поєднувати статистичні, часові й логічні методи аналізу. До таких методів треба віднести визначення спектра в динаміці, статистичне вивчення часових співвідношень між екстремальними точками й точками перегибу, методи евристичного вивчення показників та ін.

Для А. а. м. б. п. існують спеціалізовані обчислювальні пристрої, які передбачають обробку інформації за жорсткою схемою різних алгоритмів. Прикладами таких пристроїв є «Нейрон 1» (СРСР), «САТ-400» (США), «АТАС-401», «АТАС-501» (Японія) та ін. Обчисл. машини широкого призначення обробляють інформацію за широким списком алгоритмів. Однак проблема введення інформації в ЦОМ, пов'язана з автомат. аналізом, викликала значні труднощі. Тому для зчитування і переведення її, напр., на перфострічку застосовують пристрої типу «Силуэт», «Маск» і «Графік», а введення інформації здійснюється за допомогою перфострічок і перфокарток. Іноді для введення інформації у вигляді електричного сигналу використовують аналого-цифрові перетворювачі, напр., «Биокорд».

З середини 60-х років в СРСР і за кордоном (США, Японія, Франція, Англія і ФРН) ведуться роботи по створенню спеціалізованих біомедичних обчисл. комплексів, призначених для збирання й автомат. оброблення біоінформації.

Лит.: Математический анализ электрических явлений головного мозга. М., 1965; Кибернетика и вычислительная техника, в. 4. К., 1969; Кибернетика в медико-биологических исследованиях. М., 1971.

А. О. Попов, І. Д. Помомарова,  
**АВТОМАТИЧНИЙ ЦИФРОВО-ДРУКУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ** — див. Алфавітно-цифровий друкувальний пристрій.

**АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ТЕОРІЯ** — розділ кібернетики технічної, об'єктом дослідження якого є системи автоматичного керування (САК) різної природи й ступеня складності. А. к. т. розробляє принципи побудови систем керування й вивчає основні закономірності процесів, які відбуваються в них. А. к. т. є однією з наукових і методологічних основ, на яких цілеспрямовано об'єднуються зусилля спеціалістів різного профілю, які беруть участь у створенні сучасних складних САК. При вивченні процесів керування А. к. т. абстрагується від природи й конструктивних особливостей складових частин САК. Замість реальних об'єктів в А. к. т.

розглядають їхні адекватні моделі математичні.

Основи А. к. т. як науки закладено в працях англ. фізика Дж.-Н. Максвелла (1831—79), рос. вченого І. О. Вишнеградського (1832—95), словацького теплотехніка А. Стодоли (1859—1942) і рос. математика О. М. Ляпунова (1857—1918). А. к. т. досліджує дві осн. проблеми: 1) систем автоматичного керування аналіз та 2) систем автоматичного керування синтез. Першою було поставлено таку найпростішу, але актуальну й досі, задачу керування, яка полягає в підтримуванні заданого заданих сталих значень керованих координат об'єкта при відомій і шкідливих тим чи іншим способом збуреннях, які діють на нього. Осн. завданням систем такого роду (систем стабілізації) є компенсувати збурювальні дії на об'єкт. Це можна здійснювати двома різними способами, які відображають два основні принципи керування, використовувані в теорії та практиці побудови САК.

За принципом керування САК ділять на системи керування розімкнені й системи керування замкнені. У перших керуюче ділення формується у функції вимірюлого тим чи іншим способом збурювального ділення з метою компенсувати його. Найістотніша вада такого способу керування полягає в тому, що при цьому принципово неможливо компенсувати ділення інших невимірюваних збурень. Крім того, розімкнені САК принципово не здатні досить тривалий відрізок часу керувати нестійкими об'єктами керування. В замкнених САК реалізується фундаментальна ідея зворотного зв'язку, згідно з якою відхилення дійсних значень регульованих координат від їхніх потрібних значень використовують, щоб формувати керування, яке вертає систему до потрібного стану. Ця ідея, відома під назвою принципу керування за відхиленням (або керування зі зворотним зв'язком), лежить і нині в основі дії більшості сучасних САК різного ступеня складності й призначення. Універсальність цього принципу проявляється, зокрема, в тому, що застосовуючи його, можна керувати нестійкими об'єктами керування.

Характер осн. проблем А. к. т. найбільше визначити, розглянувши одну з типових задач керування. Нехай задано об'єкт керування, описаний рівнянням  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , де  $x$  — вектор фазових координат, та його початковий стан  $x(0) = x_0$ . Потрібно визначити таке програмне керування  $u^* = u(t)$ , яке переводить об'єкт із стану  $x_0$  в деякий інший кінцевий стан  $x_1$ . При цьому треба, щоб швидкості руху  $\dot{x} = f(x, u^*(t), t)$  досягався екстремум деякої міри якості роботи системи.

Так, напр., якщо об'єктом керування є літальний апарат, а заданою метою — зліт і досягнення положення  $x_1$ , то мірою якості може служити час  $T$  виконання програми або витрата енергії на виконання програми. Та-

ким чином, виникає задача визначення незбуреного руху (за термінологією Ляпунова)  $\dot{x} = f(x, u^*(t), t)$ , який має бажані, зокрема, екстремальні якості. Однак, усяка сирова реалізувати подібний програмний рух виявляється необгрунтованою навіть за точної реалізації  $u^* = u^*(t)$ , бо завжди існують невраховані раніше (нехай навіть дуже малі, але постійно діючі) збурення (напр., у випадку літального апарата — турбулентність атмосфери тощо) і крім того через різні причини дійсний початковий стан  $x_0 \neq x_0$ . Тому дійсний рух об'єкта буде істотно відрізнятися від програмного. У зв'язку з цим виникає задача визначення такого додаткового керування із зворотним зв'язком  $v = u - u^* = v(t)$ , де  $v = u - u^*$  — відхилення від програмного руху, яке забезпечувало б загасючий характер збуреного руху  $\dot{y} = \Phi(y, v(t), t)$ , де  $\Phi(\cdot) = f(y + x^*, v + u^*, t) - \dot{x}^*$ , тобто забезпечило б стійкість потрібного незбуреного руху. Таким чином, центральною проблемою в А. к. т. й, зокрема, в теорії замкнених систем є проблема стійкості в тому чи іншому розумінні. Оскільки до останнього часу А. к. т. застосовували майже виключно до об'єктів керування, математичні моделі яких описувалися за допомогою диференціальних або скінченнорізницевих рівнянь (лінійних або нелінійних), то при аналізі стійкості САК широко використовували якісні методи прикладної математики. Використовуючи спочатку існуючі в математиці методи розв'язання задач аналізу стійкості, А. к. т. надалі стимулювала їхній розвиток і розвинула нові, які не існували раніше в теорії коливань, частотні методи аналізу стійкості лінійних систем (див. *Стійкості критерії*), застосовували при аналізі стаціонарних і нестаціонарних САК — і неперервних, і дискретних, з розподіленими й зосередженими параметрами. Специфічні особливості нелінійних САК привели до постановки нової задачі про абсолютну стійкість, найбільшій розв'язки якої тепер вдається одержувати за допомогою частотних критеріїв абсолютної стійкості. Якщо до 50-х років 20 ст. при аналізі стійкості в А. к. т. як матем. моделі САК як правило використовували детерміновані моделі, які в багатьох випадках виявлялися неадекватними реальним САК, то в 60-х роках значного прогресу досягнуто в постановці й розв'язуванні нових задач аналізу стохастичної стійкості САК, тис поводження описується лінійними й нелінійними диф. або різницевими рівняннями, коефіцієнтами яких є випадкові функції часу з відомими статистичними характеристиками. Відповідна модифікація розвинутих раніше в А. к. т. частотних критеріїв стійкості й тут дає змогу одержати конструктивні результати. Оскільки багато САК працюють у режимі автоколивання, то природно, що в А. к. т. істотно розвитку набули методи аналізу періодичних режимів, основані, зокрема, на використанні в своєрідній формі методу малого параметра.

А. к. т. розвивалася на основі тісного взаємного зв'язку з кількома розділами математики. При цьому в міру розширення, ускладнення й підвищення вимог до якості роботи САК створювалися й нові методи дослідження цих систем. Так, напр., потреба враховувати випадковий характер збурень спричинила появу нового розділу в А. к. т. — статистичної динаміки САК і залучення для розвитку цього наукового напрямку методів імовірностей теорії та випадкових процесів теорії й поставила перед ними нові завдання.

Для А. к. т. 2-ї половини 50-х — 60-х років 20 ст. характерний інтенсивний розвиток методів синтезу САК, які розв'язують 2-у в осн. проблему А. к. т., а саме: визначення структури й параметрів керуючих пристроїв (регуляторів) на основі строго сформульованих вимог до характеру збуреного руху керованого об'єкта при відомій його матем. моделі й заданих обмеженнях, накладуваних на керування і клас збурень, які діють на об'єкт керування. Істотну роль при постановці й розв'язуванні задачі синтезу САК, природно, відіграв вибір критерію якості систем автоматичного керування. Оскільки до роботи САК часто ставлять різноманітні, іноді й суперечливі вимоги, то очевидно, що розв'язати проблему оптимізації таких систем — аж ніяк не тривіальне завдання.

Серед різних методів синтезу, розвинувших в А. к. т., особливе місце через специфічний характер постановки задачі й обмежень, накладуваних на елементи САК, займають методи синтезу інваріантних і автономних САК (див. *Інваріантність систем автоматичного керування та Автономність*). Стосовно до лінійних систем при обмеженнях за модулем збурень, які діють на САК, задача інваріантності формулюється як задача підшукування такої структури і значення параметрів керуючого пристрою (регулятора), які б забезпечували інваріантність вимушеного руху певної частини координат керованого об'єкта відносно заданої групи збурень, які діють на нього. Стосовно до лінійних (стаціонарних і нестаціонарних; неперервних і дискретних) систем проблем інваріантності й автономності досить повно досліджено й було продемонстровано багато прикладів практичного використання одержаних розв'язків. Специально розглянуто питання фізичної реалізованості інваріантних систем. Для нелінійних САК (слід зазначити, що всі реальні САК треба віднести до цього класу) все ще немає досить докладно розроблених інженерних методів синтезу інваріантних систем.

Близькою до цих задач є задача параметричної інваріантності (теорії чутливості), тобто одержання незалежності поведінки системи від зміни коефіцієнтів диф. або різницевих рівнянь, що описують її поведінку.

Домінуюче положення в А. к. т. займають методи синтезу САК, оснований на використанні інтегральних критеріїв оцінки якості, для яких як підінтегральну функцію використо-

вують яку-небудь опуклу (найчастіше квадратичну) функцію фазових координат і керування, обчислювану на заданому скінченному  $(0, T)$  або напівнескінченному інтервалі часу. При цьому задачу синтезу оптимального керування збуреним рухом формулюють як задачу варіаційного числення: знайти керування  $u(x)$ , яке падає мінімуму функціона-

ла  $J = \int_0^T f(x, u) dt$  при обмеженнях:  $u \in$

$\mathcal{R}$ ,  $\dot{x} = f(x, u, t)$ . Тут останнє рівняння — рівняння об'єкта;  $x(t)$  — вектор фазових координат;  $u$  — вектор керуючих діянь;  $\mathcal{R}$  — замкнута область допустимих керувань. Для дискретних систем аналогічним чином формулюється задача дискретного варіаційного числення. Найповніше розроблено методи розв'язування цієї задачі для лінійних динамічних систем при квадратичному функціоналі  $J$ , названі методами аналітичного конструювання регуляторів. Ці методи дають змогу знайти керування у вигляді функції фазових координат, тобто знайти таким способом структуру й параметри керуючого пристрою (регулятора). Труднощі розв'язування задач аналітичного конструювання регуляторів для нелінійних об'єктів спричинили появу різних методів синтезу субоптимальних САК, для яких вдається одержати розв'язок задачі в аналітичній формі. Але при цьому лишаються труднощі аналітичного й обчислювального характеру при визначенні оцінок близькості оптимального та субоптимального керувань. Сформульовані в А. к. т. задачі синтезу оптимального керування нелінійними об'єктами за наявності обмежень на керування у вигляді нерівностей стимулювали появу таких неокласичних методів розв'язування нових задач варіаційного числення, як *Понтріанівський принцип максимуму та програмування динамічне Беллмана*. Ці методи виявилися дуже ефективними для певних програмних керувань, але сироби використання їх для керування збуреним рухом, тобто для керування в реальному масштабі часу, скільки-небудь складними об'єктами в багатьох випадках нашоухуються на майже нездоланні труднощі обчислювального характеру.

Оскільки роботами багатьох авторів доведено можливість розв'язувати задачі синтезу статистично оптимальних систем керування з залученням того самого апарату неокласичного варіаційного числення, то й тут можливості реалізації одержуваних теоретичних результатів такі самі.

Оцінюючи стан проблеми розробки методів синтезу оптимальних САК, слід сказати, що розв'язано лише окремі задачі синтезу замкнених нелінійних систем керування, а вся ця проблема все ще чекає свого розв'язання, бо найважливіші результати не можуть задовольнити потреби практики проектування та конструювання САК.

Роботами рад. і зарубіжних учених за останні роки методи синтезу оптимальних систем узагалі-

нено й перенесено на порівняно мало досліджених в А. к. т. клас систем — на системи керування з розподіленими параметрами.

Для А. к. т. 60-х років 20 ст. характерним є чітке розуміння тієї істотної обставини, що прийняття апріорі якоїсь незмінної матем. моделі об'єкта керування неадекватне в багатьох випадках дійсному станowi речей при проектуванні й (або) експлуатації САК. В одних випадках це наслідок того, що через складність процесів, які відбуваються в об'єкті керування, одержання його матем. моделі на основі відомих фіз. або хім. законів виявляється практично нерозв'язною задачею, в інших — це може бути наслідком того, що в процесі експлуатації САК під впливом неконтрольованих зовнішніх й (або) внутрішніх збурень відбуваються зміни її параметрів. Наслідком цього з'явився новий науковий напрям в А. к. т. — методи ідентифікації об'єктів керування. Тут, як і взагалі в А. к. т., найістотніші й найповніше завершені результати одержано при розв'язуванні задач ідентифікації діючих систем, а для нелінійних систем задовільні розв'язки одержано лише в деяких окремих випадках.

Для А. к. т. кінця 50-х і початку 60-х років 20 ст. характерна поява групи нових розділів її, пов'язаних в дослідженнях нових рівноваг САК, назви яких утворено сполученням слова «само» з іншими словами, напр.: самонастроювання, самоорганізація, самонавчальність та ін. системи керування. Слово «само» якраз і відображає суть справи, а саме процес автомат. пристосовування (адаптації) системи до змінюваних внутрішніх і зовнішніх умов її роботи. В останні роки на зміну цій строгості в нових термінах прийшов єдиний термін «адаптивні системи керування», під яким розуміють клас САК, які дають змогу внаслідок обробки поточної інформації поповнювати нестачу апріорної інформації й так досягати найкращих, з певної точки зору, значень показників якості роботи системи (див. *Адаптація в кібернетичі*).

З цього класу адаптивних систем керування найпростіші — замкнені системи екстремально регулювання — можна виділити з самостійний підклас. Тут, як і для задач А. к. т. взагалі, належить від характеру збурень існують детерміністична й статистична постановки задачі дослідження; першу формують у вигляді задачі аналізу постульованої структури керуючого пристрою (часто вибір її здійснюють на інтуїтивній основі), другу — у вигляді задачі синтезу оптим. регулятора. Значною мірою ці задачі можна вважати вже розв'язаними. Але загальна теорія адаптивних систем керування перебуває лише на етапі свого становлення та нагромадження окремих результатів. Хоч при дослідженні адаптивних систем використовують різні постановки задач і різні матем. методи, але осн. тенденція проявляється в тому, що задачі адаптивного керування розглядають як задачі, які мають за самою своєю суттю ймовірнісний характер, і щоб розв'язати їх, вдаються до методів

теорії статистичних розв'язань, стохастичної апроксимації методів та до методів керування випадкових процесів теорії, які інтенсивно розвиваються останнім часом. Так, напр., застосування ідей стохастичної апроксимації для вивчення адаптивних систем керування виявилось досить ефективним і дало змогу з єдиної методологічної точки зору розглянути й розв'язати не тільки ряд задач адаптивного керування, а й ряд задач, що стосуються таких проблем, як розпізнавання образів, навчальні системи, питання фільтрації, задачі теорії надійності та ігор теорії.

Але, незважаючи на певні успіхи в розвитку теорії адаптивних систем керування, при практичному використанні одержуваних розв'язків для задач керування складними динамічними об'єктами, які характеризуються, зокрема, порівняно високою розмірністю й складністю внутрішньої структури, виникають істотні труднощі обчислювального характеру, значною мірою аналогічні тим, які виникають при реалізації алгоритмів оптим. керування в їхній детерміністичній постановці. Відмічені вже труднощі аналітичного розв'язування задач керування складними нелінійними об'єктами природно привели до того, що дедалі більшу роль у досліджуванні САК і в конструюванні їх, як і взагалі в кібернетичі, відіграють методи аналогового й цифрового моделювання їх, які з допоміжного засобу досліджування все більше й більше перетворюються на найефективніший спосіб досліджування дійсно складних САК. У зв'язку з цим цифрові обчислювальні машини, за допомогою яких дедалі частіше реалізують алгоритми керування, перетворюються на найдієвіший засіб досліджування й синтезу відповідних алгоритмів керування.

Наприкінці 60-х років 20 ст. дедалі частіше поставала необхідність розв'язувати задачі керування окремими підприємствами та виробництвами, робота яких оцінюється з точки зору деяких економ. критеріїв. Характерними для цих задач є складність об'єктів керування, яка проявляється, зокрема, у великій розмірності їх (регульованих і контрольованих координат бувають сотні й тисячі), та у неоднорідності структури цих об'єктів, до складу яких, окрім механізмів, машин і автоматів, як ланки й елементи системи входять і людські колективи, а їхню поведінку не завжди ж можна формалізувати. Методи ефективного розв'язування таких задач лише розробляються, а самі ці задачі потрапляють водночас до «сфери дії» таких наук, як власне А. к. т., кібернетика економічна і кібернетика технічна, теорія великих (або складних) систем, теорія операцій дослідження й системотехніка.

Природно, що така А. к. т., якою вона сформувалася, не може задовольняти виног, які ставляться до теорії керування складними системами. Це стає очевидним хоч би тому, що А. к. т. навіть не має мови, придатної для описування подібного роду систем. Методи досліджування та способи проектування таких

смадних систем керування розроблятимуть, очевидно, в рамках загальноїшої наукової дисципліни — технічної кібернетики, щодо якої А. к. т. є лише складовою частиною. Літ.: Мансвелл Д. К. Вышшеградицкий И. А., Стодола А. Теория автоматического регулирования. М., 1946; Цыпин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [бл. огр с 926 983] Фелдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966 [бл. огр с 594—611] Цыпин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968 [бл. огр с 347—381]. Теория автоматического регулирования кн. 1, 3, ч. 1—2. М., 1967—69 [бл. огр кн. 1 с 743—763 кн. 2 с 851 874, кн. 3, ч. 1, с 344 604, ч. 2 с 352—381] Летоза А. М. Динамика полета и управление. М., 1969 [бл. огр с 347 352] Понтрягин Л. С. (та ін.) Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969 [бл. огр с 383 384] Теллиман Р. Процессы регулирования с адаптацией. Пер с англ. М., 1984 (іриженна теория систем управления. Пер с англ. М., 1970) И. М. Кучинский.

**АВТОМАТИВ АБСТРАКТНА ТЕОРІЯ** — див. *Абстрактна теорія автоматів*.

**АВТОМАТИВ АЛГЕБРИЧНА ТЕОРІЯ** — див. *Алгебрична теорія автоматів*.

**АВТОМАТИВ АНАЛІЗ** — знаходження за заданим у тому чи іншому вигляді автоматом відображення «вхід — вихід», що його реалізує цей автомат. Часто таке відображення можна інтерпретувати як обчислення предиката, й оскільки можна предикат повністю характеризуватися своєю множиною істинності, то завдання аналізу автомата зводиться до знаходження цієї множини (кажуть, що автомат розпізнає цю множину). Для багатьох класів автоматів добре відомі класи розпізнаваних ними множин. Напр., *Гюрліне* дозволяють розпізнають усі рекурсивно перелічні множини, автомати з магазинною пам'яттю (недетерміновані) — контекстно вільні мови, *автомати скінченні* — *події регулярні*. Але не завжди за заданим автоматом і множиною вдається визначити, чи розпізнає автомат саме цю множину. В заг. випадку для довільного класу автоматів чи навіть для довільного конкретного автомата ця проблема є алгоритмічно нерозв'язною. Якщо якійсь обмеження на способи задавання автоматів і множин, то для багатьох випадків вона стає розв'язною. Напр., якщо регулярні події задавати регулярними виразами, а скінченні автомати — матрицями переходів і виходів, то існує заг. конструктивний спосіб (*алгоритм аналізу скінченних автоматів*), за допомогою якого можна знаходити регулярні вирази для подій, представлених у довільному скінченному автоматі.

Літ.: Гляушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [бл. огр с. 464—469]. М. І. Кратню.

**АВТОМАТИВ ГОМОМОРФІЗМ**. Хай задано два автомати  $A = \langle Q, X, Y, \delta, \lambda \rangle$  і  $A' = \langle Q', X', Y', \delta', \lambda' \rangle$ . Нехай  $f$  є відображення множини  $Q$  на  $Q'$ ,  $\varphi$  — відображення множини  $X$  на  $X'$  і  $\psi$  — відображення множини  $Y$  на  $Y'$ . Якщо  $\delta(q, x) = g$ ,  $\lambda(q, x) = y$  і  $\delta'(f(q), \varphi(x)) = f(g)$ ,  $\lambda'(f(q), \varphi(x)) = \psi(y)$ , тоді трійка  $(f, \varphi, \psi)$  наз. гомоморфізмом  $A$  на  $A'$ , а  $A'$  наз. гомоморфним образом  $A$ . Аналогічно визначається гомоморфізм  $A$  з  $A'$  (в цьому випадку  $f$  — відоб-

раження  $Q = Q'$ ,  $\varphi = X$  у  $X' = X$  і  $\psi = Y$  у  $Y'$ ), але тоді гомоморфним образом  $A$  буде не весь автомат  $A'$ , а лише якийсь його підавтомат. Якщо автомат задаються як унарні універсальні алгебри (див. *Автоматів способи задавання*), тоді поняття А. г. збігається з поняттям гомоморфізму універсальних алгебр. М. І. Кратню

**АВТОМАТИВ ДЕКОМПОЗИЦІЯ** — задавання скінченного автомата як композиції кількох автоматів (див. *Автоматів композиції*). Проблеми, що тут виникають, є типовими для структурної теорії автоматів (див. *Синтез автоматів структурний*) і відночас вони аналогічні проблемам, які виникають у сучасній алгебрі, коли дану алгебричну систему задають як сукупність кількох простіших систем того самого виду. Прикладом може бути *група теорія* та *П* структурна теорія.

У зв'язку з тим, що існують різні поняття композиції, задачу А. д. можна ставити по-різному: розглядати задання автоматів у вигляді прямої суми, добутку, паралельно-послідовного з'єднання тощо. Цікалим є насперод той випадок, коли автомати, що становлять композицію, є в певному розумінні простішими за первісний автомат: напр., у них менше станів, менше вхідних каналів, якщо їхня ф-ція переходів у певному розумінні простіше, тощо. Отже, задача А. д. допускає багато варіантів.

Щоб уточнити постановку задачі, введено поняття моделювання. За аналогією з алгеброю, можна визначити, що автомат  $A$  моделює автомат  $B$  тоді й тільки тоді, коли автомат  $B$  ізоморфний якомусь підавтомату автомата  $A$  (моделювання 1-го роду). Але таке поняття, запозичене з алгебри, де гол. інтерес становлять елементи алгебри й відношення між ними, є занадто сильним і не відображає специфіки *автоматів теорії*. В цій теорії цікавляться гол. чин. поведінкою «вхід — вихід» автомата. Еквівалентними вважають два автомати, що мають однакову поведінку (але, можливо, різну кількість станів). Тому природно дати таке визначення: автомат  $A$  моделює автомат  $B$ , якщо поведінка його, з точністю до перейменування вхідних і вихідних букв, збігається з поведінкою автомата  $B$ , або точніше, — автомат  $A$  моделює автомат  $B$  тоді й тільки тоді, коли  $B$  є гомоморфним образом якогось підавтомата автомата  $A$  (моделювання 2-го роду).

Оск. завдання А. д. — розробити ефективні процедури, які дають змогу знаходити для заданого автомата композицію автоматів, що моделює первісний автомат. Це завдання аналогічне завданню розкладавати складну систему на простіші й у багатьох практичних випадках воно має важливе значення.

Найбільше викичено А. д. в паралельно-послідовні з'єднання. Щоб пояснити одержані при цьому результати, розглянемо лише *Мура автоматів* без виходу (аналогічні результати є й для *Мури* автоматів з виходом). Скінченні автомати в цьому випадку зручно розглядати як скінченні унарні алгебри. Ав-

томатові  $A = \langle Q, \lambda \rangle$  відповідає алгебра  $\mathcal{A} = \langle Q, f_1, \dots, f_n \rangle$ , де осн. множина алгебри  $\mathcal{A}$  — це множина станів автомата  $Q$  і кожній букві вхідного алфавіту  $X$  відповідає одна (унарна) ф-ція з сигнатури  $\mathcal{A}$  так, що  $f_i(g) = \lambda(x_i, g)$ . І навпаки: можна таку скінченну алгебру можна вважати за скінченний автомат. Кожна алгебра має дві тривіальні конгруєнції «0» (у кожному класі цієї конгруєнції — є точно по одному елементу множини  $Q$ ) і «1» (конгруєнція з одним класом, який складається з усього  $Q$ ). Крім цих двох тривіальних конгруєнцій, алгебра  $\mathcal{A}$  може мати й ін. конгруєнції. Якщо жа множину всіх конгруєнцій цієї алгебри ввести природне відношення порядку, то ця множина стане скінченною ґраткою, причому означені тривіальні конгруєнції будуть відповідно нулем і одиницею цієї ґратки. Коли застосовують моделювання 1-го роду й один автомат вважають простішим за другий, якщо він має менше внутр. станів, то справджуються такі теореми: 1) автомат  $A$  можна задати як послідовне з'єднання двох менших автоматів тоді й тільки тоді, коли алгебра  $\mathcal{A}$  має хоча б одну нетривіальну конгруєнцію; 2) автомат  $A$  можна задати як паралельне з'єднання двох менших автоматів тоді й тільки тоді, коли алгебра  $\mathcal{A}$  має дві нетривіальні конгруєнції  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  такі, що  $\Pi_1 \cdot \Pi_2 = 0$  (множення конгруєнції визначається зазначеним вище відношенням порядку якщо  $\Pi_1 = \{R_1, \dots, R_k\}$ ,  $\Pi_2 = \{S_1, \dots, S_p\}$ , то  $\Pi_1 \cdot \Pi_2$  складається з усіх непустих перетинів вигляду  $R_i \cap S_j$ ). Для цього випадку задача декомпозиції повністю розв'язується наведеними теоремами. Справді, якщо  $\Pi_1 < \Pi_2$ , то конгруєнція  $\Pi_1$  означає якусь конгруєнцію алгебри  $\mathcal{A}_{\Pi_1}$ , отже,  $\mathcal{A}_{\Pi_1}$  можна також піддати декомпозиції. Отже, ґратка конгруєнцій несе осн. інформацію про всі декомпозиції автомата  $A$ .

Багато в чому аналогічними є результати, одержані при моделюванні 2-го роду. Означимо квазіконгруєнцію алгебри  $\mathcal{A} = \langle Q, f_1, \dots, f_n \rangle$  як таку систему підмножин  $\{Q_1, \dots, Q_k\}$  множини  $Q$ , що 1)  $\bigcup Q_i = Q$ ; 2) якщо  $Q_i < Q_j$ , то  $i \neq j$  для будь-яких  $i, j$  знайдеться таке  $a$ , що  $f_i(a, Q_j) = Q_i$ . Очевидно, що кожна конгруєнція є квазіконгруєнцією. Тривіальні квазіконгруєнціїми будуть ті самі дві конгруєнції 0 і 1, які наведено вище. Доведено такі теореми: 1) автомат  $A$ , що має  $n$  станів, можна задати як послідовне з'єднання двох менших автоматів тоді й тільки тоді, коли існує нетривіальна квазіконгруєнція алгебри  $\mathcal{A}$ , що має менше як  $n$  підмножин  $Q_i$ ; 2) нехай  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  — квазіконгруєнції алгебри  $\mathcal{A}$ , що мають відповідно  $k_1$  і  $k_2$  підмножин  $\Pi_1 \cdot \Pi_2 = 0$ . Тоді автомат  $A$  можна задати як паралельне з'єднання двох автоматів, які мають  $k_1$  і  $k_2$  станів. Для цього розроблено апарат т. з. алгебри пар, який дає змогу описувати  $A$ . д.

Щоб сформулювати частинні результати,

введемо ще одне визначення: скінченний автомат наз. перестановним, якщо кожна буква його вхідного алфавіту визначає якусь перестановку множини внутр. станів. З кожним перестановним автоматом пов'язана група перестановок, породжена перестановками, що відповідають усім його вхідним буквам. Доведено таку теорему: будь-який скінченний автомат можна задати як паралельно-последовне з'єднання автоматів, що мають не більше як по два внутр. стани, й перестановних автоматів, що їхні групи перестановок ділять групу перестановок первісного автомата. Навіть більше, якщо група перестановок первісного автомата має якийсь простий нормальний дільник, то в будь-якому його розкладі знайдеться автомат, що його група перестановок має той самий простий нормальний дільник (Отже, якщо просту групу «вкладено» в первісному автоматі  $A$ , то вона буде і в одній з компонент. Тут поняття простоти пов'язується з ф-цією переходів. Перестановні автомати вважаються простішими за неперестановні, а з двох перестановних  $A$  вважають простішим за  $B$ , якщо група перестановок  $A$  ділить групу перестановок  $B$ ). Найпростішими при цьому будуть автомати, в яких групи перестановок — прості. Вони далі не розкладаються в паралельно-последовні з'єднання.

Наведені вище теореми дають змогу сформулювати такий результат, що стосується й основних проблем в теорії автоматів: будь-який скінченний автомат можна задати як паралельно-последовне з'єднання автоматів, що мають не більше як по два внутр. стани, й перестановних автоматів, перестановних яких породжують прості групи. Якщо ф-ції алгебри логіки чи багатозначних логік розглядати як автомати з одним станом, то визначення простоти через кількість внутр. станів чи складність ф-ції переходів (як це було зроблено вище) для них не мають сенсу. Тут один автомат можна вважати простішим за інший, коли в ньому менше вхідних каналів (тобто одна ф-ція простіша за іншу, якщо вона є ф-цією від меншого числа аргументів). У цьому випадку одержано ряд результатів. Див. Булеві функції.

Лит. Krohn K., Rhodes J. Algebraic theory of machines. I. Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines. «Transactions of the American mathematical society», 1985, v. 116, Hartmanis J., Stearns R. E. Algebraic structure theory of sequential machines. Englewood Cliffs, 1966 [6, 63-200]. Zeiger H. P. Cascade synthesis of finite state machines. «Information and control», 1967, v. 10, 4. Muller D. E., Patashnik G. R. Frequency of decomposability among machines with a large number of states. «Journal computer and system sciences», 1985, v. 2, 3.

М. І. Крижко.  
АТОМАТИВ ДОБУТОК — один із способів автоматизації композиції.

АТОМАТИВ ІГРИ — колективна взаємодія автоматів (детермінованих чи ймовірнісних), за якої кожний автомат імітує гравця, а відповідна матриця гравців невідомо. Кожна партія гри полягає у виборі кожним з автоматів певного вихідного сигналу з множин вихідних сигналів, які є в автомата. Після вибору



значення вихідного сигналу (одноходової чи тої стратегії даного гравця) інформація про вибір усіх автоматів надходить на певний пристрій (середовище, або оракул). Середовище має інформацію про матрицю платежів і на основі даних про вибрані вихідні сигнали автоматів формує вхідні сигнали на кожен з автоматів. Вхідний сигнал імітує величину виграшу, одержаного автоматом у цій партії. Після цього починається реалізація нової партії гри.

А. і. можна класифікувати за типами автоматів, які беруть участь у грі, за способом визначення виграшів автоматів і властивостями платіжної матриці. Було показано (для найпростіших випадків — аналітично, для складніших — моделюванням процесу гри на ЕОМ), що за певних умов автомат, граючи в гру антагоністичну з нульовою сумою, за кількістю партій виходить асимптотично на оптимальну стратегію мішаних, а в іграх з нульовою сумою — за точку рівноваги (точку Неша).

Особливістю колективної взаємодії автоматів є можливість такого впливу середовища на автомати, за якого автомати виходять не в принципі досягнення кожною з гравців свого «особистого» благополуччя, а в принципі досягнення спільного благополуччя всього колективу гравців. У зв'язку з цим рад. математики М. Л. Цетлін (1924—66) сформулював принцип спільної каси. За спільної каси середовище підсумовує виграші всіх автоматів і ділить одержаний результат на кількість гравців, які беруть участь у грі. Отже, наприкінці кожної партії гри всі гравці одержують однакові виграші. Було показано, що принцип спільної каси в деяких випадках призводить колектив гравців у точку рівноваги. Див. також Поведінка автоматів у випадкових середовищах.

Лит. Цетлін М. Л. Конечные автоматы в моделировании простейших форм поведения. «Успехи математических наук», 1963, т. 18, № 4.

**АВТОМАТИВ ІЗОМОРФІЗМ** — такий автоматов гомоморфізм, при якому  $f, \varphi$  і  $\psi$  є взаємно однозначними відображеннями. Автомати  $A$  і  $A'$  в цьому випадку наз. ізоморфними. З погляду абстрактної теорії автоматів ізоморфні автомати не відрізняються один від одного.

**АВТОМАТИВ КОМПОЗИЦІЯ** — операції, що їх використовують, щоб породжувати один автомат з інших. Часто композицією наз. і результати таких операцій, тобто одержані автомати. Зазначені операції мають загальний характер і є основою структурних побудов в алгебрічній теорії автоматів. Найчастіше розглядають такі А. к.

**Пряма сума.** Цю операцію застосовують до множини автоматів  $\mathcal{A}_i = \langle A_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i \rangle$ , такої, що вхідний і вихідний алфавіти кожного автомата  $\mathcal{A}_i$  однакові, а множини станів  $A_i$  попарно не перетинаються. В результаті операції одержують автомат  $\mathcal{A} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ , такий, що  $A = \bigcup A_i$  і

значення ф-ції переходів  $\delta(a, x)$  і вихідів  $\lambda(a, x)$  збігаються зі значеннями  $\delta_i(a, x)$  і  $\lambda_i(a, x)$  того автомата  $\mathcal{A}_i$ , який містить стан  $a$ .

**Прямий добуток.** Ця операція, коли її застосовують до множини автоматів  $\mathcal{A}_i = \langle A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i \rangle$ , дає автомат  $\mathcal{A} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ , такий, що  $A$  є декартовим добутком множин  $A_i$  ( $A = \prod A_i$ ), а  $X$  та  $Y$  — відповідно множини  $X_i$  та  $Y_i$  ( $X = \prod X_i$ ,  $Y = \prod Y_i$ ). Ф-ції переходів і виходів задають спів-

відношеннями:  $\delta \langle (a_1, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = \langle \delta_1(a_1, x_1), \dots, \delta_n(a_n, x_n) \rangle$ ,  $\lambda \langle (a_1, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = \langle \lambda_1(a_1, x_1), \dots, \lambda_n(a_n, x_n) \rangle$ .

**Схрещений добуток.** Двоїсна операція, яку застосовують до автоматів без виходів. З автоматів  $\langle A_1, X, \delta_1 \rangle$  та  $\langle A_2, X, \delta_2 \rangle$  одержують автомат  $\langle A, X, \delta \rangle$ , такий, що  $A = A_1 \times A_2$  та  $\delta \langle (a_1, a_2), x \rangle = \langle \delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, x) \rangle$ , де  $\varphi: A_1 \times X \rightarrow X$  та  $\psi: A_2 \times X \rightarrow X$  — однозначні ф-ції. Схрещений добуток, у якому  $\varphi(a, x) = x$ , наз. **напівпрямим добутком**.

Узагальненням операцій прямого, схрещеного й напівпрямого добутків є операція добутку автоматів. Якщо цю операцію застосовують до множини автоматів  $\mathcal{A}_i = \langle A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i \rangle$ , то вона дає автомат  $\mathcal{A} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ , такий, що  $A = \prod A_i$ ,

а  $X'$  та  $Y'$  — певні задані множини. Ф-ції переходів і виходів задають за допомогою двох заданих однозначних відображень  $\varphi: (\prod A_i) \times X \rightarrow \prod X_i$  та  $\psi: (\prod A_i) \times X \rightarrow Y$  так:

$\delta \langle (a_1, \dots, a_n), x \rangle = \langle \delta_1(a_1, x_1), \dots, \delta_n(a_n, x_n) \rangle$  та  $\lambda \langle (a_1, \dots, a_n), x \rangle = y$ , де  $(x_1, \dots, x_n) = \varphi \langle (a_1, \dots, a_n), x \rangle$  та  $y = \psi \langle (a_1, \dots, a_n), x \rangle$ .

**Суперпозиція.** Це двоїсна операція, яка дає до такої пари автоматів, що вихідний алфавіт першого автомата збігається зі вхідним алфавітом другого  $\langle A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1 \rangle$ ,  $\langle A_2, Y_1, Y_2, \delta_2, \lambda_2 \rangle$ , автомат  $\langle A, X_1, Y_2, \delta, \lambda \rangle$  такий, що  $A = A_1 \times A_2$ ,  $\delta \langle (a_1, a_2), x \rangle = \langle \delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, x) \rangle$  та  $\lambda \langle (a_1, a_2), x \rangle = \lambda_2(a_2, \lambda_1(a_1, x))$ . Використовуючи всі згадані вище операції, можна з даної множини автоматів породжувати нові автомати. Це становить теор. інтерес для *автоматів теорії*, а особливо має важливе значення для практичних застосувань її. Зокрема, алгебр. методами досліджували *проблему* в теорії автоматів та різні *автоматів декомпозиції*.

Лит. Глушкова В. М. Абстрактная теория автоматов. «Успехи математических наук», 1961, т. 18, в. 5.

**АВТОМАТИВ МІНІМІЗАЦІЯ** — див. *Мінімізація числа станів автомата*

**АВТОМАТИВ ПОВЕДІНКА** — див. *Поведінка автоматів*.

**АВТОМАТИВ ПРЯМА СУМА** — операція, що її застосовують до множини автоматів  $\mathcal{A}_i = \langle A_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i \rangle$ , що в ній вхідний і ви-

хідний алфавіт кожного автомата  $A_i$ , однакові, а множини станів  $A_i$  попарно не перетинаються. Результатом операції є автомат  $A = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ , в якому  $A = \bigcup A_i$  і

значення ф-ції переходів  $\delta(a, x)$  і виходів  $\lambda(a, x)$  збігаються зі значеннями  $\delta_i(a, x)$  і  $\lambda_i(a, x)$  автомата  $A_i$ , який містить стан  $a$ . Див. *Автомати можливості*.

**АВТОМАТИВ СИНТЕЗ** — побудова автомата за заданою його поведінкою «вхід — вихід». Проблему синтезу найдокладніше досліджено для *автоматів скінченних*, бо до цього випадку зводиться багато практичних задач, пов'язаних з проектуванням різноманітних керуючих та обчисл. пристроїв дискретної дії. Синтез нескінченних автоматів здебільшого становить теор. інтерес. Він не завдає великих труднощів, бо до скінченних автоматів, як правило, не ставлять додаткових вимог, крім двох: — щоб вони реалізували потрібне відображення «вхід — вихід». А воно задається так, що метод синтезу є досить простим. Напр., за частково рекурсивною функцією, заданою формулою, в якій використано тільки знаки операторів суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації, можна побудувати *Тьюрінгову машину*, що обчислює цю функцію. Складніша проблема виникає лише тоді, коли доводиться синтезувати нескінченні автомати, виходячи з практичних задач, напр., у випадку *автоматів пристроїв*. До синтезу таких автоматів вдаються, проектуючи операційні пристрої ЦОМ.

Труднощі А. с. залежать в основному від того, як задано умови функціонування автомата. Чим виразнішою є мова, яку застосовують для задавання умов функціонування автомата (тобто, чим вона зручніша для замовника), тим складніший метод синтезу. В багатьох випадках може виявитися, що єдиного методу синтезу не існує. Тому для ряду класів автоматів, зокрема для скінченних автоматів, розробляють спец. мови, за допомогою яких зручно задавати умови функціонування автоматів і для яких існують методи синтезу (див. *Мова логіки для задавання автоматів, Регулярні події та вирази*).

Процес синтезу складного скінченного автомата здебільшого поділяють на кілька етапів. На 1-му етапі, який наз. етапом блокового синтезу, автомат поділяють на окремі блоки, визначають завдання, що повинні розв'язувати ці блоки, намалюють заг. план обміну інформацією між блоками. На 2-му етапі, який наз. етапом абстрактного синтезу, виходячи з завдань, що їх повинні розв'язувати блоки, визначають обсяг пам'яті, потрібної для кожного блока, і встановлюють ті зміни станів пам'яті під впливом вхідних сигналів, які має реалізувати даний блок для того, щоб він міг виконувати поставлені перед ним завдання. На 3-му етапі — етапі структурного синтезу — здійснюють вибір елементів для побудови схеми і встановлюють правила поєднання цих елементів. У багатьох випадках елементи за-

дають заздалегідь, тоді схему будують на цих елементах. На 4-му етапі — етапі надійного синтезу — перетворюють побудовані схеми, щоб забезпечити надійність функціонування їх. Нарешті, якщо автомат треба побудувати з фіз. елементів, на 5-му етапі — етапі тех. синтезу — виявляють спотворення сигналів, які виникають через неідеальність застосовуваних елементів, і вживають заходів, щоб усунути ці спотворення. Первісними даними для наступного етапу синтезу є, як правило, результати, одержані на попередньому етапі.

Наведений вище поділ А. с. на етапи дає змогу лише загально орієнтуватися в тому, які стадії проходить розв'язування завдання А. с. У ряді випадків доводиться допускати ті чи інші відхилення від наведеної вище послідовності етапів. Напр., проводячи синтез досить простих автоматів, етап блокового синтезу звичайно опускають. Навпаки, при синтезі особливо складних автоматів іноді доводиться багато разів повертатися до цього етапу. При деяких спец. прийомах синтезу етапи абстрактного, структурного й тех. синтезу так переплітаються між собою, що не завжди вдається чітко розмежувати їх. Нарешті, враховувати міркування надійності звичайно починають на ранішніх етапах. В результаті цього на останньому етапі одержують остаточний розв'язок. Проблема А. с. є оберненою проблемі *автоматів аналізу*, але здебільшого складніша за неї.

Лит. Г л у ш о в В. М. Синтез цифрових автоматів. М., 1992 (Бібліогр. с. 464-469).

В. М. Глушков, М. І. Кранко.

**АВТОМАТИВ СПОСОБИ ЗАДАВАННЯ** — способи описування структури або алгоритму функціонування автомата. Залежно від ступеня деталізації й цілей дослідження автомат можна задавати, по-перше, автоматним відображенням, тобто відповідністю між послідовностями вхідних і вихідних сигналів (див. *Оператор автоматичний*), або *алгоритмом обчислювання функцій переходів і виходів* (алгоритм. описування); по-друге, сіткою з вихідних автоматів (структурне описування). Часто використовують мішане описування, де автомат описують як *сітку логічну* або *автоматів можливості*, складену з автоматів, які, в свою чергу, можна описувати алгоритмічно або структурно.

Особливе значення для практики мають *автомати скінченні*. Алгоритм функціонування скінченного автомата можна задавати множиною регулярних виразів, таблицями переходів та виходів, графом переходів та виходів, матрицею переходів чи спеціальною програмою.

Скінченні автомати можна розглядати і як скінченні унарні алгебри. В цьому випадку основна множина алгебри — це множина станів автомата, а кожній букві вхідного алфавіту  $X$  відповідає одна унарна функція сигнатури алгебри так, що значення  $f_i(g_j)$  — це стан, у який переходить автомат, коли, перебуваючи в стані  $g_j$ , він одержує на вхід бук-

ву  $x_i$ . Кожну скінченну унарну алгебру можна, з своєю чергою, розглядати як скінченний автомат.

Структуру скінченного автомата задають сіткою в елементарних автоматах. Найчастіше структура являє собою композицію регістра станів і комбінаційної схеми. Відповідність між послідовностями вхідних і вихідних сигналів і вводи зручно задавати явно, виписуючи для кожної вихідної послідовності на що вона переробляється. Цей спосіб застосовують, коли автомати відображення в частковим, зі скінченною областю визначення. Нескінченне автоматне відображення зручно задавати за допомогою скінченної системи регулярних виразів. При цьому кожній букві  $y$  вихідного алфавіту ставлять у відповідність множину всіх тих послідовностей — слів, які це автоматне відображення переводять у вихідні слова, що закінчуються буквою  $y$ . Таблицю переходів автомата явно задає ф-цію переходів. Якщо автомат має  $n$  станів і  $m$  вхідних букв, то таблицю переходів містить відповідно  $n$  стовпчиків та  $m$  рядків, а на перетині  $i$ -го стовпчика і  $j$ -го рядка — значення ф-ції переходів для  $i$ -го стану та  $j$ -го вхідного сигналу. Граф переходів і виходів являє собою графічне задання функції переходів та виходів (див. *Абстрактного автомата граф*). У ньому в  $n$  вершин, які відповідають станам; стани і та  $j$  з'єднано спрямованим до  $j$  ребром, позначеним буквою  $X$  (вхідний сигнал), якщо значення ф-ції переходу для пари  $(i, X)$  дорівнює  $j$ . Для *Міти автомата* ребра, крім вхідних сигналів, помічено ще й відповідним значенням ф-ції виходів. Для *Мура автомата* вивченими ф-ції позначають вершини графа. *Автомата матриця переходів* являє собою квадратну табл. в  $X$  м. Кожному станові автомата відповідає стовпчик і рядок. На перетині  $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпчика в табл. виписують множину таких вхідних сигналів  $X$ , для яких значення ф-ції переходів для пари  $(i, X)$  дорівнює  $j$ . Програма автомата являє собою послідовність відмічених операторів — команд. Мітки команд відповідають станам автомата. Кожна команда складається в послідовності рядків. Кожний рядок має вигляд:  $E(X) F(Y) N$ , де  $E(X)$  — якась умова, задана на множині вхідних сигналів,  $F(Y)$  — дія функція вихідних сигналів,  $N$  — мітка команди. Кожний рядок означає: якщо для вхідних сигналів автомата виконано умову  $E(X)$ , то слід надати вихідні сигнали, які входять у  $F(Y)$ , і перейти до виконання команди з міткою  $N$ . У багатьох випадках задання автомата програмою — економічніше за інші способи задання. Особливо зручно застосовувати його для задання не повністю визначених і недетермінованих автоматів. При синтезі *автомата керуючого*, який надає правити за блок ЦОМ, програму його роботи часто наз. мікропрограмою. Структуру автомата задають явним переліком усіх її компонент та зв'язків між компонентами.

Автомат може мати алгоритмічні й структурні описи. Відповідність між ними задають табл. *кодуюння станів автомата*, вхідних і вихідних сигналів, що беруть участь в алгоритмі, описові, і, відповідно, станами, вхідними та вихідними сигналами компонент, що беруть участь у структурному описові. Якщо автомат задають у вигляді регістра станів і комбінаційної схеми, то цю композицію найкраще задавати у вигляді переліку елементів — компонент регістра і системи ф-цій абуджень, які керують перемиканнями станів цих елементів. Нескінченні автомати найчастіше задають у вигляді композиції якогось скінченного автомата і нескінченного автомата з регулярним законом породжування станів і вхідних сигналів. Див. також *Автоматів декомпозиція*, *Автоматів теорія*, *Мова логічна для задання автомата*, *Мова описування пристроїв ЦОМ*.

Лит. Гаушкка В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [бібліогр. с. 319—322]. Ю. В. Напіванова.

**АВТОМАТИВ СТРУКТУРНА ТЕОРІЯ** — див. *Структурна теорія автомата*.

**АВТОМАТИВ СУПЕРПОЗИЦІЯ** — двомісна операція, яка дає по парі автоматів  $(A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ ,  $(A_2, Y_2, \delta_2, \lambda_2)$ , де вихідний алфавіт першого автомата збігається з вхідним алфавітом другого, автомат  $(A, X_1, Y_2, \delta, \lambda)$ , в якому  $A = A_1 \times A_2$ ,  $\delta((a_1, a_2), x) = (\delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, x))$  та  $\lambda((a_1, a_2), x) = \lambda_1(a_1, x_1(a_1, x))$ . Див. *Автоматів композиція*.

**АВТОМАТИВ ТЕОРІЯ** — розділ теоретичної кібернетики, в якому вивчаються названі *автоматами* чи *машинами* математичні моделі реально існуючих (технічних, біологічних та ін.) чи принципово можливих пристроїв, що переробляють дискретну інформацію дискретними часовими тактами. А. т. виникла гол. чин. під впливом потреб техніки цифрових обчислювальних і керуючих машин та внутрішніх потреб теорії алгоритмів і матем. логіки. Поняття *автомата* помітно варіюється залежно від характеру названих пристроїв, від прийнятого рівня абстракції та доцільного ступеня загальності (автомати скінченні, нескінченні, зростаючі, ймовірнісні, детерміновані, автономні тощо).

Що ж до питань про вироблення такого поняття *автомата*, яке характеризувалося б максимальним ступенем загальності й разом з тим могло правити за основу для постановки й розв'язування досить змістовних задач, то його ще не можна вважати повністю розв'язаним. До того ж поняття *автомата* можна вважати й окремим випадком загального поняття «керуюча система».

Терми «А. т.» увійшов в ужиток у 50-і роки 20 ст., хоч відповідна проблематика значною мірою почала складатися ще в 30-і роки в рамках теорії алгоритмів і теорії релейних пристроїв. Уже тоді в *алгоритмічній теорії* було сформульовано достатньо загальні поняття обчисл. автомата (див. *Тьюрінга машина*) і (якщо) поняття *автомата скінченного* (голомка Тьюрінгової машини). Було встановле-

но, що для здійснення найрізноманітніших ефективних перетворювань інформації зовсім не обов'язково будувати щоразу спеціалізовані автомати; в принципі все це можна зробити на одному універсальному автоматі за допомогою придатної *програми* й *придатного кодування*. Цей теор. результат пізніше набув інженерного втілення у вигляді суттєвих універсальних обчисл. машин. Проте розгорнуте вивчення процесів, які протікають в автоматах різного роду, й загальних закономірностей, яким вони підлягають, почалося згодом лише в рамках А. т. Різницю в постановках між задачами теорії алгоритмів і А. т. можна коротко охарактеризувати як різницю між питаннями про те, що можуть робити автомати і як вони це роблять. Оскільки залучення інших типів автоматів (відмінних від машин Тьюрінга) вано не розширює запасу обчислених перетворень інформації, то для теорії алгоритмів таке залучення має лише епізодичний характер і пов'язане тільки з застосуванням технічних доказів. Для А. т. такий розгляд стає вже самоцілью. Теоретичні й прикладні задачі автоматизації, обчисл. техніки й програмування, моделювання біол. поведінки тощо продовжують стимулювати проблематику А. т. Проте А. т. вже виробляє й власну внутрішню проблематику. В А. т. широко застосовують апарат алгебри, *логіки математичної*, *комбінаторного аналізу* (включаючи *графічну теорію*) та *імовірностей теорії*.

В А. т. досить чітко виокремлюються окремі її напрями, зумовлені вибором досліджуваних типів автоматів (скінченних, імовірнісних тощо), прийнятим рівнем абстракції (див. *Абстрактна теорія автоматів* і *Структурна теорія автоматів*) або специфікою застосовуваних матем. методів (див. *Алгебраїчна теорія автоматів*). Разом з цим споріднені задачі й методи інтенсивно розвиваються в теорії релейних пристроїв, у теорії ЦОМ і в теорії програмування, тому часто буває важко розмежувати форми дії цих теорій і А. т.

Поведінка й структура. В основі А. т. лежать точні матем. поняття, що формалізують інтуїтивні уявлення про функціонування й поведінку автомата та про його структуру (внутрішню будову). З огляду поведінки автоматів їх найчастіше розглядають як перетворювачів словникової інформації, тобто перетворювачів послідовностей букв на послідовності букв. Реалізоване перетворення інтерпретують звичайно як обчислення значень якоїсь ф-ції (оператора) за заданими значеннями аргументів або як перетворення записів умов задач певного типу на записи відповідних розв'язків. Зокрема, т. з. розпізнавальні автомати, сприймаючи вхідну інформацію, реагують на неї так, що деякі вхідні послідовності сигналів вони сприймають, а інші — відхиляють. У цьому розумінні вони розпізнають або, як ще кажуть, представляють множини вхідних послідовностей. Нарешті, породжувальний автомат функціонує як автономна система, не пов'язана з вхідною інформацією; його поведінка

визначається тим, які вихідні послідовності він здатний породжувати. Наведена класифікація в термінах перетворення, розпізнавання та породжування залежить від правил функціонування автомата, тобто від програми взаємодії його внутрішніх станів зі зовнішніми (такими, що надходять із зовнішнього середовища) і вихідними (такими, що видаються з зовнішнього середовища) сигналами. Нехай  $Q, X, Y$  — відповідно множини внутрішніх станів вхідних і вихідних сигналів автомата. Якщо це детермінований автомат, його програма формалізується в термінах ф-ції переходів  $\Psi$  та ф-ції виходів  $\Phi$ , які вказують для кожного вхідного сигналу  $x \in X$  й кожного стану  $q \in Q$  стан  $\Psi(q, x)$ , в який переходить автомат, і вихідний сигнал  $\Phi(q, x)$ , що його він видає при цьому.

Абстрактна А. т. характеризується вищим рівнем абстракції: у ній поняття автомата отождествляється з поняттям програми автомата, тобто з п'ятіркою  $(X, Y, Q, \Psi, \Phi)$ , при чому абстрагування від його структури. Структура автомата відображає спосіб його організації з найпростіших взаємодіючих компонент (елементарних автоматів або просто — елементів), що в належний спосіб сполучені в єдину систему. Напр., обчисл. машину складено з елементарних копирок типу *тригерів*, *інверторів* і т. ін. першою системою побудовано з *нейронів*. Структурна класифікація автоматів визначається характером допустимих зв'язань (напр., зв'язання можуть бути сталими або ж можуть змінюватися в процесі роботи, піддаватися тим чи іншим геом. обмеженням) та специфікою функціонування і взаємодії застосовуваних елементів (напр., елементи можуть лише обмінюватися інформацією або ж вони можуть породжувати й нові елементи, нарощуючи структуру). Формалізація структурних понять здійснюється в термінах різного роду схем (див. *Стиля логічна*, *Атоматичні ітеративні*). А. М. Колмогоров накреслює підхід, який привів до формулювання досить загального та все ще конструктивного поняття структури автомата (див. *Атоматичні аргументи*), яке, очевидно, охоплює всі відомі типи структур автоматів і всі ті, що їх можна передбачити на сучасному рівні науки. Цілком очевидно, що в тісний зв'язок між структурою автомата і його поведінкою. Проте роздільно вивчати кожен з цих двох аспектів при значному абстрагуванні від іншого не лише можна, а й часто й корисно при постановці та розв'язуванні багатьох важливих проблем. Таке вивчення здійснюють відповідно в абстрактній (поведінковій) і структурній теорії автоматів.

Типи автоматів. Найпоширенішою є класифікація автоматів і відповідних розділів А. т., присвячених різним типам автоматів, за тими ознаками 1) *Обсяг пам'яті*. Скінченні й нескінченні автомати характеризуються відповідно скінченністю й нескінченністю обсягу пам'яті (кількістю внутрішніх станів). Скінченними автоматами в окремі блоки сучасних обчисл. машин і навіть маши-

на загалом. Мозок також можна розглядати як скінченний автомат. Нескінченні автомати являють собою природну математичну ідеалізацію, що походить з уявлення про автомат із скінченим, але незорою великим числом станів. При цьому мається на увазі лише потенціальна нескінченність пам'яті, яка проявляється в тому, що пам'ять, хоч і лишається скінченною в кожний момент часу, але може необмежено зростати. Така ідеалізація виникла вперше в галузі теорії алгоритмів у процесі уточнення інтуїтивного уявлення про алгоритм. Структурно-зростаючий автомат уявляють у вигляді сполучення елементів, здатних до розмноження й нарізання схем (у сучасній ЕОМ можна розглядати як зростаючі (а разом з тим і потенційно нескінченні) автомати в такому розумінні: щоб обчислення в усіх випадках можна було доводити до кінця, доводиться припускати можливість неможливого нарізання зовнішньої (на магнітній стрічці) пам'яті. 2) Механізм випадкового вибору. У детермінованих автоматах поведінку й структуру в кожний момент часу однозначно визначено поточною вхідною інформацією та станом автомата, що склався в попередній момент. В ймовірнісних (стохастичних) автоматах вони залежать ще й від деякого випадкового вибору. Стохастичні автомати не слід плутати з детермінованими, в яких також порушено умову однозначності (проте без участі будь-якого механізму випадкового вибору).

Проблеми і методи. До центральних проблем А. т. належать проблеми аналізу, тобто описування поведінки автомата, виходячи з заданої його програми або структури, і синтезу тобто конструювання автомата, поведінка якого задовольняла б поставлені вимоги. З цими проблемами тісно пов'язані й багато інших задач, які інтенсивно досліджуються (повнота й універсальність, мінімізація мови, асимптотичні оцінки тощо). Наявність аналізу синтезу досліджено в теорії скінчених детермінованих автоматів, причому їх неоднаково трактують в абстрактній і структурній теорії автоматів. Так, напр., у структурній теорії під синтезом (див. *Синтез автоматів структурний*) розуміють побудову схем з заданого асортименту елементів, яка була б оптимальною (чи близькою до оптимальної) щодо деякого критерію складності схем. Тут переважують комбінаторно-інформаційні методи й асимптотичні оцінки (К. Шеннон, С. В. Яблонський, О. Б. Лупанов та ін.). В абстрактній теорії автомати задовольняються побудовою програми функціонування автомата (див. *Синтез автоматів абстрактний*), напр., у вигляді ф-цій переходу та виходу для скінченного автомата, яка звичайно править за певний матеріал для дальшого розгортання структурного синтезу. Тут використовують переважно алгебричні (С.-К. Кіні, В. М. Глушков та ін.), математико-логіч. (Б. А. Трахтенброт, Р. Бюхі та ін.), ігрові (Р. Мак Нотон) методи й поняття. Проблема аналізу й синтезу скінчених детермінованих автома-

тів посідає значне місце й у теорії релейних пристроїв.

У теорії експериментів з автоматами (Е. Мур) розробляють методи, які дають змогу за відомостями, одержуваними при зовнішньому спостережанні за поведінкою автомата, встановлювати програму його функціонування або принаймні деякі її властивості. Ці методи можна розглядати як своєрідний прийом абстрактного синтезу й розшифровування автоматів (Я. М. Барздинь). Роботи К. Шеннона, М. Рабіна та ін. дали поштовх розвитку теорії ймовірнісних автоматів у таких напрямках: 1) якою мірою поняття й методи теорії детермінованих автоматів переносяться на стохастичні автомати, 2) яких спрощень обчислювального процесу можна досягти при виході з певного класу детермінованих автоматів у ширший клас автоматів ймовірнісних. Вивчення зростаючих автоматів зосереджено в основному на таких проблемах: 1) розробка моделі зростаючих автоматів і вивчення окремих класів їх (ітеративні автомати — Ф. Хенні, *автомати реєстри* — В. М. Глушков, *автомати самоїдентифікації* — Дж. фон Нейман, узагальнені зростаючі автомати — А. М. Колмогоров, Я. М. Барздинь); 2) оцінка обчислювальних здатностей і складності обчислювання зростаючих автоматів (Я. М. Барздинь, Б. А. Трахтенброт, Ю. Хартманіс, Г. С. Цейтін, М. Рабін та ін.).

Зв'язок з іншими назковими напрямками. Значення теорії алгоритмів і теорії релейних пристроїв для А. т. вже пояснено вище. Слід указати й на зворотку віддачу А. т., мети якої дали змогу розв'язувати деякі задачі, що виникли в матем. логіці й теорії алгоритмів (Р. Бюхі). Проблематика, що складається в теорії зростаючих автоматів (напр., *складність обчислювання*), перебуває по суті на межі теорії алгоритмів і асимптотичних закономірностей структурного синтезу автоматів. А. т. і математична лінгвістика тісно пов'язані. Одним з важливих понять матем. лінгвістики є *граматика породжувальна* — об'єкт, дуже близький до породжувального автомата. Тому окремі досить важливі положення теорії граматик можна в принципі віднести до А. т. В абстрактній теорії автоматів матем. питання навчання та доцільної поведінки одного індивідуума чи колективу було уточнено й досліджено в термінах *автоматів ігор* (М. Л. Цейтін). Корисним виявився й зв'язок теорії скінчених автоматів з теорією проектування ЦОМ і теорією програмування (В. М. Глушков, О. А. Лєтичевський).

Лит. Гавриков М. А. Теорія релейно-контактних схем. М.—Л., 1950 (бібліогр. с. 298—299); «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51, Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 (бібліогр. с. 464—469); Кобрицкий Н. Е., Трахтенброт Б. А. Введение в теорию конечных автоматов. М., 1962 (бібліогр. с. 399—422); Цейтлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., 1969 (бібліогр. с. 306—316); Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М. Конечные автоматы (Поведение и синтез). М., 1970 (бібліогр. с. 389—393); Автоматы. Пер. с англ. М., 1956. В. А. Трахтенброт.

**«АВТОМАТИКА І ТЕЛЕМЕХАНІКА»** — радянський науково-технічний журнал. Висвітлює теоретичні й прикладні питання автоматизації й телемеханіки, розглядає проблеми кібернетики, що стосуються питань загальної теорії автоматів, керування, теорії й методів побудови систем автомат. оптимізації й самонастроюваних систем, теорії релейних схем і скінченних автоматів, застосування обчисл. пристроїв в автоматизації, проблем надійності тощо. «А. і т.» висвітлює й методи теоретичного й експериментального дослідження автоматизовуваних виробничих процесів та принципи побудови систем автомат. контролю й керування виробничими процесами. Видає його в 1936 (перерва в 1942—45) Академія наук СРСР. Виходить 12 раз у рік.

**АВТОМАТНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ** — те саме, що й *оператор автоматичний*.

**АВТОНОМНІСТЬ** — незалежність будь-якої в множині регульованих величин у багатоконтурній системі автоматичного керування від решти регульованих величин або від усіх задавальних діянь, крім одного, що відповідає їй. Умову А. вперше сформулював і застосував 1934 рад. вчений І. М. Вознесенський (1887—1946). Він поставив і розв'язав задачу про те, щоб зміна однієї якоїсь з  $n$  регульованих величин могла відбуватися незалежно від зміни решти  $n - 1$  величин, тобто автономно. Поняття А. запровадили також 1950 А. С. Боксеном та Р. Худ (США).

Об'єкт регулювання в заг. випадку може мати  $m$  входів  $\theta_i(p)$  та  $n$  виходів  $Y_i(p)$ , зв'язаних між собою внаслідок особливостей фіз. процесів, які відбуваються в ньому, так що кожне вхідне діяння впливає на всі

рівняннями

$$Y_i(p) = \sum_{k=1}^n E_{ik}(p) \theta_k(p), \quad k, i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (1)$$

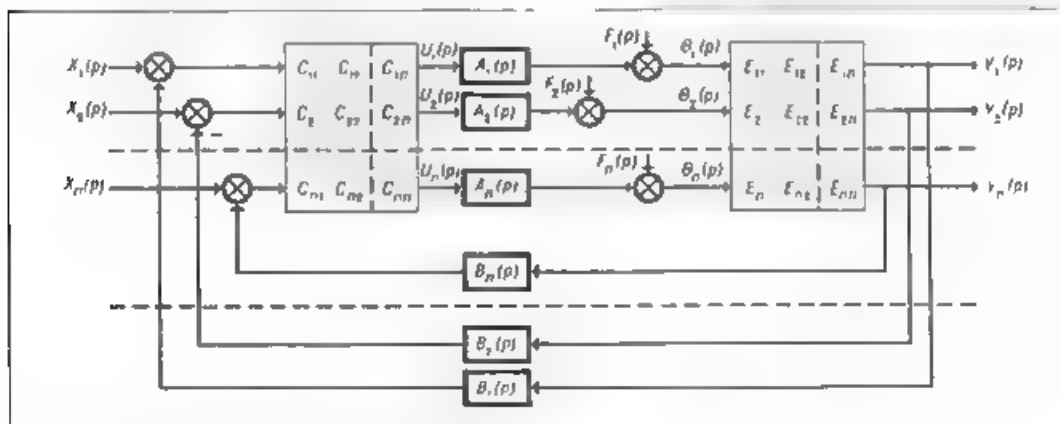
де  $E_{ik}(p)$  — передавальна функція, яка зв'язує  $i$ -у вихідну величину  $Y_i(p)$  з  $k$ -им вхідним діянням  $\theta_k(p)$  в об'єкті. Таблиця  $E_{ik}(p)$  утворює матрицю передавальних функцій  $E$ , в цьому випадку при  $m = n$  — квадратну

У системах з багатьма регульованими змінними, як і в звичайних системах, задавальне діяння системи  $X_i(p)$  порівнюється з регульованою величиною  $Y_i(p)$ , яка відповідає їй, а розузгодження сприймає регулятор, який виробляє сигнал  $\theta_i(p)$ , що надходить на  $i$ -й вхід об'єкта регулювання. Керуючі діяння  $U_i(p)$  і, отже,  $\theta_i(p)$  (дальш. мал.) формуються як лінійні форми від усіх розузгоджень за допомогою передавальних функцій  $C_{ik}(p)$  регулятора, які зв'язують  $U_i(p)$  з розузгодженнями  $[X_k(p) - Y_k(p)]$ :

$$U_i(p) = \sum_{k=1}^n C_{ik}(p) [X_k(p) - Y_k(p)] \quad (2)$$

Таблиця передавальних функцій  $C_{ik}(p)$  також утворює в цьому випадку квадратну матрицю  $C$ . Вхідна величина об'єкта

$$U_i(p) = A_i(p) U_i(p) + F_i(p), \quad (3)$$



Структурна схема автономної системи керування.

або кілька регульованих величин  $Y_i(p)$ , де  $m \geq n$ . Допомогтися А. кожної регульованої величини можна за допомогою відповідно спроектованої системи керування.

Розглянемо випадок, коли  $m = n$ . Залежність  $Y_i(p)$  та  $\theta_i(p)$  (мал.) виражається

де  $A_i(p)$  — передавальна функція  $i$ -го виконавчого елемента системи,  $F_i(p)$  — збурення, яке діє на  $i$ -му вході об'єкта. На основі аналізу системи рівнянь (1—3) можна одержати умови А. Будь-яка з регульованих величин  $Y_i(p)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  буде авто-

помною щодо всіх «зужих» задавальних діляк  $X_k(p)$ ,  $k \neq i$ , якщо можна передавальна функція  $\frac{Y_i(p)}{X_k(p)}$  тотожно дорівнює нулеві для

всіх  $k$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , тобто

$$\frac{Y_i(p)}{X_k(p)} = \frac{\Delta_k(p)}{\Delta(p)} \equiv 0,$$

крім передавальної функції щодо свого задавального ділянки,  $k = i$ ,

$$\frac{Y_i(p)}{X_i(p)} = \frac{\Delta_i(p)}{\Delta(p)} \neq 0,$$

де  $\Delta(p)$  — головний визначник системи рівнянь (1—3),  $\Delta_k(p)$  — визначник, що його одержують з  $\Delta(p)$ , замінюючи  $i$ -ий стовпчик стовпчиком коефіцієнтів при  $X_k(p)$ . Ці умови А., що їх іноді наз. критерієм А., виконуються, якщо додержують таких співвідношень.

$$\frac{A_k(p) C_{ik}(p)}{A_k(p) C_{kk}(p)} = \frac{|E_{ki}(p)|}{|E_{kk}(p)|}, k=1, 2, 3, \dots, n,$$

де  $|E_{kk}|$  та  $|E_{ki}|$  — алгебр. доповнення елементів  $E_{kk}$  та  $E_{ki}$  головного визначника  $E$ .

У процесі роботи, крім керуючих діянь, на об'єкт діють і різного роду збурення  $F_i(p)$ . За цих умов для здійснення високоякісного керування не достатньо забезпечити лише А., а потрібно водночас зжити заходів щодо подолання якості перехідного процесу та компенсації збурень (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*).

А. широко застосовують у складних автомат. системах, таких, напр., як системи керування турбореактивними авіац. двигунами з форсажною камерою, системи регулювання парових турбін, системи керування безпілотними літальними апаратами тощо.

Див. Вознесенский И. И. Регулирование машин с большим числом регулируемых параметров «Автоматика и телемеханика», 1978, № 4, 5; Кухтепко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. М., 1963 (библиогр. с. 364—371); Ильяев С. Ю. и Савин В. Технические кибернетика. Пер. с англ. М., 1956 (библиогр. с. 447—450).

**АВТОНОМНОСТІ КРИТЕРІЙ** — див. Автономність.

**АВТОПІЛОТУВАННЯ** — автоматичне керування польотом літальних апаратів. Здійснює його автоматич. система — автопілот, без участі людини. А. передбачає керування лінійними (висота польоту, бічне відхилення від заданого напрямку й пройдена відстань) та кутовими (кут тангажу, крену, ривання, атаки й ковзання) координатами літальних апаратів. Для керування цими координатами докладаються відповідні сили й моменти, що діють на літальний апарат. Їх створюють або аеродинамічні керуючі поверхні — рулі висоти й напрямку, елерони або спец. реактивні газові руді та змінна тяга двигунів.

Керування лінійними координатами здійснюється в літальних апаратах здебільшого через кутові. Так, щоб змінити висоту, відхиляють руль висоти, який створює момент, що повертає літальний апарат і так змінює кут тангажу, а з ним і кут атаки. А зміна кута атаки спричинює зміну підйімальної сили і отже й висоти польоту. Через те, що літальний апарат має три ступені вільності відносно кутових рухів, для керування його польотом система А. повинна мати не менше як три канали керування (за креном, тангажем і курсом), зв'язані в заг. випадку в єдину систему.

Оск. функції системи А. по можному в трьох каналах: вимірювати відхилення лінійних або кутових координат від заданого значення, перетворювати й посилювати ці відхилення, формувати керуючі сигнали й підсилювати їх за потужністю та діяти ними на відповідні органи керування так, щоб політ відбувся, як це бажано, тобто за заданою траєкторією, а потрібною швидкістю тощо. Під час польоту в збуреній атмосфері на літальний апарат діють неупорядковані пориви вітру, які спричинюють відхилення координат від заданого значення й збуджують небезпечні коливання, які можуть призвести до втрати керованості й до руйнівних перевищень. Автомат. керування за таких умов можна поліпшити, якщо ввести спец. додатковий канал керування й за його допомогою діяти на особливий орган, який безпосередньо керує підйімальною силою літального апарата. Завдяки цьому можна ефективно зменшити (парувати) збурювальне діяння атмосфери.

Щоб задати потрібні координати, що характеризують політ, у системі передбачено задавачі програмних сигналів керування. Лінійні координати, напр. висоту польоту, вимірює барометричний або радіотехнічний висотомір, бічне відхилення — спец. радіотех. засоби. Кутові координати вимірюють гіроскопічні прилади.

На мал. дано схему автомат. керування висотою польоту. Істинна (виміряна) висота польоту  $H$ , значення якої перетворюється на відповідну електр. напругу, порівнюється з заданим значенням висоти  $H_n$ , яке також подано електр. напругою, й різниця їх, пропорційна відхиленню  $H$  від  $H_n$ , попередньо підсилюється. З неї формується керуючий сигнал, що підсилюється за потужністю й діє на рульову машинку, а вона відхиляє руль висоти (РВ) так, що виникає момент, який і повертає літак навколо осі  $z$ , перпендикулярної до площини малюнка, а внаслідок цього змінюється кут тангажу  $\theta$  і кут атаки  $\alpha$ ; зміна  $\alpha$  спричинює зміну величини підйімальної сили  $Y$ , отже, й висоти польоту  $H$ . Система А. здійснює керування літальним апаратом за основі принципу *зворотного зв'язку*. В таких системах за певних співвідношень між величинами аеродинамічних коеф. літального апарата й передавальними числами



автопілота можуть виникнути небажані коливання. Треба, щоб автопілот так був налаштований, щоб ці коливання не виникали. Але аеродинамічні коеф. дуже змінюються залежно від режиму польоту літального апарата, через це потрібно переналаджувати автопілота. Системи А., в яких переддавальні числа автопілота автоматично налаштовуються відповідно до зміни аеродинамічних коеф. літального апарата, наз. самонастроюваними. Такі системи універсальніші за звичайні системи А. В принципі так само

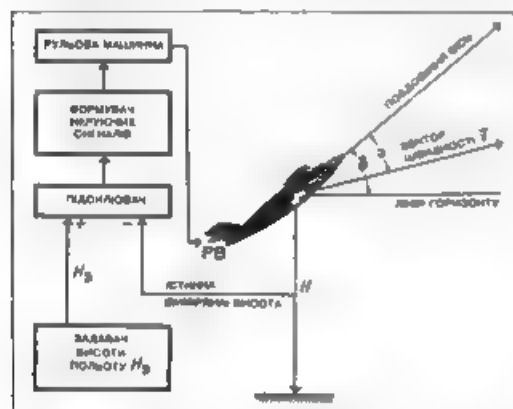


Схема автоматичного керування висотою польоту літальним апаратом

здійснюються А. й іншими літальними апаратами: керованими ракетами, космічними апаратами та вертольотами. Різниця лише в способах вимірювання положення літального апарата в просторі та в координатах, які характеризують це положення, у способі формування керуючих сигналів та в будові органів керування, за допомогою яких змінюється положення літального апарата в просторі.

Найважливіше практичне завдання на сучасному етапі розвитку А. — розробляти і впроваджувати системи широкого призначення, які автоматично керують літальними апаратами на всіх етапах польоту, включаючи злітання й посадку, при повній відсутності видимості та в дуже збуреній атмосфері.

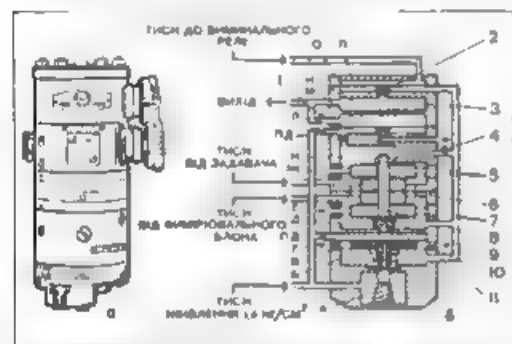
Літ. Подяер В. А. Теорія автоматичного управління польотом. М., 1984 [об'єм 8, 692 с.]. Колосов С. П., Стройлов В. М. Основы автоматического пилотирования. М., 1959; Кухтечко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1983 [об'єм 8, с. 364, 371]. А. Г. Шендеров.

**АГРЕГАТНА УНІФІКОВАНА СИСТЕМА (АУС)** — система пневматичних засобів автоматизації загальнопромислового призначення, побудована за агрегатним принципом, згідно з яким її складають з окремих блоків, які добирають за функціональною ознакою. Вхідні та вихідні параметри блоків уніфіковано. Агрегатний принцип побудови системи дає змогу різним підсилювальним блокам у схемах, при порівняно невеликій кількості їх, створювати системи керування виробничими процесами різної складності.

Залежно від виду енергоносія АУС може мати три гілки: електричну, пневматичну й гідравлічну (не поширилася). Найбільше розвинуто й широко впроваджено пневматичну гілку. До комплексу пристроїв АУС входять блоки: вимірювальні, регулювальні (в пропорційних і пропорційно-інтегральних регуляторах за законами), передувальні (діяння за похідною), регулювання співвідношення двох параметрів, підсумовування, множення на коеф., множення двох параметрів, добування квадратного кореня, піднесення до квадрата, сигналізації, підсилювання за потужністю та задавачі й прилади контролю. Щоб застосовувати пристрої АУС у схемах з електр. приладами, в цій системі передбачено пневмоелектр. та електропневматичні перетворювачі. За уніфікації вхідні й вихідні параметри АУС прийнято тиску стиснутого повітря, який змінюється в діапазоні  $0,2-1 \text{ кг/см}^2$  надлишкових. Живлення блоків здійснюється очищеним стиснутим повітрям за тиску  $1,4 \text{ кг/см}^2$  надлишкових. Блоки уніфіковано й конструктивно: вони мають стандартні вузли, деталі й приєднувальну арматуру. Регульовальні й показувальні прилади контролю являють собою силфонні манометри з межами вимірювання  $0,2-1 \text{ кг/см}^2$ . На мал. показано зовн. вигляд і принципову схему пропорційно-інтегрального регулювального блока 4РБ-32А системи, який є найскладнішим і має найбільшу кількість уніфікованих деталей і вузлів.

Робота регулювального блока, як і більшості блоків АУС, ґрунтується на принципі компенсації зусиль, що виникають на мембранах внаслідок змінювання тиску повітря, підводжуваного до пневматичних камер блока. Регулювальний блок має такі осн. вузли: підсилювач потужності (камери А, Б, В і Г), елемент порівнювання (камери Е й Ж), зворотного зв'язку (камери Д і К), ізольовані камери Л і М) і вимикальне реле (камери Н, О і П) для переходу на ручне керування. З лінії живлення повітря надходить у камеру А підсилювача й далі через постійні опори ПД (що являють собою капіляри) — в камери Г і Л. Якщо регульований параметр дорівнює його заданому значенню, тиски в камерах Е й Ж рівні. Тиски в камерах Д, К, Л і М також дорівнюють один одному. При відхиленні регульованого параметра тиск у камері Е змінюється, й на мембранах 5, 6 і 7 виникає розбаланс сил; при цьому мембрани, разом зі штоком 8, що зв'язує їх, переміщуються, й заслінка 9, закріплена на штоку, змінює прохідний переріз сопла 10, внаслідок чого змінюється тиск у камері Г. Ця зміна тиску посилюється в підсилювачі, а потім надходить у канал 11 і через камеру Н вимикального реле — у вихідну лінію блока, зв'язану з виконавчим механізмом. Негативний зворотний зв'язок здійснюється подаванням стисненого повітря в камеру Д. Величину коеф. підсилення регулятора (діапазону дрослювання) встановлюють дросе-

дем 4, що змінює надходження стисненого повітря з каналу 11 у камеру позитивного зворотного зв'язку К. Час ізодрому встановлюється дроселем 1, що регулює час заповнення глухої камери М. Дроселі 1 і 4 діють собою регульовані голчасті клапани. Коли повітря жикання надходить у камеру П, мембрана 2 перекриває сопло 3 і відсмиє вихід регулятора від виконавчого механізму. Межі наладжувань регульовального блока: діапазон дроселювання — 10+250%, час ізодрому — 3 сек+100 зс. В АУС передбачено



Регульований блок 4PB-12A: а — загальний вигляд, б — принципова схема

задавачі трьох типів: ручний — для встановлення постійного за величиною задавання та два програмні — з програмою, що змінюється в часі й залежно від параметра. Блоки й прилади АУС вибухо- й пожежобезпечні, прості в обслуговуванні й надійні в роботі. Їх це зумовило ширше застосування їх для автоматизації виробничих процесів у багатьох галузях промисловості: нафтодобування, нафтопереробці, хімії, харчовій, газовій та ін. Л. М. Березовед Г. Т. Малаха А. І. Назарянов В. М. Прибори пневматической агрегатной унифицированной системы и их применение для автоматизации производственных процессов. М., 1965 (Изобрет. а. 211—212); Прессеано В. С. Пневматические регуляторы М. Л., 1966 (бібл. стр. 278—279). І. Т. Березовед

**АГРЕГАТИВНО-БЛОКОВА ПОБУДОВА ЗАСОБІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ** спосіб побудови засобів обчислювальної техніки компонуванням конструктивно й функціонально уніфікованих блоків, з'єднаних уніфікованими зовнішніми зв'язками в агрегати, з метою створення пристроїв, машин і систем для збирання, зберігання, перероблення й видавання інформації. Дас змогу розв'язати суперечність між вимогами однотипності виробів масового виробництва й різноманітністю засобів обчислювальної техніки. Різноманітності агрегатованих пристроїв за призначенням досягають поєднанням різноманітних, таких, що виконують певні функції, блоків, включених до складу пристроїв. Можливість поєднувати такі блоки в агрегати забезпечується вибором спрощених відповідних видів. Модифікування пристроїв агрегатної системи здійснюють зміною кількості або замінюючи окремих блоків та вузлів. Порівняно невели-

ка кількість різновидів елементів агрегатної системи дає змогу одержати багато модифікацій пристроїв, побудованих за агрегативно-блоковим принципом. За таким принципом будуть пристрої, які використовують для передавання сигналів та реалізації їх різні види енергії: електричні, пневматичні, гідравлічні й комбіновані (що використовують водночас різні види енергії) агрегатні уніфіковані системи засобів автоматизації та обчислювальної техніки.

Однотипність елементів агрегатної системи дає змогу здійснювати масове виробництво їх, скоротити строки виготовлення, зменшити вартість апаратури, полегшити її експлуатацію та ремонт, зменшити номенклатуру й кількість запасних частин. Можливість задовольнити різноманітні вимоги, які виникають при автоматизації різних процесів та об'єктів, за допомогою порівняно невеликої кількості вихідних елементів визначає великий народногосподарський ефект від впровадження приладів, пристроїв, машин і систем, побудованих за агрегативно-блоковим принципом. Тенденція до створення агрегатованих автомат. інформаційних, керуючих та обчисл. систем і типових рядів обчисл. та керуючих машин почала виявлятися в зв'язку з безперервно зростаючим попитом на засоби обчисл. техніки для науково-тех. розрахунків, оперативного керування виробництвом та автоматизації технологічних процесів. За таких умов найдефективнішими є машини, здатні суміщувати розв'язування завдань керування виробництвом завданням з автоматизацією виробничих процесів. При цьому можливі шляхи створення окремих машин, і систем та сімейств машин, агрегатованих з набору функціональних пристроїв. Кращим є другий шлях, що дає змогу зменшити вартість машин і систем за рахунок широкого використання уніфікованих вузлів та елементів, послідовності розроблюваних пристроїв та прогресивності технологічних розв'язків.

За агрегатним принципом побудовано, наприклад, машини й системи «Libratrol», «IBM-360», «GE-600» (США), «ARCH», «KDF-7» (Англія), система 4004 фірми «Siemens» (ФРН) і розроблені в СРСР системи «АУС», «СОУ-1», «Диспр 2», «АПС», «УСЕППА» та ін. А. Б. П. з. о. т. яскраво виражено в агрегатній системі АСОТ, в агрегативній системі засобів збирання та первинного дероблення інформації («АСП») та в комплексі технічних засобів для локальних інформаційно-керуючих систем («КТЗ.ІКС») Л. М. Назаров В. М. Захаров В. Г. Філіппов Е. Н. Основные принципы создания агрегатных комплексов средств вычислительной техники для систем управления «Управляющие системы и машины» 1972. № 1 В. М. Бегичко.

**АДАМСА МЕТОД** — один з числових методів розв'язування задачі Коші. Див. Коші задачі для звичайних диференціальних рівнянь способи розв'язування.

**АДАПТАЦІЯ** в кібернетичі — процес нагромадження й використання інформації в системі, спрямований на досягнення дея-

кого, адекватного оптимального в певному розумінні, стану чи поведінки системи при початковій невизначеності та зовнішніх умовах, що змінюються. При А. можуть змінюватися параметри її структура системи, алгоритми функціонування, керуючі діяння тощо.

А. застосовують тоді, коли фактори, що впливають на систему, цілком або частково невідомі. В процесі А. система нагромаджує дані про ці фактори й визначає їхні характеристики. Прикладом системи з А. є автоматичний керований снаряд, який переслідує ціль, стратегія поведінки якої невідома. Найпростіші процеси з А. відбуваються в системах автомат. регулювання, напр., А. автопілота для зміни висоти польоту (див. *Автоматизація*). А. реалізується в адаптивних системах керування, у самоналаштуваних системах. У розпізнаванні образів проблема А. пов'язана з навчанням і самонавчанням розпізнавати сигнали. Причому, початкову невизначеність усувають за допомогою навчання або самонавчання, а нагромаджену інформацію використовують, щоб збільшити вірогідність розпізнавання. Див. також *Навчання розпізнавати образи, Самонавчання розпізнавати образи*. Т. К. Вінчик.

**АДАПТИВНА СИСТЕМА** — система, адаптивна пристосовуватися до змін внутрішніх і зовнішніх умов. Див. *Система керування адаптивна*.

**АДРЕС МОДИФІКАЦІЯ** — зміна адресної частини команд, що забезпечує звертання до комірок, які в ній явно не зазначено. Найчастіше А. м. реалізується шляхом використання індексних регістрів. Для кодування зв'язку адрес із регістрами відводяться спец. розряди команд. Д. Н. Тодорей.

**АДРЕСА** у програмуванні — цифрове або буквенно-цифрове позначення поля (напр., окремої фізичної комірки) пам'яті ЦОМ. З А. комірки пов'язані поняття її вмісту — наявного в ній у даний момент коду, що зберігається там до вміщення в неї іншого коду, який винищує попередній. Використовують А. в мовах машинних і мовях машинно-орієнтованих для адресації — вказівок у командах операндів. Машинні комірки, А. яких можна використати в командах, становлять адресу, або головну, пам'ять машини. А. операнда наз. також її прямою А., або А. 1-го рангу. Істотну роль в описуванні машинних алгоритмів відіграють т. з. А. вищих рангів, використання яких подлягає у зазначенні в командах А., що містить А. операнда. А., вмістом якої є А. операнда, наз. А. 2-го рангу цього операнда (інші її назви — непряма адреса, фіксатор і посилання — див. *Адресна мова*). Поняття рангу А. можна узагальнити на будь-яке ціле число. Використання А. вищих рангів — це зручний засіб для записування програм, бо дає можливість подавати їх у вигляді, що не залежить від місця розташування цих програм у пам'яті машини, від

місця розташування оброблюваних ними даних та їх. параметрів задач.

У машинних і асемблерних мовах, окрім того, що зазначають операнди за допомогою зазначення в командах їхніх А. тих чи інших рангів, використовують і інші види адресації, напр., явну (або адресацію нульового рангу), при якій у команді зазначають не А. операнда, а безпосередньо сам операнд; адресацію за допомогою символічних А. — скінченних послідовностей букв або цифр, якими позначають поля пам'яті; відносних А. — А. операнда задають, вказуючи чи додатний або від'ємний приріст до якоїсь іншої базової А. В окремих випадках, коли базовою А. є А. команди, що виконується в даний момент часу, відносна адресація наз. поточною, а коли як базову А. використовують вміст спец. базового регістру — базовою адресацією. В операціях, які виконують команди ЦОМ, можуть, крім головної пам'яті, брати участь і інші сховища, напр., *регістри*, звертання до яких може здійснюватися без явного зазначення їх у команді.

К. Л. Ющенко.

**АДРЕСА МАТЕМАТИЧНА** — адреса поля у віртуальній (математичній) пам'яті машини. Віртуальна пам'ять в обсязі, порівнянному, як правило, з обсягом осн. пам'яті машини, формально передастись в розпорядження програмістові (або системі автоматизації програмування); нумерація комірок у ній передбачається послідовна, починаючи з нуля. А. насправді *операційна система* виділяє задачі в загальному випадку ніяк не зв'язаних між собою ділянок реальної (основної або зовнішньої) пам'яті; при цьому відповідність між А. м. і фізичними адресами (тобто відображення віртуальної пам'яті на реальну пам'ять) міститься в таблицях операційної системи. Це відображення в процесі розв'язування задачі може багато разів змінюватись. В разі звертання програми до певної А. м. операційна система, використовуючи апаратний програмний засіб, відшукує реальну комірку, що відповідає цій А. м., і виконує потрібну операцію з наявною в ній інформацією. Будучи адресою уявної пам'яті, А. м., як і адреса реальної фіз. пам'яті, може бути абсолютна, відносна, пряма, непряма тощо (див. *Адреса у програмуванні*). А. І. Нікітін.

**АДРЕСНА МОВА** алгоритмічна мова орієнтована на застосування як основа для створення мов програмування. Основу А. м. становить відношення адреси та вмісту; формалізація цього відношення дає змогу в простій формі описувати операції, реалізовані на ЦОМ. Цю мову розроблено 1955–56 в СРСР. В А. м. елементи первісної інформації, результати розв'язання задач, а також конструктивні об'єкти, використовувані для побудови програм розв'язування задач, розглядаються як об'єкти певної системи кодіє S, між якими встановлено певні співвідношення, що наз. операціями над кодами. Ці співвідношення дають змогу за звичайними правилами будувати вирази, значення

нями яких також є коди, одержані в результаті виконання вказаних у них операцій. При цьому коди підмножини  $S_1$  ( $S_1 \subset S$ ), інтерпретованої як множина елементів первісної інформації, можуть задаватися в певному вигляді і за допомогою елементів деякої множини  $A$  ( $A \subset S$ ), що наз. множиною адрес.

Операція виділення вмісту адрес, т. з. штрих-операція, задає відображення множини  $A$  в множину  $B$  ( $B \subset S$ ), яка наз. множиною вмістів цих адрес. Таке відображення наз. адресним. Штрих-операція позначають символом ' (штрих), напр.,  $a' = b$ , де  $a \in A$  і  $b \in B$ . Штрих-операція є однозначною — кожній адресі відповідає лише один вміст. Ніяких обмежень щодо вибору множини  $A$  в А. м. не накладається. При кожній конкретній реалізації А. м. цю множину можна визначити певним конструктивним способом. У найпростішому випадку при орієнтації мови на певну машину за  $A$  можна прийняти множини адрес П оперативної пам'яті та програмних регістрів; в інших випадках як  $A$  можна розглядати множину байтів тощо. В загальнішому випадку при орієнтації мови на клас машин за  $A$  можна прийняти об'єднання деяких підмножин полів пам'яті. При цьому перетна  $A$  і  $B$ , як правило, не є пустим, виникає змога багато разів застосовувати штрих-операції, а це призводить до поняття рангу адреси. Нехай  $b$  є вмістом адреси  $a$ , тобто  $a' = b$ , а  $c$  — вмістом адреси  $b$ , тобто  $b' = c$ ; тоді  $a$  є адресою адреси коду  $c$ , де  $a$  наз. адресою 2-го рангу коду  $c$  або фіксатором (чи непрямою адресою)  $a'' = (a')$ ,  $b' = c$ . Аналогічно привчають і адреси вищих рангів:  $a_k = (a_{k-1})'$ . Адреса  $a$  наз. адресою нульового рангу коду  $a$ , 1-го рангу (чи просто адресою) відносно свого вмісту і т. д.

Операцію, обернену штрих-операції, наз. інверс-штрих-операцією, позначають  $\Pi$  через  $\Pi$  вгорі знака під аргумента ( $\Pi^{-1} b = a$ ). Ця операція не є однозначною: одному вмістові  $b$  може відповідати множина адрес  $A_b$  таких, що для кожного  $a \in A_b$  маємо  $a' = b$ . Для визначення та зміни адресного відображення вводять алгоритмічну операцію засилання на адресу (відповідає операції присвоєння в інших мовах) і позначають її символом  $\Rightarrow$ . Запис операції  $b \Rightarrow a$  означає, що: 1) елемент  $a$  включається в множину  $A$ ; 2) елемент  $b$  виключається з множини вмістів  $B$ ; 3) встановлюється відповідність  $a' = b$ ; 4) всі раніше встановлені відповідності вигляду  $x = y$ , де  $x \neq a$ , лишаються незмінними. В операції  $b \Rightarrow a$ ,  $a$  і  $b$  можуть бути якимись функціями. Тоді значення функції  $b$  стає вмістом адреси, яка є результатом обчислення значення функції  $a$  ( $a' = b$ ). При конструюванні функцій, крім штрих-операцій, можна використовувати й арифметичні (+, -, ×, :), функціональні (√, exp, ln тощо), логічні (V, Λ, ∩), відношення (<, =, >, >=, <=) та інші операції. Такі функції

наз. адресним. Вираз  $b \Rightarrow a$ , де  $a$  і  $b$  — адресні функції, наз. адресною формулою перетворення, або формулою засилання.

Процес перетворення інформації на А. м. подають у вигляді адресної програми, яку задають первісним розподілом адрес в  $S$  і послідовністю адресних формул із зазначеним порядком застосування їх. Цей порядок задають за допомогою операторів циклу, умовного, безумовного та обчислюваного переходів, звертання до підпрограми і т. ін. Залежно від того, які об'єкти, що в них конструються програми, можуть бути представлені в ній за допомогою вмістів адрес, розрізняють ступені А. м. На 1-му ступені за допомогою адрес задають елементи первісної інформації та дії; на 2-му — вмістами адрес можуть бути й адреси; нарешті, на 3-му ступені вмістами адрес можуть бути ще й символи одно- та двомих операцій.

Запис програми А. м. складається з двох частин: первісного адресного відображення та динамічної частини. Динамічною частиною програми наз. список адресних рядків. Первісне адресне відображення зазвичай задають співвідношенням виду:  $a' = c$ ; серед цих співвідношень можуть бути й такі, в яких  $c$  не є елементом первісної інформації, а тому їх можна записувати у вигляді елементарних формул засилання вигляду  $b \Rightarrow c$ . Сукупність таких рівностей наз. статичною частиною адресної програми. А. м. допускає вільне варіювання об'єктів статичної й динамічної частини, тобто інформацію з статичної частини можна переносити до динамічної частини і навпаки. В процесі розв'язування будь-якої задачі проводяться огляд інформації, що стосується її. Кажуть, що програма оглядає код, якщо його адреса якогось рангу міститься в адресній програмі. Застосування адрес вищих рангів розширює можливості огляду кодів програм. Програмування зводиться головним чином до побудови схем огляду інформації. Схемою огляду послідовності кодів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наз. циклічну адресу програму, на  $i$ -му з циклів якої оглядається  $i$ -й елемент послідовності. Під час побудови схем огляду інформації для впорядкування елементів до множин вводять операції слідування: елементи первісної інформації впорядковують за допомогою адрес, у яких вони містяться за деяким рангом; відношення слідування на множині адрес задають найчастіше за допомогою арифм. операцій для цілих чисел (машинних адрес).

На основі А. м. розроблено сім'ю мов програмування, що відрізняються одна від одної вибором символіки, набором операторів, рівнем алгоритмізації введених до них операцій слідування в множині адрес і ступенем представлення об'єктів, з яких конструються програми за допомогою вмістів адрес. Залежно від цього виділяють рівні, стилі й ступені А. м. Рівень А. м. визначається рівнем впорядкованості адрес і рівнем алгоритмізації введених до них операцій слідування. Розріз-

няють три осн. рівні мови: загальноалгоритмічний, рівень умовних адрес і рівень конкретних адрес. При загальноалгоритмічному рівні приймають найприроднішу для програмованої задачі можливість адрес і в тих випадках, коли цього потребує задача, вводять операції слідування, описувані загальноматематичними засобами (напр., за допомогою індексів). При рівні умовних адрес адреси впорядковують лише виходячи з вимог задачі; передбачається впорядкування окремих масивів адрес, оброблюваних алгоритмом, а саме ж упорядкування масивів та інші питання, пов'язані з фактичним налягати розподілом, не розв'язуються. Звичайно масиви являють собою арифм. послідовності адрес, першу з яких (чи нульову) задають. Послідовності, визначувані різними початковими адресами, передбачаються неперетинними (операції слідування описуються, таким чином, уже алгоритмічно. Напр., операція слідування по індексах для елементів матриці, розширених по рядках, починаючи з адреси  $a_0 + i$ , має вигляд  $a_0 + (i-1) \cdot n + j$ , де  $n$  — порядок матриці). Рівень конкретних адрес — це виконання якогось алгоритму на конкретній машині, її у зв'язку з цим і розв'язуються питання визначення справжніх операцій слідування. Передбачається, що множину адрес, за винятком програмних регістрів, повністю впорядковано. В А. м. закладено можливість переходити від рівня до рівня, починаючи від найабстрактнішої алгоритмічної мови й кінчаючи повним розподілом адрес для цієї машини. Вибір певного алфавіту, набору елементарних операцій і допустимих формул мови визначає її стиль. Розрізняють мову публікацій, вхідні мови конкретних трансляторів і машинний стиль, запис алгоритмів якимсь відрізняється від машинного запису тільки кодуванням.

Завдяки можливості описувати адреси як функції якихось параметрів А. м. можна описувати й довільні схеми огляду інформації та складні інформаційно-логічні й економічні алгоритми й складні процеси перегляду й пошуку інформації, організованої в записові списки і спискові структури; алгоритми. процеси такого роду не можна описувати за допомогою алгоритм. мов типу АЛГОЛ, не залучаючи допоміжних засобів. У цьому відношенні А. м. випередила алгоритмічні мови, створені за кордоном для спискової обробки символічних виразів (напр., ЛІСВ тощо). Принципова особливість А. м. полягає в їхній природній інтерпретації як мов ЦОМ емпіричних. Тому при складанні конкретних мов машинно-орієнтованих дослідник може використати апарат адресних алгоритмів як зручну систему понять для описування алгоритмів та елементних структур ЦОМ, а також для описування трансляторів та інтерпретаторів мов програмування. Роботи з адресного програмування вплинули на розробку структур і систем команд ряду ЕЦОМ (зокрема, «Кієм» і «Днепр-2»). Засоби А. м.

увійшли як складова частина до мов програмування, таких, як АЛГЕМ та А-КОБОЛ — мова, орієнтована на описування алгоритмів трансляції. Появлять А. м. набули дальшого розвитку в мовах ПЛ-1, АЛГОЛ-68, СИМЗЛА.

Лит. Ющенко Е. Л. Адресное программирование. К. 1963 [бюлетень, с. 285—286]. Вабенко Л. П. Об использовании языка типа КОИПД для описания транслятора «Кибернетика», 1965, № 5. В. П. Савицкий, Н. Л. Ющенко. АИКА (International Association for Analog Computation) — див. Міжнародна асоціація з аналогових обчислень.

**АЛГЕБРА АЛГОРИТМІВ** — система, що складається з двох алгебр  $\mathcal{U}$  та  $\mathcal{B}$ , які називають відповідно алгеброю операторів та алгеброю умов. Елементи алгебри  $\mathcal{U}$  — це часткові перетворення (оператори) якоїсь абстрактної множини  $B$ , а елементи алгебри  $\mathcal{B}$  — часткові предикати (умови), які визначено на множині  $B$ . А. а. використовують для описування перетворень, виконуваних дискретними перетворювачами (див. Дискретні перетворювачі теорія). В цьому разі множину  $B$  наз. інформаційною множиною.

Осн. операція алгебри  $\mathcal{U}$  — це звичайна операція множення (суперпозиції) операторів. Крім цієї операції, для кожної умови  $\beta$  з  $\mathcal{B}$  в алгебрі  $\mathcal{U}$  визначають ще дві операції, які наз.  $\beta$ -диз'юнкцією та  $\beta$ -ітерацією операторів. Результатом  $\beta$ -диз'юнкції ( $P \vee Q$ ) двох операторів  $P$  та  $Q$  є оператор  $R$ , такий, що для будь-якого стану  $b \in B$ ,  $bR = bP$ , коли умова  $\beta$  істинна на стані  $b$ ,  $bR = bQ$ , якщо  $\beta(b)$  хибна й, нарешті, оператор  $R$  вважається невизначеним на стані  $b$ , якщо  $\beta(b)$  не визначено. Результатом  $\beta$ -ітерації ( $\beta P$ ) оператора  $P$  є оператор  $Q$ , такий, що для будь-якого  $b \in B$  має місце  $bQ = bP^m$ , де  $m$  — найменше з чисел  $m = 0, 1, \dots$ , таких, що  $\beta(bP^m)$  істинно ( $bP^0 = b$  для будь-якого оператора  $P$ ). На множині  $B$  умов визначено звичайні булеві операції  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$ , які поширюються і на випадок, коли значення умов на деяких елементах множини  $B$  не визначено. Напр., диз'юнкція  $\alpha \vee \beta$  двох умов є нова умова  $\gamma$ . Ця умова набуває значення «і» на тих елементах множини  $B$ , на яких одна з умов  $\alpha$  або  $\beta$  набуває значення «і». Значення «і» вона набуває на тих елементах, на яких  $\alpha$  та  $\beta$  дорівнюють «і», і вона є не визначеною, якщо одна з умов  $\alpha$  та  $\beta$  не визначена, а друга дорівнює «і». Крім цих операцій, визначають і операцію  $P \cdot \alpha$  множення оператора на умову. Результатом виконання цієї операції є умова  $\beta$ , значення якої дорівнює значенню умови  $\alpha$  після виконання оператора  $P$ . Якщо в А. а. ( $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{B}$ ) зафіксувати систему твірних (елементарні оператори й елементарні умови), то елементи алгебри операторів і алгебри умов можна задавати як вирази, складені з цих твірних та операцій системи алгебр. Такі вирази наз. регулярними операторними й умовними виразами, а оператори та умови, які діють на множини  $B$  і які можна задавати

таким чином, наз. регулярними операторами й умовами. В застосуваннях теорії дискретних перетворювачів до проектування обчислювальних А. а. наз. ще й мікропрограмами алгебрами, а регулярні операторні вирази — регулярними мікропрограмами.

В кожній інтерпретації вхідних і вихідних сигналів дискретного перетворювача на інформаційній множині  $B$  пов'язують  $A$  з  $\{U, S\}$ , за елементарні оператори обираючи оператори  $f_u$ , що відповідають символам вхідного алфавіту, а за елементарні умови — умови вигляду  $\mu(b) = x$ , де  $\mu$  — функція виходів автомата операційного  $B$ , а  $x$  — символ вхідного алфавіту.

Осн. співвідношення між дискретними перетворювачами й А. а. встановлює така теорема про регуляризацію: будь-який оператор, заданий дискретним перетворювачем, можна задавати як операторий регулярний вираз в А. а., що відповідає інтерпретації вхідних і вихідних сигналів цього дискретного перетворювача. На цій теоремі ґрунтуються застосування А. а. до розв'язування практичних задач — проектування дискретних пристроїв і задач програмування. Вивчення структури та співвідношень конкретних А. а. дає змогу виконувати глибокі еквівалентні перетворення алгоритмів, заданих у вигляді регулярних виразів, відносячи такі вирази, які дають оптимальну з точки зору того чи іншого критерію реалізацію алгоритму у вигляді дискретного перетворювача.

Л. М. Глушков В. М. Теория автоматов и формальное преобразование микропрограмм. М.: Машинное, 1985. № 5. О. А. Лемнический

**АЛГЕБРА ЛІНІЙНА** — один з найбільших і найважливіших розділів сучасної алгебри, що широко застосовується в усіх галузях математики, а багатьох галузях механіки та фізики, а також у кібернетиці. Важко точно окреслити межі А. л., бо протягом свого тривалого істор. розвитку вона не раз розширювалася й видозмінювалася, вбираючи все нові й нові поняття в зв'язку з розвитком теорії та практики. На сучас. етапі розвитку можна, дещо умовно, вважати, що А. л. — це та галузь алгебри, яка вивчає властивості векторних просторів (у т. ч. деякі узагальнення, такі, як модулі) та їхні лінійні відображення. Хоча в самостійний розділ А. л. виділилася аж на межі 19 і 20 ст., більшість її проблем і методів мають багатовікову історію розвитку в рамках алгебри, теорії чисел, геометрії та аналізу. Дослідження щодо розв'язання цих проблем і тепер становлять осн. зміст А. л.; за останні десятиріччя до них приєдналися нові проблеми, що випливають насамперед із сучасної обчислювальної математики й кібернетики.

Найдавнішою проблемою А. л. є задача знаходження розв'язків лінійних рівнянь систем і вивчення властивостей таких розв'язків. Практичні методи розв'язування лінійних рівнянь з одним невідомим і найпрості-

ших систем з двома невідомими були відомі вже з глибоку давнини — в Єгипті та Вавілоні. Їх вивчали й у середні віки араб. математики. Це зумовлене тим, що необхідність розв'язувати практичні задачі на обчислення площ та об'ємів, розподіл робочої сили в торговельних угодах тощо приводила в найпростіших випадках до пошуку розв'язків систем лінійних рівнянь. Але в заг. вигляді задачу знаходження розв'язку певної системи з  $n$  рівнянь з  $n$  невідомими розв'язали тільки в 17—18 ст. Г. В. Лейбніц (1646—1716) і Г. Крамер (1704—52). Вони запровадили поняття визначника й обґрунтували відповідне обчислення визначників. Дослідження нелинійних рівнянь (тобто таких, що мають більше як один розв'язок) і несутимих (таких, що не мають розв'язків) систем адійсних тільки в 19 ст. К.-Ф. Гаусс (1777—1855) і Л. Кронекер (1823—91). Потреба в таких дослідженнях поставала в аналітичній геометрії та в аналізі при вивченні фізич. кільк. невідомих, а також у теорії лінійних дифер. рівнянь. Зокрема, поступово з'ясувалося, що гол. метод ефективного розв'язування лінійних диференціальних, а потім і інтегр. рівнянь у механіці, фізиці й техніці полягає в переході до наближених до них систем алгебр. лінійних рівнянь і до знаходження розв'язків цих рівнянь. Тут наука зіткнулася з таким явищем: знаходження числових розв'язків великих систем лінійних рівнянь, які містять сотні й тисячі невідомих (а саме до таких систем зводяться прикладні задачі), вимагав виконання величезної кількості арифм. операцій. У зв'язку з цим у 20 ст. виник окремий, особливо важливий для практики, напрям — обчисл. методи А. л., до завдань якого належить розроблення й вивчення ефективних процедур, алгоритмів для якнайшвидшого й надійного відшукування розв'язків великих систем лінійних рівнянь. Істотне зрушення в цьому напрямі намітилося лише після того, як досягла достатнього рівня обчисл. техніка, особливо після створення ЕОМ.

Друга важлива тема А. л. — вивчення лінійних перетворень вигляду:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,$$

$$\dots$$

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

Ця тема виникла спершу в аналітичній геометрії в зв'язку з перетвореннями координат: саме за зазначеною схемою перетворюються декартові координати точки при переході від однієї системи координат до іншої. Дослідження А. Келі (1821—95), Ж. Сільвестра (1814—97), Ф. Клейна (1849—1925) та ін. привели до далекосяжного зближення геометрії й алгебри на основі таких центр. понять, як «лінійне перетворення» (див. *Оператори лінійні*), «квадратичні форми» тощо, які й досі є найважливішими поняттями в сучасній А. л. Це зближення стало особли-

по підданім, коли наприкінці 19 ст. розробили й увели в ужиток зручну адекватну систему позначень і мову викладу, що належить до неї, — мову числових векторів і матриць. Само поняття «вектора» виникло спочатку в механіці (вектор-сила, вектор-швидкість і т. п.). Потім воно виявилось зручним для геом. досліджень, спочатку в двовимірному і тривимірному просторах, а наприкінці 19 ст. Г. Грасман (1809—77) поклав векторне числення в основу побудови та вивчення  $n$ -вимірного простору. Лише в 20-х роках 19 ст. векторна алгебра в рамках А. л., що утворилася тоді, забуду остаточного аксіоматичного оформлення в понятті «векторний простір» (або «лінійний простір»). Водночас з А. л. було обгрунтовано й обчислення матриць (див. *Алгебра матриць*).

Приблизно тоді згадані поняття набули далекосяжних узагальнень. Їх почали застосовувати в нових галузях, причому одразу в кількох напрямках (напр., виникла і почала розвиватися ескіпично-лінійна геометрія). У працях Д. Гільберта (1862—1943) вперше методи досліджень і поняття А. л. було систематично перенесено на простори ф-цій, що їх розглядають як ескіпично-лінійні векторні простори. Цей погляд було покладено в основу визначення дифер. та інтегр. рівнянь, варіаційного числення та ін. галузей аналізу. Монографія Гільберта і Курата «Методи математичної фізики» стала основоположною для цього напрямку. Цю нову галузь іноді, на відміну від А. л., наз. лінійним, або функціональним, аналізом. Центр. поняттям лінійного аналізу є поняття топологічного векторного простору. Друге узагальнення пов'язане з розглядом векторних просторів та їхніх лінійних перетворень над довільними полями. Особливо цікаві поля раціональних та алгебр. чисел, поля алгебр. функцій і, врешті, скінченні поля. Векторні простори над скінченними полями, раніше добре відомі лише алгебристам і фізикам в теорії чисел, в останні роки стають важливими для деяких розділів матем. апарату кібернетики: *дискретного аналізу*, багатозначної логіки (див. *Логіка багатозначна*) й для теорії кодів з виправленням помилок. Виявилось, що методи, поняття й результати «класичної» А. л., природно, поширюються й на випадок векторних просторів над довільними полями.

Особливо плідним видається перенесення на дискретний випадок скінченних логік техніки матричного числення. В дискретному аналізі й у багатозначній логіці успішно застосовується добре розроблений апарат А. л., а такий розділ, як лінійні коди, в певному розумінні стає останнім часом просто-таки одним з нових розділів А. л. Відповідно до завдань таких розділів кібернетики, як програмування лінійне, операцій дослідження, ігор теорія, виникла і бурхливо розвивається нова галузь А. л. — теорія систем лінійних нерівностей і близькі до неї теми — опуклі тіла й опуклі многогранники. Важли-

вість цієї тематики стала очевидною вже в 30—40-х роках 20 ст., коли в працях з теорії ігор, в матем. питань планування виробу, тощо наука зіткнулася безпосередньо з необхідністю детально досліджувати розв'язки систем лінійних нерівностей і відповідного геом. аналога — опуклих многогранників у  $n$ -вимірних просторах. Виявилось, що ця тема, цікава сама по собі з точки зору алгебри й геометрії, була до цього представлена лише небагатьма окремими працями. А починаючи з 40-х—50-х років, особливо коли після появи ЕЦОМ стали викладати інтерес до алгоритмів ефективного знаходження числових розв'язків лінійних нерівностей, ця галузь сформувалася у велику самостійну теорію всередині А. л., яку розроблюють математики багатьох країн.

Лит. Мальцев А. Н. Основы линейной алгебры. М., 1970. Курата К., Гильберт Д. Методы математической физики. Пер. с нем., т. 1—2. М., 1951. Линейные неравенства и смежные вопросы. Пер. с англ. М., 1959 [6-бл. ігр с 421—458]. Урбанскі П. Основы линейной математики. Пер. с франц. М., 1959 [6-бл. ігр с 202—205]. Артин Э. Р. Рациональные алгебры. Пер. с англ. М., 1969 [6-бл. ігр с 200—201]. Л. А. Колмогоров.

**АЛГЕБРА ЛОГІКИ** — важливий випадок логіки багатозначної, в якій вивчають властивості функцій, що приймають за значення, як і їхні аргументи, елементи із заданої двоелементної множини, а також сімейства і алгебри таких функцій, які містять як операції суперпозиції, і деякі аналоги їх. Іноді замість терміну «А. л.» застосовують термін «двозначна логіка».

А. л. почала формуватись у 19 ст. у працях англ. математика Дж. Буля. Буль А. л. створено голоючим чином для розв'язування традиційних логічних задач алгебр. методами. З появою *матричної теорії* (70-і роки 19 ст.) і розвитком *алгебри множин*, яка увірвалася в себе частину першого предмета А. л., та в зв'язку з дальшим розвитком *логіки математичної* предмет А. л. значно змінився.

Об'єктом вивчення стали ф-ції А. л. і різні операції над ними. Згодом клас ф-цій А. л. було розширено до класу ф-цій, аргументи яких, як і самі ф-ції, набувають значення елементів фіксованої скінченної множини  $E$ ; розширився й набір операцій над ф-ціями. Іноді від А. л. розуміють саме останню концепцію. Проте для застосувань найбільше значення має той випадок, коли доцільність згаданої множини  $E$  дорівнює двом. Дослідження в А. л. тісно пов'язані з іншим підходом до вивчення висловлювань — з т. з. *чисельним висловлюванням*. Вживаючи в звичайній мові логічні зв'язки «і», «або», «якщо...», «то», «еквівалентне», частка «не» тощо дають змогу з ужи заданим висловлюванням будувати нові, складніші висловлювання. Так, з висловлювань  $x > 2$ ,  $x < 3$  за допомогою зв'язки «і» можна одержати висловлювання  $x > 2$  і  $x < 3$ , за допомогою зв'язки «або» — висловлювання  $x > 2$  або  $x < 3$  і т. д.

Істинність чи хибність одержаних таким способом висловлювань залежить від істинності чи хибності початкових висловлювань і



відповідного трактування зв'язок як операцій над висловлюваннями. Для позначення істинності вводять символ 1 (або і), а для позначення хибності — символ 0 (або 0). Зв'язки «і», «або», «якщо... то», «еквівалентне» позначають відповідно знаками & (кон'юнкція),  $\vee$  (диз'юнкція),  $\rightarrow$  (імплікація) і  $\sim$  (еквівалентність), для заперечення вводиться знак  $\neg$  (рисочка згорі). Крім індивідуальних висловлювань, почали використовувати й змінні висловлювання, тобто такі змінні, значеннями яких можуть бути будь-які наперед задані індивідуальні висловлювання. Поняття ф-ли, що є формалізацією поняття «складного» висловлювання, вводиться індуктивно. Нехай  $a, b, c, \dots$  — індивіди, а  $x, y, z, \dots$  — змінні висловлювання. Кожну з цих букв наз. ф-лою. Якщо знаком  $\ast$  позначити будь-яку з перелічених вище зв'язок, а  $a$  і  $b$  — формули, то  $(a \ast b)$  і  $\bar{a}$  теж є формули. Приклад ф-ли:  $((x \& y) \rightarrow \bar{z})$ . Зв'язки й частку «і» почали розглядати як операції над величинами, що набувають значень «0» і «1», і результатом застосування їх також є числа «0» або «1» (див. *Логічні операції*).

Введені операції дають змогу кожній ф-лі при заданих значеннях висловлювань, що входять до неї, приписати одне з двох значень — «0» або «1». Так кожному формулу можна одночасно розглядати як певний спосіб задавання або реалізації ф-цій А. л., тобто таких ф-цій, які визначено на наборах з нулів та одиниць і які також набувають значень «0» або «1». При цьому формули  $a$  та  $b$  наз. еквівалентними (позначення  $a = b$ ), якщо вони реалізують рівні ф-ції. Для задавання ф-цій А. л. люди використовують табл., що містять усі набори значень змінних і значення ф-цій на цих наборах. Це т. з. табличний спосіб задавання ф-цій. А самі таблиці наз. істинніми таблицями. Так, напр., введена таблиця, що задає ф-ції  $x, x \& y, x \vee y, x \rightarrow y$  та  $x \sim y$ , має вигляд:

| x | y | z | $x \& y$ | $x \vee y$ | $x \rightarrow y$ | $x \sim y$ |
|---|---|---|----------|------------|-------------------|------------|
| 0 | 0 | 0 | 0        | 0          | 1                 | 0          |
| 0 | 1 | 1 | 0        | 1          | 1                 | 1          |
| 1 | 0 | 0 | 0        | 1          | 0                 | 1          |
| 1 | 1 | 1 | 1        | 1          | 1                 | 0          |

Аналогічними є таблиці й для довільних ф-цій А. л. Для перетворення ф-ли на еквівалентні ф-ли важливу роль відіграють такі рівності:

$$x \& y = y \& x, \quad x \vee y = y \vee x \quad (1)$$

(закон комутативності);

$$(x \& y) \& z = x \& (y \& z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \quad (2)$$

(закон асоціативності);

$$x \& (y \vee z) = x, \quad x \vee (x \& y) = x \quad (3)$$

(закон поглинання);

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z), \quad x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z) \quad (4)$$

(закон дистрибутивності);

$$x \& \bar{x} = 0 \quad (5)$$

(закон суперечності);

$$x \vee \bar{x} = 1 \quad (6)$$

(закон виключеного третього);

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y, \quad x \sim y = (x \& y) \vee (\bar{x} \& \bar{y}). \quad (7)$$

Ці рівності, що їх можна встановити, напр., за допомогою істинних таблиць, дають змогу вже без таблиць одержувати інші рівності. Методом одержання цих рівностей є т. з. тотожні перетворення, які змінюють власне ф-лу, але не ф-цію, яку реалізує ця формула. Напр., користуючись законами поглинання, одержують закон ідентичності  $x \vee x = x$ . За допомогою цих рівностей у деяких випадках можна істотно змінити запис ф-ли, зникнувши в ній «зайві» дужки. Так, співвідношення (1) та (2) дають змогу замість ф-ли  $((\dots (a_1 \& a_2) \& \dots) \& a_n) \& (\dots (b_1 \vee b_2) \vee \dots \vee b_n)$  використати компактніший запис  $a_1 \& a_2 \& \dots \& a_n, b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n$ .

Перший з цих виразів наз. кон'юнкцією співмножників  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , а другий — диз'юнкцією доданків  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Рівності (5), (6) і (7) показують, що й те, що константи «0» і «1», імплікацію та еквівалентність, розглядаючи їх як ф-ції, можна передати через кон'юнкцію, диз'юнкцію та заперечення. Більше того, всяку ф-цію А. л. можна виразити ф-зою, яку записують символами  $\&, \vee, \neg$ .

Множина всіх ф-л. у побудові яких беруть участь змінні висловлювання, деякі з символів  $\&, \vee, \neg, \rightarrow, \sim$  і констант «0» і «1», наз. мовою над даними символами й константами. Рівності (1) — (7) показують, що для всякої ф-ли в мові над  $\&, \vee, \neg, \rightarrow, \sim, 0, 1$  знайдеться еквівалентна їй ф-ла в мові над  $\&, \vee, \neg$ , «0», «1»: напр.,  $(x \rightarrow y) \sim z = ((x \vee y) \& z) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) \& \bar{z})$ . Особливу роль у такій мові відіграє клас ф-л., які можна записати у вигляді  $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ , «0» чи «1», де  $n \geq 1$  і кожне  $a_i$  — або змінне висловлювання, або його заперечення, або кон'юнкція їх; при цьому жодне  $a_i$  не містить однако-

вих співмножників виду  $x$  і  $\bar{x}$  одночасно, і всі  $a_i$  попарно не дорівнюють один одному. Тут думок не ставлять, бо припускають, що кон'юнкція зв'язує «дужче», ніж диз'юнкція, тобто при обчислюванні за заданими значеннями змінних треба спочатку обчислити значення  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Ці вирази наз. *диз'юнктивними нормальними формами* (ДНФ). Будь-яку ф-лу  $\mathcal{F}$  у мові над  $\&, \vee, \neg, \rightarrow, \sim, 0, 1$ , що реалізує ф-цію А. л., яка відрізняється від «0», за допомогою рівностей (1) — (7) можна звести до рівної їй ДНФ, яка містить усі змінні висловлювання ф-ли  $\mathcal{F}$  і будь-яке

число інших змінних, при цьому кожна  $a_i$  в цій ДНФ містить одні й ті самі змінні. Таку ДНФ наз. досконалою ДНФ ф-ли  $\mathcal{F}$ ; для «0» досконалою ДНФ є сама формула «0». Можливість зведення до досконалої ДНФ лежить в основі алгоритму, що ґрунтується на еквівалентності або нееквівалентності двох наперед заданих формул. Цей алгоритм полягає ось у чому: зводять досліджувані ф-ли  $\mathcal{F}_1$  та  $\mathcal{F}_2$  до досконалих ДНФ, що містять усі ті змінні, які є в  $\mathcal{F}_1$  і в  $\mathcal{F}_2$ , і дивляться, чи збігаються одержані вирази, чи ні. Якщо вони збігаються, то  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ , а якщо ні, то  $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$ . Важливу роль в А. л. та її застосуваннях відіграє скорочена ДНФ. ДНФ наз. скороченою, якщо задовольняються такі умови: по-перше, в ній немає таких пар доданків  $a_i$  та  $a_j$ , що будь-який спільножник в  $a_i$  є і в  $a_j$ ; по-друге, для будь-яких двох таких доданків  $a_i$  та  $a_j$ , в яких один містить спільножителем якусь літтеру, а другий — заперечення цієї змінної (за умови, що іншої змінної, для якої має місце це саме, в цій парі доданків нема), у цій самій ДНФ є доданок  $a_k$ , що дорівнює кон'юнкції решти спільножителів цих двох доданків. Будь-яку ДНФ за допомогою рівностей (1) — (7) можна звести до скороченої ДНФ, яка дорівнює їй. Напр., скороченою ДНФ для ф-ли  $((x \sim (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \& z)) \vee x \& y \vee z \vee x \& y$ . Ф-ли  $\mathcal{F}_1$  та  $\mathcal{F}_2$  еквівалентні тоді й тільки тоді, коли збігаються їхні скорочені ДНФ. Крім ДНФ, живляють кон'юнктивні нормальні форми — КНФ (так називають вирази, які можна одержати з ДНФ, замінивши в них знаки  $\vee$  на  $\&$ , а  $\&$  на  $\vee$  і 0 на 1). Напр., з ДНФ  $x \& y \vee \bar{x} \& z$  одержують КНФ  $(x \vee y) \& (x \vee z)$ . Операцію (або ф-цію) наз. двоїстою для операції  $\phi$ , коли табл., що задає  $\phi$ , можна одержати з табл., яка задає  $\phi$ , замінивши в ній скрізь «0» на «1», а «1» на «0» (включаючи заміну значень ф-ції). Напр., кон'юнкція і диз'юнкція двоїсті між собою, заперечення двоїсте самому собі, константи «1» та «0» двоїсті одна одній і т. д. Перетворення ф-ли, при якому знаки всіх операцій у виразі заміняють на знаки двоїстих їм операцій, константу, «0» заміняють на «1», а «1» — на «0», наз. перетворенням двоїстості. Якщо правильною є рівність  $a = b$  і  $a^*$  двоїсте  $a$ ,  $b^*$  двоїсте  $b$ , то правильною буде й рівність  $a^* = b^*$ , яку називають двоїстою попередній. Це т. з. принцип двоїстості. Прикладами двоїстих рівностей є пари законів (1), (2) і (3); рівність (5) двоїста рівності 6, кожна КНФ двоїста якійсь ДНФ. Досконалу КНФ і скорочену КНФ визначають як такі КНФ, що двоїсті їм вирази є відповідно досконалою ДНФ і скороченою ДНФ.

Досконалі й скорочені ДНФ та КНФ зручно використовувати для розв'язування задачі знаходження всіх гіпотез і висновків із заданої ф-ли. Під гіпотезою ф-ли  $a$  розуміють

таку ф-лу  $b$ , що  $(b \rightarrow a) = 1$ ; а під висновком ф-ли  $a$  — таку ф-лу  $b$ , що  $(a \rightarrow b) = 1$ . Гіпотезу ф-ли  $a$  наз. простою, якщо вона є кон'юнкцією змінних або їхніх заперечень і після відкидання будь-якого з її спільножителів перестає бути гіпотезою ф-ли  $a$ . Аналогічно цьому, висновок із ф-ли  $a$  наз. простим, якщо він є диз'юнкцією змінних або їхніх заперечень і після відкидання будь-якого з її доданків перестає бути висновком із ф-ли  $a$ . Розв'язок задачі знаходження гіпотез і висновків полягає в зазначенні алгоритму, який буде всі прості гіпотези й висновки для заданої ф-ли, і в одержанні з них, за законами (2) — (7), решти гіпотез і висновків. Алгоритм спирається на такі факти. Якщо  $a = b$ , то  $a$  і  $b$  мають одні й ті самі гіпотези й висновки відносно. Доданою ДНФ є гіпотезою цієї ДНФ; спільножителем КНФ є висновком з цієї КНФ. Якщо  $a$  — гіпотеза виразу  $b$ , а  $b \& c$  — також гіпотеза для  $b$ ; якщо  $a$  — висновок з виразу  $b$ , то  $a \vee c$  також є висновком з  $b$ . Якщо  $a$  і  $c$  — гіпотези виразу  $b$ , то  $a \vee c$  також є гіпотезою для  $b$ ; якщо  $a$  і  $c$  — висновки з  $b$ , то  $a \& c$  також є висновком з  $b$ . У досконалої ДНФ немає інших гіпотез (які не містять букв, що не входять у цю ДНФ), крім диз'юнкції деяких її доданків чи ДНФ, що дорівнюють їм. У досконалої КНФ немає інших висновків, крім кон'юнкції деяких її спільножителів чи виразів, що дорівнюють їм. Скорочена ДНФ є диз'юнкцією всіх її простих гіпотез; скорочена КНФ є кон'юнкцією всіх її простих висновків. Скорочена ДНФ має важливі застосування. Слід відзначити наперед задачу мінімізації ф-цій А. л., що є частиною задачі синтезу керуючих систем. Мінімізація ф-цій А. л. полягає в побудові такої ДНФ для заданої ф-ції, яка реалізує її і має найменше сумарне число спільножителів у своїх доданках, тобто має мінім. складність. Такі ДНФ наз. мінімальними. Кожну мінімальну ДНФ для заданої ф-ції А. л., яка відрізняється від константи, можна одержати з скороченої ДНФ цієї ф-ції, випишуши деякі доданки. Для деяких ф-цій скорочена ДНФ може збігатися з мінімальною ДНФ. Це стосується, напр., монотонних ф-цій, тобто таких ф-цій, які реалізуються ф-лами над  $\&, \vee, 0$  і 1.

В мові над  $\&, \vee, \rightarrow, \sim, 0, 1, +$ , де знак  $+$  інтерпретують як додавання для модулю 2, встановлюються такі співвідношення:

$$x \vee y = ((x \& y) + x) + y, \quad \bar{x} = x + 1; \quad (8)$$

$$x \rightarrow y = \bar{x} \& y, \quad x \sim y = (x + y) + 1; \quad (9)$$

$$x + y = (x \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y), \quad 1 = x \vee \bar{x} \quad (10)$$

За допомогою цих ф-л можна переводити ф-ли мови над  $\&, \vee, \rightarrow, \sim, 0, 1$  в еквівалентні їм формули мови над  $\&, +, 1$  і навпаки. Тотожні перетворення в такій мові здійснюються за допомогою рівностей, встановлених для кон'юнкції і таких додаткових рівностей:

$$x + y = y + x \quad (11)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (12)$$

$$x \& (y + z) = (x \& y) + x \& z \quad (13)$$

$$x \& x = x, \quad x + (y + y) = x, \quad x \& 1 = x \quad (14)$$

(тут також вважають, що кон'юнкція зв'язує дужки, ніж знак  $+$ ). Цих рівностей досить для того, щоб з них за допомогою тотожних перетворень, як і при розгляді мови над  $\&, \vee, \rightarrow, \sim, \neg, 0, 1$ , можна було вивести будь-яку правильну рівність у мові над  $\&, +, 1$ . Вираз цієї мови наз. зведеним поліномом, якщо він або має вигляд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , де  $a_i$  є  $x$  і  $1$  або змінна, або кон'юнкція різних змінних без заперечень ( $a_i \neq x$ , при  $i \neq j$  і  $i \geq 1$ ), або дорівнює  $1 + 1$ . Напр., вираз  $x \& y \& z + x \& y + 1$  є зведеним поліномом. Будь-яку формулу А. л. за допомогою тотожних перетворень можна звести до зведеного полінома. Рівність  $a = b$  має місце тоді й тільки тоді, коли зведений поліном для  $a$  вбігається зі зведеним поліномом для  $b$ .

Крім розглянутих мов, існують і інші, рівносильні їм (для мови наз. рівносильними, якщо за допомогою певних правил перетворень можна ф-лу однієї з цих мов перекласти в якусь еквівалентну їй ф-лу в іншій мові і навпаки). В основу такої мови досить покласти будь-яку систему операцій (і констант), яка має ту властивість, що через операції (і константи) цієї системи можна виразити будь-яку ф-цію А. л. Такі системи наз. функціонально повними. Прикладами повних систем є  $\{x \vee y\}$ ,  $\{x \vee y, \bar{x}\}$ ,  $\{x + y, 1, x \& y\}$  тощо. Існує алгоритм, який за довільною скінченною системою ф-цій А. л. встановлює її повноту або неповноту.

Алгоритм ґрунтується на такому факті. Система ф-цій А. л. є повною тоді й тільки тоді, коли вона містить ф-ції  $f_1(x, y, \dots, v)$  і  $f_2(x, y, \dots, v)$  такі, що  $f_1(0, 0, \dots, 0) = 1$ ,  $f_2(0, 0, \dots, 0) = 0$ , а також ф-ції  $f_3, f_4, f_5$ , де  $f_3 \neq f_4, f_5$  — ф-ція, двоїста до  $f_3, f_4$  — не монотонна, а для  $f_5$  зведений поліном має доданок  $x$ , в якому  $x$  більше як один співмножник (усі ці ф-ції не обов'язково повинні бути різними). Розглядають і мови, в основі яких лежать такі системи операцій, що не є функціонально повними. Таких мов безліч. Між ними є нескінченна множина попарно не порівнянних мов (тобто за допомогою тотожних перетворень не можна перекладати з однієї мови на іншу). Але для кожної мови, побудованої на основі тих чи інших операцій А. л., існує така скінченна система рівностей цієї мови, що будь-яку рівність цієї мови можна вивести з рівностей цієї системи за допомогою тотожних перетворень. Таку систему наз. дедуктивно повною системою рівностей даної мови. Напр., рівності (1) — (6) — становлять повну систему рівностей мови над  $\&, \vee, \neg, 0, 1$ .

Розглядаючи ту чи іншу зі згаданих мов разом з якоюсь повною системою рівностей цієї мови, іноді абстрагуються від табличного задавання операцій, що лежать в основі цієї мови, й від того, що значеннями її змінних є висловлювання. Замість цього можливі різні інтерпретації мови, що складаються з тієї чи іншої сукупності об'єктів (які є значеннями змінних) і системи таких операцій над об'єктами цієї множини, які задовольняють рівності з повної системи рівностей цієї мови. Так, мова над  $\&, \vee, \neg, 0, 1$  висловлює цю перетворюється на мову булевої алгебри; мова над  $\&, +, 1$  — на мову булевого кільця (з одиничною); мова над  $\&, \vee, \neg$  — на мову дистрибутивної структури тощо. А. л. розвивається переважно під впливом задач, які виникають в галузі її застосувань. З цих причин зростає роль відіграють застосування А. л. в теорії електр. схем. Для описування цих схем іноді доводиться використовувати не лише звичайну двозначну А. л., а й розглядати ті чи інші її багатозначні узагальнення.

Лит. Порецкий П. С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики // Протоколы сессии Философско-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете 1884, т. 2, в. 4. Норманов П. С. Элементы математической логики М., 1959. Гильберт Д., Аккерман Я. В. Основы теоретической логики. Пер. с нем. М., 1947 (библиогр. с. 297, 298). Яблонский С. Я. Гаврилов Г. П., Кудряков В. В. Функции алгебры логики и классы Поста М., 1968 (библиогр. с. 113—114). Н. Д. Кудряков.

**АЛГЕБРА МАТРИЦЬ** — розділ алгебри, в якому вивчають матриці й різні операції над ними. Матриці — це прямокутні або квадратні таблиці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де  $a_{ik}$  — елементи якоїсь множини  $S$ ; кажуть, що  $A$  — матриця над  $S$ . Найчастіше  $S$  — якась числова множина (множина всіх комплексних, дійсних, раціональних, цілих чи ім. чисел) або (у загальному випадку)  $S$  — носій якоїсь алгебричної структури (кільця, поля, групи, булевої алгебри тощо). У таких випадках операції, визначені на  $S$ , поширюються природно й на сукупність матриць над  $S$  так, що вона в свою чергу становить алгебр. структуру. Вивчення властивостей таких алгебр. структур і застосування їх у різних розділах математики становить зміст теорії матриць. Надалі (якщо протидіє не застерезено) вважаємо, що  $S$  — або кільце  $R$ , або навіть поле  $K$  (бо це вичерпує майже повністю всі випадки, які трапляються в практиці).

Послідовності  $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — рядки, а послідовності  $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — стовпчики матриці

**А.** Послідовність  $(a_{11}, a_{22}, \dots)$  наз. діаго-  
нальну матрицю  $A$ . Матриця розміром  
 $m \times n$  (коротко —  $m \times n$ -матриця) — це  
матриця з  $m$  рядками й  $n$  стовпчиками (ко-  
лонками), при  $m = n$  наз. квадратною  
матрицею порядку  $n$ . Сукупність таких мат-  
риць над множиною  $S$  позначимо через  $M_n(S)$   
(або  $M_n(R)$  чи  $M_n(K)$ ). Ця сукупність з  
операціями додавання й множення, які визна-  
чено далі, наз. матричним алгебрам над  
множинами. Матриці розміром  $(1, n)$  та  $(m, 1)$   
наз. відповідно рядковими й стовпчиковими  
векторами. У теорії матриць часто трапля-  
ються матриці таких окремих видів:  $n \times n$  з  $n$   
в матриці  $O_{m,n}$  розміром  $m \times n$  (якщо  
всі  $a_{ik} = 0$ ); діагональна матриця,  
тобто квадратна матриця, всі елементи якої  
поза діагоналлю дорівнюють нулеві:

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}; \quad (2)$$

скалярна матриця (якщо в  $D$  всі  $c_i =$   
 $= c$ ), одинична матриця (якщо всі  
 $c_i = 1$ ), позначають  $\Pi$   $E$ . Матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

наз. транспонованою до матриці  $A$ .  
Сума матриць  $A$  і  $B$  однакового розміру  
 $m \times n$  і множення матриці на скаляр ви-  
значають за формулами

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3) \\ & c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

З цими операціями сукупність матриць роз-  
міром  $m \times n$  над кільцем  $R$  утворює мо-  
дуль, а при  $R = K$  (де  $K$  — поле) — векторний  
простір розмірності  $m \times n$ . Множення мат-  
риць  $A$  і  $B$  визначається лише тоді, коли  
 $A = (m \times n)$ -матриця,  $B =$  матриця роз-  
міром  $n \times k$ . Тоді добуток  $C = A \cdot B$  —  
матриця розміром  $m \times k$ , при цьому

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$\text{де } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Зокрема, множення скрізь визначено для  
квадратних матриць однакового порядку  $n$   
в  $M_n(R)$ . Визначення операції множення  
матриць (4) пов'язано з застосуванням мат-  
риць для описування лінійних відображень  
(див. *Оператори лінійні*) та поретворенням  
координат. Нехай, напр.,  $V$  і  $W$  — векторні  
простори відповідно розмірності  $m$  і  $n$  над  $R$   
і нехай  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$  і  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n$  — базиси  
цях просторів. Лінійне відображення  $A: V \rightarrow$   
 $\rightarrow W$  ( $V$  у  $W$ ) повністю визначається обра-  
зами  $\vec{e}_1 A, \dots, \vec{e}_m A$  базисних елементів; їх,  
зображують у свою чергу через базис  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots$   
 $\vec{d}_n$  так.

$$\vec{e}_i A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \vec{d}_j \quad (5)$$

і матриця

$$A = (a_{ij}) \quad (6)$$

повністю визначає відображення  $A$ . Якщо  
тепер  $U$  — якийсь третій векторний простір  
 $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_h$  — його базис,  $\mathcal{B}$  — лінійне від-  
ображення  $\mathcal{B}: W \rightarrow U$ ,  $B = (b_{ij})$  — його  
матриця для базисів  $\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n$  і  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_h$ ,  
то лінійному відображенню  $C = A \cdot \mathcal{B}$ ,  
що його одержують, послідовно застосовува-  
ють  $A$  і  $\mathcal{B}$ , відповідає матриця  $C$ , що дорі-  
внює добутку  $A \cdot B$ , який визначено  
за законом (4). При  $V = W = U$  з ба-  
зисом  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  у  $V$  відповідні матриці в  
квадратах, бо вони перебувають у взаємно  
однозначній відповідності з лінійними опе-  
раторами простору  $V$ . і алгебра  $M_n(K)$  квад-  
ратних матриць  $n$ -го порядку ізоморфно зоб-  
ражує алгебру лінійних операторів  $n$ -вимір-  
ного векторного простору над полем  $K$ .

Відповідність  $A \rightarrow A$  залежить від обраного базису  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ . При переході до нового

базису  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  за допомогою матриці переходу  $C$  лінійному операторові  $A$  відповідає матриця  $CAC^{-1}$ , де  $C^{-1}$  — т. з. обернена матриця матриці  $C$ , тобто  $C \cdot C^{-1} = E$ . Матриці  $A$  і  $CAC^{-1}$  наз. *подібними*.

Центр. задача теорії лінійних операторів і матриць: *в-поміж усіх матриць  $CAC^{-1}$  знайти найпростішу (це т. з. задача зведення матриць до нормальної форми). В частинних випадках — це діагональна матриця, в якій по діагоналі стоять власні значення матриці (тобто корені характеристичного полінома  $\{x E - A\}$ ), так що нормальну діагональну форму одностатно визначено аж до порядку, в якому йдуть один за одним діагональні елементи. У заг. випадку матриці зводяться або до т. з. нормальної форми Жордана (якщо  $K = C$  — поле комплексних чисел), або до нормальної форми Фробеніуса (якщо поле  $K$  — довільне). Зведення матриць до нормальної форми застосовують, щоб спростити алгебр. дії над матрицями, при розв'язуванні лінійних дифер. рівнянь, в операторному численні та в багатьох інших задачах геометрії й механіки.*

Матриці використовують для описування й досліджування *білінійних та квадратичних*

*форм*. При переході до іншого базису  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$

за допомогою матриці переходу  $C$  матриця білінійної форми перетворюється за законом  $A = CAC^T$ , де  $C^T$  — транспонована матриця. Тим самим перетворення матриць білінійної форми здобулого відізняється від перетворення матриць лінійного оператора. Збіг буває тільки для тих матриць переходу, для яких  $C^T = C^{-1}$  — т. з. *ортогональні* матриці. Симетричним білінійним формам відповідають *симетричні* матриці, тобто такі, для яких  $a_{ik} = a_{ki}$ . Зокрема, симетричні матриці завжди можна звести до діагонального вигляду (до головних осей), навіть якщо обмежитись ортогональними матрицями переходу. Зведення до головних осей — одна з центр. операцій *алгебри лінійної* і теорії матриць. Її застосовують у геометрії та механіці. Можуть бути й узагальнення на випадок нескінченновимірних просторів та «нескінченних» матриць.

Велике значення, особливо для *ймовірностей* теорії, мають матриці над полем дійсних чисел з невід'ємними коефіцієнтами. Якщо всі  $a_{ik} \geq 0$  і сума елементів кожного рядка дорівнює 1, то матрицю наз. *стохастичною*. Такі матриці використовують для визначення одиоріальних *Марковських* зі скінченним числом станів. Коеф.  $a_{ik}$  матриці інтерпретують як *перехідні ймовірності*, а  $n$ -ий степінь матриці описує ймовірності переходу станів процесу за  $n$  кроків.

Важливою є поведінка послідовності  $A, A^2, \dots, A^n$  при  $n \rightarrow \infty$ , тобто *гранична поведінка* процесу. Тим самим алгебра й аналіз стохастичних матриць становлять матем. апарат теорії марковських ланцюгів.

Лінійні оператори й квадратичні форми в нескінченновимірних векторних просторах над полем дійсних чи комплексних чисел описують за допомогою нескінченних матриць різного вигляду. Розглядають матриці з лічбовою множиною рядків і стовпчиків. Інше узагальнення — це розглядати як матриці дійснозначні чи комплекснозначні ф-ції  $F(x, y)$ , скрізь визначені на якомусь квадраті  $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq a$ . У цьому разі множини рядків і стовпчиків мають потужність континууму. Для визначеності осн. операцій  $A$  м. з переліком операцій множення (4) та в разі нескінченних матриць, виникає необхідність накласти на коефіцієнти таких матриць ті чи інші властивості збіжності. Це питання стосується функціонального аналізу. Для застосування матриць у *логіці математичній* (у теорії предикатів) і в *абстрактній теорії автоматів* значну роль відіграють матриці над двоелементною булевою алгеброю  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ . Операції додавання і множення таких матриць у формулах (3) і (4) слід тоді розуміти як булеве додавання і множення. Іноді замість двоелементної булевої алгебри  $\mathbb{B}$  у таких випадках розглядають матриці над полем з двох елементів (див. *Жеталкіна алгебра*). Ряд математик (І. І. Жеталкіна (1969, 1947) застосовував цей апарат для дослідження розв'язності формул числення предикатів *вузького*. У *математичній економіці* матриці часто використовують при складанні балансів та в теорії систем лінійних перетворень, які застосовують у *програмуванні лінійному*.

Лит.: Цейтлин М. Л. Применения матричного исчисления к синтезу релейно-импульсных систем. Доклады АН СССР, 1952, т. 88, № 8; Рантамаа К. Р. Ф. Р. Теория матриц. М. 1967 (Библиогр. с. 5-2, 570); Белзман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ. М., 1969 (Библиогр. с. 389-391).

Л. А. Колумжян

**АЛГЕБРА МНОЖИН** — розділ *множин теорії*, який вивчає операції над підмножинами (частинами) заданої множини й поведінку цих операцій при відображеннях множин. А. м. застосовують у теор. кібернетиці і в техніці. Ідеї А. м. висловив Дж. Буль 1847. Водночас він дав перше формулювання сучасної (символічної, або математичної) логіки.

Нехай  $E$  — множина, яку фіксують при побудові А. м.; наз. її *універсальною множиною*. Розглянемо всі можливі підмножини  $E: A, B, C, \dots$ , в т. ч. всі множини  $E$  й пусту множину  $\emptyset$ . Якщо  $E$  скінченне і складається з  $n$  елементів, то кількість таких частин дорівнює  $2^n$ . Для частин  $E$  вводимо операції об'єднання  $A \cup B$ , перетинання  $A \cap B$  і доповнення  $CA = E/A$ . Внаслідок цього множини  $2^E$  всіх частин  $E$  перетворюється на алгебр. систему. Нехай  $E, F$  — дві універсальні множини і  $\varphi: E \rightarrow F$  — відображення.

Тоді для будь-яких  $A, B \subset F$  маємо

$$\varphi^{-1}(A \cup B) = \varphi^{-1}(A) \cup \varphi^{-1}(B),$$

$$\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B),$$

$$\varphi^{-1}(CA) = C\varphi^{-1}(A).$$

У цьому розумінні будь-яке відображення  $\varphi$  зберігає структуру А. м. Співвідношення  $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$  справджується для всіх  $A, B \subset E$ , але в заг. випадку лише  $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$ , якщо  $\varphi$  ін'єктивне, то  $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$ . Якщо  $\varphi$  бієктивне, маємо також  $\varphi(CA) = C\varphi(A)$  ( $A \subset E$ ). Для будь-якої сім'ї множин  $A_i$  ( $i \in I$ ) справджуються співвідношення

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i), \quad \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i),$$

а також, якщо  $\varphi$  бієктивне, відповідні співвідношення для  $\varphi$ . Ці співвідношення можна віднести до А. м. лише в разі скінченної множини  $I$ , бо операції над нескінченною кількістю множин не належать до А. м. Проте такі операції мають важливі значення в теорії міри. Легко перевірити, що введені операції мають такі властивості:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad (1)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C, \quad (1')$$

$$A \cup B = B \cup A, \quad (2)$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad (2')$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (3)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (3')$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad (4)$$

$$A \cap E = A, \quad (4')$$

$$A \cup CA = E, \quad (5)$$

$$A \cap CA = \emptyset, \quad (5')$$

Перевірка полягає в тому, що беруть довільний елемент лівій частини й доводять, що він належить і правій частині і навпаки. Можна провести аналогію (неповну) між переліченими властивостями і властивостями додавання та множення чисел; операції  $\cup, \cap$  аналогічні додаванню та множенню, (1) і (1') — аналоги асоціативних, (2) і (2') — комутативних законів додавання та множення, (3) — аналог дистрибутивного закону;  $\emptyset$  у (4) відповідає нулеві,  $E$  в (4') — одиниці. Не мають аналогів операція  $C$  і, отже, (5) і (5'), а також «другий дистрибутивний закон» (3'). В А. м. операції  $\cup, \cap$  цілком рівноправні (на відміну від операцій в арифметиці). З алгебр. боку  $\cup$  та  $\cap$  є бінарними операціями на множині  $2^E$  всіх підмножин  $E$ . Але, незважаючи на зазначені аналогії з арифметикою, множини  $2^E$  з будь-якою з цих операцій не становить групу, бо  $E \cup E = E \cup \emptyset, E \cap \emptyset = \emptyset \cap E$  і, отже, в А. м.

не існує однозначних визначень обернених елементів для  $\cup$  та  $\cap$  (для  $\cup$  існує одиничний елемент  $\emptyset$ , для  $\cap$  — одиничний елемент  $E$ ). Якщо  $a \in E$ ,  $a \in F$  — А. м. над універсальними множинами  $E, F$ , то будь-яке відношення  $\varphi: E \rightarrow F$  визначає обернений гомоморфізм  $\varphi^{-1}: a \in F \rightarrow a \in E$ , який з'являється з кожною підмножиною  $A \subset F$ , що  $\Pi$  розглядають як елемент  $a \in F$ , підмножину  $\varphi^{-1}(A) \subset E$ , що  $\Pi$  розглядають як елемент  $a \in E$ . При цьому для тотального відображення  $\varphi: E \rightarrow E$  маємо  $\varphi^{-1} = \varphi_{(E)}$  (тотальний гомоморфізм  $a \in E$  на себе) і  $(\varphi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi^{-1}$  (це співвідношення означає, що коли  $\varphi: E \rightarrow F, \psi: F \rightarrow G, \chi: E \rightarrow G, \chi = \psi \circ \varphi$ , то  $\chi^{-1}(A) = B, \varphi^{-1}(B) = C$  випливає  $\chi^{-1}(A) = C$ ). Як і в арифметиці, закони (1), (2), (3) можна узагальнити на будь-яку кількість множин:

$$\begin{aligned} A_1 \cup (A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) &= \\ = (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cup \dots \cup A_n) &= \\ = (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n & \end{aligned}$$

(заг. асоціативний закон; існує аналогічний закон для перетинання),

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \approx A_n \cup A_{n-1} \cup \dots \cup A_1$$

для будь-якої перестановки  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  чисел  $1, 2, \dots, n$  (заг. комутативний закон; існує аналогічний закон і для перетинання);

$$\begin{aligned} A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) &= \\ = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n), \\ A \cup (B_1 \cap \dots \cap B_n) &= \\ = (A \cup B_1) \cap \dots \cap (A \cup B_n) \end{aligned}$$

(заг. дистрибутивні закони).

Симетрія операцій  $\cup, \cap$  приводить до такого принципу двоїстості: кохай справджується яке-небудь співвідношення між підмножинами  $A, B, \dots$ , записавши за допомогою знаків  $\cup, \cap, C, \subset, \supset, =$ . Тоді справджується й «двоїсте» співвідношення, одержане з даного співвідношення шляхом заміни цих знаків, відповідно, на  $\cap, \cup, C, \subset, \supset, =$ , символів пустої множини  $\emptyset$  на  $E$  і  $E$  на  $\emptyset$ . при цьому символи множин заг. виду  $A, B, \dots$  не змінюються. У застосуванні до співвідношень (1) — (5) принцип двоїстості дає (1') — (5'), і навпаки. Доводять принцип за індукцією, спираючись на (1) — (5), (1') — (5'), що їх перевіряють безпосередньо. Приклади двоїстих співвідношень.

- |                        |                                      |
|------------------------|--------------------------------------|
| (6) $A \cup E = E,$    | (6') $A \cap \emptyset = \emptyset;$ |
| (7) Якщо для всіх $A$  | (7') Якщо для всіх $A$               |
| $A \cup B = A,$        | $A \cap B = A,$                      |
| то $B = \emptyset;$    | то $B = E;$                          |
| (8) $C \emptyset = E;$ | (8') $CE = \emptyset$                |

- (9)  $A \cup A = A$  (9')  $A \cap A = A$   
(закон ідемпотентності);  
(10)  $A \cup (A \cap B) = A$  (10')  $A \cap (A \cup B) = A$   
(закон поглинання);  
(11)  $C(A \cup B) = CA \cap CB$ ,  
(11')  $C(A \cap B) = CA \cup CB$   
(закон де Моргана).

Закони (11) і (11') узагальнюються на будь-яку кількість множин:

$$C\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (CA_i), \quad C\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (CA_i) \quad (11)_1$$

(доповнення об'єднання дорівнює перетинанню доповнень, і навпаки). Такі співвідношення «самодіїст», тобто переходять самі в себе за принципом двоїстості:

- (12) Якщо  $A \cup B = E$  і  $A \cap B = \emptyset$ , то  $B = CA$ ;

- (13)  $CCA = A$  (закон подвійного заперечення).

Зауважимо ще, що для  $A, B \subseteq E$  твердження  $A \subseteq B$ ,  $A \cap B = A$ ,  $A \cup B = B$  рівносильні одне одному. Операція різниці в А. м. зводиться до основних:  $A \setminus B = A \cap CB$ . У деяких випадках потрібно зводити симетричну різницю (або диз'юнктивну суму) множин  $A \perp B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  (загальноприйнятого позначення немає). Ця операція має властивості  $A \perp B = B \perp A$  (комутативність),  $(A \perp B) \perp C = A \perp (B \perp C)$  (асоціативність),  $A \perp A = \emptyset$ ,  $A \perp \emptyset = A$ .

Логічне тлумачення А. м. Про елементи  $x$  множини  $E$  можна робити висловлювання, істинні чи хибні (див. *Числення висловлювань*). Кожне висловлювання можна звести до вигляду:  $x$  має властивість  $\alpha$ . Нехай  $A_\alpha$  — множина всіх елементів  $E$ , що мають цю властивість; тоді попереднє висловлювання рівносильне висловлюванню:  $xx \in A_\alpha$ . Тим самим встановлюється взаємно однозначна відповідність між висловлюваннями про елементи  $E$  і підмножинами  $A \subseteq E$ ; нехай  $Pr(A)$  — висловлювання, що відповідає  $A$ . Висловлювання з'єднують зв'язками  $\vee$  («або»),  $\wedge$  («і»); перед висловлюванням ставлять знак заперечення  $\neg$  («не»). Висловлювання  $Pr(A \cup B)$  означає:  $x \in (A \cup B)$ , а це рівносильне  $x \in A$  або  $x \in B$  (не виключаючи й випадку, коли  $x \in A$  і  $x \in B$ ). Те саме записують у вигляді диз'юнкції  $Pr(A) \vee Pr(B)$ . Аналогічно переписують і решту тотожностей:

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) \vee Pr(B),$$

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) \wedge Pr(B),$$

$$Pr(CA) = \neg Pr(A).$$

Отже, осн. операції А. м. еквівалентним способом описуються мовою логіки. Зауважимо ще, що  $Pr(E)$  — тотожно (для всіх  $x$ ) істин-

не висловлювання,  $Pr(\emptyset)$  — тотожно хибне, а виключення  $A \subseteq B$  рівносильне  $Pr(A) \rightarrow Pr(B)$ , де  $\rightarrow$  — зв'язка «влучиває». І навпаки, числення висловлювань виходить з якоїсь множини «елементарних висловлювань»  $V, W, \dots$ , з яких решту висловлювань одержують, застосовуючи операції  $\vee, \wedge, \neg$ . Нехай  $x = \{v, w, \dots\}$  — набір значень відповідних висловлювань  $V, W, \dots$ , де кожне значення  $v, w, \dots$  є символ «істина» або символ «хибність». Такі найрізноманітніші набори  $x$  утворюють множину  $E$ . Тоді будь-яке складене висловлювання  $S(V, W, \dots)$ , побудоване з  $V, W, \dots$ , істинне для якоїсь підмножини  $A \subseteq E$  наборів  $x$ , отже, його можна привести до вигляду:  $x \in A$ . А. м. у заг. розумінні складається з повної сім'ї  $\mathfrak{A}$  (не обов'язково всіх) частин  $E$ , стійкої щодо операцій  $\cup, \cap, C$ , тобто такої, що коли  $A, B \in \mathfrak{A}$ , то  $A \cup B \in \mathfrak{A}$ ,  $A \cap B \in \mathfrak{A}$ ,  $CA \in \mathfrak{A}$ . Такі А. м. важливі в ряді випадків, коли треба виділяти підмножини або спец. виду, або з «добрими» властивостями, які забезпечують можливість дальших побудов. Розглянемо, напр., на дійсній осі  $R$  півінтервали  $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$ , відкриті справа. Візьмемо як  $E$  скінченний замкнений інтервал. Тоді множини вигляду

$$\mathfrak{A} = \left(\bigcup_{i=1}^k [a_i, b_i)\right) \cap E \quad (\text{з будь-яким } k)$$

яляють собою об'єднання скінченної кількості неперетинних відрізків, які лежать в  $E$  (правий з них може бути замкнений справа). Такі множини утворюють А. м. у заг. розумінні; позначимо її  $\mathfrak{A}(E)$ . Аналогічні А. м. можна побудувати в евклідових просторах будь-якої розмірності  $R^m$  за допомогою півінтервалів

$$[a, b) = \{x \mid a_i \leq x_i < b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Проблема міри та  $\sigma$ -алгебри. Нехай  $E$  скінченна і  $\mu(A)$  ( $A \subseteq E$ ) — кількість елементів  $A$ . Тоді  $\mu(A) \geq 0$  і  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  при  $A \cap B = \emptyset$ . Мірою на А. м. наз. функцію в дійсних значеннях, яка визначена на множині елементів алгебри і має ті самі властивості. Для нескінченного  $\mathfrak{A}$  введення міри натрапляє на труднощі, зумовлені «натуральними» властивостями нескінченних підмножин (найважливіший випадок, коли  $E = R^m$  або  $E$  є множина в  $R^m$ ). Для подолання цих труднощів розглядають «звужені» А. м., напр.,  $\mathfrak{A}(E)$ . За  $\mu(\mathfrak{A})$  ( $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(E)$ ) беруть суму довжин відрізків, що становлять  $\mathfrak{A}$ . Проте одержана А. м. з мірою для більшості цілей надто вузька; її розширюють до більшої А. м.  $\mathfrak{A}$ , яка не містить усіх підмножин  $E$ , але є досить багата на множини (напр., до алгебри всіх підмножин  $E$ , які можна виписати за Борелем або за Лебегом). Такі розширені А. м. містять уже всі множини, які трапляються в аналізі та інших галузях математики. Вони мають і важливі додаткові властивості: якщо  $A_k \in \mathfrak{A}$  ( $k =$



$= 1, 2, \dots$ ), то  $(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \in \mathfrak{A}$ ,  $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \in \mathfrak{A}$ .

А. м. з цими властивостями наз. *σ-алгебрами* множин. Міра, визначена на початковій А. м.  $\mathfrak{A}$ , поширюється й на  $\mathfrak{A}$ , при цьому одержують цілком адитивну міру: якщо  $A_k \in \mathfrak{A}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) і  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), то  $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ .

**Імовірнісне тлумачення.** Випадково обрана точка  $\omega \in E$  може з якоюсь імовірністю  $P(A)$  належати множині  $A \subseteq E$  (напр., на стіл кидають кульку, й вона зупиняється в якійсь частині стола або поза цією частиною). З теоремою додавання імовірностей випливає, що при  $A \cap B = \emptyset$   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , бо події  $\omega \in A$  та  $\omega \in B$  в цьому разі несумісні. При цьому множини  $A$  та  $B$  мають бути «досить добрими», щоб відповідні імовірності мали сенс. У раді випадків вадється визначити А. м. з частини  $E$  (навіть  $\sigma$ -А. м.), на якій  $P(A)$  має властивості міри (навіть цілком адитивної). Така імовірнісна міра, крім того, має властивість  $P(E) = 1$ , бо вірогідні події («попадання в  $E$ ») приписують імовірність 1.

**Зв'язок з булевими алгебрами.** Якщо абстрагуватися від смислу символів множин та операцій  $\cup, \cap, C$ , то А. м. являє собою абстрактну алгебру, систему, яка підлягає аксіомам (1) – (5), (1') – (5'). Таку систему наз. *булевою алгеброю*. Всі співвідношення А. м. можна формально вивести з цих аксіом (при цьому асоціативні закони (1) і (1') можна видаляти зі списку аксіом, бо вони випливають з решти аксіом). Формальне виведення співвідношень без т. з. інтерпретацій має, напр., ту перевагу, що його виконує машина Рад математик І. І. Жегалкін (1889–1947) запропонував модифікацію булевої алгебри, в якій замість операції об'єднання використано операцію додавання за модулем 2 (див. *Жегалкіна алгебра*). В різних застосуваннях трапляються ще й інші модифікації. З розвитком А. м. значна частина комбінаторики (теорії скінченних множин) почала розвиватися в рамках А. м., і її розглядають у ширшому розумінні – як алгебру, що включає, окрім булевих операцій або операцій, які можна виразити через булеві, й нові операції над множинами підмножин і над відношеннями (напр., операції проєктування, декартового добутку, єзрізу тощо). У зв'язку з цим було розроблено циліндричні й поліадичні алгебри, а також алгебри відношень. Ці напрямки останнім часом інтенсивно розвиваються, задовольняючи запити теор. кібернетики (теорія автоматів, матем. лінгвістики, кодування, дискретний аналіз тощо).

Лит.: Александров Н. С. Введение в теорию множеств и теорию функций. Ч. 1 М – Л, 1938. Халмош П. Р. Теория меры. Пер. с англ. М., 1953 [б.бл.арс с 283–295]. Столар Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматическое теория. Пер. с англ. М., 1958. О. В. Гладкий.

**АЛГЕБРИ ПОДІВ** — алгебри універсальні, елементами яких є множини слів певного алфавіту, тобто події. Оскільки поняття *події* збігається з поняттям мови в теорії *мат. формальних*, то можна говорити і про алгебру мов. До осн. операцій А. п. відносять операції об'єднання, множення та ітерації (див. *Регулярні події та вирази*) й теоретико-множинні операції перетину й доповнення. При визначенні різних класів подій, напр., предствених в автоматах того чи іншого виду, дуже часто треба з'ясувати таке питання чи в цей клас подій певною А. п. з тими чи іншими добре описуваними властивостями. Тому для теорії автоматів характерними є чимало теорем, що встановлюють замкненість чи незамкненість різних класів подій щодо зазначених вище та інших операцій над подіями. Однією з найбільш важливих алгебр є алгебра регулярних подій. Вона має багато цікавих властивостей: вона скінченно-породжувана, є маке, алгеброю, що містить усі скінченні події (тобто події, що складаються з скінченної кількості слів), тощо. А. з. є й клас контекстно-вільних мов, що відіграє важливу роль у теорії формальних мов. Але властивості цієї алгебри не описуються так добре, як властивості алгебри регулярних подій, яка є підалгеброю алгебри контекстно-вільних мов. Як додаткові операції до алгебри регулярних подій часто вводять і операції перетину й доповнення, відносно яких клас регулярних подій буде замкненим.

Серед операцій над подіями розглядають і операцію ділення події на слово, яка необхідна в *автоматів системі*, операцію комутативного замикання, пов'язану з комутативною алгеброю регулярних подій, та багато інших операцій. Дуже загальним видом операції є операція суперпозиції події  $S$  алфавіту  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  і системи подій  $S_1, S_2, \dots, S_n$  якогось алфавіту  $A$ . Внаслідок такої операції  $S$  ( $S_1, S_2, \dots, S_n$ ) одержують подію алфавіту  $A$ , яка містить усі такі слова (і тільки їх), які одержують, замінюючи в словах, що належать  $S$ , кожне входження символу  $a_i$  якимось словом з події  $S_i$ . Багато операцій над подіями можна трактувати як суперпозиції з конкретно обраним  $S$ , напр., множення  $S_1 S_2$  — це суперпозиції подій  $S_1$  та  $S_2$  з одного слова  $a_1 a_2$ , та системи подій  $S_1$  і  $S_2$ . У плані загальноалгебричних проблем для алгебри подій вивчали й проблему аксіоматизації. Питання про скінченну аксіоматизованість алгебри регулярних подій у його класичній постановці розв'язано негативно: не існує скінченної системи тождеств, з яких за допомогою певних спеціальних правил виведення (т. з. правил заміни й підстановки) можна вивести будь-яку тотожність в алгебрі регулярних подій. Але підалгебра алгебри регулярних подій, що складається з усіх подій, які містять пусте слово, вже є скінченно-аксіоматизованою.

Розширивши певним чином правила виведення, можна досягти скінченної аксіоматизованості алгебри регулярних подій. Так, можна ввести таке додаткове правило: якщо

$$X = XS \cup R, \quad (1)$$

де  $S \in \mathcal{S}$ , вивідно, то вивідим є й  $X = RS^*$  і навпаки. Це правило виведення адекватне не випадково: воно зумовлене великими можливостями, які дає апарат розв'язування рівнянь. Проблема розв'язування рівнянь можна поставити для будь-якої універсальної алгебри, але вона не тільки в заг. поста новці, а й відносно окремих класів рівнянь найбільшого буває надто складною. У довідній алгебрі рівняння має вигляд  $F(x) = G(x)$ , де  $F(x) \in G(x)$  — вирази, побудовані із змінної  $x$ , елементів алгебри й операцій алгебри. Якщо рівняння має розв'язок, то ще й єдиний, то він є засобом певного задавання певної нової операції для елементів алгебри. Так, рівняння (1) при  $R = e$  задає ітерацію події  $S$ .

Істотним є те, що рівняння (1) належить до т. з. лінійних рівнянь. Розгляд систем лінійних рівнянь в А. п. дає нові засоби для вивчення алгебричних і теоретико-автоматних залежностей, зокрема, дає змогу здійснювати аналіз скінчених автоматів. Система лінійних рівнянь має вигляд

$$X_i = A_{i1}X_1 \cup A_{i2}X_2 \cup \dots \cup A_{in}X_n \cup B_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

де коефіцієнти  $A_{ij}$  — елементи цієї алгебри подій. При деяких обмеженнях на входження в пустого слова в коефіцієнтах  $A_{ij}$  така система має єдиний розв'язок. Якщо при цьому всі  $A_{ij} \in B_1$  регулярні, то в усіх  $X_i$  регулярні. Існує алгоритм розв'язування системи (2), аналогічний алгоритмові Гаусса для систем звичайних лінійних рівнянь. Виявляється, події, представлені в автоматі скінченною його станом, пов'язані системою лінійних рівнянь. Процедура складання цієї системи з наступним розв'язуванням її може бути алгоритмом аналізу скінчених автоматів. Крім систем рівнянь, в А. п. вивчали й системи рівнянь вигляду

$$X_i = S_i(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

де  $S_i$  — події, а вирази в правих частинах вважають за суперпозиції. Така система зв'язки має розв'язки (одна з її розв'язків є мінімальним у розумінні теоретико-множинного виключення), при деяких обмеженнях, пов'язаних зі входженням пустого слова в  $S_i$ , система (3) має єдиний розв'язок. Для теорії формальних мов інтерес становлять системи, в яких  $S_i$  — скінченні події. Розв'язком такої системи (єдиним чи мінімальним) є кортеж з  $n$  контекстно-вільних мов  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Система вигляду (3) тісно пов'язана з засобом описування (задавання) різних формальних мов, зокрема, за допомогою

контекстно-вільних граматик (див. *Граматика породжувальна*).

Дж. Глзшкюв В. М. Синтез цифрових автоматів М., 1962 [Библиогр. с. 484–489]. Ginzburg A. Algebraic theory of automata New York — London, 1968 [Библиогр. с. 157–161].

В. Г. Воднарчук.

**АЛГЕБРИ УНІВЕРСАЛЬНІ.** Алгеброю універсальною наз. об'єкт, що його задають якась множина — А-носій алгебри — і якийсь (може й нескінченний) набір ф-цій  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , скрізь означені на А й ві значеннями в А, що наз. операціями алгебри  $\mathcal{A}$ . Число аргументів  $n$  операції  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  наз. аргументом цієї операції. Розрізняють операції унарні, бінарні, тернарні і т. д. Виділяють і нульові операції (під цим, як завжди, розуміють константи — зафіксовані елементи носія). Упорядкований набір  $\{f_1, f_2, \dots, f_i, \dots\}$  символів операцій А. у. з зазначенням їхньої аргументності наз. сигнатурою алгебри  $\mathcal{A}$ .

А. у. — одне з осн. понять алгебри. Майже всі алгебричні структури (піагрупи, групи, структури, кільця та ін.) є А. у. в означеному вище розумінні. Так, напр., кільце цілих чисел  $\mathbb{Z}$  можна розглядати як А. у., носієм якої є множина цілих чисел, а сигнатура складається з трьох бінарних операцій — додавання, віднімання та множення. Будь-яку піагрупу можна вважати А. у. з сигнатурою, що складається з однієї бінарної операції — множення. Групу, природно, вважають А. у. з трьома операціями: однією бінарною (множення), однією унарною (взяття оберненого елемента) і однією нульовою (константа одиниці). До поняття А. у. не входить така важлива алгебрична структура, як поле, коли його розглядати як множину з чотирма бінарними операціями — додаванням, відніманням, множенням і діленням. Іспраді, бінарна операція ділення  $x_1 : x_2$  не є означеною для  $x_2 = 0$ . Для таких випадків розглядають, окрім А. у., і т. з. часткові універсальні алгебри (ч. у. а.), в означенні яких не вимагається, щоб операції  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  їхньої сигнатури були всюди означеними функціями. Загальнішим є поняття «алгебрична система», яке ввів А. Тарський під назвою «реляційна система» і під яким розуміють такі ч. у. а., в яких, окрім операцій на носії А, задано й деякий набір предикатів (терми «алгебрична система» запропонував А. І. Мальцев). До алгебричних систем належать, напр., упорядковані групи, в яких окрім операції множення означено й бінарний предикат порядку.

Поняття «А. у.» ввів під назвою «абстрактна алгебра» в 30-х роках 20 ст. амер. алгебрист Г. Біркігоф. Йому належать і перші осн. результати теорії А. у. Широкого розвитку ця теорія набула в 50-х роках Тоді саме в межах матем. логіки (див. *Логіка математична*) — в працях А. Тарського, А. Робінсона і особливо А. І. Мальцева — було розроблено мову й апарат, що їх використовували для

розв'язування деяких загальних задач у теорії груп, підгруп та ін. розділах алгебри. Потім апарат матем. логіки широко застосовували в теорії моделей алгебричних систем, зокрема в теорії А. у. Крім цього, теорія А. у. використовує й теоретико-множинний апарат теорії категорій. Теорія А. у. розвивається в межах загальної алгебри, широко використовуючи математико-логічні й теоретико-категоричні поняття і методи. Значних успіхів у цій галузі досягли рад. вчені А. І. Мальцев і його співробітники (Новосибірськ) та О. Г. Курош із співробітниками (Москва). За кордоном ця галузь розвивається переважно в США (А. Тарський, Р. Ліндон), а також в Англії (П. Кош), Польщі (І. Лось, Е. Марчевський) і Японії (К. Шода). В теорії А. у. тепер вивчають в основному класи цих алгебр з однаковою сигнатурою, причому такі, коли між операціями сигнатури виконуються відношення, що відповідають деякому наборові замкнених формул числення предикатів *вужького*. Такі класи А. у. наз. аксіоматизованими класами А. у., а відповідні набори замкнених формул — системами аксіом цього класу. Аксіоматизованими класами в звичайній алгебричній структурі (група, кільця, поля і т. д.), аксіоми яких можна записати формулами вужького числення предикатів. Напр., аксіому теорії груп про те, що множення в групі допускає ліве об'єднання; записують так:  $\forall(x) \forall(y) \exists(z) (x \cdot y = z)$ .

Одним з осн. завдань теорії А. у. є вивчення властивостей і взаємозв'язку аксіоматизованих класів А. у. Серед цих класів докладніше вивчено ті, що задаються аксіомами, складеними з тотожностей. Такі класи наз. *многovidними* А. у., еквіаціонально означуваними класами, або примітивними класами. Фундаментальна теорема про многovidні А. у., яку довів Г. Біркіф, стверджує, що клас А. у. є многovidним тоді й лише тоді, якщо він замкнений щодо таких теоретико-множинних операцій: взяття підалгебри, переходу до гомоморфного образу й утворення декартового добутку. Подібні характеристики було встановлено й для ін. типів аксіоматизованих класів. Вивчення означуваності А. у. деякого аксіоматизованого класу системами твірних і визначальних відношень є важливим завданням теорії А. у. в кібернетичі. Велике значення має поняття зв'язних А. у. деякого аксіоматизованого класу. Вільні алгебри даного класу — це (не зовсім) такі алгебри цього класу, в яких решту А. у. можна одержати як гомоморфні образи. Вільні алгебри існують не в усіх аксіоматизованих класах, але там, де вони є, напр., у многovidних, вони відіграють значну роль. Теорія А. у. вивчає будову груп автоморфізмів і шевргов ендоморфізмів А. у., а також ґратом підалгебр і ґратом конгруєнцій.

Теорія А. у. об'єднує багато паралельних розділів класичних підгалужень загаль-

ної алгебри й разом з тим має і власну проблематику, яка дедалі розширюється. Результати теорії А. у. мають велике значення для дальшого розвитку різних галузей кібернетики з абстрактного погляду будь-яку цифрову автоматичну машину (ЦАМ) і взагалі будь-який автомат, пристрій дискретної дії можна вважати за деяку А. у. Природно, напр., вважати множини станів оперативної пам'яті ЦАМ носієм деякої А. у., а набір її операцій — операціями відповідної А. у. З абстрактного погляду адистивності означеної так А. у. відображують функціональні можливості ЦАМ. Тому в абстрактній теорії цифрових автоматів, а також у теорії програмування широко застосовують ті розділи алгебри, які належать до теорії А. у. Тут маємо прямий зв'язок кібернетики з теорією А. у. Теорія А. у. тісно пов'язана в розділах матем. логіки, теорією рекурсивних функцій і алгоритмі теорією. Так, у матем. логіці деякі вчені (А. Лінденбаум, Б. Расьона, Р. Сікорський, А. Тарський та ін.) трактують формалізовані матем. теорії як А. у. Носії А. у., встановленої в деякою формалізованому теорією, складається в цьому разі з сукупності правильних побудованих формул даної теорії, а операції відповідають її теоретико-висловлювальним зв'язкам і *кванторам*. Застосування такої операції до заданих формул полягає в утворенні нової формули, яку знаходять із цих заданих формул як послідовність, що складається з запису їх, дужок і знака зв'язки або знака квантора. Напр., результат операції, що відповідає *кон'юнкції*, застосований до формул  $X$  і  $Y$ , є формулою  $(X) \& (Y)$ . Знайдену А. у. наз. *адагтебром* формул даної теорії. В алгебрі формул впроваджується конгруєнція, за якою формули, що їх виводять одну з одної за правилами виведення теорії, вважають за еквівалентні. Тоді формалізованому теорією вважають фактор-алгебру алгебри формул за цією конгруєнцією. Такий підхід дає змогу вивчати формалізовані матем. теорії в межах теорії А. у. Цю ідею викладено і в праці Б. Расьона і Р. Сікорського. Див. також *Алгебра логіки і Моделі теорії*.

Лит. Курош А. Г. *Заняття по общей алгебре* М. 1962 [бібл.огр с 383-387]. Біркіф Г. *Теория структур* Пер. с англ. М. 1952 [бібл.огр с 370-384]. Кош П. *Универсальная алгебра* Пер. с англ. М. 1958 [бібл.огр с 329-334]. Р. Биксон А. *Введение в теорию моделей и метаматерику алгебры* [Пер. с англ. М. 1967 [бібл.огр с 356-372]. Расьона Б. Е. Сікорський Р. *Математика метаматерики* Пер. с англ. М. 1971 [бібл.огр с 313-324]. Л. А. Нахичеван

**АЛГЕБРИЧНА ТЕОРІЯ АВТОМАТІВ** — розділ теоретичної кібернетики, який вивчає дискретні автомати з абстрактно-алгебричного погляду. Поняття автомата, що його розглядають в А. т. а., являє собою абстрактну модель пристрою, що функціонує в дискретному (автоматному) часі, переробляючи послідовності вхідних сигналів (стимулів) на послідовності вихідних сигналів (реакцій). У процесі функціонування автомата відбувається послідовна зміна його внутр. станів.

Стан, у якому перебуває автомат у даний момент часу, однозначно визначає відповідність між його вхідними й вихідними сигналами. Такого роду пристрої становлять основу сучасної обчислювальної техніки, а також численних дискретних систем автомат. контролю й керування. Спроби математично описати інформаційні моделі біох. систем та їхню поведінку також приводять (за певної абстракції) до поняття автомата.

Строге поняття автомата визначають так. Автоматом наз. об'єкт  $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ , який задають трьома основними (непустими) множинами  $A, X, Y$ , що їх відповідно наз. множиною станів, вхідним алфавітом (який складається з вхідних сигналів або виходів) і вихідним алфавітом (який складається з вихідних сигналів або виходів) та двома  $\phi$ -ціями —  $\phi$ -цією переходів  $\delta: A \times X \rightarrow A$  і  $\phi$ -цією виходів  $\lambda: A \times X \rightarrow Y$ . Автомат наз. скінченним, якщо скінченними є множини  $A, X$  і  $Y$ . З погляду заг. алгебри автомат є трьохосновною алгеброю універсальною з двома операціями  $\delta$  і  $\lambda$ . Відповідно до цього визначають вирази у заг. алгебрі поняття: *автоматичні ізоморфізми*, *автоматіс доможорфізм*, *ідаеомат*, *систему твірних* тощо.

Часто розглядають і клас автоматів, для яких фіксовано алфавіти  $X$  і  $Y$  (такі автомати називатимемо  $X$ - $Y$ -автоматами), й гомоморфізми, що діють на ці алфавіти тотожно.

Кожний символ  $x \in X$  вхідного алфавіту автомата  $\mathcal{A}$  задає на множині  $A$  його станів монарну операцію  $a \rightarrow \delta(a, x) = ax$  і відповідно до цього  $X$ - $Y$ -автомат іноді розглядають як алгебру з множиною  $X$  монарних операцій і  $\phi$ -цією виходів  $\lambda$ . У цьому разі автомат  $\mathcal{A}$  зручно ототожнювати з множиною  $A$  його станів, розглядаючи цю множину як алгебру, для якої, крім системи операцій  $X$ , створено  $\phi$ -цію виходів  $\lambda$ . Така точка зору особливо доречна, коли розглядають автомати без виходів, тобто об'єкти, які задають лише за допомогою множини станів, вхідного алфавіту й  $\phi$ -ції переходів. Автомати без виходів ( $X$ -автомати) наз. також акцепторами, на відміну від заг. поняття автомата, який наз. трансдуктором, або *Мілі автоматом*. Важливу роль відіграє й окремий випадок Мілі автомата — автомат Мура, який характеризується властивістю  $\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x))$ .  $\phi$ -цію  $\mu$  наз.  $\phi$ -цією міток, і її часто розглядають замість  $\phi$ -ції виходів автомата Мура.

Точним визначенням перетворення інформації, яке виконує автомат, є визначення відображення, що його індукує стан автомата. Щоб сформулювати це визначення, розглянемо вільні пігрупи  $F(X)$  і  $F(Y)$ , породжені множинами  $X$  і  $Y$ , тобто множинами слів алфавітів  $X$  і  $Y$ . Ці пігрупи наз. вхідною та вихідною пігрупами автомата відповідно. Поширимо  $\phi$ -ції переходів і виходів на пігрупи  $F(X)$  і  $F(Y)$ , вважаючи, що  $ae = a$  ( $e$  — пусте слово),  $\delta(a, px) = \delta(\delta(a, p), x)$ , тобто  $a(px) = (ap)x$ ,  $\lambda(a, e) = e$ ,  $\lambda(a, px) =$

$= \lambda(a, p)\lambda(ap, x)$ , де  $p \in F(X)$ ,  $a \in A$ . Відображення  $\varphi_a: F(X) \rightarrow F(Y)$ , що його визначають за рівністю  $\varphi_a(p) = \lambda(a, p)$ , наз. відображенням (оператором), яке індукує стан  $a$  автомата  $A$ . Кажуть також, що відображення  $\varphi_a$  представлено в автоматі  $A$  станом  $a$ . В деяких випадках в автоматі фіксують початковий стан. Такі автомати наз. ініціальними, а говорячи про відображення, представлене в ініціальному автоматі, мають на увазі відображення, представлене його початковим станом.

Відображення, представлені в автоматах (автоматні відображення), характеризуються тим, що вони зберігають довжину слів і початкові відрізки. Це означає, що відображення  $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$  автоматне тоді й лише тоді, коли довжина слова  $\varphi(p)$  дорівнює довжині слова  $p$  і  $\varphi(p)$  є початковим відрізком слова  $\varphi(pq)$  для будь-яких  $p, q \in F(X)$  (див. *Оператор автоматний*). Стани  $a$  та  $b$  (того самого чи різних автоматів) з заг. вхідним і вихідним алфавітом) наз. еквівалентними, якщо  $\varphi_a = \varphi_b$ . Автомати  $A$  та  $B$  еквівалентні, якщо кожний стан одного з них еквівалентний якомусь стану іншого. Автомат наз. зв'язним, якщо всі його стани попарно нееквівалентні.

Відображення  $a \rightarrow \varphi_a$ , що їх індукують різні стани автомата  $A$ , пов'язані співвідношеннями  $\varphi_a(x)\varphi_{ax}(p) = \varphi_a(xp)$  ( $x \in X, p \in F(X)$ ), яке однозначно визначає відображення  $\varphi_{ax}$  через відображення  $\varphi_a$ , тому можна перетворити множину відображень  $\{\varphi_a\}_{a \in A}$  на автомат, визначаючи на цій множині  $\phi$ -ції переходів і виходів за допомогою співвідношень  $\varphi_{ax} = \varphi_a x$ ,  $\lambda(\varphi_a, x) = \varphi_a(x)$ . Цей автомат є зв'язним, бо відображення, що його індукує стан  $\varphi_a$ , збігається в відображенням  $\varphi_a$ . Відображення  $a \rightarrow \varphi_a$  є гомоморфізмом, а збудований автомат ізоморфний фактор-автомату автомата  $A$  щодо конгруентності, яка збігається з відношенням еквівалентності станів. Із сказаного випливає така теорема: в класі всіх еквівалентних між собою  $X$ - $Y$ -автоматів існує один і той самий до ізоморфізму лише один зв'язний автомат, на який гомоморфно відображається будь-який автомат цього класу. На цій теоремі ґрунтуються методи мінімізації *автоматів скінченних*. Можна показати, що клас відображень, представлених у скінченних автоматах Мура, збігається з класом відображень, представлених у скінченних автоматах Мілі. Для класу автоматів Мура має місце теорема, алогічна наведення.

До поняття представлення зображень в автоматах близьким є поняття представлення подій. Подією в алфавіті  $X$  наз. довільну множину слів пігрупи  $F(X)$ . Кажуть, що подію  $S$  представлено в  $X$ - $Y$ -автоматі  $A$  вхідним сигналом  $y \in Y$  (множиною вихідних сигналів  $Y^* \in Y$ ) при початковому стані  $a$ , якщо  $\varphi_a(p) = y\varphi_a(p) = y^*\varphi_a(p)$ , де

$y^* \in Y^*$  тоді й тільки тоді, коли  $p \in S$ . Систему подій  $(S_y)_{y \in Y}$ , що складається з сіл  $p$ , таких, що  $\varphi(p) = y$ , однозначно визначає відображення  $\varphi$ . Якщо  $\varphi = \varphi_a$ , то події  $S_y$  представлені вхідними сигналами  $y \in Y$  автомата  $A$  при початковому стані  $a$ . Тому часто, замість представлення відображення, розглядають представлення подій. В автоматах Мура представлення подій множинами вхідних сигналів зводиться до представлення їх множинами станів. Подія  $S$  представлена в автоматі  $A$  множиною станів  $A^0 \subset A$  при початковому стані  $a \in A$ , якщо  $ap \in A^0$  тоді й тільки тоді, коли  $p \in S$ .

Одним з важливих завдань А. т. а. є вивчення відображень або подій, представлених у тих чи ін. класах автоматів. Здебільшого це завдання розв'язують шляхом створення мов для описування подій, представлених у відповідних класах автоматів. Найповніше щодо цього вивчено клас скінченних автоматів. Клас подій, представлених у скінченних автоматах, збігається з класом регулярних подій (див. *Алгебра подій, Регулярні події та вирази*). Це твердження є однією з важливих теорем теорії скінченних автоматів, а доведення її дає розв'язання проблем абстрактного аналізу й синтезу скінченних автоматів (див. *Синтез автоматів абстрактний*), які мають велике застосовне значення. З класів нескінченних автоматів найповніше досліджено клас *автоматів магазинних* Події, представлені в таких автоматах, є контекстно-вільними мовами.

Важливу роль в А. т. а. відіграє зв'язок автоматів з підгрупами. Кожен вхідний сигнал  $x \in X$  автомата  $A$  визначає перетворення  $f_x: a \rightarrow ax$  множини станів автомата  $A$ . Підгрупу  $G_A$ , породжену всіма такими перетвореннями, наз. підгрупою автомата  $A$ . До підгрупи  $G_A$  здебільшого додають одиницю — тотожне перетворення  $e$ , розглядаючи його як перетворення, що його індукуює пусте слово. Для кожного слова  $p \in F(X)$  можна визначити перетворення  $f_p: a \rightarrow ap$ . Співвідношення  $f_{pq} = f_p \cdot f_q$  показує, що відображення  $\gamma: p \rightarrow f_p$  є гомоморфізмом вільної підгрупи  $F(X)$  на підгрупу  $G_A$ . Підгрупу  $G_A$  автомата  $A$  можна розглядати як  $X$ -автомат, якщо вважати  $f_{px} = f_{px}$ . Відображення  $\xi_a: G_A \rightarrow A$ , що його визначають за рівністю  $\xi_a(p) = f_p(a) = ap$ , є гомоморфізмом автомата  $G_A$  в автомат  $A$ . І  $F(X)$  можна розглядати як  $X$ -автомат з  $\Phi$ -цією переходів  $\delta(p, x) = pf_x$  (вільний автомат, породжений станом  $e$ ). Тоді  $\gamma$  буде гомоморфізмом автомата  $F(X)$  на  $G_A$ . Гомоморфізми  $\gamma$  і  $\gamma_a = \xi_a \circ \gamma$  індукують розбиття  $R$  і  $R'_a$  підгрупи  $F(X)$  на класи сіл, які мають однакові образи при гомоморфізмах  $\gamma$  і  $\gamma_a$  відповідно. Розбиття  $R'_a$  є автоматним, тобто для будь-якого класу  $S$  цього розбиття й

будь-якого  $x \in X$  знайдеться клас  $S'$ , такий, що  $Sx \subset S'$ . Це розбиття визначає відношення конгруентності на автоматі  $F(X)$ , фактор-автомат за яким ізоморфний підавтоматові  $A$  (а) автомата  $A$ , породженому станом  $a$  (він складається з усіх станів виду  $ap$ , де  $p \in F(X)$ ). Розбиття  $R$  є підгруповим, тобто для будь-якої пари  $S' \mid S''$  його класів знайдеться клас  $S$  такий, що  $S'S'' \subset S$ . Це розбиття визначає відношення конгруентності на підгрупі  $F(X)$ , і фактор-підгрупу за цим відношенням є ізоморфією підгрупи  $G_A$ . Якщо автомат  $A$  породжується станом  $a$ , тобто  $A(a) = A$ , то  $R$  є макс. підгруповим розбиттям, вписаним у розбиття  $R'_a$ . В заг. випадку  $R$  є макс. підгрупове розбиття, вписане у всі розбиття  $R'_a$  ( $a \in A$ ).

Поняття підгрупи автомата можна використати для класифікації автоматів за властивостями їхніх підгруп. При цьому підгрупу розглядають як абстрактну підгрупу (а не підгрупу підстановок). Кажуть, що автомат  $A$  належить до підгрупи  $G$ , якщо його підгрупа ізоморфна  $G$ . Фіксуючи якийсь клас підгруп, можна одержати клас автоматів, які належать до цих підгруп. Напр., комутативні автомати — це автомати, що належать до комутативних підгруп, групові автомати — це автомати, що належать до груп. Скінченні автомати й тільки вони належать, очевидно, до скінченних підгруп. Розбиття  $R'_a$  складається, як бачимо з визначення, з подій, представлених різними станами в автоматі  $A$  при початковому стані  $a$ . Для будь-якої системи  $M$  подій  $\{S_\alpha\}$  в алфавіті  $X$  можна побудувати систему  $K$  розбиттів  $(S_\alpha, F(X) \setminus S_\alpha)$  і макс. автоматне розбиття  $R'$ , вписане у всі розбиття системи  $K$ . Воно визначає (єдиним способом) автомат, у якому представлені всі події системи  $K$ . Тоді можна сказати, що система  $K$  належить до підгрупи, яка збігається з підгрупою автомата, що його збудовано таким способом. Цю підгрупу визначають макс. підгруповим розбиттям, вписаним у всі розбиття системи  $K$ . Описана вище конструкція дає змогу поширити підгрупову класифікацію на системи подій. Так, скінченні системи регулярних подій і тільки вони належать до скінченних підгруп. Системи комутативних подій, тобто подій, які разом з кожним словом містять і всі слова, що їх одержують з даного слова, перетавивши букви, і лише вони належать до комутативних підгруп.

Важливу роль в *автоматній теорії* відіграє поняття *автомата недетермінованого*, тобто автомата, в якого  $\Phi$ -ції переходів і виходів є багатозначними. Для недетермінованих автоматів застосовують таку термінологію: якщо  $b \in \delta(a, x)$ , то кажуть, що автомат  $A$  може перейти від діяння вхідного сигналу  $x$  із стану  $a$  в стан  $b$ . Аналогічно визначають можливість переходу від діяння вхідного слова. Для недетермінованих автоматів можна визначити поняття представлення події

так. Нехай  $A$  — недетермінований  $X$ -автомат,  $A_0 \subseteq A$ ,  $A^* \subseteq A$ . Подія, представна в  $A$  при множині  $A_0$  початкових станів і множині  $A^*$  заключених станів збігається з множиною всіх слів, що під їхнього діяння автомат може перейти з множини  $A_0$  в  $A^*$ . Для скінченних автоматів перехід до недетермінованих автоматів не дає нічого нового, бо довільна подія, представна в скінченному недетермінованому автоматі, представна також і в скінченному детермінованому автоматі. Зовсім інше — нескінченні автомати. Так, клас подій, представних у недетермінованих магазинних автоматах, ширший за клас подій, представних у детермінованих магазинних автоматах (здебільшого для магазинних автоматів розглядають випадок, коли множини  $A_0$  й  $A^*$  скінченні). Але водночас клас недетермінованих магазинних автоматів особливо цікавий у зв'язку з тим, що в них можна представити будь-які контекстно-вільні мови й лише їх. У зв'язку з застосуванням магазинних автоматів в автоматизації програмування та теорії перекладу, тепер досліджують і деякі узагальнення їх. Вище припустили, що вхідна й вихідна підгрупи автомата вільні. Переходячи до довільних підгруп, можна одержати поняття узагальненого автомата. Узагальнений автомат задають множиною станів, вхідною підгрупою  $G$ , вихідною підгрупою  $H$  і ф-ціями переходів і виходів, які задовольняють аксіоми  $\delta(a, g_1, g_2) = \delta(\delta(a, g_1), g_2)$ ,  $\lambda(a, g_1, g_2) = \lambda(\delta(a, g_1), g_2)$ . Для випадку, коли вхідна й вихідна підгрупи мають ліве скорочення, можна одержати теорему про зведений автомат. Проте узагальнені автомати вивчалися тільки в дуже спец. випадках. Автомати, в яких вхідна й вихідна підгрупи є підпідгрупами вільної підгрупи, застосовують у теорії мов і в логіці теорії. У разі, якщо вхідна підгрупа є прямим добутком кількох вільних підгруп, це відповідає багатостричковим одностороннім машинам. Події, представні в таких автоматах (п-арні відношення між словами), для недетермінованих автоматів можна характеризувати алгебрично як елементи алгебри відношень, аналогічної алгебрі регулярних подій, тобто як алгебри з операціями об'єднування, підгрупового множення та ітерації, породженої скінченними відношеннями.

Важливу роль в А. т. а. відіграє вивчення різних способів автоматів композиції, тобто операцій, за допомогою яких з простіших автоматів можна будувати складніші. В структурній теорії автоматів вхідні й вихідні сигнали є декартовими степенями якогось фіксованого структурного алфавіту (здебільшого — це двійковий алфавіт  $\{0,1\}$ ). Компоненти символу структурного алфавіту відносять до физ. каналів, по яких здійснюється паралельне передавання сигналів. У цьому разі композицію визначають, отождествляючи деякі вхідні й вихідні канали автоматів, які входять до композиції. Ося. завданням

структурної теорії автоматів є: проблема синтезу автоматів структурного, проблема оптимізації та монотоні проблема систем автоматів. Проблема структурного синтезу полягає у відшукуванні представлення довільного скінченного автомата (в точності до ізоморфізму чи еквівалентності) у вигляді композиції заданого типу автоматів, які входять до заданого базису. Оптимізаційні завдання структурної теорії полягають у відшукуванні схем мінім. складності, що реалізують заданий автомат. Проблема повноти полягає в розпізнаванні того, чи можна за фіксованого способу композиції з заданих автоматів побудувати будь-який скінченний автомат (в точності до ізоморфізму чи еквівалентності).

У зв'язку з застосуванням теорії автоматів до теорії матем. машин важливе значення має поняття багатореєстрового автомата (днп. Автомат реєстровий) як нескінченного автомата спец. типу, за допомогою якого зручно визначити операційні пристрої обчисл. машин. Це поняття відіграє центр. роль нового напрямку в теорії автоматів — дискретних перетворювальних теорій. У цій теорії вивчають взаємодію двох автоматів — скінченного керуючого й нескінченного операційного автомата. Автомат керуючий задає якимсь перетворенням, визначено на множині станів операційного автомата. Задані так перетворення можна розглядати як елементи спец. мікропрограми алгебри. Використання співвідношень цієї алгебри дає змогу здійснювати оптимізацію керуючого автомата. Важливу роль при цьому відіграє підгрупа операційного автомата, що лежить в основі мікропрограми алгебри. Саме наявність співвідношень у цій підгрупі й дає змогу проводити якнайглибші перетворення керуючих автоматів.

Л. М. Глушков В. М. Абстрактна теорія автоматів. Успехи математических наук, 1964, № 16, в. 3; Глушков В. М. Теорія автоматів і формальне преобразование микропрограмм. Кибернетика, 1965, № 5; E. L. G. C. S. M. J. E. On relations defined by generalized finite automata. JRM Journal of research and developments, 1965, v. 8, № 1; Glushkov V. M. L'etic avakia A. Theory of a continuous and discrete processes. В кн: Advances in information systems science, v. 1 New York 1969.

В. М. Глушков, О. А. Лещинський.

**АЛГЕБРИЧНА ТОПОЛОГІЯ** — загальна назва розділу топології, в яких застосовуються алгебричні методи. А. т. поділяють на теорію гомологій, гомотопічну топологію та диференціальну. Нехай  $X$  — топологічний простір. Роль «геометричних фігур» в  $X$  відіграють ланцюги, визначені так. Нульвимірний ланцюг  $c^0$  складається зі скінченного числа точок  $x_i^0$ , які мають цілочислові коеф.  $\alpha_i^0$ ,  $c^0$  записується як формальна лінійна комбінація  $\sum \alpha_i^0 x_i^0$ . Неперервне відображення  $f^0$  відрізка  $[0,1]$  в  $X$  наз. одновимірним симплексом простору  $X$ ; скінченні формальні суми  $c^1 = \sum \alpha_i^1 x_i^1$  наз. одновимірними ланцюгами (аналог систем орієнтованих дуг). Анало-

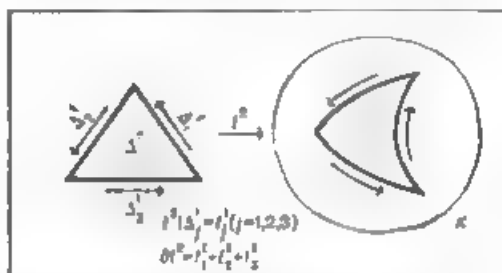
гідно цьому в неперервних відображеннях трикутника в  $X$  будуться двовимірні ланцюги (аналог системи орієнтованих поверхонь, поділених на «криві трикутники»), в неперервних відображеннях тетраедра в  $X$  — тривимірні ланцюги і т. д. Для ланцюгів природно визначається операція додавання. Для двовимірного симплексу  $\Delta^2: \Delta^2 \rightarrow X$ , де  $\Delta^2$  — трикутник-прообраз, відображення  $\Delta^2$  можна розглядати лише на границі  $\Delta^2$ ; цим визначається одновимірний ланцюг в трьох симплексах  $\partial\Delta^2$ , який наз. границею  $\Delta^2$ . Для будь-якого двовимірного ланцюга  $c^2 = \sum \alpha_i \Delta_i^2$  граничний оператор  $\partial$  визначається вимогою лінійності:  $\partial c^2 = \sum \alpha_i \partial \Delta_i^2$ . Аналогічно оператор  $\partial$  визначається для ланцюгів будь-якої розмірності; він переводить  $r$ -вимірний ланцюг в  $(r-1)$ -вимірний, а 0-вимірний, за означенням, — у нуль. Наочний зміст оператора  $\partial$  — перехід від «орієнтованої поверхні»  $c^2$  до «граничної кривої»  $\partial c^2$ , орієнтацію якої узгоджено з орієнтацією  $c^2$  так, як це робиться в теорії поверхневих інтегралів. Так само  $\partial c^2$  є алгебр. аналогом «граничної поверхні» тіла  $c^3$ , зятого з належною орієнтацією (мал.). Оскільки границя поверхні є замкнена крива, а границя тіла — замкнена поверхня, природно сподіватися, що «границя границі» дорівнює нулю, тобто  $\partial\partial c^r = 0$  ( $r-1$ -вимірний ланцюг «без доданків»). Це співвідношення можна довести формально. Роль граничного оператора в аналізі визначається в теоремі Стокса, яку можна записати у вигляді

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega, \quad (*)$$

де  $\omega$  — дифер. форма  $Pdx + Qdy + Rdz$ , а  $d\omega$  одержують в  $\omega$  відомим способом (диференціальна форма  $\omega$ ). Якщо  $\partial c = 0$ , ланцюг  $c$  наз. ц. к. л. м. Якщо  $z$  — цикл і в  $X$  існує такий ланцюг  $c$ , що  $\partial c = z$ , то  $z$  наз. циклом, гомологічним нулеві (або просто границею). Всі ланцюги простору  $X$  розмірності  $r$  утворюють абелеву групу  $C_r(X)$ , ц.к.л.м. — підгрупу  $Z_r(X) \subset C_r(X)$ , а границі — підгрупу  $B_r(X) \subset Z_r(X)$ . Цикли  $z_1, z_2$  гомологічні ( $z_1 \sim z_2$ ), якщо різниця їх є границею; це — відношення еквівалентності між циклами, і класи еквівалентності є класами суміжності  $z_r(X)$  за  $B_r(X)$ ; їх наз. класами  $r$ -вимірних гомологій простору  $X$ . Роль класів гомологій видно тоді, коли в  $(*)$   $d\omega = 0$ , тобто  $(P, Q, R)$  — безвихрове векторне поле; в цьому разі  $\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega = 0$ , якщо цикл

$z_1, z_2$  гомологічні в околі  $X$ , де задано поле. Класи гомологій становлять групу  $Z_r(X)/B_r(X) = H_r(X)$ , яку наз.  $r$ -вимірною групою гомологій простору  $X$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ). Якщо тепер  $\varphi: X \rightarrow Y$  — неперервне відображення, то для кожного симплексу  $\sigma$  простору  $X$   $\varphi \cdot \sigma$  є симплекс простору  $Y$ ,

і цим задається гомоморфізм абелевих груп  $\widehat{\varphi}: C_r(X) \rightarrow C_r(Y)$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ). Можна довести, що  $\widehat{\varphi}\partial = \partial\widehat{\varphi}$  (образ границі є границя образу); звідси  $\widehat{\varphi}(Z_r(X)) \subset Z_r(Y)$ ,  $\widehat{\varphi}(B_r(X)) \subset B_r(Y)$  і кожний клас гомологій  $X$  переходить у якийсь клас  $Y$ , тобто визначено гомоморфізм  $\varphi_*: H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ). При цьому для тотожного відображення  $e_X$  маємо  $e_{X*} = e_{H_r(X)}$  (тотож-



ний гомоморфізм) і для відображень  $\varphi: X \rightarrow Y$ ,  $\psi: Y \rightarrow Z$  маємо  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ . Розглянемо категорію  $K$  (днп. Множин теорія) всіх топологічних просторів та їхніх неперервних відображень, категорію  $L$  усіх абелевих груп та їхніх гомоморфізмів. Відповідності  $T(X) = H_*(X)$ ,  $T(\varphi) = \varphi_*$  визначають функтор, що відображає  $K$  в  $L$ . Це дає змогу вводити топологічні властивості просторів та відображень до більш спрощених, але водночас доступніших властивостей груп і гомоморфізмів. Напр., нехай треба довести, що не існує неперервного відображення кулі  $D$  на її граничну сферу  $S$ , при якій точки  $S$  переходять самі в себе. Коли  $\varphi$  — таке відображення, то розглянемо ще  $\psi: S \rightarrow D$ , яке відображає всі точки  $S$  у себе; тоді  $\varphi \circ \psi = e_S$ .  $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ .  $\varphi_* \circ \psi_* = e_{H_*(S)}$  для всіх  $r$ ; тому  $\varphi_*$  має бути епіморфізмом  $H_r(D) \rightarrow H_r(S)$ . Обчислення груп гомологій показує, проте, що  $H_1(D) = 0$ ,  $H_1(S) \neq 0$  і відображення  $\varphi$  не може існувати. Операція диференціювання форм  $d$  в  $(*)$  та узагальнений процес «інтегрування» форм також природно включаються в А. т. (теорія когомологій).

Гомотопією неперервних відображень  $\varphi_0: X \rightarrow Y$ ,  $\varphi_1: X \rightarrow Y$  наз. сім'ю відображень  $\varphi_t: X \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), яка неперервно залежить від параметра  $t$  і в якій  $\varphi_0, \varphi_1$  — задані відображення. Якщо  $\varphi_0, \varphi_1$  зв'язані гомотопією (гомотопні), то можна довести, що відповідні гомоморфізми абелевих груп  $\varphi_{i*}: H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$  ( $i = 0, 1$ ) збігаються. Доведення полягає в тому, що для будь-якого циклу  $z^r$  простору  $X$  образи  $\varphi_t(z^r)$  є замкнуті  $(r+1)$ -вимірні ланцюги в  $Y$  («кривий циліндр»), границею якого є різниця



«основ», тобто  $\hat{\varphi}_1(x) = \hat{\varphi}_0(x)$ ; отже,  $\hat{\varphi}_1(x) \sim \hat{\varphi}_0(x)$  в  $Y$ . Звідси видно, як задачі теорії гомотопій можна в деяких випадках звести до теорії гомологій: якщо в  $H_r(X)$  знайдеться такий клас гомологій  $\zeta$ , що  $\varphi_{0*}(\zeta) \neq \varphi_{1*}(\zeta)$ , то  $\varphi_0$  не гомотопіє  $\varphi_1$ . А коли треба довести, що два відображення є гомотопічними, то в найпростіших випадках вдаються до геом. конструкцій гомотопій, а в складніших — існування гомотопій встановлюють за допомогою алгебр. техніки. У деяких випадках вдається повністю перелічити «гомотопічні класи» відображень  $X$  в  $Y$ , тобто класи еквівалентності за відношенням гомотопії. Напр., існує лічбова множина класів відображень  $S^2$  в  $S^2$  ( $S^2$  — «сферична» сфера у тривимірному просторі). Нехай  $S^3$  — тривимірна сфера, тобто множина  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  в чотиривимірному евклідовому просторі  $R_4$ . В індукованому в  $R_4$  топологію. Тоді існує «тривіальне» відображення  $S^3 \rightarrow S^2$ , при якому всі точки  $S^3$  переходять в одну точку  $S^2$ . Можна довести, що існує відображення  $S^3 \rightarrow S^2$ , не гомотопіє тривіальному.

Диференціальна топологія розглядає категорію диференційованих многостатностей та їхніх диференційованих відображень. Це — найважливіший клас просторів та відображень, безпосередньо пов'язаних з аналізом і геометрією; початково постановка проблеми топології у франц. математики А. Пуанкаре (1854—1912) стосувалася цього класу. В останні роки питання дифер. топології стояли в центрі уваги топологів, а-вимірних диференційованих многостатностей є система, яка складається з топологічного простору  $X$  та множини гомеоморфних відображень  $\varphi_i: G_i \rightarrow X$  ( $i \in I$ ) де  $G_i$  — відкриті множини евклідового простору  $R^n$ ; треба, щоб ці відображення задовольняли умов: 1) для кожної точки  $x \in X$  існує таке  $\varphi_i$ , що  $x \in \varphi_i(G_i)$ ; 2)  $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$  — диференційовні відображення скрізь, де їх визначено ( $i, j \in I$ ). Диференційовність відображення  $G \rightarrow R^n$ , де  $G \subset \subset R^n$  — відкрита множина, означає, що в його координатному запису  $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) функції  $y_i$  диференційовні кілька разів, а найчастіше — нескінченно диференційовні. Відображення  $\varphi_i^{-1}$  наз. картами на  $X$ . За допомогою карти кожній точці  $x \in \varphi_i(G_i)$  надають локальних координат — координат  $\Pi$  прообразу  $\varphi_i^{-1}(x)$  в  $G_i$ . Відображення  $X \rightarrow Y$   $n$ -вимірної диференційовної многостатності  $Y$  наз. диференційовним, якщо його зображують у локальних координатах диференційовними ф-ціями; це означає, що для будь-якої карти  $\varphi_i$  на  $X$  і будь-якої карти  $\varphi_j$  на  $Y$  відображення  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$  має бути диференційовним скрізь, де його визначено (див. схему):

$$\begin{array}{ccc} G_i \subset R^n & & H_j \subset R^k \\ \varphi_i \downarrow & \xrightarrow{\varphi} & \uparrow \varphi_j^{-1} \\ X & & Y \end{array}$$

Якщо  $\varphi: X \rightarrow Y$  та  $\psi: Y \rightarrow X$  — диференційовні відображення,  $\varphi \circ \psi = e_Y$  та  $\psi \circ \varphi = e_X$ , то диференційовні многостатності  $X$  та  $Y$  наз. дифеоморфними; за цим відношенням диференційовні многостатності поділяють на класи. Наведемо характерний результат диференціальної топології. Нехай  $S^2$  — сферична сфера (задається в  $R^3$  рівнянням  $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1$ ). Тоді серед топологічних

просторів, гомеоморфних  $S^2$  існує якраз 28 класів дифеоморфності диференційованих многостатностей.

Лит. Фукс Д., Фомеєв А., Гутелмаєр В. Гомотопическая топология, М., 1967 (бібл. с. 134); Хитлов П. Дж., Уайлс С. Теория гомологий Пер. с англ. М., 1960 (бібл. с. 442—443); Митлор Дж. Теория об  $n$ -нормализме. Пер. с англ. М., 1969 (бібл. с. 110—112).

І. О. Шендос.

**АЛГЕБРАІЧНІ РІВНЯННЯ** — клас рівнянь у математиці. Див. *Рівняння класифікація*.

**АЛГЕБРАІЧНІ СТРУКТУРИ** — клас алгебр універсальних, сигнатур яких складаються з однієї чи двох бінарних операцій і довільного числа унарних (зовнішніх) операцій, що їх наз. і операторами (унарних операцій може й не бути). Бинарні операції при цьому задовольняють законам, схожим на ті, що їх задовольняють операції додавання та множення в різних областях чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних тощо). Такі закони або є тотожностями (напр., асоціативний, комутативний, дистрибутивний закони), або стверджують оборотність операцій. Термін А. с. запропонував Н. Бурбакі (псевдонім групи франц. математиків).

Протягом істор. розвитку математики поняття числа розширювалося й узагальнювалося. З додавання до натуральних чисел нуля та від'ємних чисел утворилася область цілих чисел; приєднання дробових чисел привело до чисел раціональних. Вимірювання в геометрії та проблеми аналізу привели до формування поняття дійсного числа. Завдання розв'язувати рівняння вищих степенів зумовило необхідність побудови комплексних чисел. Це послідовне розширення поняття числа здійснювалося при збереженні основних властивостей фундаментальних операцій додавання та множення (т. з. принцип Ганкеля). У 19 ст. широке застосування математики в механіці та фізиці, а також внутрішньоматем. потреби привели до створення систем об'єктів різної (не обов'язково числової) природи, в середині яких природно здійснювалися бінарні операції, схожі на додавання й множення в числових сукупностях. Сюди відносять такі розділи, як векторна й тензорна алгебра, різні системи гіперкомплексних чисел (кватерніони Гамільтона й зовнішня алгебра Грассмана), матрична алгебра, чис-

лення підстановок і перетворень тощо. В таких системах бінарні операції, що відповідають додаванню й множенню, зберігають здебільшого не всі, а лише деякі зі звичайних властивостей. Так, напр., при множенні матриць та при множенні підстановок комутативний закон не застосовний. Твердження, що добуток двох елементів дорівнює нулеві тільки тоді, коли один із співмножників дорівнює нулеві, може виявитися помилковим, напр., при множенні матриць або функцій. Водночас помічено, що для числення об'єктів (іноді вавсім різної природи має місце далекосхідний паралелізм (напр., для раціональних операцій в області цілих чисел, з одного боку, і в області поліномів від однієї змінної — з другого). Такий паралелізм є результатом виконання однакових законів для осн. операцій. У 2-й пол. 19 ст. це привело до цілювального переосмислення осн. завдань алгебри. З точки зору алгебри ізоморфізмі області не розрізняються, тому для неї важливішим є те, як здійснюються операції над об'єктами, а не те, над якими об'єктами вони здійснюються. У заг. випадку цю точку зору відображено в понятті універсальної алгебри та *моделей теорії*. Але на практиці алгебра частіше оперує не з довільними універсальними алгебрами, а з такими, які традиційно склалися в узагальненні числових областей з бінарними операціями додавання та множення, тобто з алгебричної структури. Дослідження найзагальніших універсальних алгебр та моделей частково прилягають найімовірніше до галузі *логіки математичної*.

Якщо на якійсь множині  $M$  визначено одну бінарну операцію  $M(\cdot)$ , її наз. композицією, або множенням. Добуток елементів  $a, b$  позначають тоді  $a \cdot b$ . Для так визначеної універсальної алгебри можуть здійснюватися або не здійснюватися такі закони-тождество. По-перше, асоціативний закон:  $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (для всіх  $a, b, c \in M$ ). По-друге, комутативний закон:  $ab = ba$  (для  $a, b \in M$ ). Якщо на якійсь множині  $M$  визначено дві бінарні операції, то, як правило, одну з них вважають додаванням, другу — множенням. Позначають їх символами  $+$  та  $\cdot$ , а саму універсальну алгебру  $M$  позначають  $M(+, \cdot)$ . Звичайно, асоціативний і комутативний закони можуть виконуватися і для додавання, і для множення або для одного з них. По-третє, додавання та множення зв'язуються тождеством  $a(b + c) = ab + ac$  ( $(b + c)a = ba + ca$ ), яку наз. дистрибутивним (або розподільним) законом. В  $M(\cdot)$  може іноді існувати елемент  $e$  такий, що  $ae = ea = a$  для всіх  $a \in M$ . Такий елемент називають нейтральним; в алгебрах  $M(+, \cdot)$  його наз. для додавання — нулем (0), для множення — одиницею (1). По-четверте, існування в  $M(\cdot)$  нейтрального елемента (а в  $M(+, \cdot)$  — відповідно нуля чи одиниці) — аксіома, яка також може здійснюватися в А. с. По-п'яте, важливою властивістю бінарних операцій є оборотність (або часткова

оборотність). Права оборотність: для всіх  $a, b \in M$  рівняння  $ax = b$  має розв'язок (ліва оборотність — розв'язність рівняння  $xa = b$ ). Двоїчна оборотність рівнозначна існуванню оберненого елемента  $a^{-1}$  такого, що  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ . По-шосте, ослаблена вимога:  $ax = ay$  випливає  $x = y$  (відповідно:  $za = ya$  випливає  $x = y$ ), називається законом скорочення.

Здійсненність деяких з перелічених вище аксіом визначає різні А. с. Частина з цих А. с. має особливу важливу значення в теорії й практичних застосуваннях, зокрема в кібернетичі. Їм дано особливі найменування, вивчення їх і становить осн. зміст алгебри. Алгебри в однією скрізь визначеною бінарною операцією  $M(\cdot)$ , на яку не накладаються ніякі вимоги, наз. групоїдами (іноді моноїдами, або мультиплікативними системами). Групоїди, для яких множення є асоціативним, наз. *группами*. Всередині підгруп виділяють класи підгруп з одиницею, підгруп з одиничним та двоїчним скороченням і комутативні підгрупи. Коли множення не обов'язково асоціативне, але оборотне справа й зліва, групоїд називають *квазігрупою*. Квазігрупи з одиницею наз. *дупами*. Інтерес до теорії квазігруп і дуп додалі зростає у зв'язку з застосуванням її в геометрії (сітки й ткини) і в комбінаторному аналізі. Якщо множення є й асоціативним і оборотним, то ця найважливіша алгебрична структура називається групою (див. *Групи теорії*). Накладення додатково комутативного закону виділяє в класі груп важливий підклас комутативних (або абелевих) груп.

Найважливішим є клас А. с. з двома бінарними операціями — *кільцями*. Кільце — це алгебра  $M(+, \cdot)$ , в якій для операції додавання вона є абелевою групою, для множення — групоїдом, а додавання та множення зв'язані лінійним і правим законами дистрибутивності. Накладаючи послідовно на множення додаткові аксіоми, одержуємо класи кілець дедалі більш частинного вигляду а дедалі багатшою теорією: якщо множення асоціативне, то й кільце наз. асоціативним, в асоціативних кільцях виділяють комутативні, а комутативним множенням. Як правило, треба, щоб у кільці була одиниця для множення. Зрештою, добре вивченим класом кілець є комутативні кільця без дільників нуля (тобто такі, що  $ab = 0$  випливає  $a = 0$  або  $b = 0$ ), що їх названо областями цілісності. Вивчати цей клас почали в 19 ст. у зв'язку з розвитком арифметики раціональних та алгебричних чисел. Областями цілісності є й кільця поліномів та різні функціональні кільця. Дослідження комутативних кілець, особливо областей цілісності, — важливе завдання алгебр. геометрії — одного з найактуальніших розділів сучасної алгебри. Некомутативними кільцями є, напр., кільця матриць; цей розділ тісно пов'язаний з алгеброю лінійною та функціональним аналізом. Широко застосовують і деякі класи неасоціатив-

них кілець (у них асоціативний закон замінюють якимось слабшим аксіомою). В матем. аналізі та в геометрії важливого значення набули кільця Лі, кільця Йордана, альтернативні кільця та ін. Ослаблення вимог до операцій додавання розглядали рідше. Комутативність додавання випливає із здійсненості обох розподільних законів при дуже слабких додаткових аксіомах (напр., існування одиниці для множення). Тому, щоб одержати нетривіальні узагальнення кілець з некомутативною адитивною групою, треба знехтувати одним з розподільних законів  $A, c$ , в яких має місце лише один розподільний закон (напр., лівий) і операція додавання втрачає некомутативну групу, наз. *м а й ж е к і л ь ц я м и*. Вивчають їх у зв'язку з численням застосуванням у теорії груп.

Якщо  $M(+, \cdot)$  — асоціативне кільце, в якому всі елементи, крім нуля, мають обернений елемент (через це операція множення є оберненою), то така  $A, c$  наз. *т і л о м*. Якщо при цьому множення комутативне, то тіло наз. *п о л е м*. Поле — одна з історично перших і найважливіших алгебричних структур в алгебрі. Наприклад, добре відомим є поле раціональних чисел, поле дійсних чисел, поле комплексних чисел, поле алгебр. чисел, поле раціональних ф-цій, поля лишніх ад простим модулем тощо. Теорія полів — один з найширших і найкраще розроблених розділів алгебри.

До  $A, c$  відносять і утворення, в яких, крім однієї чи двох операцій, є ще й певна кількість воли. операцій операторів (область операторів для якоїсь алгебри  $M(\cdot)$  або  $M(+, \cdot)$  — це певна множина  $\Sigma = \{\sigma\}$ , яку наз. *множиною операторів для  $M(\cdot)$*  або  $M(+, \cdot)$ ), така, що для будь-якого  $\sigma \in \Sigma$  та  $a, b \in M$ ,  $\sigma(a) = M$ , при цьому  $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$  у випадку  $M(\cdot)$  і  $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$  та  $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \times \sigma(b)$  для  $M(+, \cdot)$ . Кожен з операторів можна розглядати як додаткову умову операції на  $M$ . Множина операторів  $\Sigma$  — це здебільшого якась  $A, c$  (півгрупа, група, кільце чи поле), операції якої узгоджені з операціями на  $M$ . Найвідомішими і найпоширенішими  $A, c$  є оператори в векторні простори, в них, крім бінарної операції додавання, визначено операцію множення на скаляри, що перебігають якось поле. Узагальненням векторних просторів є *м о д у л ь*, в них як область скалярів беруть довільне асоціативне кільце  $R$  з одиницею, при цьому  $1 \in R$  діє на адитивній групі модуля як одиничний оператор.

Сюди ж належить і поняття лінійної алгебри. Це асоціативне кільце  $A(+, \cdot)$ , для якого задано комутативне кільце  $R$  операторів, при цьому  $(\alpha \cdot \beta)\alpha = \alpha \cdot (\beta\alpha)$  і  $(\alpha + \beta)\alpha = \alpha\alpha + \beta\alpha$  для  $\alpha, \beta \in R$ ,  $\alpha \in A$ . Крім того,  $\alpha(\alpha + \beta) = \alpha\alpha + \alpha\beta$  і  $\alpha(\alpha \cdot \beta) = (\alpha\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (\alpha\beta)$ . Інакше кажучи — це  $A, c$ , яка є водночас і модулем над  $R$  і кільцем  $A$ , в яких операції узгоджені. Лінійними алгебрами є, напр., алгебри квадратних матриць

з коеф. з якогось поля чи кільця, а також т. з. тензорні алгебри, які відіграють велику роль у геометрії. Нескінченновимірні алгебри над полем дійсних чи комплексних чисел мають важливе значення для функціонального аналізу.

В матем. аналізі розглядають здебільшого не «чисті»  $A, c$ , а такі, в яких поряд з бінарними операціями й операторами визначено ще й якусь *топологію* (тобто визначено якусь поняття «абіжності»), причому так, що всі розглядані операції неперервні в цій топології. Сюди належать передовсім топологічні векторні простори, топологічні групи, кільця, поля й алгебри. Вивчення таких «топологізованих»  $A, c$  становить зміст т. з. *топологічної алгебри*, нового розділу, що перебуває на межі алгебри й топології. Такі структури використовують у матем. аналізі. Слід відзначити, що до алгебричних структур відносять і такі, для яких відповідні бінарні операції визначено не скрізь. До цих частинних алгебр належать такі важливі структури, як категорії.

Великий інтерес для застосувань у *дискретному аналізі* та в комбінаториці становлять скінченні  $A, c$ , тобто такі, які визначено на скінченних множинах  $M$ . Сюди належать скінченні групи, скінченні півгрупи, скінченні поля та скінченні векторні простори. Такі структури можна застосовувати і в теорії скінченних автоматів, у теорії лінійних кодів, в алгебрі *додки* тощо.

Д. м. Курош А. Г. Ленгс по общей алгебре. М., 1962 (библиогр. с 383—387). М а л ь ц е в А. И. Алгебраические системы. М., 1970 (библиогр. с 384—387). Г у р б а н и й И. Элементы математики ч. 1, кн. 2. Алгебра. Алгебраические структуры. Ленинград и союзные республики. Пер с франц. М., 1962 (библиогр. с 484—488). Л е н г с С. Алгебра. Пер. с англ. М., 1966. Л. А. Кларкент.

**АЛГЕМ** — *м о в а* програмування для описування економічних задач. Її розроблено 1964 як розширення універсальної алгоритмічної мови АЛГОЛ-60 засобами мови КОБОЛ. А. має апарат для описування складових одиниць інформації (документів і масивів їх), текстових величин і процесів обробки їх з доступом до їх елементів. Задання формів величин дає змогу мати розгалужену систему процедур вводу і виводу. *Транслятор* з А. розроблено для машини «Мінск-22».

М. А. Королюк.

**АЛГЕМ** — *м о в а* програмування для описування економічних і обчислювальних задач, побудована на базі АЛГОЛ-60 і КОБОЛ. Розроблено цю мову 1964—66. Порівняно з АЛГОЛом А. містить додаткові рядкові (текстові) змінні та вирази, що їх використовують при операціях над символічною інформацією, складові змінні та масиви, які дають змогу представляти в машині різні форми економічних документів, і зазначення видів документів, що дають змогу задавати для значень змінних склад і розміщення різних типів символів (буква, цифри та ін.), що важливо для редагування значень під час видавання на друк. *Транслятор* з мови А. реалізовано на ЦОМ «Мінск-22».

А. І. Кутюв.

**АЛГОЛ-60** — алгоритмічна мова, орієнтована на описування алгоритмів розв'язування задач чисельного аналізу. А.-60 прийшла 1960 Міжнародна конференція в АЛГОЛу в Парижі, у 1962 її переглянув і схвалив технічний комітет Міжнародної федерації по обробці інформації (ІФІП).

Мова А.-60 привернула до себе загальну увагу завдяки деяким новим узагальнюючим ідеям, найпліднішим з яких є: поняття блокової структури та сфер дії позначень, які дають змогу поділяти роботу над складанням великих програм на доступніші для огляду частини; можливість динамічного пам'яті розподілу і розвинутий апарат виклику процедур. А.-60 запропоновано не тільки як ефективну мову програмування, а й як засіб записування алгоритмів. Значення А.-60 пояснюється великим поширенням цієї мови, значною кількістю реалізацій та бібліотек описаних нею програм. Описуванням синтаксису А.-60 у вигляді нормальних форм Бекуса істотно вплинуло на дослідження над мовами програмування й дало поштовх дальшому розвитку досліджень у галузі мов формальних.

Розрізняють три рівні мови А.-60: еталонну мову, мову публікацій і конкретні представлення. Еталонна мова є основою і посібником для створення трансляторів, зразком для всіх конкретних представлень та основою для перекладу з мови публікацій на будь-які певні конкретні представлення. Мова публікацій допускає видозмінювання еталонної мови, щоб зручніше було друкувати або писати (наприклад, індекси, пробіли, позначки степеня, грецькі букви), і використовується для формулювання та обміну інформацією. Символи мови можуть бути різними в різних країнах за наявності однозначної відповідності еталонному представленню. Кожен конкретне представлення я, як правило, певною модифікацією еталонної мови, такою, яка визначається кількістю знаків у стандартному обладнанні введення, використовує набір знаків конкретної цифрової обчислювальної машини і є вхідною мовою транслятора для неї. Треба, щоб конкретні представлення супроводжувала спец. сукупність правил для перекладу з мови публікацій або з еталонної мови.

Програма, записана засобами мови А.-60, є сукупністю описів величин і дій над ними. Розрізняють такі класи величин: прості змінні, масиви, мітки, перемикачі і процедури. Для позначення величин використовують ідентифікатори. Величина діє в тому операторі або виразі, в якому опис ідентифікатора, зв'язаного з цією величиною, має силу. Значеннями величин (залежне від їхнього класу) можуть бути: число (чи якась сукупність чисел), логічне значення (чи якась сукупність таких значень) або мітка. Значення числових величин мають типи: цілий (integer) і дійсний (real), значення логічних величин — логічний (або булевий — Boolean) тип.

Алфавіт еталонної мови строго вафіковано, він складається з десятичних цифр від 0 до 9, малих і великих лат. букв, знаків операцій, розділових знаків, круглих і квадратних дужок і деяких спец. знаків. Із символів алфавіту за певними правилами утворюються елементарні конструкції — ідентифікатори, числа, рядки, змінні величини й покажчики функцій, арифм., логіч. і називальні вирази та описи, оператори й примітки. За допомогою міток, якими в разі потреби забезпечуються оператори, задається порядок виконання їх. Ідентифікатор змінної величини — це назва, що дається якомусь окремому значенню або сукупності значень. Рядок являє собою будь-яку послідовність символів алфавіту, взяту в малі дужки ( ), і використовується як параметр фактичної процедури. Арифм., логіч. та називальні вирази є правилами для обчислювання числового й логічного значень і для одержання мітки оператора, відповідно. Описи визначають деякі властивості величин і зв'язують їх з ідентифікаторами. Описування ідентифікатора має силу в одному блоці. Описування можна посилити додатковим описувачем own (власний), і завдяки цьому зберігається значення якоїсь величини, описаної, таким чином, на момент повторного входження в цей блок. А.-60 має чотири види описів: типу, масиву, перемикача і процедури. Описування типу вказує, що деякі ідентифікатори є приті змінні цілого, дійсного або логіч. типу. Описуванням масиву визначається, що один або кілька ідентифікаторів становлять багатовимірні масиви змінних в індексах і задають розмірність цих масивів, границі індексів і типи змінних. Описуванням перемикача задається сукупність значень відповідного покажчика перемикача. Описування процедури задає процедуру, пов'язану з її ідентифікатором, і складається з заголовка і тіла. За допомогою приміток (comments) у програмі мовою А.-60 можна включати будь-який текст, напр., для пояснення якоїсь ділянки програм чи якоїсь конструкції.

Оператор — це конструкція, за допомогою якої дається вказівка виконати деяку дію або сукупність дій. Основними операторами А.-60 є оператори присвоєння, оператори переходу, пустий і процедури. Оператор присвоєння служить для присвоєння значення виразу одній або кільком змінним величинам або ідентифікаторам процедур-функцій. Оператор переходу дає змогу змінити природну послідовність виконуваних операторів, явно визначаючи свого наступника за значенням називального виразу, що входить до нього. Пустий оператор не виконує ніякої дії. Його можна використати для вищепнення мітки. Певну ділянку програми можна описати у вигляді процедури з набором параметрів формальних, а замість неї в програмі записати оператор цієї процедури з необхідним набором фактичних параметрів. Як звичайно, у вигляді процедур описують ділянки,

які повторюються або часто трапляються в різних програмах. В описі процедури є оператор, який наз. її тілом. Процедура описується один раз на початку блоку, де використовується оператор з ідентифікатором цієї процедури. Виконання оператора процедури зумовлює звернення до відповідного описування процедури, яке полягає у виконанні її тіла після модифікації його, здійснюваної передбаченнями в мові дії. До таких дій належать виклик параметрів за значеннями і за назвою. Тіло процедури можна описати і якою-небудь іншою алгоритм. або машинною мовою. Іншим способом використання поняття процедури є описування процедур-функцій, звернення до яких здійснюється за допомогою покажчика функції. Цей покажчик можна використовувати як операнд в арифм. або логіч. виразах. Якщо фактичні параметри процедури не змінюються від одного звернення до іншого, то відповідні до них формальні параметри процедури можна опустити. Така процедура наз. процедурою без параметрів. В А.-60 є сукупність стандартних функцій, які не потребують описування. До них належать  $\sin(E)$  (абсолютна величина  $E$ ),

$$\text{sign}(E) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } E > 0; \\ 0, & \text{якщо } E = 0; \\ -1, & \text{якщо } E < 0, \end{cases}$$

$\sin(E)$ ,  $\cos(E)$ ,  $\arctan(E)$ ,  $\exp(E)$

(найбільше ціле, яке не перевищує  $E$ ),  $\exp(E) = e^E$  та  $\exp(E) = e^E$ .

В 1964 Міжнародний комітет ІФП рекомендував як доповнення до мови А.-60 такі стандартні процедури обміну інформацією між програмою і зовнішніми носіями інформації: *inreal* — введення числа, *outreal* — виведення числа, *inarray* — введення масиву, *outarray* — виведення масиву, *inymbol* — введення символу, *outymbol* — виведення символу, *length* — визначення довжини рядка. Тіла цих процедур записуються здебільшого мовою машини.

Оск. оператори можна використати для утворення складніших операторів: циклу, умовного, складеного і блоку. Оператор циклу складається з заголовка циклу та внутрішнього оператора. Заголовок циклу задає число повторень внутрішнього оператора. Таким заголовком наз. конструкція виду *for* (зм.нна) = (список циклу) *do* Список циклу складається з елементів, які можна поділити на три типи:  $A$  — типу арифм. виразу,  $A \text{ step } h \text{ until } M$  — арифм. прогрес,  $A$  *while*  $B$  — перерахунок, де  $A$ ,  $h$ ,  $M$  — арифм. вираз, причому  $h$  — крок (різниця між двома послідовними значеннями змінної циклу) змінної циклу, а  $B$  — логіч. вираз. У випадку елементу типу перерахунок кількість виконань внутрішнього оператора визначається умовою  $B$ , тобто цей оператор виконується, поки вираз  $B$  є істинним. Умовні опе-

ратори ведуть до пропуску або виконання деяких операторів залежно від поточних значень використаних у них логічних виразів. Сукупність операторів, взята в операторні дужки *begin* та *end*, наз. с к л а д е н и м о п е р а т о р о м. Якщо, крім того, за символом *begin* ідуть описування, то така конструкція наз. б л о к о м. Блоки і складені оператори можна вкладати один в одного. Програма мовою А.-60 є блоком або складеним оператором. Будь-який ідентифікатор, що використовується в якомусь блоці, можна описати в цьому блоці. Такі ідентифікатори наз. локалізованими в цьому блоці, і об'єкт, представлений яким-небудь із них усередині блоку, не існує поза цим блоком, а будь-який об'єкт, представлений тим самим ідентифікатором поза цим блоком, не можна використати всередині цього блоку. Ідентифікатори, які використовуються всередині блоку, але не описані в ньому, не локалізуються там, тобто представляють одні й ті самі об'єкти і всередині цього блоку, і в навколишніх блоках. Мітка, яка використовується в блоці, якщо її не описано в ньому, діє там, ніби її описано в заголовку найменшого блоку, який охоплює повнзначеній цією міткою оператор.

Приклади: 1) Описування процедури:

*procedure proedr* ( $S$ );

*for*  $i := 1$  *step* 1 *until*  $k$  *do*  $M[i] := M[i] + S$ ;

2) Описування процедури ф-ції:

*real procedure* *Sum* ( $Mas$ ,  $K$ ); *array*  $Mas$ ;

*begin* *real*  $S$ ;  $S := 0$ ;

*for*  $i := 1$  *step* 1 *until*  $K$

*do*  $S := S + Mas[i]$ ;

$S := S$  *end*;

3) А.-програма: для даних цілих чисел  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  знайти:

$$= \frac{k! n!}{l! m!}$$

*begin* *integer procedure*  $y$  ( $j$ );

*begin* *integer*  $i$ ,  $Y$ ;  $Y := 1$ ;

*for*  $i := \text{step } 1$  *until*  $j$  *do*  $Y := Y \times i$ ;

$y := Y$  *end*;

*integer*  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ; *real*  $z$ ;

*read* ( $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ );  $z := y(k)y(l) \times$

$\times y(n)/y(m)$ ;

*print* ( $z$ ) *end*.

Наведену вище А.-програму написано в конкретному представленні, де *read* — оператор читання інформації з зовнішнього носія, а *print* — оператор друкування. А.-програма еталонною мовою являє собою рядок символів. Проблеми до уваги не беруться, але їх можна використати в тексті програми для забезпечення зручності читання. У мові публікацій допускається: замість індексних дужок  $[i]$  — зниження рядка, взятого в них,

і видалення їх, підняття показника степеня і видалення символу  $\uparrow$ , застосування дужок будь-якої форми — круглих, квадратних або фігурних, для основи степеня десять — підняття десятки і наступного цілого числа і вставлення відповідного знака множення.

А.-68 є базовою мовою для багатьох інших мов програмування. Робоча група ІФП виробила скорочений варіант А.-68, у якому можна програма, записана ним, автоматично в її програмі на мові А.-68 і має однакову семантику в обох мовах.

Лит. Агеев М. И. Основы алгоритмического языка АЛГОЛ-68. М., 1965 [66б, стр. 33], 4-е издание. — Международн. АЛГОЛ-68 (ИФП). Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965, т. 5, № 3. Лавров Г. Г. Универсальный язык программирования АЛГОЛ-68. М., 1972 [66б, стр. 342-38]. Мак-Кракен М. Д. Программирование на АЛГОЛ-Пер с англ. М., 1964. Алгоритмический язык АЛГОЛ-68. Пресмотренное сообщение Пер с англ. М., 1965 [66б, стр. 377].

А. И. Халилов.

**АЛГОЛ-68** — міжнародна універсальна *алгоритмічна мова*. Розробив її 1968 колектив учених під керівництвом робочої групи з АЛГОЛу Міжнародної федерації по обробці інформації. В А-68 проведено тітку відміну між зовнішніми об'єктами, тобто, означуваними синтаксично складовими частинами програми, та «внутрішніми об'єктами», які в «значеннях» того чи іншого «виду» (цілого, дійсного, логічного та ін.). Внутр. об'єкти не можуть бути зображені мовою, але зовн. об'єкти можуть «володіти» ними. Прикладами зовн. об'єктів можуть бути «зображення». Так, зображення дійсного числа 2.87 завжди володіє внутр. об'єктом — дійсним значенням «два цілих і вісімдесят сім сотих», а зображення логічного істини володіє логічним значенням «істина». Ін прикладами зовн. об'єктів можуть бути «ідентифікатори», напр.  $x_2$ , і «опис тотожності», напр. дійсн  $x_2 = 2.87$ . Після «виконання» опису тотожності ідентифікатор у лівій частині починає володіти тим внутр. об'єктом, яким володіє зовн. об'єкт у правій частині цього опису тотожності. Ідентифікатор продовжує володіти цим значенням (тобто, не змінює його) до кінця виконання того «блоку» програми, в якому його «описав» цим описом тотожності.

Для підвищення точності обчислень числові значення можуть мати збільшену «довжину», напр., довг ціл  $x$  або довг довг довг дійсн  $y$  тощо. Мається на увазі, що зі збільшенням довжини підвищується точність зображення відповідних величин. До внутр. об'єктів А.-68 належать назви, які зовні не можна зобразити, бо в мові немає зображень, які б володіли назвами. Кожна назва «називає» якесь інше значення, яке й саме може бути назвою. Називання можна розглядати як аналог непрямої адресації в *мовах машинних* (див. *Адресна мова*). Кожна назва називає значення певного виду.

Опис тотожності ціл  $k$  (з опущеним знаком рівності та правою частиною) рівнозначний за означенням такому описові тотожності, в лівій частині якої стоїть назв ціл  $k$ , а

права частина виробляє нову назву, якою й починає володіти  $k$ . Однак, опис тотожності ціл  $i = 1$  і ціл  $f = 2$  у тому самому блоці примушують  $i$  та  $f$  володіти відповідно одиницею і поточним — на момент виконання опису — значенням 2, але не їхніми назвами. Це, зокрема, означає, що в цьому блоці можуть ставатися «присвоєння»  $k := 10$  і  $k := k + 1$ , котрі примушують назву, яка володіє ідентифікатором  $k$ , називати спочатку число 10, а потім — число 11; однак, конструкції  $i = 10$  або  $f = 2$  в цьому випадку синтаксично недопустимі. Таким чином, на різні відміни між якимсь видом і назвою цього виду в А.-68 запроваджуються відмінні між константами та змінними якого загодно виду. Прямокутні масиви довільної вимірності самі є значеннями й називаються в А.-68 «мультизначеннями». Так, напр.,  $\{i : a, i : m\}$  дійсн описує матрицю  $a \times m$  з дійсними елементами, а  $\{i : 13\}$  назва  $\{i : рух\}$  літ — вектор, який складається з десятих елементів, пономерованих, починаючи з номера 4, кожний з яких є назвою мультизначення. Останні, тобто одновимірні масиви буквених векторів з рукою верхньою границею, наз. «рядковими» значеннями і для них в А.-68 існують зображення, напр., ще рядко». А.-68 дає змогу працювати з «матриками» з масивів шляхом вилучення окремих елементів мультизначення й підмасивів, які розглядаються як мультизначення.

На відміну від мультизначення, всі елементи якого мають однаковий вид, «структурне значення» є впорядкованою послідовністю своїх елементів, що наз. «полями» і можуть належати до різних видів. Вони вибираються, на відміну від мультизначень, не за індексами, а за допомогою «показкича поля», схожого на ідентифікатор. Вид структурного значення містить у собі інформацію про види його полів і про їхні показники. Зокрема, комплексні значення в А.-68 означено за допомогою «опису виду» як структури з двома дійсними полями.

вид компл = структ (дійсн  $re$ , дійсн  $im$ ).

Опис виду

вид список = структ (дійсн елемент, назва список наступний)

дає змогу моделювати списки в розумінні, напр., мови ЛІСП. Підпрограми А.-68, що є аналогами тієї процедури АЛГОЛ-60, також є значеннями. Вид підпрограми містить у собі інформацію про види всіх її параметрів (коли вони є) та про те, чи виробляє підпрограма значення і якщо виробляє, то якого виду. Зовн. об'єктами, що володіють підпрограмами, є «зображення підпрограм» та «ідентифікатори процедур»; напр., опис тотожності проц  $p =$  (ціл  $x$ , назва ціл  $y$ ) назва ціл:  $y := x$  примушує ідентифікатор процедури  $p$  володіти підпрограмою, зображення якої міститься у правій частині. Передавання параметрів фактичних при зверненні до процедури забезпечується описами тотожності. Так, наприклад, «виклик»  $p(a, c)$  за означенням, у певному контексті, рівнозначний

виконанню такого блоку (1) (ціл  $z = a$ , назва ціл  $y = c$ ;  $y := z$ ). Завдяки цьому в семантиці А-68 не потрібні підкреслювати відмінності між викликом за назвою та за значенням.

В А-68 є й назви, що можуть називати значення різних видів. Так, опис тотожності об (ціл, [ ] дог)  $z$  дає змогу приласлювати змінній  $z$  ціле значення і мультилогіч. значення. Щоб а'суювати, до якого поточного виду належить значення, називане назвою  $z$ , треба скористатися із спец. відношень погоджуваності. Лише коли програміст користується з цих відношень явно, виникає потреба динамічної перевірки видів. Оператори і вирази в А-68 мають спільну назву «речення», причому між ними немає тіткої різниці. Важасться, що будь-який оператор, у т. ч. блок, виробляє те значення, яке було одержано останнім перед завершенням оператора. Напр., блок (1), а отже і виклик процедури  $p(a, c)$ , виробляє як значення назву, а значення ідентифікаторів  $y$  (або, що те саме, — ідентифікаторів  $c$ ). Значенням, що його виробляє оператор, можна знехтувати, а можна й використати його, коли оператор входить до складнішого виразу. Напр.,  $m[(i := 1), (i := 1)] := i$  присвоює одиницю не лише верхньому лівому елементу матриці, а й змінним  $i$  та  $j$ , а опис тотожності

ціл  $i = i + (ціл  $j$ ;  $x = 4$ ;  $s + 5$ )$

примусить ідентифікатор  $i$  володіти числом десять. Невинні, задавані не програмістом, а синтаксисом мови, перетворення перших видів значень до видів, яких потребують контекст, у А-68 наз. «зведеннями». При наявності описів ціл  $i$ ; дійсн  $x$ ;  $([ ] \text{ рух})$  ціл  $y$ , об (ціл, дійсн)  $z$  присвоювання  $z := 1$  потребуватиме «згадування» цілої одиниці до дійсної одиниці;  $i + i$  потребуватиме «розназивання» назви, якою володіє ідентифікатор  $i$ , до значення виду ціл; у присвоєнні  $y := 2$  мається на увазі «укрупнення» скаляра 2 до одноелементного вектора, присвоєння  $z := x$  містить у собі, крім розназивання, ще й «об'єднування» дійсного значення до виду, який посидує ціле й дійсне.

В А-68 зазвичай оператори циклу тільки найпростішого вигляду. Параметр циклу може бути лише цілим і може змінюватися лише регулярним способом, причому його ідентифікатор вважається локалізованим у тілі циклу. Початкове значення, крім того кінцеве значення параметра мають бути цілими і не можуть змінюватися під час виконання оператора циклу. Закінчення циклу може відбуватися по досягненні параметром кінцевого значення або за деякою лог. умовою. Напр., оператор циклу може бути таким:

для  $i$  від 1 крок 2 до  $2 \times a + 1$

доки  $a[i] \neq 0$

цикл (ціл  $x$ ;  $z := a[i]$ ;  $a[i] := a[i + 1]$ ;

$a[i + 1] := z$ ).

У найпростіших випадках деякі частини заголовку можна пропустити, напр., від 1,

крок 1, доки істина. Порядок виконання операцій у формулі визначається за їхнім пріоритетом та розставленням дужок. Стандартні бінарні операції (+, -, ×, /, ↑, >, <, ∧, ∨ тощо) розподілено за дев'ятьма пріоритетами, а унарні операції (+, -, ↑, аба тощо) мають десятій — найвищий пріоритет. Їх змога ввести в блок, зокрема в усіх програмі, нову операцію або переозначити стару. Це досягається описуванням операції та (для нових бінарних операцій) описуванням пріоритету. Описування операції вводить або переозначає операцію лише для операндів тих видів, які специфіковано в описі. Так, описування операції

об — = (дійсн  $x$ , дійсн  $y$ ) дійсн:  $abs(x + (-y))$

приведе до того, що різниця чисел у відповідному блоці завжди братиметься за модулем. В А-68 умовні речення дають змогу обирати для виконання одне з двох речень залежно від поточного значення деякого логічного виразу. Кожне з двох альтернативних речень може, звичайно, бути й умовним. Введення спец. кінцевого символу «щонай» (укр. слово «якщо» у зворотному порядку складів) виключає двозначності, що виникають у зв'язку з умовними операторами АЛГОЛ-60.

Дії, в яких складається виконання частини програми, можуть виконуватися або послідовно, або «сумісно». Останнє означає, що взаємний порядок цих дій не визначено мовою. На практиці це дає змогу виконувати їх паралельно. Сумісно можуть, як правило, виконуватися операнди у формулах і фактичні параметри у викликах процедур. Крім того, в мові передбачено спец. «сумісні речення». Так, у наступному описі тотожності праворуч міститься сумісне речення, що заповнює елементи константного масиву:

[ ] дійсн  $z = (3, 5, 1, 3, \text{дійсн } s := 0;$

для  $i$  до  $n$  якщо  $s := s + a[i]; s)$ .

Сумісне речення може моделювати паралельний процес, якщо попереді стоїть символ пар. а всередині використовуються операції ↑ та ↓, що забезпечують синхронізацію виконання окремих гілок цього процесу.

Програма А-68 складається з «власної програми», яку пише програміст і яка міститься між «стандартним аступом» і «стандартним закінченням». Стандартний аступ містить у собі, зокрема, опис усіх операцій, допущених мовою, опис багатьох стандартних видів і «запити щодо обставин», які дають програмі змогу звертатися до певних стандартних функцій або констант, заступаючи їх про конкретні машинні «обставини» цієї реалізації, напр., про практично доступне подовження величин, про макс. розміри величин тієї чи іншої довжини тощо. Це дає змогу писати програми, які автоматично настрояються на різні машини. Обмін



із зовн. середовищем також забезпечується в А.-68 стандартним вступом і закінченням, які мають процедури, що точно описують різні режими введення й виведення інформації та редагування цієї інформації відповідно до бажаного формату. Зовн. середовище глумачиться як деяка сукупність «фондів», що їх відкриває програма на каналах обміну. Фіз. властивості каналів визначаються реалізацією і враховуються в процедурах обміну.

Мову А.-68 означено на трьох рівнях: як «строгу мову», «розширену мову» і «мову зображень». Граматика ван Вейнгаардена, що її використано для задання синтаксису «строкої мови», передбачає наявність двох скінченних сім'ї породжувальних правил. За допомогою правил першої сім'ї для метаязичності, поданих як послідовності великих букв, напри., «ВИД», породжуються їхні «термінальні породження», складені з самих тільки малих букв. Напри., для метаязичності «ВИД» термінальними породженнями є «цілий», «дійсний» і «нескінченна множина інших видів» (деякі з них згадано згори). Правила другої сім'ї містять у собі акрадені метаязичності. Якщо замінити в такому правилі всі входження кожного метаязичності на одне й те саме його термінальне породження, одержимо одне з породжувальних правил «строкої мови». Так, із правила

«присвоєння виду назва ВИДУ: одержувач виду назва ВИДУ, символ присвоїти, джерело виду ВИД»

буде одержано нескінченну множину правил «строкої мови, якщо всі входження слова «ВИД» в одному випадку замінити на «цілий», в другому — на «логічний», в третьому — на «мультимовне дійсне» тощо. Послідовність малих букв, що починається з «символ», напри., «символ присвоїти», наз. «символом», а всі інші послідовності, напри., «джерело виду логічний» — «поняттями».

За допомогою правил «строкої мови» з поняття «програма» породжуються програми «строкої мови як послідовності символів. Семантика «строкої мови формується словами в термінах операцій деякої гіпотетичної машини, яка інтерпретує синтаксичні одиниці програм «строкої мови. Програми розширеної мови одержують з програм «строкої мови внаслідок деяких локальних перетворень. Зокрема, деякі та описів тотожностей без правої частини немає в «строкій мові, натомість вони з'являються в розширеній мові як певні скорочення конструкцій «строкої мови.

У мові зображень символи як послідовності малих букв замінюються на їхні зображення. Так, напри., для символу «присвоїти» рекомендовано зображення  $\leftarrow = \rightarrow$ ,  $\leftarrow = \rightarrow$ ,  $\leftarrow = \rightarrow$ ; для конкретної реалізації можна обрати одне з них або якесь зовсім нове. Виведення мови зображень на окремий рівень забезпечує незалежність А.-68 від особливостей друкувальних пристроїв конкретних реалізацій.

Лит.: Алгоритмічний язык АЛГОЛ 68. Алгоритмика, 1969. № 6, 1970. № 1, Васильев В. А. Язык АЛГОЛ-68. М., 1972.

О. Ф. Рар.

**АЛГОРИТМ**, **алгоритм** — система точно визначених правил дії (програма) з зазначенням, як і в якій послідовності ці правила застосовувати до певних даних певної задачі, щоб одержати її розв'язок. Істотними рисами А. є: детермінованість (означеність) — однозначність виконання процесу при заданих певних даних; дискретність означуваного алгоритмом процесу — розчленованість його на окремі елементарні акти, можливість виконання яких людиною або машиною не викликає сумніву; масовість — певні дані для А. можна збирати в якійсь множині даних (потенційно нескінченній), тобто А. повинен бути застосований не до однієї задачі, а до цілого класу однотипних задач. Поняття А. — одне з основних у математиці. Знаходження його для розв'язування різних типів задач є метою математики. Напри., будь-яке алгебричне рівняння  $x$ -го степеня має не більше як  $x$  різних коренів. Постає проблема знайти А., за допомогою якого, заданим коефіцієнт рівняння, можна було б визначити, скільки саме це рівняння має коренів і якої кратності, і такий А., який дав би змогу з будь-якою наперед заданою точністю обчислити ці корені. Такий А. знайдено в алгебрі: правило Штурма для визначення числа дійсних коренів алгебричного рівняння та алгоритм Лобачевського для знаходження цих коренів. Для інших задач, напри., для деяких типів диференціальних рівнянь, відповідний А. не знайдено, хоч встановлено, що для всіх задач даного типу розв'язок існує. З практичного погляду особливу цінність становлять А., що приводять до розв'язання задач найкоротшим шляхом. До використання ЕОМ А., для здійснення яких необхідно було виконати кілька сот тисяч елементарних операцій, становили тільки теоретичний інтерес. Із застосуванням цих машин дослідження алгоритмів, розв'язуваності різних класів задач набули безпосереднього практичного значення.

Розглянуто поняття А. лише в загальній формі характеризує обчислювальні процеси, звичайно описувані у вигляді словесних правил, схем, формул, програм та ін. Воно не є точним математичним визначенням, а лише пояснює значення слова А., в якому це слово використовується в математиці, оскільки в ньому не визначається, що слід розуміти під «правилами дії». Протягом тривалого часу поняття А. не змінювалося у своїй основі (хоч і набувало все більшої виразності), оскільки його розглядали тільки у зв'язку з побудовою конкретних А. і математики задовольнялися його змістовим розумінням. Лише в 30-х роках 20 ст., у зв'язку з питанням обґрунтування математики і з розвитком обчислювальної математики та обчислювальної техніки, виникла необхідність розглянути загальні способи формалізації задач і процесів розв'язування їх, уточнити поняття А. як об'єкту матем. теорії (див. *Алгоритмічна теорія*). Процес виконання А. наз. **алгоритмічним процесом**. Для дея-

ких первісних даних він закінчується одержанням шуканого результату після скінченної кількості кроків. Проте допускаються випадки, в яких процес виконання  $A$  для деяких первісних даних безрезультативно обривається або продовжується необмежено. Прийнято вважати, що до цих первісних даних  $A$  не застосовний

Поняття  $A$  тісно пов'язано з поняттям «алгоритмічна мова» (якою задано  $A$ ) і з поняттям «правило виконання  $A$ » при заданих для нього первісних даних. *Алгоритмічна мова* і *правило виконання* (яке по суті саме є  $A$ ) його можна називати «алгоритмом виконання  $A$ » природно виділяють певне сімейство  $A$ .

Кожна детермінована обчислювальна машина є автоматом, дії якого можна описати у вигляді якогось  $A$ . Такий  $A$  є  $A$  виконання програм зазначеної обчислювальної машини. Самі програми можна розглядати як певний клас  $A$ . При цьому алгоритмічною мовою є *командна система обчислювальної машини*.

**АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНИЙ** — алгоритм, який обчислює властивості (предикати) окремих елементів множини й використовує на жорстко жорстко тільки інформацію про околиці якого елементів. Точна визначення  $A$  вводить так. Нехай задано сімейство  $\{M\}$  множин. Кожній парі  $(M, M)$ ,  $M \in M$  протиставимо множину  $S(M, M)$ , яку назвемо околом  $M$  в  $M$ , якщо виконано такі умови: 1)  $M \in S(M, M)$ , 2)  $S(M, M) \subseteq M$ , 3) якщо  $M \in M_1$ ,  $M \in M_2$ ,  $S(M, M) \subseteq M_1 \subseteq M_2$ , то  $S(M, M_1) = S(M, M_2)$ .

В деяких задачах для  $(M, M)$ ,  $M \in M$  вводять лічбову систему околиць  $S_1(M, M)$ ,  $S_2(M, M)$ , ...,  $S_k(M, M)$ , ...,  $S_k(M, M)$ . Нехай, наприклад,  $\{M\}$  — сімейство множин  $M$ , складених з елементарних кон'юнкцій, які входять до скороченої *диз'юнктивної нормальної форми* (ДНФ)  $\phi$ -ці  $f$ . Околом  $S_1(M, M)$  назвемо сукупність усіх кон'юнкцій в  $M$ , таких, що відповідні їм інтервали мають непустий перетин з інтервалом  $N_M$  відповідним кон'юнкції  $M$ .

Нехай визначено окіл  $S_{k-1}(M, M)$  ( $k = 1$ )-го порядку кон'юнкції  $M$  в  $M$ . Околом  $S_k(M, M)$ ,  $k$ -го порядку  $M$  в  $M$ , назвемо сукупність усіх  $M$  в  $M$ , для яких виконано одну з двох умов: 1)  $N_M \cap N_{M_k}$  не пусте і  $M \in S_{k-1}(M, M)$ , 2) інтервал, який відповідає  $M$ , міститься в сумі інтервалів, кожному з яких відповідає кон'юнкція з  $M_k$ , що задовольняє умову 1). Незавжди ввести і околиці  $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$  для вершин і ребер графа.

Вважатимемо, що на парах  $(M, M)$   $M \in M$  визначено систему двомісних предикатів  $P_1(M, M), \dots, P_l(M, M)$ , яку поділено на дві неперетинні підмножини  $\langle P_1, \dots, P_r \rangle$ ,  $\langle P_{r+1}, \dots, P_l \rangle$ . Елементи першої підмножини

назвемо основними предикатами, другої — допоміжними предикатами.

Вектор  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$  наз. інформаційним, якщо  $\alpha_i \in \{0, 1, \Delta\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Вектор  $\bar{\alpha}$  наз. допустимим для  $M$  в  $M$ , якщо для всіх  $\alpha_i \neq \Delta$  виконано рівність  $\alpha_i = P_i(M, M)$ . Множину  $I(M, M)$  всіх інформаційних векторів, допустимих для  $M$  в  $M$ , наз. інформаційною множиною  $M$  в  $M$ .

Нехай  $M = \{M_1, \dots, M_t\}$ ;  $I(M, M) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_l)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ . Множину  $M^* = \{M_1^{*1}, M_1^{*2}, \dots, M_t^{*1}, M_t^{*2}\}$  назвемо допустимою для  $M$ . Клас  $M^* = I(M)$  всіх допустимих для  $M$  множин  $M^*$  назвемо інформаційним класом множини  $M$  за системою предикатів  $P_1, \dots, P_l$ .

Очевидно, окіл  $S(M, M)$  визначає окіл  $S(M^{*1}, \alpha_1, M^*)$ . Введемо системою  $\phi$ -цій  $\phi_1, \dots, \phi_l$ ;  $\phi_i(M^{*1}, \alpha_1, M^*) = \{M_1^{*1}, \dots, M_t^{*1}\}$  таких, що  $M^{*1}, \alpha_1 \in M^*$ ,  $M^* \in I(M)$ , і задовольняють такі умови: 1)  $\alpha_i = \beta_i$ , якщо  $i \neq 1$ ; 2) множина  $M$ , яку одержуємо з  $M^*$  заміною елемента  $M^{*1}, \alpha_1$  на  $M_1^{*1}, \beta_1$ , допустима для  $M$  ( $M \in I(M)$ ). Для стислості пари  $(M^{*1}, \alpha_1, M^*)$  будемо позначати  $(M, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, M^*)$ .

Уведемо часткову упорядкованість у деяких множинах (для *Частково упорядкована множина*): 1)  $M_1 = \{0, 1, \Delta\}$ ,  $\Delta < 0$ ,  $\Delta < 1$ ; 2)  $M_2$  — множина інформаційних векторів довжини  $l$ ;  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) < (\beta_1, \dots, \beta_l)$ , якщо  $\alpha_i < \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ ; 3) Множина елементів з позначками:  $M^{*1}, \alpha_1 < M^{*1}, \beta_1$ , якщо  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) < (\beta_1, \dots, \beta_l)$ ; 4) Множина  $M = \bigcup I(M)$ :  $M \in I(M)$

:  $M_1 < M_2$ , якщо, по-перше,  $M_1$  і  $M_2$  належать до одного інформаційного класу  $I(M)$  і, по-друге, якщо  $M^{*1}, \alpha_1 \in M_1$ ,  $M^{*1}, \beta_1 \in M_2$ , то  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) < (\beta_1, \dots, \beta_l)$ ; 5) Множина околиць  $S(M^{*1}, \alpha_1, M^*)$ :  $S_1 = S(M^{*1}, \alpha_1, M_1^*) < S_2 = S(M^{*1}, \beta_1, M_2^*)$ , якщо  $S(M, M_1) = S(M, M_2)$ , а з умов  $M^{*1}, \alpha_1 \in S_1$ ,  $M^{*1}, \beta_1 \in S_2$  випливає, що  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) < (\beta_1, \dots, \beta_l)$ .

Нехай  $A$  і  $B$  — елементи однієї з множин 1)–5). Якщо  $A < B$  і  $B < A$ , то елементи  $A$  і  $B$  назвемо рівними за інформацією й позначимо  $A \sim B$ .  $\phi$ -цію  $\phi_i(M, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, M^*)$  назвемо монотонною, якщо із співвідношення  $S_1 < S_2$  випливає, що  $\phi_i(M, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S_1, M_1^*) < \phi_i(M, \beta_1, \dots, \beta_l, S_2, M_2^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \delta$ .

Для визначення  $A$  л. слід також ввести алгоритм упорядкування  $A_n$  і  $\Delta$  — оператор за системою предикатів. Нехай  $M$  — довіль-

на множина, складена з елементів з інформаційними векторами,  $N = \{1, 2, \dots, l\}$ . Розглянемо множину  $M \times N$  всіх пар  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l, j)$ , таких, що  $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in M$ ,  $j \in N$ ,  $\alpha_j = \Delta$ . Алгоритм  $A_n$  впорядковує множину  $M \times N$ .  $\Delta$  — оператор за системою  $i_1, \dots, i_r$  над  $\mathbb{R}^*$  замінив в інформаційних векторах усіх елементів з  $\mathbb{R}^*$  значення всіх координат, крім координат з номерами  $i_1, \dots, i_r$ , на  $\Delta$ . Позначають його  $\Delta_{i_1, \dots, i_r}(\mathbb{R}^*)$ . Алгоритм  $A$  повністю визначається системою предикатів  $P_1, \dots, P_r$ , розбиттям  $\Pi$  на основі  $P_1, \dots, P_r$  й допоміжні  $P_{r+1}, \dots, P_l$  предикати, системою монотонних функцій  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ ,  $\varphi_i = \varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_i, S, \mathbb{R}^*)$  і алгоритмом  $A_n$ . Нехай  $\mathbb{R}^* = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i \alpha_i, \mathbb{R}^* \in I(\mathbb{R})$ . Опишемо перший

крок алгоритму. До множини  $M \times N$  застосуємо алгоритм  $A_n$  ( $M = \mathbb{R}^*$ ). Виділяємо першу за порядком пару  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l, j)$ , обчислюємо  $\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathbb{R}^*) = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ , елемент  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  замінюємо на  $\beta_1, \dots, \beta_l$ . Якщо  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ , беремо другу за порядком пару і т. д. Якщо для всіх елементів  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l, j)$  виконає рівність  $\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathbb{R}^*) = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ , алгоритм  $A$  закінчується після перегляду всіх пар з  $M \times N$ . У протилежному разі після вектора  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  на новий вектор  $(\beta_1, \dots, \beta_l)$  відбувається перевірка — чи дивилися ще елементи, з яких на перших  $r$  місцях в інформаційних векторах є хоча б один символ  $\Delta$ . Якщо таких елементів немає, алгоритм  $A$  закінчується. Якщо вони є — закінчується перший крок алгоритму.

Нехай виконано  $n$  кроків алгоритму  $A$ . Опис  $(n+1)$ -го кроку точно відтворює опис першого кроку, якщо замість множини  $\mathbb{R}^*$  розглядати множину  $\mathbb{R}_n^*$ , у яку перейшли  $\mathbb{R}^*$  після перших  $n$  кроків алгоритму  $A$ . Через монотонність  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  алгоритм закінчиться після скінченного числа кроків.

Вихідними теоремами теорії А. а. є теорема єдності й теорема існування найкращого алгоритму. Перша теорема стверджує, що результат обчислювань осн. предикатів А. а. не залежить від алгоритму  $A_n$  (порядку проходження елементів множини  $\mathbb{R}^*$ ). Друга теорема стверджує існування у надто загальних припущеннях найкращого А. а., тобто алгоритму, який за заданою фіксованою системою околів при фіксації, допоміжних предикатах обчислює задачі осн. предикати завжди, коли це робить будь-який інший алгоритм.

Ця теорема має характер існування, тобто пряма побудова найкращого алгоритму з використанням доведення є утрудненою. При-

рода тому спробувати одержати найкращий алгоритм у явній формі. Цю задачу розв'язав лише для окремих випадків. Прикладом може бути задача побудови мінім. покриття множини  $M$  системою множини  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_l$ . Коли як основні предикати розглянути  $P_1(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_l, M) = \{ \mathcal{U} \text{ не входить до жодного мінім. покриття } M \text{ множинами з числа } \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_l \}$  і  $P_2(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_l, M) = \{ \mathcal{U} \text{ входить у всі мінім. покриття множинами з числа } \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_l \}$ , то за порожньої множини допоміжних предикатів вдається побудувати А. а. обчислення  $P_1, P_2$ . Розв'язано задачу обчислення властивості ребра графа входить чи не входить в якусь тушкову путь двома полюсами: побудовано найкращий А. а. Побудовано те А. а. для задач спрощення ДФН. Ці алгоритми обчислюють властивість елементарної кон'юнкції входить чи не входить в диз'юнктивну нормальну форму мінімальну за кількістю першого, другого або третього порядку. Доведено необхідність у класі А. л. властивості елементарної кон'юнкції входить до мінімальної ДНФ булевої функції. Точніше, якщо число предикатів, які беруть участь у визначенні А. а., дорівнює  $k$ , а порядок (індекс) околу дорівнює  $k$ , то при  $k \cdot l < \leq \text{const} \cdot 2^m$  існує булева функція  $f(x_1, \dots, x_n)$ , для якої про всяку елементарну кон'юнкцію, що входить до скороченої ДФН, алгоритм з параметрами  $k, l$  є не дієздатним — входить вона до мінімальної ДФН чи ні. При цьому накладаються не досить жорсткі обмеження на вид предикатів  $P_1, \dots, P_l$ . Досліджено обчислюваність усіх предикатів, пов'язаних із задачею мінімізації булевих функцій.

Дит. Журавлев Ю. П. Тестирование множественных методов в алгебре логики «Проблемы кибернетики», 1982, в 8 Журавлев Ю. П. Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики «Дискретный анализ», 1984, в 3 Журавлев Ю. П. Точатые алгоритмы вычисления информации «Кибернетика», 1985, М 1, 1986, М 2; Айдюк Ф. И. Алгоритмы упрощения д. н. ф. булевых функций «Кибернетика», 1986, М 6; Елюкин В. А. А. О максимальной длине цепи в единичном n-шаром кубе «Математические заметки», 1969 т. 6, в 1 Хуторянская И. В. Некоторые вопросы теории логических алгоритмов на графах «Кибернетика», 1971, М 1, Ю. П. Журавлев

**АЛГОРИТМ РОЗПІЗНАВАННЯ** — скінченна система правил, що за результатами вимірювань деяких ознак об'єктів розпізнавання дає змогу визначити, до якого з можливих класів об'єктів належить кожний даний об'єкт. Див. *Правило вирішувальне* в розпізнаванні образів.

**АЛГОРИТМИВ ГРАФОВІ СХЕМИ**, граф-схеми алгоритмів — способи задання класів алгоритмів, що фіксують у своєму визначенні ті чи інші структурні властивості алгоритмів, абстрагуючись від решти властивостей, що визначають індивідуальність певного алгоритму. Конкретні алгоритми одержують із А. г. с. тією чи іншою інтерпретацією компонент схеми. Структурні властивості алгоритмів задають у вигляді

відношення порядку на множині операторів — порядку виконання їх. Це відношення порядку можна подати у вигляді графа, кожній вершині якого поставлено у відповідність оператор, а стрілки між вершинами інтерпретуються як твердження про можливість виконання одного оператора безпосередньо після другого. Цей граф є таким, що можна вершина його має не більше, як два наступники. Одну з вершин виділено як початкову, а одну — як кінцеву. При інтерпретації А. г. с. вершини з одним наступником, яка наз. перетворювачем, поставлено у відповідність оператор перетворення інформації, а вершини з двома наступниками, яка наз. розпізнавачем, — предикат розпізнавання властивості інформації.

Перші поняття й проблеми, що належать до А. г. с. і пов'язані з формальними перетвореннями їх для програмування, виведені 1956 рад. математики О. А. Ляпунов і Ю. І. Яков та 1959 Л. А. Калужний. Спочатку було систематично вивчено підклас А. г. с., у яких розпізнавачем є *булеві функції* змінних  $p_1, \dots, p_n$ , а для кожного перетворювача зазначають, які з змінних  $p_1, \dots, p_n$  він може змінювати. Як інваріант було розглянуто множину шляхів у графі переходу, а яких враховують лише перетворювачі та значення змінних  $p_1, \dots, p_n$ . При цьому визначені еквівалентності було побудовано повну систему перетворень в умовах лінійного запису. А. г. с., що їх запропонував Ю. І. Яков, дала в основу багатьох досліджень. Вони стосувалися вдосконалення системи перетворень, доведення незалежності окремих перетворень і поширення теорії на випадки, коли між операторами схеми та їхніми композиціями допускають відношення тотожності, що їх описує якась підгрупа над множиною операторів. Поняття А. г. с. в джерелом різних узагальнень і модифікацій, пристосованих для теоретичного програмування, воно привело до формулювання таких важливих понять, як *операторні схеми та алгоритмічні схеми*.

Лит., Калужний Л. А. Об алгоритмизации математических задач «Проблемы кибернетики», 1953, в. 2, Брешов А. П., Ляпунов А. А. Формализация понятия программы «Кибернетика», 1967, № 5, А. П. Брешов.

**АЛГОРИТМІВ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ** — еквівалентності відношення в класі алгоритмів. А. е. можна ввести різними способами. А. е., напр., еквівалентність, у якій перебувають ті й лише ті алгоритми, застосування яких до елементів з перетину їхніх областей означення (первісних даних) дає одні й ті самі результати (еквівалентність за скінченими результатами). Якщо при цьому області означення алгоритмів збігаються, то говорять, що це — *повна А. е.* Проблема розпізнавання А. е. в зазначених випадках у класі всіх алгоритмів є алгоритмічно нерозв'язною. Інтерес становлять і сильніші відношення еквівалентності, напр., відношення, в яких перебувають ті й лише ті алгоритми, в яких

збігаються не лише кінцеві результати, а й усі проміжні. Іншим прикладом А. е. є відношення, в якому перебувають алгоритми, що синтаксично збігаються з точністю до перекодування; в разі перекодування, напр., типу послідовного кодування, проблема розпізнавання еквівалентності алгоритмів, як і в деяких ін. випадках, є алгоритмічно розв'язною. Див. також *Алгоритми рівносильні перетворювачам*.

М. А. Кричицький.

**АЛГОРИТМІВ РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕТВОРЮВАННЯ** — формальні перетворювання, які дають змогу перетворити заданий алгоритм на алгоритм, еквівалентний заданому в розширеному розумінні. Еквівалентність у розширеному розумінні тут означає властивість *алгоритмів* переробляти еквівалентні первісні дані на еквівалентні результати. Суть еквівалентності первісних даних і, відповідно, результатів визначають конкретно для кожного класу алгоритмів. Здебільшого первісні дані (й результати) двох алгоритмів вважають за еквівалентні, якщо за допомогою якогось досить простого прийому ці алгоритми можна перетворити один на одного. Графічна тотожність первісних даних (результатів) є окремим випадком їхньої еквівалентності, а *алгоритми еквівалентність* — окремим випадком їхньої рівносильності. При А. р. в. кожен перетворюваний алгоритм розглядають у сукупності з областю його задання, яка може становити лише частину сфери його застосовності (тобто в сукупності з допустимими первісними даними задачі). Це призводить до того, що рівносильні алгоритми (еквівалентні в розширеному розумінні), в яких первісні дані й результати відповідно збігаються, все-таки можуть і не бути еквівалентними (напр., у випадку, коли не збігаються сфери застосовності рівносильних алгоритмів).

А. р. в. є найважливішим прийомом, до якого вдаються під час програмування і який здійснюють, як правило, на змістовому рівні, а не формально. При цьому в програмуванні виділяють три етапи описування, одержування й перетворювання алгоритму. Етап описування задачі *вхідною мовою програмування* не формалізовано; його виконує складач програми, керуючись своїм досвідом та інтуїцією. Наступним етапом є поліпшення одержаного алгоритму в межах обраної *вхідної мови* (на практиці ці етапи здебільшого чергуються). Третім, останнім, етапом є *рівносильні перетворювання одержаного алгоритму в програму* (тобто в алгоритм *мовою машинною*); це виконує формально сама ЕОМ за допомогою спец. програми, що її наз. *транслятором*. Отже, під час програмування вдаються до рівносильного перетворювання алгоритмів і зі зміною мов, і без такої зміни (надачі, коли йдеться про рівносильні перетворювання алгоритмів, мають на увазі тільки перетворювання, під час яких мова не змінюється).

Перші дослідження в галузі А. р. в. стосувалися алгоритмів, заданих мовою логіч-

них схем (МЛС), яка, власне, й виникла як мова для описування дискретних процесів (зокрема, як західна мова програмування), зручна для А. р. п. Згодом значали А. р. п., використовуючи *адресну мову* програмування. Деякі питання А. р. п. розробляли, мова створювали транслятори. Під час створення програм *інформаційно-пошукових систем* було розроблено деякі прийоми А. р. п., які дали змогу передбачати автомат. рівносильні перетворювання окремих частин програм, щоб прискорити процес пошуку інформації. Доцільність такого прийому зумовлена тим, що найкращий вид програми пошуку не завжди можна визначити заздалегідь, бо *масив* інформації, в якому провадиться пошук, змінюється.

Точне визначення поняття А. р. п. залежить від мов, якими формально описують алгоритми, перші дані до них і результати їх, бо прості прийоми перетворювання первісних даних (і результатів) одні на одного, на яких ґрунтується поняття їхньої еквівалентності, пов'язані в особливостях цих мов. При А. р. п. в разі, коли алгоритм задано МЛС, первісними даними й результатами є т. з. *стани пам'яті*, що їх записують як послідовності рівності вигляду  $x_i = \xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ , де  $n$  — число комірок пам'яті, зайнятих інформацією,  $x_i$  — назви комірок,  $\xi_i$  — їхні *стани* (інформації, що містяться в комірках), в знак рівності вживають у розумінні «має значення». Для такого вигляду первісних даних і результатів цілком природно велими простими вважати такі прийоми: *переназвання* комірок (зокрема, тотожне переназання, тобто збереження їхніх назв), *включення* в первісні дані тих комірок, які не використовують у перетворюваному алгоритмі, *вилючення* з первісних даних таких фактичних комірок; *суміщення* комірок, коли заздалегідь відомо, що в будь-якому варіанті первісних даних (результатів) *стани* цих комірок тотожні одні одному; *включення* в первісні дані чи результати комірок, *стани* яких при будь-якому варіанті тотожні станам тих комірок, що вже є. В МЛС *еквівалентні перетворювання* входять до поняття А. р. п. Розширення поняття еквівалентності алгоритмів, пов'язане зі згаданим вище розумінням еквівалентності первісних даних (і результатів), а також з тим, що розглядають не сфери застосовності, а вузькі ділянки задавання алгоритмів, значно розширює можливість рівносильного перетворювання алгоритмів порівняно з можливостями еквівалентних перетворювань їх.

Алгоритми, задані МЛС, значайно піддають А. р. п., щоб зекономити час на виконання їх (а, отже, й машинний час) або зекономити *емісію запал'яювальних пристроїв*. У першому випадку при А. р. п. зменшується кількість операцій, необхідних для одержання шуканого результату, а в другому — зменшується заг. кількість комірок, використовуваних під час виконання алгоритму (іноді

замість цього мінімізують заг. кількість комірок, тобто їхніх назв, які фігурують у запису алгоритму).

Алгоритм МЛС задають у вигляді скінченного рядка, утвореного з операторів, які описують дії, і знаків переходу, які дають змогу під час виконання алгоритму визначити порядок виконання операторів. У разі, коли застосовують МЛС, А. р. п. поділяють на такі групи: 1) рівносильні перетворення окремих операторів; 2) А. р. п., які не спричиняють внутр. змін операторів (перетворювання логічних схем алгоритмів); 3) А. р. п., пов'язані з перетворюваннями логічних операторів; 4) А. р. п., пов'язані з перетворюваннями нелогічних операторів; 5) перетавлення операторів; 6) А. р. п., які впроваджують підпорядкованість операторів певним умовам (оператор залежить від якоїсь умови, якщо його можна виконати лише тоді, коли твердження, яке міститься в умові, є істинним). Описана система А. р. п. є повною для прямих чи спрямлених алгоритмів у тому значенні, що, коли два такі алгоритми еквівалентні в розширеному розумінні, то за допомогою скінченної кількості А. р. п. будь-який з них можна перетворити на інший. При цьому алгоритми, задані МЛС, зав. спрямленими, коли за допомогою деякої кількості перетворень їх можна звести до прямих, тобто до алгоритмів, при виконанні яких після роботи якогось оператора не може працювати жоден оператор, що міститься в рядку ліворуч від нього. Питання про повноту системи А. р. п. будь-яких алгоритмів, заданих МЛС, не роз'яснює. Проблема визначення рівносильності (еквівалентності в розширеному розумінні) алгоритмів, заданих МЛС, еквівалентна широко відомій проблемі тотожності й, отже, належить до *нерозв'язаних алгоритмічних проблем*.

В адресній мові програмування, як і в МЛС, первісними даними (і результатами) є *стани пам'яті* (коди, на множині яких задано штрих-функцію і які становлять собою назви комірок МЛС, а значення штрих-функції відповідають станам комірок). Відмінність адресної мови від МЛС (крім деяких синтаксичних відмінностей) полягає в тому, що за станів комірок у ній можуть правити, крім об'єктів (величин), ще й назви комірок. Поняття еквівалентності первісних даних (результатів) для алгоритмів, заданих адресною мовою й МЛС, є спільним. Але *оператори елементарні* (з яких утворюються інші оператори) МЛС є окремими випадками елементарних операторів адресної мови (в МЛС елементарний оператор задають у вигляді запису  $x_i := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , еквівалентного записові адресною мовою  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow x_i$ , який є окремим випадком запису елементарного оператора  $\Phi \Rightarrow F$ ). Це приводить до того, що систему А. р. п., розроблену для алгоритмів, заданих МЛС, не можна безпосередньо переносити на алгоритми адресної мови, отже, розробка

А. р. п. для адресної мови є самостійною проблемою.

Сфера застосування А. р. п. не обмежується програмуванням. Вони є цінним апаратом під час практичної алгоритмізації, наприклад, творчих процесів (див. *Алгоритмізація творчих процесів*). У деяких випадках у результаті аналізу реальних процесів (наприклад, процесів керування) їх вдається описати у вигляді складних алгоритмів, виконати які практично неможливо. Лише після А. р. п. вдається одержати з них алгоритми, придатні для використання. На практиці доводиться мати справу з напрямленими А. р. п., мета яких — оптимізувати алгоритми за певним заданим критерієм. Розробка алгоритмів напрямленого застосування А. р. п. становить собою групу дуже важливих матем. проблем кібернетики. Результати, одержані в цій галузі, поки що незначні (наприклад, до них належить напрямлене застосування А. р. п. під час пошуку інформації, яке виконує сама ЕОМ, та деякі інші). Проте й там, де алгоритмів напрямлених перетворень ще не знайдено, на прикладі А. р. п. можна виконувати, зокрема, не самими ЕОМ в автомат. режимі, а з участю людей. Пошук необхідної послідовності А. р. п. можна адіабатувати евристичними методами (здаються до імітації, здогадки та спроби) за допомогою ЕОМ, яка за спец. програмами й наказами, які в неї вводить математик, повинна виконувати трудомісткі перетворення зведеного в її пам'ять алгоритму і видавати інформацію про одержані результати.

Л. М. Перликев В. Н. Об эквивалентных преобразованиях адресных комплексов. В кн. Цифровая вычислительная техника и программирование. 2 М. 1967. Крилицкий Н. А. Различные преобразования алгоритмов и программирование. М. 1974.

**АЛГОРИТМІВ СКЛАДНІСТЬ** — величина, що характеризує складність (довжину) описування даного алгоритму (на відміну від сигналізуючої функції, що характеризує складність процесу обчислювання, яке здійснюється за даним алгоритмом). Заданню від точної концепції алгоритму це поняття складності можна різними способами уточнити. Єдиного, усталеного уточнення ще немає. Розглянемо випадки, які трапляються найчастіше.

Під складністю *нормального алгоритму* розуміють здебільшого довжину його зображення, тобто довжину запису всіх його формул підставок та однієї рядок (між ф-лами ставиться спец. роздільна буква). Під складністю *Тьюрінга машини* розуміють здебільшого кількість її внутр. станів. Іноді для характеристики складності машини Тьюрінга використовують кількість її команд.

Запропоновано й аксіоматичне визначення А. с. Розглянемо це визначення стосовно машини Тьюрінга. Нехай  $M_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) — допустима гедельська нумерація машини Тьюрінга. Цю нумерацію можна уявити собі як таку, при якій за номером машини можна ефективно відновити машину (тобто її про-

граму), а за машиною (тобто за програмою) — її номер. Загальнорекурсивну ф-цію з назою мірою складності машини тоді і тільки тоді, коли для будь-якого  $y$  існує не більш як скінченна кількість машини зі складністю  $y$  і коли існує ефективна процедура, яка для будь-якого  $y$  дає змогу визначити всі ті машини, що мають складність  $y$ .

Нехай  $\alpha$  — довільна міра складності машини Тьюрінга. Легко довести, наприклад, таке твердження. Якщо  $U$  — довільний ефективний перелічний нескінченний клас машини Тьюрінга, то існує машина  $\Gamma$ , що належить  $U$ , і існує машина  $\Gamma'$  (не обов'язково з  $U$ ) така, що  $\Gamma'$  і  $\Gamma$  обчислюють одну й ту саму функцію і складність  $\Gamma'$  менша, як складність  $\Gamma$ . Сформулюємо ще деякі результати. Нехай під складністю нормальних алгоритмів і машини Тьюрінга розуміють відповідно довжину зображення і кількість внутр. станів. Тоді будь-яку ф-цію алгебри логіки від  $N$  змінних можна реалізувати і нормальним алгоритмом в  $m$ -буквенному алфавіті зі склад-

ністю  $\sim \frac{2^N}{\log_2 m}$  і машиною Тьюрінга в  $m$ -буквенному зовн. алфавіті зі складністю  $\sim \frac{2^N}{N(m-1)}$ .

Вивчаються складності алгоритмів, що розв'язують скінченні куски *нормальних алгоритмічних проблем*. Рад. математик А. А. Марков розглянув таку задачу: для будь-якої ф-ції алгебри логіки від  $N$  змінних побудувати зображення нормального алгоритму в алфавіті  $\Phi = \{0, 1, a, b, c\}$ , що обчислює дану ф-цію і має мінім. складність. Показано, що складність нормального алгоритму, який розв'язує цю задачу, має порядок  $2^N$ . Вивчено питання про А. с., які розв'язують для перших натуральних чисел проблему входження в рекурсивно перелічну множину (складність  $n$ -кусків рекурсивно перелічних множин). Для нормальних алгоритмів ця складність за порядком не перевищує  $\log_2 n$  і в заг. випадку цю оцінку не можна знизити. Водночас можна легко показати, що існують множини, які задаються за допомогою досить простих логіч. засобів і які мають складність  $n$ -кусків порядку  $n$ . Показано також, що при загальнорекурсивному обмеженні часу роботи А. с.  $n$ -кусків рекурсивно перелічних множин може зростати експоненціально й за порядком досягти величини  $n$ .

Як видно з наведених прикладів, поняття А. с. використовують в основному, уточнюючи питання про те, якою є мінім. складність алгоритму, що описує той чи інший скінченний об'єкт. Цю мінім. складність часто наз. складністю даного скінченного об'єкта Рад. математик А. М. Колмогоров запропонував інший підхід для визначення поняття складності скінченного об'єкта, що не залежить від обраної концепції алгоритму. За ідеєю Колмогорова, під складністю об'єкта  $x$  слід розуміти мінім. довжину «програми»  $p$ , яка дає змогу відновити  $x$ . Точне визначення

цього поняття залежить від того, який клас об'єктів розглядають і що розуміють під «методом програмування». Розглянемо, наприклад, клас  $N$  дайкових слів. Довжину слова  $p$  позначимо через  $l(p)$ . Нехай  $\varphi(p)$  — частково рекурсивна ф-ція з  $N$  в  $N$ . Тоді складність слова  $x$  як  $\varphi$  є

$$K_{\varphi}(x) = \begin{cases} \min l(p), \text{ де } \varphi(p) = x \\ \text{таких, що } \varphi(p) = x \\ \infty, \text{ якщо не існує } p \text{ такого, що } \varphi(p) = x. \end{cases}$$

Таке визначення складності залежить від виду  $\varphi$ . Проте є така теорема: існує частково рекурсивна функція  $F(p)$  (її називають оптимальною) така, що для будь-якої іншої частково рекурсивної функції  $\varphi(p)$  справджується нерівність  $K_{\varphi}(x) \leq K_F(x) + C_{\varphi}$ , де  $C_{\varphi}$  не залежить від  $x$ . Оптим. ф-цію  $F$  раз і назавжди фіксують, і під складністю  $K(x)$  слова  $x$  розуміють величину  $K_F(x)$ . Аналогічно можна визначити й складність ін. об'єктів, наприклад, складність частково рекурсивних функцій. Виявляється, що між введеною вище складністю  $K(x)$ , складністю  $M_m(x)$  цих самих об'єктів і складністю  $T_m(x)$  існує такий взаємозв'язок:

$$M_m(x) \sim \frac{K(x)}{\log_2 m}; \quad T_m(x) \sim \frac{K(x)}{(m-1) \log_2 K(x)},$$

де  $K(x)$  — складність за Колмогоровим,  $M_m(x)$  — складність, виражена через довжину зображення нормального алгоритму в  $m$ -буквенному алфавіті,  $T_m(x)$  — складність, що виражена кількістю внутр. станів машини Тьюрінга з  $m$ -буквеним зовн. алфавітом.

Використовуючи запроваджене вище поняття складності, А. М. Колмогоров розвинув алгоритм. Підхід до визначення поняття «кількість інформації». Потім цей самий підхід застосували й до визначення випадкової послідовності. Ідея цього визначення полягає в тому, що нескінченну послідовність вважають випадковою, якщо вона має нескінченно багато початкових кусків, у певному розумінні досить складних. Такі послідовності мають конструктивно описувані властивості, які, за імовірністною теорією, мають місце в імовірності одиниці (напр., вони задовольняють закон великих чисел, закон повторного логарифма і т. д.)

Д. М. Кузьмін В. А. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгоритмами и машинами Тьюринга. «Проблемы кибернетики», 1985, в. 13, Марков А. А. О нормальных алгоритмах, связанных с вычислением булевых функций. «Известия АН СССР. Серия математическая», 1967, т. 31, № 1 Завонкиа А. Б., Левин Л. А. Сложность конечных объектов и обоснование понятия информации и случайности с помощью теории алгоритмов. «Успехи математических наук», 1978, т. 25, в. 6, Блэйн М. Об объекте машин. В кн. Проблемы математической логики. М., 1970. Я. М. Баранов.

**АЛГОРИТМІВ СХЕМА** — формальний опис основної ідеї побудови деяких сукупностей алгоритмів. В А. с. деякі елементи опису (умовки позначення) можна розглядати як змінні, що змінюються на множині слів в

алгоритмічній мові. Якщо належним чином замінити ці змінні об'єктами з областей їхніх значень, то одержимо алгоритм, записаний зазначеною мовою. Отже, А. с. описує множину алгоритмів, кожен з яких одержують із даної А. с., належним чином вибравши змінні, що є значеннями елементів схеми. Прикладами А. с. є операторні схеми алгоритмів, алгоритми графові схеми, логічні схеми алгоритмів. А. с. корисні при вивченні властивостей класів алгоритмів. Для практичних задач реалізації алгоритмів корисно здійснювати рівнозначні перетворювання їх. На можному рівні абстракції опису алгоритмів можна побудувати системи рівнозначних перетворень, які дають змогу розв'язувати конкретні задачі щодо поліпшення їхньої якості в певному розумінні.

Визначення А. с., здебільшого виходять з деякого набору осн. символів, за допомогою яких будують елементарні вирази, що їх називають термінами. А. с. формально визначають як побудовані з термів вирази, які задовольняють певні умови. Запроваджують, як правило, процедуру виконання А. с., яка для кожної послідовності наборів значень логічних змінних однозначно визначає й значення схеми. Вводять і різні визначення рівнозначності (чи еквівалентності) А. с., якими описують відношення рівнозначності (відповідно еквівалентності) алгоритмів. А саме: якщо А. с.  $\Sigma_1$  і  $\Sigma_2$  рівнозначні, а  $\mathcal{U}_1$  і  $\mathcal{U}_2$  — алгоритми, описувані цими схемами й добуті з них при належній заміні термів операторів й мітками (однаково для обох схем), то  $\mathcal{U}_1$  і  $\mathcal{U}_2$  — рівнозначні алгоритми. Коли розглядати логічні А. с., граф-схеми алгоритмів і операторні схеми, виразно виступає лише логічна структура схем. Порядок роботи операторів розглядають залежно від значень логічних умов, які входять до А. с. Властивості алгоритму, які визначаються природою операторів (зокрема, операторів умовного переходу), на цьому рівні абстракції не можна вивчити. Визначаючи А. с., частково враховують внутр. зміст операторів і логічних умов. Наступний (нижчий) рівень абстракції при визначенні алгоритмів передбачає, що структура операторів частково або цілком відома

Літ. див. по ст. Операторна схема.

В. М. Паринев  
**АЛГОРИТМІВ ТЕОРІЯ** — розділ математики, в якому визначають теоретичні можливості ефективних процедур обчислень (алгоритмів) та їхнє застосування. Осн. поняття теорії — поняття алгоритму — як інтуїтивне поняття існує в математиці досить давно. Під алгоритмом розуміють точний припис для здійснення певної послідовності елементарних дій над початковими даними будь-якої задачі з певного класу (загалом нескінченного) однотипних задач, після виконання якої одержують розв'язок задачі. Прикладом алгоритму може бути правило знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел (алгоритм Евкліда). Формула для знаходження коренів квадратного рівняння також є своєрідною формою запису алгоритму. Вона вказує, які арифм.



дії і в якій послідовності треба виконати над коэф. квадратного рівняння, щоб одержати корені цього рівняння. А. т. є важливим розділом *логіки математичної*, який бурхливо розвивається. Інтерес до А. т. пояснюється, з одного боку, внутр. запитом самої математики (питання основ математики, конструктивний та інтуїціоністський напрями в математиці, алгоритми, проблеми алгебри тощо), а з другого — бурхливим розвитком електронної обчислювальної техніки й теор. кібернетики. Практичні й теор. питання реалізації алгоритмів на сучасних обчисл. машинах становлять зміст такого важливого розділу теор. кібернетики, як програмування.

Точні матем. поняття, які так чи інакше формалізували інтуїтивне поняття алгоритму, запропоновано лише в серед. 30-х роки 20 ст. Та, що було запропоновано кілька різних уточнень, можна поділити якоюсь мірою різноманітності тих (конструктивних) об'єктів, для яких поняття ефективного (алгоритмічного) перетворення має сенс. Такими об'єктами можуть бути натуральні числа, скінченні послідовності натуральних чисел (кортежі), слова в певному скінченному алфавіті, матриці, скінченні графи і т. ін.

Історично перші й запропоновані поняття можна поділити на два класи.

1. Описується певний клас арифм. ф-цій (загалом кажучи, часткових), тобто ф-цій від скінченного числа натуральних аргументів з натуральними значеннями. Для цих ф-цій існують ефективні процедури знаходження значення ф-ції (якщо воно існує) за заданими значеннями аргументів. Функції з цього класу наз. частково рекурсивними (ч. р. ф.); а в разі, коли ч. р. ф. є всюди визначеними, їх наз. загально рекурсивними (з. р. ф.). Клас ч. р. ф. ввів Ж. Ербран, К. Гедель і С. Кліні, виходячи з досліджень формалізованої арифметики за допомогою підходящих функціональних обчислень. Незалежно від цих означень цього класу ф-цій дав А. Черч за допомогою т. з. числення  $\lambda$ -конверсій. Клас усіх ч. р. ф. і пропонується як означення для класу всіх арифметичних алгоритмічно обчислених ф-цій (див. Черча теза).

2. Описуються точні матем. поняття машини й обчисленості на машині. Такі поняття машини запропонував незалежно один від одного В. Поста і А. Тьюрінг. Ці теоретичні обчислювальні машини адебітного лая. Тьюрінга машинами. Виявилось, що клас арифм. ф-цій, для яких існує машина Тьюрінга, що обчислює за значеннями аргументів значення ф-ції (якщо воно існує), збігається з класом усіх ч. р. ф., і навпаки, кожну ч. р. ф. можна обчислити на підходящій машині Тьюрінга. В заг. рисах різниця між розглянутими вище видами означень можна сформулювати так: у першому дається точний опис класу обчислених арифметичних ф-цій, у другому — точний опис певного класу алгоритм. перетворень (обчислень на машині Тьюрінга). Згодом було запропоновано

й інші поняття, що уточнюють поняття алгоритму, — канонічні числення Е. Поста, *нормальні алгоритми* А. А. Маркова, алгоритми А. М. Колмогорова тощо. Для всіх цих уточнень виявилось, що обчисленими арифм. функціями є ч. р. ф. Отже, поняття ефективно обчисленої арифм. ф-ції можна вважати цілком визначеним. Проте ще немає найзагальнішого означення поняття алгоритм. обчисленості. Характерною особливістю майже всіх уточнень поняття алгоритму є подання відповідних понять у вигляді тих чи інших числень. Тому А. т. можна вважати розділом матем. логіки, де поняття числення — одне з основних.

Дослідження в А. т., як і наведені вище означення, можна, природно, поділити на два напрями.

1. Дослідження, в яких клас усіх ч. р. ф. є або осн. об'єктом, або осн. апаратом дослідження. Розглянемо докладніше деякі розділи цього напрямку. 1) Дослідження класу всіх ч. р. ф. (з ч. р. ф.): а) вивчення підкласів цього класу — примітивно рекурсивних ф-цій, елементарних функцій та ін.; б) класифікація ч. р. ф. за допомогою ієрархій; в) алгебр. вивчення класу ч. р. ф. та з. р. ф. (див. Рекурсивні функції). 2) Введення за допомогою ч. р. ф. нових понять і вивчення їх: а) означення (в термінах ч. р. ф.), вивчення й класифікація рекурсивних та рекурсивно перелічних множин. Поняття рекурсивної та рекурсивно перелічної множин є одними з основних у сучасній А. т. Перше з них уточнює інтуїтивне поняття роз'явної множини (тобто множини, для якої існує алгоритм, що дає змогу за будь-яким елементом визначити, чи належить він до цієї множини, чи ні), а друге — поняття множини, для якої існує алгоритм послідовного перелічування всіх її елементів; б) порівнювання і класифікація алгоритм. природи довірливих підмножин множин натуральних чисел. Основою для такого порівнювання є поняття *звідності* (м-звідність, *tt*-звідність, тьюрінгова звідність тощо) і поняття ступенів звідності. Поняття звідності та ряд інших понять дають змогу своєрідно класифікувати, розміщувати в ієрархії великий клас підмножин множин натуральних чисел. 3) Узагальнення й розширення понять. При визначенні деяких звідностей, напр., тьюрінгової звідності, виникають відносні поняття, такі, як функція, частково рекурсивна щодо множини  $A$ , множина, рекурсивно перелічна щодо  $A$ , та багато інших. Поняття звідності визначають уже не лише для множин, а й для класів множин (та функцій). Таким поняттям є, напр., поняття масової проблеми за Ю. Т. Медведєвим. Для введення поняття звідності масових проблем використовують поняття ефективного оператора. Зроблено спроби уточнити поняття обчисленості й для неконструктивних об'єктів, напр., визначити поняття обчисленого функціоналу скінченного типу, визначеного на нелінійній множині функціоналів нижчого типу. Мож-

ливисті використання результатів теорії рекурсивних ф-цій для довільних, не більш як лічбових, множин реалізується *нумерацій теорією*. В теорії нумерацій природно уточнюються багато алгоритмів, проблем з алгебри та ін. розділів математики.

II. Дослідження, в яких основна увага приділяється механізму обчислення. Є ряд важливих розділів А. т. цього напрямку досліджень. 1) Теорія скінченних автоматів. *А Автомати скінченні* — найбільш вивчений клас обчисл. пристроїв. Цю теорію застосовують, напр., проектуючи електронні обчисл. машини (ЕОМ). 2) Машини Тьюрінга. Ведуть дослідження можливостей таких машин для організації обчислювань в тій чи іншій обмеженій, порівнюють роботу машин в різною кількості стрічок, вивчають можливості обчислення за реальний час тощо. 3) *Атомати зростаючі*. Це поняття виникло в основному у зв'язку зі спробою дати найзагальніше визначення алгоритму обчислення, а також у зв'язку з дослідженнями Дж. фон Неймана над самовідтворюваними машинами. 4) Вивчають багато специфічних машин, пов'язаних часто з узагальненням поняття обчисленості, напр., машини з віракулою тощо.

Слід особливо відзначити проблему пошуку поняття *алгоритми складності*, тобто поняття, яке інтуїтивно досить добре сприймається. Запропоновано кілька таких понять. 1) Складність алгоритму оцінюється за тими чи іншими параметрами роботи алгоритму (див. *Сигналізуюча функція*). Цей підхід пов'язаний головним чином з другим напрямком досліджень з А. т., тобто ці поняття визначають у термінах роботи конкретних обчисл. пристроїв (напр., машин Тьюрінга). 2) Складність алгоритму визначається через складність його програми (А. М. Колмогоров, А. А. Марков). Тут використовують поняття складності скінченних слів, яке запровадив А. М. Колмогоров. 3) Поняття складності впроваджують не для окремих алгоритмів, а для класу алгоритмів. Таке поняття складності класів можна ввести за допомогою понять теорії нумерацій.

Результати А. т. широко застосовують — від використання результатів теорії скінченних автоматів у практиці проектування ЕОМ до використання рекурсивних ф-цій у конструктивній математиці. Її інші важливі застосування А. т. Першими результатами А. т., що мають і досі велике принципове значення для всієї математики, були *Теорема Геделя про неповноту формалізованої арифметики* і теорема Черча про алгоритм. нерозв'язність (про неможливість алгоритму) проблеми розв'язування вузького числення предикатів. *Числення предикатів вузьке* є обчисленням сучасної матем. логіки. Проблема розв'язування його полягає в тому, щоб побудувати алгоритм, який дає змогу за будь-якою формулою вузького числення предикатів ефективно визначити, чи є ця формула довідною. Аналогічні проблеми розв'язу-

вання виникають і для конкретних формалізованих теорій (напр., теорії груп, кілець, арифметики тощо). Розділ матем. логіки, який вивчає такі проблеми розв'язування, має назву *елементарних теорій*. Алгоритм. проблеми виникають і в алгебрі (напр., проблема тотожності слів для підгруп і груп). Принципові результати щодо цього одержали рад. математики (нерозв'язність проблеми тотожності слів для підгруп довів А. А. Марков, а нерозв'язність проблеми тотожності для груп П. С. Новиков).

Літ. Марков А. А. Теория алгоритмов «Труды Математического института им. В. А. Стеклова» АН СССР 1954 т. 42 (66:пер. с 373-374) Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях М. 1960 (66:пер. с 4-6 1961) Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции М. 1965 (66:пер. с 175-181) К. Керн S. C. Introduction to metamathematics New York — Toronto, 1952; Davis M. Computability and undecidability New York — Toronto — London, 1958. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффектив. вычислимость Пер. с англ. М., 1972 (66:пер. с 387-399). Ю. Л. Ершов.

**АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ** — формулювання математичного опису (*моделі математичної*) виробничого процесу. Джерелом початкової інформації для А. в. є теоретичні й експериментальні дані та евристичні, інформальні відомості про досліджуваний процес. Цю інформацію можна одержувати заздалегідь (априорні дані) і безпосередньо в процесі досліджування (апостеріорні дані). Як правило, для складних пром. систем характерні великі обсяги й априорних, і апостеріорних даних і значна частина евристичної інформації. Тому при А. в. в. прагнуть максимально використати засоби *обчислювальної техніки* для обробки великих масивів експериментальної й теор. інформації. Проте в загальному процесі зв'язання складних виробничих істотно роль продовжує відігравати людина — спеціаліст із цієї галузі А. в. в., функції котрої поки що важко передати обчисл. машині. З цих самих причин А. в. в. часто проходить за індивідуальною схемою, найраціональнішою для цього складного об'єкта і конкретних умов цього дослідження. Найпоширеніша схема А. в. в. складається з таких типових етапів: 1) попереднього аналізу завдання алгоритмізації та обсягу дослідження; 2) структурного описування досліджуваного виробничого процесу; 3) теор. аналізу рівнянь зв'язку між параметрами процесу; 4) експериментального визначення статичних і динамічних характеристик цього процесу; 5) моделювання процесу й перевірки адекватності (відповідності) матем. опису реальному виробництву; 6) аналізу одержаної матем. моделі й розробки рекомендацій щодо поліпшення виробничого процесу; 7) формування оптимальних алгоритмів на основі рекомендацій попереднього етапу; 8) перевірки й коректування алгоритмічного забезпечення системи керування виробничим процесом в умовах експлуатації системи.

На стадії попереднього аналізу в'ясовують мету й основні етапи дослідження, оцінюють сподівану економіч. ефективність і в'ясову-

ють доцільність прийнятої схеми вивчення об'єкта й результатів його алгоритму, аналізу їх загальні питання. При цьому в умовах значної неповноти інформації дуже важливо використати наявні евристичні відомості й досвід дослідників. Тут ефективно застосовують методи, пов'язані з системним підходом до вивчення складних систем, з теорією їхньої організації. Зокрема, використовують метод послідовної формалізації описів виробничого процесу, при якому в міру нагромадження інформації про процес здійснюється перехід до нового рівня формалізації й деталізації натеї моделі. Етап структурного описування й аналізу пов'язаний із застосуванням методів сіткових зображень (блок-схеми, графи) для відображення зв'язків, що існують між параметрами й елементами виробничого процесу. На 3-му — 4-му етапах застосовують методи ідентифікації динамічних і статичних характеристик, пов'язаних, зокрема, з теорією статистичних оцінок та регресійним і факторним аналізом. При цьому використовують нагромаджені дані з описування фізико-тех. закономірностей у цій галузі виробничих процесів. В аналізі й оптимізації моделей застосовують індивідуальні прийоми розв'язування, залежно від конкретного завдання, й методи досліджування операцій, зокрема теорію статистичних розв'язків, *програмування лінійне й програмування динамічне*. Не завжди ці етапи є завершальними. багато виробничих процесів не дають найбільший ефект одразу після однократної оптимізації режиму або реорганізації виробництва, яка ліквідує вузькі місця. Останні етапи (7-8) виконують, якщо обгрунтовано доцільність застосування керуючої та обчисл. техніки для автоматизації досліджуваного виробничого процесу.

Літ. Алгоритмізація промислових процесів [в. 1-15]. К., 1963-69; різниці В. М. Математичке описання об'єктів автоматизації. М., 1965 [бібліогр. с. 355-357]; Іванів П. В., Кудин В. Т. Статистичне регулювання роботи алгоритмізації промислових процесів. «Механізація й автоматизація управління» 1967 № 6; Гудин В. Т. Алгоритмізація об'єктів управління. Справочник. К., 1968 [бібліогр. с. 325-343].

В. Т. Кудин.

**АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ТВОРЧИХ ПРОЦЕСІВ** — складання алгоритмів і програм для реалізації на електронних обчислювальних машинах процесів, що їх у психології мислення відносять до продуктивних (творчих). У лужному розумінні А. т. п. — це моделювання на ЦОМ процесів, що імітують створення літ., музичних, художніх та ін. творів, що належать до сфери мистецтва. В широкому розумінні до А. т. п. відносять моделювання доцільного поводження, розв'язування задач *розпізнавання образів, розв'язування задач щодо прийняття рішень тощо*. Основою А. т. п. є *програмування евристичне*, яке полягає в побудові *алгоритмів і програм* на основі аналізу діяльності людини під час розв'язування аналогічних задач. Цей аналіз має зовн. характер і не зачіпає суті процесів, які відбуваються в мозку людини під час

розв'язування задач. Основою творчого мислення людини є наявність у мозку моделі проблемної ситуації, над якою вона може провадити потрібні операції (узагальнення, абстрагування, індуктивні побудови, міркування за аналогією тощо). В сучасних ЕОМ поки що немає засобів відображення інформації, які забезпечували б побудову в пам'яті машини моделі проблемної ситуації чи моделі зовн. світу. Тому сама машина може виступати під час імітації творчих актів лише як виконавець того алгоритму, що його закладає в неї програміст. Проте допомога машини може виявитися корисною, коли необхідно виконати перебирання, що дає змогу знаходити різні варіанти розв'язування творчого завдання. Напр., заклавши в машину правила гармонії Палестрини, за їхньою допомогою можна одержувати різні муз. твори, генерувати послідовність нот за допомогою *давача випадкових чисел* і відбираючи з цієї випадкової послідовності лише ті сполуки, що задовольняють правила побудування муз. фраз. Аналогічно цьому, заклавши в пам'ять машини певні ритмічні правила й правила римування, можна одержувати на машині різні віршовані твори, генеруючи слова за допомогою того самого давача випадкових чисел (звичайно, при цьому не можна сподіватися на те, щоб одержати семантично значущий вірш). Щоб А. т. п. була ефективною, треба ретельно вивчити алгоритмізований процес і виявити всі осн. прийоми, застосовуючи які можна досягти мети. Якщо вдається виявити всю сукупність цих прийомів, то процес повністю формалізується й перестає бути продуктивним. Прикладом такого перетворення творчого процесу на репродуктивний, машинний процес, може бути програма Ван Хао для доведення теорем *чисельна висловлювання*. Цілковита формалізація привела до того, що ЦОМ у процесі своєї роботи може довести всі речення, що їх мислять у численні висловлювань з вибраною системою аксіом і правил акведення. Іншим прикладом такого типу може бути програма Стретчі для гри в шашки. Відповідно до цієї програми машина може грати в шашки без помилок, бо всі варіанти розвитку партій у ній уже закладено. Але шлях цілковитої формалізації задач, на жаль, не завжди можливий, а часто й шкідливий. Коли маємо багато різноманітних ситуацій, що створюються в процесі розв'язування творчого завдання, і можливостей продовжувати процес пошуку результату багато, критерії оцінки якості одержаного розв'язку нечіткі, формалізація може не дати ніякої користі, і тоді ефективнішою буде наявність якоїсь невизначеності й недетермінованості при розв'язуванні завдання. При А. т. п. можуть з'являтися діяння, які поки що не піддаються алгоритмізації. Тому сучасні програми, що імітують творчий процес, як правило, реалізуються в *діалогов режимі* з людино-машинних системах переробки інформації. Див. також *Взаємодія людини з обчислювальною машиною*.

Літ., Пушкин В. М. Веристика — наука о творческом мышлении М., 1977, Гутчин И. Б. Информатические модели творчества М., 1969 [библиогр. с. 81—82]; Зарипов Р. Х. Информатика и музыка. М., 1971 [библиогр. с. 226—231]; Ледли Р. С. Программирование с использованием цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 6—7].

**АЛГОРИТМІЧНА МОВА** — формальна мова, призначена для записування алгоритмів. Використання А. м. ґрунтується на можливості формального введення правил конструювання алгоритмів. При формальному описуванні алгоритмів істотною роллю належить виборі засобів записування (кодуючих) перетворюваної інформації та задання алгоритм. інструкцій (діл) — елементарних кроків алгоритмів, в яких їх конструюють. А. м. визначають заданням алфавіту (чи словника перелічених символів), синтаксису (граматики) й семантики. Певний (випустий) алфавіт А. м. використовують для кодування початкової (перетворюваної) інформації. Відомо, що навіть алфавіт з двох букв достатньо для кодування будь-якої інформації. Проте зазначений алфавіт надто великого розширюють для зручнішого й економічного кодування. Правила перетворювання інформації в різних алгоритмах дуже різноманітні й різні за змістом. Проте всі конкретні алгоритми можна скласти з великої кількості елементарних інструкцій. Набори інструкцій, в яких можна побудувати будь-які числімі алгоритми, наз. *алгоритмічно повними* А. м. наз. універсальною, якщо в ній можна описати алгоритми чого повний набір інструкцій (а, отже, й будь-який алгоритм). Введення універсальної А. м. рівносильне заданню алгоритм. системи, тобто заг. способу записування алгоритмів.

Специфіка А. м. виражається год. чин. у її семантиці й полягає в тому, що речення мови повинні бути алгоритмами, тобто послідовностями інструкцій, за допомогою яких перетворюють інформацію (реалізують алфавітні відображення). Можна А. м. повинні мати засоби для задавання *операторів*, які перетворюють інформацію (дані), і операторів переходу (розпізнавачів), які визначають порядок виконання цих операторів. Оператори, в свою чергу, можуть позначати послідовності їх. значно елементарніших операцій. Напр., оператор множення багатозначних чисел позначає послідовність деяких дій над однозначними числами.

Мови, за допомогою яких будують класичні алгоритм. системи (*нормальні алгоритми* Маркова, *рекурсивні функції*, *Тюрінга машини*, *Поста машини* та ін), незважаючи на їхню універсальність, виявилися практично незручними для описування алгоритмів розв'язування задач при реалізації їх на ЦОМ. Причиною цього є те, що всі ці системи орієнтовані на розгляд фундаментальних теоретичних питань *алгоритмічної теорії* й записування кожного більш-менш складного алгоритму в будь-якій з цих систем становить самостійну складну задачу. В зв'язку з цим розв'язування практичних задач за допомогою ЦОМ

привело до появи значної кількості праць, присвячених створенню т. з. *мов програмування*, для яких А. м. становить теор. основу.

К. Л. Ющенко.

**АЛГОРИТМІЧНА СТРУКТУРА ЦОМ** — система функціональних засобів та принципів, на яких ґрунтуються процес *переробки інформації* в ЦОМ на різних операцій над словами й над більшими одиницями інформації. *Алгоритми*, що належать до компонент алгоритмічної структури цифрової обчислювальної машини, на відміну від введених алгоритмів (програм), виконанням яких вона керує, фіксуються в машині структурним способом, тобто входять до складу системи ввнутрішнім, забезпечення і завжди доступні для безпосереднього використання (див. *Математичне забезпечення ЦОМ внутрішнє*). Ці алгоритми поділяють на стандартні й службові.

А. с. ЦОМ можна описати в різних ступенях деталізації. Найдокладнішому описові відповідає схема машини, складена в блоки, які виконують операції над окремими словами, тобто блоками типу *реєстрів*, *лічильників*, *суматорів*, *дешифраторів* і керуючих автоматів у вигляді простих композицій цих блоків. Найменш деталізованим рівнем, пов'язаним з системою організації обчисл. процесу в ЦОМ, є т. з. *архітектура машини*. Це архітектура залежить від осн. принципів перероблення інформації на різних операцій над *масштабів* й заданням загально (типу «ввести масив», «розв'язати задачу» тощо). До структурних одиниць архітектури (щодо машини високого класу) належать: центральний *процесор*, призначений для заданої обробки інформації, система *запам'ятовувальних пристроїв*, системою пристроїв введення й виведення, у т. ч. й вносні пульси (безпосередньо зв'язані з машиною) та допоміжні процесори (процесори) для керування обміном інформації, попередньої обробки виводуваної інформації та залежного оформлення результатів, що виводяться.

Допоміжні процесори іноді конструктивно входять до складу центр. процесора або їх зовсім немає, тобто зазначені функції центр. процесор виконує під час перероблення процесу заданої обробки інформації (а це означає, що клас машини знижується). З другого боку, до складу центр. процесора може входити ряд пристроїв перероблення інформації, що працюють одночасно, — процесори, можливо з різними функціональними призначеннями (це означає перехід машини у відповідний клас *обчислювальної системи*).

Осн. поняття, що ними характеризують А. с. ЦОМ, поділяють на три групи: 1) подання даних; 2) подання програм; 3) організація обчисл. процесу. Перші дві групи становлять програмний рівень ввнутрішньої машини, якою виражено виконувати певні завдання, а 3-я група визначає, яким чином у машині буде реалізовано завдання, що їх формулює користувач.

До 1-ї групи належать такі характеристики: структура машинних слів (числових або символічних), система числення, спосіб обліку порядку; до 2-ї групи — система операцій, структура командних слів, структура програмного рівня внутр. мови, спосіб подання робочої (інтерпретованої та виконуваної) програми; 3-я група об'єднує такі характеристики: спосіб трансляції вихідної програми, методику виконання маш. операцій, систему структурної інтерпретації (у т. ч. й керування операціями), структуру пам'яті ЦОМ і системи розміщення, контролю, введення та виведення інформації, систему сполучення процесів обробки інформації та систему обслуговування користувачів (взаємодія машини з операторами).

6 ряд осн. характеристик А. с. ЦОМ: машинні слова, система числення, система операцій та ім. Машинні слова за структурою поділяють на два класи: не поділені й поділені на символи. Коди символів мають значення букв або двійкових (в окремому випадку — десяткових) цифр і складаються з двійкових розрядів у разі, коли структурний алфавіт двійковий. Поділ на символи супроводжується безпосереднім доступом до кожного з них.

Систему числення застосовують здебільшого двох видів — двійкову й двійково-десяткову з тим чи ім. способом кодування десяткових цифр. Другий вид системи числення поєднується з символічною структурою машинних слів. Серед різних способів обліку порядків чітко вирізняються два головні — з «злізаючою» комою (тобто з зазначенням її місця) та з комою, фіксованою перед першим старшим розрядом, причому перший спосіб переважає в універсальних, а другий — у спеціалізованих машинах.

Система операцій охоплює клас арифм. і логіч. операцій або ще й (залежно від ступеня розвиненості) операції над рядками, символами й розрядами, а то й складніші операції типу збудованих стандартних процедур, які складаються з перелічених основних (базисних) операцій (елементарні ф-ції, операції над кодами з підвищеною розрядністю, над комплексними числами, матрично-векторні операції тощо). Істотна відмінність усіх стандартних процедур — зазначування в процесі виконання їх ряду результатів базисних операцій (як проміжних), а для матрично-векторних операцій ще й багатокомпонентність вихідних даних. Крім осн. операцій щодо обробки інформації, зумовленої методами розв'язування задач, у системі операцій передбачаються й допоміжні операції, що готують для осн. операцій потрібні первісні дані або визначають дальші дії за програмою тощо (напр., обчислення адрес операндів).

Структуру командних слів визначають заздалегідь кількістю адрес у слові, т. з. адресністю команди, і способом вказування наступної команди. Крім того, розрізняють жорсткі операційно-адресні та гнучкі (що

передбачають різні класи командних слів) типи цих структур — останні у внутр. мовах високого рівня (див. *Мова ЦОМ внутрішня*), близьких до мов процедурно-орієнтованих.

Структуру програмного рівня в внутр. мови визначають його заг. орієнтація або на користувача, який записує програму процедурно-орієнтованим алгоритм. мовою, або на виконавчу частину машини, для якої потрібний конкретизований запис необхідних дій, передбачених алгоритмом задачі, в послідовності виконання їх. Цей останній тип відповідає традиційним внутр. мовам, перший тип — внутр. мовам, розвинутих у напрямі зближення їх з процедурно-орієнтованими мовами програмування. В цьому разі структура внутр. мови зумовлюється мірою її наближення до алгоритм. мови. Заг. властивості внутр. мови цього типу, якщо вона великою мірою наближена до процедурно-орієнтованих алгоритм. мов, такі: природне записування виразів, залежність змісту операційних записів від контексту умовна адресація за допомогою символічного позначення ввідних, розвинута система машинних операцій, що охоплює широкий клас стандартних процедур. Ця остання властивість притаманна й традиційним внутр. мовам високого рівня.

Способи подання робочої програми в кілька. Головні з них: подання у вигляді маш. коду у пам'яті машини й у вигляді набору з'єднаних на слот, комутаційній панелі. Перший — домінуючий, другий трапляється лише в настільних, а також у деяких спеціалізованих машинах. Розрізняють три способи трансляції первісної програми — позаструктурний (тобто суто програмний), програмно-структурний та структурний способи, причому другий і третій характерні для машин з розвинутими внутр. мовами та мікропрограмним керуванням, орієнтованим на застосування мов програмування, а перший спосіб — для машин без такої орієнтації. В одній і тій самій машині для різних мов програмування можна використовувати різні способи трансляції.

Методику виконання операцій визначають залежно від вимог до машини щодо швидкодії та операційних затрат, враховуючи затрати часу на інтерпретацію програми. Розрізняють три осн. класи методів — послідовні, послідовно-паралельні та паралельні методи. Методи 2-го класу застосовують здебільшого в сучасних універсальних ЦОМ.

Система структурної інтерпретації залежить від програмного рівня внутр. мови машини і, в свою чергу, зумовлює його проміжні мікропрограмні рівні. Відповідно до цього виділяють розвинуті системи структурної інтерпретації, які, крім системи керування операціями, характеризуються й наявністю аналізуючої частини. Її прості й багатоступеневі мікропрограмні системи керування операціями. За способом дії вони бувають централізованого, централізовано-автономного й цілком автономного керування операціями

в синхронним або асинхронним часовими циклами роботи. Для великих і середніх універсальних машин, як правило, характерні здебільшого два останні способи з переважним використанням асинхронних циклів.

**Структура пам'яті й системи розміщення інформації** зумовлені кількістю, призначенням і взаємодією запам'ятовувальних пристроїв у машині, способами звертання до них, способами розподілу пам'яті та адресації величин. Автомат. способи виконання двох останніх ф-цій поділяють на два класи — статичну, тобто заздалегідь плановану реалізацію цих ф-цій, і динамічну реалізацію, здійснювану в ході розв'язування задач. Крім того, розрізняють типи програмної та структурної систем розміщення інформації. Статичні способи, як правило, пов'язані з програмною реалізацією в процесі трансляції, динамічні — зі структурною реалізацією в процесі інтерпретації.

Система контролю (поточного й діагностичного) залежить від способів виявлення пошкоджень і разових відмов у процесі розв'язування задач, від можливості та способів автоматичної корекції помилок, методик діагностування причин несправильної роботи й проведення контролю в процесі профілактики.

Систему введення й виведення інформації визначають способи фіз. перекодування інформації, кількості і призначення вхідних і вихідних пристроїв і структуру їхніх зв'язків з запам'ятовувальними пристроями й центр. процесором.

Система сполучення процесів обробки інформації, що властива високопродуктивним машинам, залежить від можливостей і способів суміщення в часі процесів розв'язування задач, введення перших даних і отримання результатів обчислювання. Все перелічене вищезазначене з урахуванням пріоритету й ефективності завантаження пристроїв машини. Найрозвиненіші системи сполучення забезпечують можливість розпаралелювання кожного з зазначених процесів шляхом реалізації відповідних процесорів у вигляді агрегатів автономних пристроїв, що працюють одночасно.

Система обслуговування користувачів визначається обраною технологією роботи з машиною. Є два види машин експлуатації машин — режим роботи машини за повним великим завданням і режим «діалога» користувача з машиною (або режим їхньої спільної роботи як «інтенсивного діалога»). У машинах з мультимедійною обробкою інформації перший вид матиме експлуатації машин пов'язаний з режимом пакетної обробки задач, а другий — з режимом розподілу часу між користувачами. Можна сумістити ці два осн. режими. Організацію зв'язку користувачів з машиною та всього процесу її роботи здійснюють *операційні системи*, різні види яких відповідають призначенню машин і «технології» експлуатації їх. Набір значень розглянутих характеристик визначає А. с. ЦОМ. Доцільно поєднавши типові

значення характеристик, можна створити типові А. с. ЦОМ.

Лит.: Лебедєв С. А., Мельников В. А. Общее описание ЦОМ и методики выбора операций М. 1959 Гаушкова В. М. Синтез цифровых автоматов М. 1962 [бібл.огр. с. 464 483]. Аписин В. В., Четвериков П. И. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин М. 1965 [бібл.огр. с. 480]. Рабинович З. И. Элементарные операции в вычислительных машинах К. 1966 [бібл.огр. с. 299 301]. Пайернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирования. М. 1968 [б.б.огр. с. 583 585]. Гаушкова В. М. [та ін.] Вычислительные машины с разл. типами системных интерфейсов. К. 1970 [бібл.огр. с. 254 267]. З. И. Рабинович

**АЛГОРИТМІЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЦОМ** — один з етапів проектування ЦОМ. Див. *Автоматизация проектирования ЦОМ*.

**АЛГОРИТМІЧНИЙ СИНТЕЗ ЦОМ** — описування формальною мовою функціонування цифрової обчислювальної машини та визначення основних характеристик майбутньої машини. А. с. ЦОМ є другим етапом у проектуванні обчислювальних машин. На першому етапі визначають архітектуру машини, набір операцій, які вона реалізує, декомпозицію майбутньої структури машини на великі блоки (пристрої) та швидкості роботи пристроїв і т. д. На етапі А. с. ЦОМ функціонування кожного пристрою і взаємодію між ними описують спеціалізованою мовою *формальною*. Це описування дає відправні дані для наступного етапу синтезу ЦОМ — *блокового синтезу ЦОМ*. Відомо кілька формальних мов придатних для етапу А. с. ЦОМ: ЛОТІС, ЛОКС, АЛОС та ін. Свідками для всіх цих мов є принципи блоковості. Кожен блок (пристрій, вузол) описують незалежно від інших. Зв'язок між блоками здійснюється за допомогою загальних змінних, вставлених в набори значень сигналів на вхідних і вихідних каналах блока. В описі кожного блока є опис внутрішніх змінних блока, операторів, реалізовуваних блоком, і деяких часових співвідношень (остання є не в усіх мовах). Значення зовнішніх каналів блока відповідає значенням зовнішніх змінних в описі, а значення внутр. змінних блока — значенням, фіксованим на деяких умовних *реєстрах*, які є в цьому блоці. Описування на етапі А. с. ЦОМ має бути повним і несуттєвим. Проблема перевірки повноти й несуттєвості формального описування є досить важкою, її ще не розв'язано. Сукупність опису пристроїв формальною мовою та опису зв'язків між ними визначає *алгоритмічну структуру ЦОМ*. Ця структура є відповідним об'єктом для моделювання проектованої ЦОМ на іншій реально існуючій ЦОМ при реальному потоці програм з інтерпретацією функціонування системи команд і структури проектованої машини засобами машини, на якій відбувається моделювання структур цифрової обчисл. машини. Виконуваний етапу А. с. ЦОМ зводиться не тільки до описування й моделювання алгоритмів, а й потребує розробки алгоритмів функціонування пристроїв обчисл. машини і розв'язання таких завдань, як, напр., вибір складу мікро-

операцій, визначення складу регістрів та їхнього призначення, а також розв'язання оптимізаційних завдань, зокрема, підвищення швидкодії пристрою внаслідок паралельного виконання операцій та їх. Див. також *Автоматизація проектування ЦОМ*. Д. О. Пустовий

**АЛМО** мова машинно-орієнтована Розроблено в 1965—66 як проміжну й базову мову універсальної системи програмування. А. являє собою вхідну мову абстрактної обчисл. машини, яку також наз. А. Машина А має типові особливості, властиві найпоширенішим сучасним ЕОМ. У ній є кілька рівнів пам'яті, набір операцій, близьких до систем команд сучасних машин, тощо В машині А передбачено 4 види пам'яті: регістри модифікатори (*М* пам'яті), робочі регістри (*Р* пам'яті), оперативна пам'ять (*У*-пам'ять) і зона, пам'ять (*ЕХ*-пам'ять). Ці види пам'яті призначено зберігати значення — виводжувані, виводжувані й перероблювані в процесі виконання програм. Комірки, з яких складається кожна пам'ять, наз. словами. Розмір слів, відведений для зберігання значень, невизначений, але в мові є засоби, які дають змогу обмежити цей розмір знизу. Для зберігання впорядкованої множини значень (*масиви*) у *У*-пам'яті та в *ЕХ*-пам'яті відводять упорядковану множини слів однакової довжини — масиви слів. Коли моделюють машину А. на конкретній машині, тобто коли виконують на цій машині програму, написану мовою А., ті частини всіх чотирьох видів пам'яті, що їх використано в цій програмі, відображаються на відповідні *зонам'яточувальні пристрої* машини.

*У*-пам'ять призначено зберігати осн. масиви значень, опрацьовуваних у кожний момент виконання програми В кожній програмі точно визначають, скільки слів і якого розміру (розмір обмежується лише знизу) потрібно відвести в *У*-пам'яті та як ці слова називатимуться в програмі. Ціказівки даються описуванням у кожному блоці й мають силу всередині цього блоку. (Програма в мові А має блокову структуру аналогічно до програми в мові *АЛГОЛ-60*). В описі можуть бути й відомості про частоту звертання до описуваних слів, і це дає змогу ефектніше відображати *У*-пам'ять у тих машинах, у яких оперативна пам'ять складається з рівнів різної швидкодії *М*-пам'ять зберігає значення, використувані в індексних виразах, щоб аказувати впорядкований номер елемента в масиві, ці значення наз. *модифікаторами*.

*Р* пам'ять зберігає проміжні результати, що виникають у процесі виконання програми. Значення, що зберігаються в *ЕХ*-пам'яті, недоступні для безпосередньої обробки. Їх можна лише скопіювати у *У*-пам'ять або навпаки Під час моделювання *ЕХ*-пам'ять відображається на допоміжні види пам'яті (барабани, стрічки тощо) конкретної машини. частину *ЕХ*-пам'яті можна відобразити на оперативну пам'ять конкретної машини, що залишилася вільною після відображення

*У*-пам'яті машини А. Масиви слів *ЕХ*-пам'яті (зони, масиви), потрібні кожному блоку, мають бути описані в цьому блоці. В описах можна подати й відомості про характер звертання програми до зон, масивів, які дають змогу найефективніше розмістити ці масиви в допоміжній пам'яті конкретної машини. Для цього *ЕХ*-пам'ять машини А. подають як сукупність носіїв, кожен з яких характеризується певними властивостями: частотою звертання, способом копіювання (довільним чи постійними зонами) та іменною специфікацією, що дає змогу індивідуалізувати носіїв.

У машині А. передбачено обробку таких типів значень: числа послідовності бітів, модифікатори і посилання. Числа можна подавати в нормальній формі, а фіксованою комою та цілі. Для переходу від однієї форми подання до ін. в А. визначено спец. фіції перетворення. Спец. покажчики розміру дають змогу обмежити знизу розмір слова, виводжуваного для зберігання значень. При цьому розмір виражається через значення, тобто покажчик розміру потребує, щоб було відведено слово, в якому можна розмістити значення даного типу з даною кількістю знаків. Під час моделювання машини А. слово можна відображувати як комірку (частину комірки або кілька комірок) конкретної машини, таку, з якою зручно було б проводити операції та яка давала б змогу розміщувати значення, задані покажчиком. Коли в *алгоритмі* немає строгого фіксованого обмеження на точність подання значень, можна користуватися стандартними поняттями: *напислово, слово* й *поліпшне слово*.

Набір операцій та операторів А. відповідає набором операцій сучасних обчисл. машин. До нього включено арифм. і логічні операції та оператори передавання керування, організації циклу, обміну між різними видами пам'яті та введення й виведення. Формули записують у вигляді правого польського виразу, що цілком задає порядок дій і разом з тим не зумовлює адресності машини. Операнди визначено так, щоб на кожній конкретній машині будь-якому операндові в кінцевому підсумку відповідала ясна адреса, в якій є, скажімо, ознака модифікації за допомогою одного з регістрів-модифікаторів. За операнд править безпосереднє зображення значення (константа), назва змінної, назва оператора (мітка) й посилання на назву слова чи оператора. Будь-яка зі змінних може мати індекс. Змінні з індексом починають слова, які є елементами одновиірних масивів слів. Значення індексного виразу повинно мати форму подання модифікатора. В мові А. передбачено засоби, що дають змогу зазначати, що певні процеси можна виконувати паралельно. Це використовують, моделюючи машину А. на машинах з кількома процесорами або з ін. можливостями сумісного виконання. Крім того, є змога задавати вказівки для здійснення автомат. *програма сегментації*. Компілятори з мови А. створено





в кілька рядів по колах. Потрібна літера обирається відповідним нахилом і поворотом головки. Відбиток досягається ударом самої головки по паперу (барвний стрічник). Знаки в рядку тут друкуються послідовно. Широко застосовуються в АЦДП, сконструйовані на базі *телетайпа* або електрифікованої друкарської машинки.

Найбільш поширений в СРСР ротаційний А. д. д. п. типу АЦПУ-128, основні тех. дані якого такі: швидкість друкування —  $420 \pm 20$  рядків за хвилину, знаків у рядку — 128, знаків на друкувальному колесі — 96. До набору символів входять російський і лат. алфавіти, розділові знаки, цифри, символи арифметичних дій і *логіки математичної*. Пристрій сконструйовано у вигляді високого столу (мал. 1), у верхній частині якого розміщено власне друкувальний механізм, а в нижній — електронну схему керування. З блок-схеми АЦПУ-128 (мал. 2) видно структуру цього пристрою, зв'язаний між блоками й між пристроєм та ЕОМ. 128 друкувальних коліс, насаджених на валі впритул, утворюють суцільний друкувальний барабан. З валом цих коліс зв'язаний привод барвної стрічки і привод паперу. Інтегральний механізм забезпечує переривчасто-поступальний рух паперу в проміжки часу між друкуванням рядків. Проти кожного друкувального колеса в напрямних встановлено пуансон з еластичним (капроновим) виконечником, якому надає руху електромагніт. Спрямовуючи удар від важеля електромагніта, пуансон рухається за інерцією і б'є по паперу. Повертає пуансон у вихідне положення пластинчаста пружина. Для улагодження роботи друкувального механізму з ЦОМ служить індукційний генератор синхронізуючих імпульсів, який видає 96 позиційних імпульсів (за кількістю літер за колесі) та один нульовий імпульс (відповідний початковій оберту барабана). Схема керування забезпечує зберігання прийнятої від ЦОМ інформації, що має бути надрукована в поточному рядку, і формування керуючих сигналів, які надходять від ЦОМ і спрямовуються в ЦОМ.

Лит. Алісимова Б. В. Четвертьков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 (Благодаря).

АЛЬБЕР - модифікація альфа-системи призначена для трансляції програм, записаних альфа-мовою, в машинні програми для ЕЦОМ «БЭСМ-6». Транслятор системи А. працює на ЕОМ типу «М 20» і видає на перфокартки програму в код команд «БЭСМ-6», або записує її на стрічку *магнітну* для наступного передавання безпосередньо в машинку по спец. каналу. Використання альфа-мови для А. допускає подання до тексту програми машинних команд та екстракодів «БЭСМ-6» у символічному вигляді. Є аналогічні альфа-системи засоби налагодження й методики об'єднання в єдиний комплекс програм, які працюють окремо. Виконання трансляції А. програми відбувається під керуванням операційної системи «БЭСМ-6». А. Н. Брюсов.

АЛЬФА-МОВА — мова програмування, що являє собою розширення мови АЛГОЛ-60 щодо змісту, операцій, виразів, а також описів. Її розроблено в 1960. У розділі про *зміни* і додано новий тип — комплексний. Кожен величині чи змінній в індексах можна приписати якусь кількість вимірювань і порядок щодо кожного вимірювання. Багатовимірні величини в А.-м. позначає множину скалярних компонент, які утворюють прямокутний багатовимірний *масив*, аналогічний масивам АЛГОЛУ-60. Приклади відповідних описів: комплексний *z*-масив; дійсний *A* масив  $n \times n$ ; логічний масив *B*  $[1:10, 1:20]$  — *масив* в *P*. В останньому прикладі компонентами матриці *B* є вектори довжини *P*. Для змінних в індексах в А.-м. допустимим є використання порожніх індексних позицій, яке означає, що одночасно взято всі компоненти, які відповідають певному діапазону змін даного індексу.

Щодо операцій і виразів в А.-м. всі зазвичайні операції поширено на багатовимірні величини як покомпонентні дії, введено й стандартні операції над векторами й матрицями. Запис  $y[i:j, k:l, t+2, t, t+1]$  є прикладом записання «геометричної» операції формування в послідовності значень зазначених виразів 5-вимірного вектора, приєднаного векторній змінній  $y[i:j]$ . Іншою геом. операцією є компонування, що дає змогу зростити вздовж зазначеного в дужках вимірювання серію подібних масивів: запис  $[(1)(2) A, B], [(2) C, D]$  означає кінцеву матрицю вигляду  $\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$ . Логічні вирази в А.-м. можуть мати вигляд ланцюжків нерівностей виду  $a \leq x < b$ . Скризь, де згадуються списки виразів (крім перемикальних списків і списків параметрів у процедурах), допускають перелічення виразів за якимось натуральним індексом в використанні крапок напр.

$[a[1, 1], \dots, a[1, n]], \dots$

$[a[10, 1], \dots, a[10, n]]$

означає формування матриці порядку  $10 \times n$ . В А.-м. допустимими є конструкції вигляду

для  $i: = 1, \dots, P$  циклу  $a[i, 1]: = \dots :=$

$= a[i, 10] := 1$

або вигляду

якщо  $b[k] < \dots < b[k + n]$ , то на  $M, N, P$ .

В останньому прикладі використано оператор переходу за складовою міткою, яка дає змогу передати керування всередину блока в блок з міткою *i* знаходить блок з міткою *N*, у якому відбувається передавання керування на оператор з міткою *P*. До описів додано описи, що вводять явні позначення компонент багатовимірних і комплексних величин, напр.,  $A = [A[i, j]]$  і  $Z = a + ib$ . Є описи, що задають початкові значення змінних, напр.,  $pi = 3.141592$ . Є й скорочена форма описування функцій, що їхній спосіб обчислення задається виразом,

напр., дійсна ф-ція ОБ'ЄМ ( $R$ ) =  $J_1 \times R^1 \times \dots \times R^k \times 3$  Будь який змінний спец. описом мови приписати верхній індекс, який дає змогу записувати рекурентні співвідношення між послідовними значеннями такої змінної. А.-м. містить засоби, що дають змогу описувати вид пам'яті (барабан, стрічка, перфокарти), на якому зберігаються машинні чи блоки програми, включати до програми машинні команди з символічними адресами, використовувати бібліотеку стандартних підпрограм і об'єднувати в один комплекс окремо транслювані програми. В А.-м. англ. службові слова замінені на російські, а алфавіт ідентифікаторів розширено до малих і великих букв рос., лат. і грец. алфавітів. Для перфорації програм, записаних А.-м., використовують спеціально розроблені клавішні пристрої з клавіатурою на 256 знаків і модифіковані рукоятні теледайки, в яких символ підкреслювання. Див. також *Альфа-система*. Див. Ершов А. П., Кожухов Г. Н., Волошин Ю. М. Вводный курс системы автоматического программирования М. 1961 16 бюллет. с. 173. 174. Ершов А. П., Кожухов Г. Н., Потоскин И. В. Руководство к пользованию системой Альфа Новосибирск, 1963. А. П. Ершов.

**АЛЬФА-СИСТЕМА** — система програмування альфа-мовою для ЕОМ типу «М-20». Розроблено її в 60-х роках 20 ст. Складовими частинами А.-с. є транслятор — програма, що транслює програми з альфа-мови на мову машини, і система палладжування. Характерною особливістю А.-с. є застосування двофазної трансляції з використанням внутр. мови й наявність спец. алгоритмів оптимізації транслюваної програми на основі мішаної стратегії програмування та формальних перетворень програми. Транслятор складається з 24 блоків, які працюють послідовно, заг. місткість їх 50 тис. команд. Пересічна швидкість трансляції — прибл. 150 команд робочої програми на 1 го роботи транслятора. Перша фаза трансляції полягає в перекладі програм з альфа-мови на внутр. мову, яка являє собою машинно-незалежну мову з простою структурою операторів і з фіксованим форматом змінних. Осн. символами внутр. мови є 15-розрядні двійкові коди, що зображують ідентифікатори, знаки операторів та операторів і різні розділювачі. Частина розрядів коду — ідентифікуюча, а частина — ознакова, що містить класифікацію осн. символів та інформацію про деякі властивості ідентифікаторів. Кожен оператор має обмежену кількість операндів, якими можуть бути лише ідентифікатори. Осн. типи операторів: пересилання, присвоєння результату виконання арифм. чи логічної операції, передавання керування (умовні, безумовні та з поверненням), формування та записання адрес і звертання до підпрограм стандартних і системи динамічного розподілу пам'яті. В індексах змінних записано тільки ліві частини залежностей від параметрів операторів циклу; решту обчислень з індексів виносять. Перекладаючи на внутр. мову (див. *Мова ЦОМ внутрішня*), програмують вираз, процедури

і дії над комплексними та багатовимірними величинами. Інформацію про змінні з описів переносять у таблиці й ознакові розряди ідентифікаторів. У конструюванні таблиць застосовують *спискову структуру* розміщення інформації. Ідентифікатори переводять у 15-розрядний код за допомогою функції розміщення. Вирази програмують за два перегляди: під час першого перегляду провадять декомпозицію виразів на прості оператори і вводять символи проміжних величин, під час другого визначають тип і порядки за змінними проміжних величин і масивів. Під час програмування процедур застосовують мішану стратегію в трансляторі передбачено 8 способів програмування операторів і описувань процедур від універсального до найпростішого, — що відрізняється один від одного складністю реалізації та ступенем загальності. На основі аналізу характеру входжених формальних параметрів у тіло процедури й ступеня складності фактичних параметрів для кожної процедури вибирають найпростіший спосіб, який забезпечує правильність застосування її. Програмування дій над багатовимірними величинами полягає у введенні в програму циклів виконання покомпонентних дій. При цьому провадять оптимізацію, що полягає в об'єднанні (де це можливо) кількох циклів, що виникають, в один і в зменшенні кількості проміжних масивів. Операції над комплексними величинами реалізують адебільшого відкритим вставленням підпрограм виконання окремих дій.

На різні внутр. мови транслятор виконує оптимізуючі формальні перетворення транслюваної програми: чищення циклів і економію збіжних виразів. Під час чищення циклів на ділянці програми, яка становить цикл, знаходять оператори, що обчислюють при повтореннях цього циклу те саме значення (такі оператори виносять з циклу й розміщують перед ним). Економію виразів провадять у межах взазалежних ділянок програм, що складаються з операторів, які виконуються строго підряд і допускають розгалуження, спрямленні лише умовними виразами в первісній програмі з кількох збіжних операторів, які обчислюють те саме значення на ділянці економії, залишається лише один і вміщується в таке місце, де результат його доступний для використання. При ототожнюванні операторів також застосовують ф-цію розміщення. В індексах провадять перетворення лінійних форм залежностей від параметрів циклів (зведення подібних, виділення вільного члена), спрямованих на спрощення їх.

Друга фаза трансляції полягає в перекладі програм з внутр. мови на машинну. Після того, як побудовано машинні команди, що реалізують основні обчисл. й логічні оператори внутр. мови, програмують цикли і тут застосовують мішану стратегію, що полягає у виборі для кожного заголовка циклу найпростішого з доступних способів організації перелічування параметра, конт-

ролю за кількістю повторень циклу, перед-ресаци та відновлення змінних команд. Використання індекс-регістра організовує так, щоб зменшити кількість команд збереження й відновлення індекс-регістра. Наприкінці другої фази провадять глобальну економію пам'яті, що її відводять для зберігання скалярних змінних і масивів наперед відомої довжини. Спочатку за програмою будують її операторну схему. За однієї оператор беруть квадрантну ділянку програми. Для кожного оператора визначають: номери операторів, змінні, що є аргументами й результатами оператора, та внутр. величини, тобто змінні, що їхні значення виникають і використовуються лише в межах оператора. Для всіх внутр. величин відводять заг. поле, а для кожної пари решти змінних на основі аналізу операторної схеми визначають, чи можна цю пару розмістити на одній ділянці пам'яті. Далі на основі цієї інформації про попарну сумісність провадять економічний лам'яні розподіл. Алгоритми, застосовувані при цьому, тісно пов'язані з алгоритмами розфарбовування вершин графів (див. *Граф розфарбований*). На закінчення провадять локальну оптимізацію одержаної програми, яка використовує машинні команди з суміщенням операцій, в саму програму після компонування й присвоєння істинних адрес ставлять у робоче положення для негайного виконання або видають на перфокартках.

Система налаштування має здатність формувати налаштувальні програми шляхом модифікації первісних програм альфа-модом, яка полягає у змінюванні параметрів програми (задавання значень змінних, застосування спрощених процедур тощо) та у внесенні в текст програми налаштувальних команд (друкування проміжних значень, простежування переходів і підрахунок фактичної кількості повторень циклів). Модифікацію здійснює «нульовий» блок транслятора.

На основі А. с. створено ряд систем програмування для різних ЕОМ, зокрема систему Альфа для ЕОМ «БЭСМ-6».

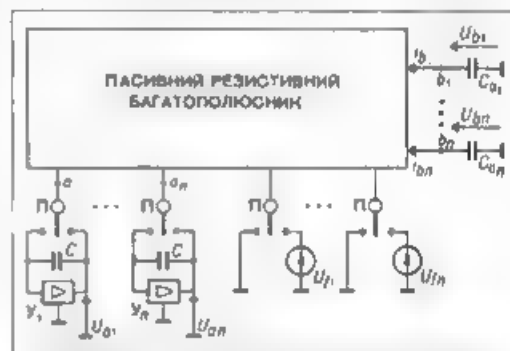
Літ. Альфа-система автоматизації програмування. Новосибірськ, 1987. Ершов А. П., Кожухов Г. П., Поттосия И. В. Руководство к пользованию системой Альфа. Новосибирск, 1988. А. П. Ершов.

**АМПЛИТУДНО-ІМПУЛЬСНА МОДЕЛЬ** — різновид квазіаналогової моделі головним чином алгебраїчних об'єктів; забезпечує неминучу збіжність процесів зрівноважування для лінійних алгебраїчних об'єктів довільного виду. На структурній схемі А.-і. м. (мал.) у правому положенні перемикача П, що перемикаються синхронно й циклічно, конденсатори  $C_k$  заряджаються від діючого напруг джерел  $U_{\mu}$  і вихідних напруг  $U_{\alpha i}$  запам'ятовувальних підсилювачів  $Y_i$ . У лівому положенні перемикача ці конденсатори розряджаються через пасивний резистивний багатополюсник на конденсатори  $C$ , змінюючи їхній заряд. У разі достатньо малого відношення ємкостей  $C_k/C$  такий процес

змиш напруг збігається неминуче при довільній структурі резистивного багатополюсника, причому напруги  $U_{\alpha i}$  стають дуже малими й вектор напруг  $U_{\alpha}^{(k)}$  визначається з виразу

$$E_{\alpha\alpha} U_{\alpha}^{(k)} + I_{\beta} = 0,$$

де  $E_{\alpha\alpha}$  — матриця взаємних провідностей кола між вузлами  $\alpha_i$  та  $\alpha_i$ ;  $I_{\beta}$  — складова вектора струмів  $I_{\beta}$ , що визначається діями вектора напруг  $U_{\mu}$ , коли  $U_{\beta} = U_{\alpha} = 0$



Структурна схема амплітудно-імпульсної моделі.

і конденсатори замкнуті;  $k$  — номер циклу перемикання перемикачів П. Поклавши, що  $U_{\alpha} = Y_{\alpha} x$ ,  $E_{\alpha\alpha} = Y_{\alpha} A$ ,  $I_{\beta} = Y_{\beta} i$ , де  $Y_{\alpha}$ ,  $Y_{\beta}$  — перехідні масштаби, зв'язані співвідношеннями  $Y_{\alpha} \cdot Y_{\beta} = Y$ , робимо висновок, що схему можна розглядати як електронну модель системи рівнянь  $Ax + i = 0$ , де матриця  $A$  може бути довільною неособливою матрицею. Позитивною якістю А.-і. м. є можливість побудови простих стійких моделей лінійних алгебр. об'єктів. До вад А.-і. м. слід віднести низьку чутливість схеми до відхилення вектора  $U_{\beta}$  від нульового значення, спричинену загасанням сигналів при дворазовому проходженні через багатополюсник. На основі описаної структурної схеми можна будувати амплітудно-імпульсні інвертори, суматори, перетворювачі та ін. розв'язувальні елементи й моделі оборотного й необоротного типів.

Літ. Пухов Г. Е. Методы синтеза амплитудно-импульсных электронных моделей алгебраических объектов. В кн. Математическое моделирование электрических цепей, в 2 к., 1984. Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1987 (Библотека, с. 368—584).

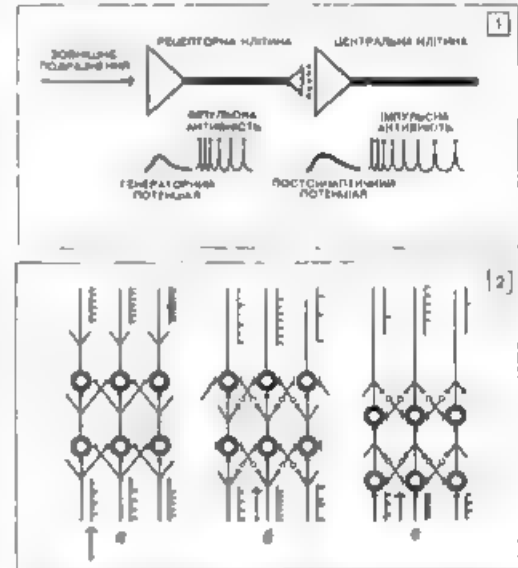
**АНАЛІЗАТОРНІ СИСТЕМИ** — складні нервові структури, що починаються периферичними сприймаючими утворами (рецепторами) і закінчуються нервовими центрами, які розміщені у вищих відділах мозку й забезпечують аналіз сприйнятих подразнень та вироблення на цій основі сигналів для побудови відповідної діяльності організму.

Рецептори та вищі відділи аналізаторів з'єднані провідними шляхами, які завжди

включають у себе ряд проміжних нервових центрів, що забезпечують передачу та проміжне оброблення інформації, яка надходить від рецепторних структур у вищі відділи аналізатора. Фізичною рецепторів є трансформація енергії зовнішнього подразника у процес збудження. Цей процес має здатність самопоширюватися по відростках нервових клітин — нервових волокнах, тому він може бути носієм інформації про зовн. вплив, яка передається у вищі аналізаторні центри. Рецепторні клітини — спеціалізовані, пристосовані до сприйняття певних видів енергії, що надходить від подразника. Спеціалізація рецепторів досягається найвищою з них особливих механізмів, що дають змогу реагувати на дуже малі кількості енергії й перетворюють її на зміни електр. поляризації поверхневої мембрани рецепторних клітин. Такі зміни наз. генераторними, або рецепторними, потенціалами. Ці потенціали, в свою чергу, є безпосередньою причиною появи у зв'язаних з рецепторами нервових волокон процесів збудження (див. *Збудження клітинної теорія*). Нервові імпульси в волокнах істотно не відрізняються один від одного (мал. 1), тому для передавання інформації про подразнення різних рецепторних клітин необхідною умовою є існування різних волокон, що зв'язують ці клітини з вищими аналізаторними центрами. Отже, інформація про якість подразнення кодується в А. с. просторовим розподілом активності в нервових волокнах. Генераторні потенціали в кожній рецепторній клітині за своєю тривалістю відображають тривалість подразнення, що попадає на рецептор (випливає з цього потенціалу звичайно перебуває в логарифмічній залежності від сили зовн. подразнення). Поширюваний імпульс, що й створює генераторний потенціал, є дискретним й короткотривалим (кілька тисячних часток секунди) процесом. Частота їхнього виникнення пропорційна амплітуді генераторного потенціалу й, отже, несе інформацію про силу подразнення. Проте ця пропорційність зберігається лише до певної межі. Наявність після кожного імпульсу періоду абс. та відносної рефракторності (незбудливості) обмежує верхню межу частоти імпульсації від рецептора кількома сотнями імпульсів на 1 сек. За тривалого постійного подразнення рецептора частота імпульсації зменшується, а це в відображенні зменшення чутливості аналізатора до подразнення (*адаптація*). Ця властивість виявляється в різних А. с. не однаковою мірою. Вона є основою поділу на динамічну й статистичну чутливість.

Імпульсація, що виникла в рецепторах, поширюється по волокнах, по послаблюючись, в великому швидкості (кілька десятків м.сек). Це залежить від діаметра відповідних волокон — чим тонше волокно, тим менша швидкість проведення імпульсів. І проміжні, й вищі нервові центри, через які проходять ці імпульси, побудовані за типом екранних структур. З кожною нервовою клітиною нер-

вового центра зв'язані чутливі волокна певних рецепторних клітин, тому вся чутлива поверхня виявляється ніби проекцією на клітини цього центра; така сама проекція зберігається в наступному центрі аж до найвищого. Описана організація дає змогу передавати через наступні центри інформацію про якість подразників, які діють на різні рецепторні клітини. Проекція імпульсів від клітини до клітини не є надто строгою — імпульсація по розгалужених волокнах захоплює почасти й сусідні клітини (мал. 2, а). Характерною



1. Схема периферичної частини аналізатора і системи, що ілюструє співвідношення між зовнішнім подразником, генераторним потенціалом та імпульсовою активністю.

2. Схема галузної структури передавальних даних аналізаторних систем (за Фессаром, 1881): а — схема, в якій між передавальними нейронами існують лише збуджуючі зв'язки б — схема, в якій між передавальними нейронами існують гальмівні зв'язки в — схема, в якій між передавальними нейронами існують зворотні гальмівні зв'язки. На вході й виході кожного волокна показано розряди імпульсів умовної частоти.

рисом діяльності всіх проміжних центрів є наявність у них і збуджуючих і гальмівних процесів. Імпульси, що надходять від рецептора по певній групі волокон, збуджують відповідні клітини, через особливі вставні нервові водночас викликають гальмівні процеси у клітинах, які зв'язані з сусідніми волокнами (мал. 2, б, в). Отже, потім імпульсації від рецепторів, незважаючи на те, що є структурні можливості для втрати специфічності передавання, виявляється функціональне обмеження. Це функціональне обмеження перебуває під динамічним контролем з боку вищих центрів. Імпульсація, що надходить з них по певних волокон, адекватно створювати гальмівні процеси, обмежуючи передавання імпульсації, що надходить від рецепторних структур.

Основними А. є світлова, звукова, хімічна (дистантна — нюх та контактна — смак), травлятична, температура та механічна. У деяких тварин є А. с., які сприймають лоні, електр. поле. Крім А. с., що сприймають зони, подразнення, існує складна система аналізаторів, які сприймають подразнення, що виникають усередині організму (хім. мех. та осмотичні зміни в кровососному руслі, травному апараті, руховому апараті тощо). Висхідні відділи А. с. у вищих тварин містяться в корі великих пізкуля головного мозку. Механізм їхньої діяльності вивчено найменше. Для ряду осн А. с. (світлової, звукової, та механічної) за допомогою електрофізіологічних методів та методів прямого подразнення одержано карти локалізації ділянок аналізу різних якостей подразників. Для інших систем (хім. та температурної) таких даних немає. Див. також Нейрон. Ш. Г. Косіков.

**АНАЛІТИК** — мова програмування, яку орієнтовано на описування інженерних та науково-дослідних задач і яка включає засоби для виконання аналітичних перетворень і засоби спідкування з машиною в діалогов режимі. Розроблено П 1968 в Ін-ті кібернетики АН УРСР. Як підмовину А. містить мову машини «МІР». А. є мовою безпосередньої інтерпретації в машині «МІР-2» (див. «МІР»).

Засоби А. дають змогу в зручній і компактній формі описувати як у числовому, так і в аналітичному вигляді алгоритми розв'язування задач різної категорії й нелінійних рівнянь, знаходити екстрем. точки з застосуванням диференціювання виразів, знаходити наближені розв'язки дифер. рівнянь і рівнянь матем. фізики методом розв'язання в ряди тощо.

Особливістю мови А. є широке використання загальноприйнятої матем. символіки. Крім ариф. операцій, операції відношень та елементарних функцій, в А. використовують і операції диференціювання, інтегрування, підсумовування та ін. (їх позначають відповідно  $d$ ,  $\int$ ,  $\Sigma$ ), константи  $e$ ,  $\pi$  тощо; крім цілих і десяткових чисел допускають і раціональні дроби, які записують у вигляді  $a/b$ , де  $a$  та  $b$  — числа, напр.  $4/17$ . Тип чисел визначається виглядом його запису. Неоднозначність, що виникає ( $4/17$  з одного боку, являє собою дріб, а з другого — ариф. вираз, для обчислення якого треба  $d$  поділити на  $17$  і одержати десятковий результат), усувають, вводячи вказівки **ДРОБИ** **ДЕСЯТКОВІ** і **ДРОБИ НЕДЕСЯТКОВІ**.

Осн. видом перетворюваної інформації в мові А. є вираз. На відміну від інших мов, у т. ч. й від мови машини «МІР-1», де значеннями змінних можуть бути лише числа, в А. областю значень змінних є множина математичних виразів.

Приклад запису мовою А.:  $K \times d/dX (Y) + \int (Y \uparrow 2) dX + \Sigma (I = 1, N, A[I] \times \cos (X[I]))$ , що в загальноприйнятому записі означає

$$k \frac{dy}{dx} + \int y^2 dx + \sum_{i=1}^n a_i \cos x_i.$$

Вирази можна зводити до деяких канонічних форм, у яких автоматично відбуваються спрощувальні типу  $P + 0 = P$ ,  $P \times 0 = 0$ , зводяться подібні члени, скорочуються дроби тощо. Зведення виразів до тієї чи іншої канонічної форми здійснюється або автоматично під час виконання деяких операторів, або оператором ЗВЕСТИ, в якому зазначається тип форми. Крім виразів, осн. одиницями інформації в А. є рівності. Рівність має вигляд:  $P_1 = P_2$ , де  $P_1$  та  $P_2$  — вирази. Над рівністю можна виконувати деякі операції, проте осн. роль рівностей полягає в зазначенні правил перетворення виразів, здійснюваного оператором ЗАСТОСУВАТИ. Застосувати рівність  $P_1 = P_2$  до виразу  $P$  — це значить знайти у виразі  $P$  підвираз  $P_1$  й замінити його на вираз  $P_2$ . Напр., якщо рівність  $\sin(\pi/2) = 1$  застосувати до виразу  $A \times \sin(\pi/2) + B \times (\sin(X)) \uparrow 2$ , то в результаті утвориться вираз  $A \times 1 + B \times (\sin(X)) \uparrow 2$ .

У рівностях деякі змінні можуть відігравати роль параметрів — змінних, замість яких у процесі застосування рівності можна підставляти будь-які вирази. Напр., застосування рівності  $(A \uparrow B) \times (A \uparrow B) = A \uparrow 2 - B \uparrow 2$ , де  $A$  та  $B$  — параметри, до виразу  $(e \uparrow X + e \uparrow (-X)) \times (e \uparrow X - e \uparrow (-X))$  дає вираз  $(e \uparrow X) \uparrow 2 - (e \uparrow (-X)) \uparrow 2$ . При цьому параметри  $A$  та  $B$  в процесі порівнювання являють значення  $A = e \uparrow X$ ,  $B = e \uparrow (-X)$ . Вираз в параметри, що його наз. ще й образом або зразком, використовують для розпізнавання структури виразів в А. розпізнавання структури виразів здійснюється за допомогою оператора ПОРІВНЯТИ. Напр., порівнювання образу  $A \times X \uparrow 2 + B \times X + C$ , де  $A, B$  і  $C$  — параметри, з якимось виразом  $E$ , дає змогу визначити, чи є  $E$  квадратним тричленом; при цьому значеннями  $A, B, C$  стануть коеф. цього тричлена (коли  $E$  — тричлен). Так, для випадку  $E = (P + 5) \times X \uparrow 2 + X$  параметри матимуть значення  $A = P + 5$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$ .

Оператори ПОРІВНЯТИ й ЗАСТОСУВАТИ дають змогу здійснювати довільні аналітичні перетворення, проте для найтипівіших дій — диференціювання та інтегрування виразів — є відповідні оператори ДИФЕРЕНЦІЮВАТИ й ІНТЕГРУВАТИ (ІНТЕГРУВАТИ охоплює інтегрування широкого класу функцій, у т. ч. більшості інтегралів, що містяться у вільних довідниках).

Для знаходження значень виразів є оператори, результатом діяння яких може бути не тільки число, а й вираз. Напр., нехай є описи виразів  $A = 2 \times X \uparrow 2 + X - 1$  і  $B = 3 \times X \uparrow 2 + X + 2$ ; тоді результатом діяння оператора ОБЧИСЛИТИ  $A$  буде вираз  $5 \times X \uparrow 2 + X + 1$ , що присвоюється як значення змінної  $A$ .

Для зручності проведення аналітичних перетворень в А. впроваджується поняття робочої зони (PЗ), яка відповідає робочому аркушеві паперу, де математик виконує аналітичні обчислення, випробовуючи ті чи інші

методи, помилючись, виправляючи помилки і т. ін. Щоб вмістити вираз у РЗ, є оператор зворотання ВЗЯТИ А, де А — назва виразу. Для називання інформації, що міститься в РЗ, є оператор НАЗВАТИ А. РЗ є частиною пам'яті ЦОМ, за якою можна постійно спостерігати за допомогою пристрою відображення — екрана. Екран дає змогу здійснювати не лише зворотний зв'язок (виведення виразів та графіків), а й прямий (за допомогою *світлового олівця* на екрані підкреслювати підрази і надалі обробляти не весь вираз, а лише підкреслену частину його; можна є підкреслених частин komponувати новий вираз, витирати непотрібну інформацію тощо). Екраном зручно користуватися, працюючи в режимі діалога.

Режим діалога між людиною та машиною, реалізований у машинах серії «МНР», має особливо велике значення при проведенні аналітичних обчислень, коли попереднє планування роботи з урахуванням усіх можливих ситуацій утруднене. Діалог здійснюється шляхом почергового обміну порціями інформації. Для людини такою порцією є речення (послідовність описів та операторів). На кожне речення машина може відповісти всіма наявними засобами введення інформації. С широким набір операторів виведення, операторів керування послідовністю дій програми (умовний оператор, оператор переходу, оператори циклу, процедури тощо) Л. Г. Глушк в В. М. (та ін.) АНАЛІТИК (алгоритмічний язык для описання чисельних і розривних процесів з використанням аналітичних преобразованій). «Кибернетика», 1971, № 3

Т. О. Гринченко

## АНАЛІТИЧНІ ПЕРЕТВОРЮВАННЯ НА ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МАШИНАХ — ДИВ.

*Символьні перетворювання на ЕОМ.*  
АНАЛОГ — об'єкт вивчення (явище, предмет, установка, схема чи пристрій), який має схожість (аналогію) з якимось відношенні з іншим об'єктом (чи об'єктами). Міркування й висновки, що оперують властивостями А. наз. міркуваннями й висновками за аналогією. Коли розв'язують тех. задачі, аналогія передбачає наявність певних однозначних співвідношень між характеристиками А. Окремим випадком таких співвідношень є різновид подібності — аналогова подібність. У цьому разі А. можна розглядати як *аналогову модель*. Для обґрунтованого аналізу за допомогою А. (висновків за аналогією) потрібно встановити умови подібності й обмежень у виконанні їх, з належним матем. формулюванням (див. *Подібності теорія*). Без цього переходу від виявленої за допомогою А. часткової схожості між об'єктами до глибокої й різносторонньої схожості між ними не забезпечує вірогідності висновків, хоч часто може наводити на здогади, що їхню правильність чи помилковість треба з'ясувати дальшими дослідженнями і перевіркою. Аналогії можуть приводити й до хибних висновків (хибні аналогії), якщо, застосовуючи їх, не враховують якісної своєрідності віставлюваних явищ і не користуються умовами подібності й обме-

женнями у виконанні їх. Так, напр., хибними є застосовувані іноді аналогії між законами біол. еволюції й суспільного життя та багато інших.

В. А. Веніков.

АНАЛОГ ЦИФРОВИЙ, цифрова модель — різновид модельового пристрою, в якому органічно поєднуються цифровий спосіб подавання інформації з аналоговим способом побудови структури моделі та переробки інформації. Основа А. ц. створюють обчислювальні елементи для виконання арифм. і логічних операцій (суматори, інвертори, помножувачі, перетворювачі функціональні, інтегратори, індикатори екстремальних сигналів тощо). Ці елементи з'єднуються між собою при розв'язуванні задач так, щоб виконувалися потрібні матем. залежності між змінними модельованого об'єкта. Для подавання інформації в А. ц. здебільшого використовують непозиційні способи кодування, напр., у вигляді потоку імпульсів або систем числення в заданих класах. Маючи А. ц. осн. елементів електр. кіл — опорів, індуктивностей, ємностей, джерел енергії та ін., можна побудувати А. ц. електр. кіл і широкого класу об'єктів, для яких відомі аналогові та квазіаналогові моделі у вигляді електр. кіл. Типовим прикладом А. ц. є цифрові диференціальні аналізатори (див. *Цифрова імітаційна машина*) для дослідження систем автоматич. керування. А. ц. застосовують у системах програмного керування верстатами й виробничими процесами та в системах керування рухомими об'єктами. Останнім часом помітний прогрес у створенні А. ц. для розв'язування екстремальних задач *програмування математичного*. А. ц. забезпечує велику точність розв'язку задач, наочність і оперативність цього розв'язування та високий ступінь автоматизації процесів введення й виведення інформації; але його швидкості менша за швидкість аналогової обчислювальної машини.

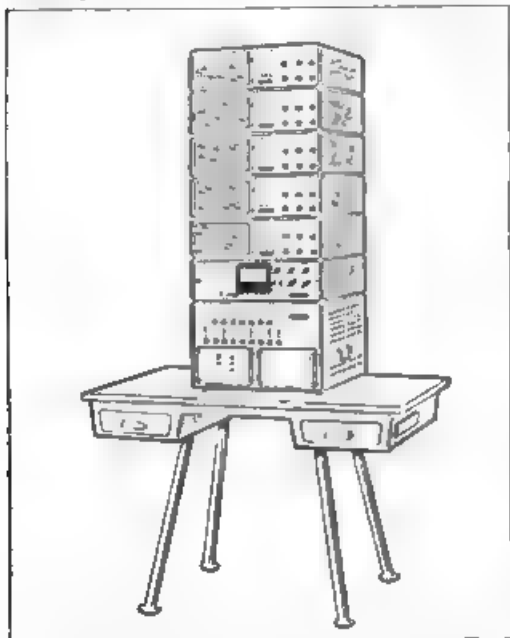
Лит.: Воронков А. А. (та ін.). Цифровые аналоги для систем автоматического управления. М. — Л., 1961 [обл. гр. с 191, 194]. Калієв А. В. Введение в теорию цифровых интеграторов. К., 1964 [обл. гр. с 246, 248]. Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. Пер. с англ., ч. 2. М., 1968.

В. В. Васильев.

«АНАЛОГ-1» — аналогова обчислювальна машина (АОМ) настільного типу, призначена для дослідження різних систем автоматичного регулювання та керування. Належить до класу машин малої потужності, з основу її покладено блоковий принцип побудови, який забезпечує різний якісний і кількісний склад розв'язувальних елементів при відносній похибці розв'язку  $\pm 0,25\%$ . «А. 1» дає змогу розв'язувати лінійні й нелінійні диф. рівняння з постійними коеф. до 10-го порядку включно, причому кожний операційний блок забезпечує розв'язування рівнянь до 2-го порядку (для розв'язування складніших задач допускається об'єднання кількох таких АОМ). При розв'язуванні задач шукані ф-ції виражаються в машині у вигляді напруг постійного струму, які можуть змінюватися в



межах  $\pm 100$  в. Початкові умови й збурення можуть встановлюватися в діапазоні  $\pm 100$  в з точністю  $\pm 0,1$  в. Шукані ф-ції вимірюються компенсаційним вольтметром. Передбачається можливість одночасно вводити до 30 постійних коеф. за допомогою десятиоборотних потенціометрів. До комплексу АОМ «А» входить 5 операційних блоків, один блок керування й вимірювання та один живлення. Операційний блок має вставку з чотирма розв'язувальними підсилювачами і вставку кіл зворотних зв'язків (кожну буває



Аналогова обчислювальна машина «Аналог-1».

трьох типів і визначає склад матем. дій, які можна виконувати на цьому операційному блоці). До машини додають 7 вставок зворотних зв'язків: 5 лінійних, одну — множення та ділення і одну — універсального функціонального перетворювача. При експлуатації машини передбачено можливість розносити окремі блоки, щоб забезпечити кілька робочих місць.

Лит. Грубов В. И., Кириак В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. М., 1969 (библиогр. с. 179 — 181).

В. І. Грубов, В. С. Кириак.

**АНАЛОГІ** (грец. в одн. — *аналогія* — відповідність, схожість) — наявність у двох і більше об'єктах спільних умов (напр., властивостей, відношень), які дають змогу переносити інформацію про один об'єкт (модель) на інший (прототип). Логічні структури виводів при цьому можуть бути різними. Коли переносувану інформацію пов'язано з властивостями, а відставою для перенесення є спільність ознак, тип А. наз. *парадегмію*. Термін «А.» давньогрец. філософи й математики застосовували до ототожнювання *відношень*.

Цей підхід до А. мавув дальшого розвитку в сучасній науці, наприклад, у понятті ізоморфізму.

Виводи за А. можна класифікувати насамперед за характером засновків і висновків. Над цією класифікацією в свою чергу надбудовують класифікацію за типами основ. У виводі за А. засновок описує модель, а висновок — прототип. Розрізняють два осн. типи виводів за А.: А. за властивостями й А. за відношеннями.

А. за властивостями має підрозділи. Перенесення якоїсь цілком певної властивості з моделі на зразок наз. А. за константами, якщо ж переносять взагалі будь-яку властивість, — це А. за змінними. При цьому константи можуть бути й логічного характеру, як, напр., несуперечливість, і не логічного, напр., існування. А. за змінними можна підрозділити на два підкласи: підклас позитивних А., коли на прототип переносять властивість, знайдену в моделі, й підклас негативних А., коли на прототип переносять фактор відсутності якоїсь властивості.

А. за відношеннями охоплює найістотніші в практиці наукового дослідження типи виводів. Форми цих А. багатоманітніші за А. властивостей. У сучасній науці широко застосовують різні види А. Так, у кібернетичі досліджують широкий клас А., в яких моделі й прототип беруть із природи, суспільства й мислення. У функціональній А. на основі тотожності функцій порівнюваних систем роблять висновки, що й структури цих систем тотожні. В кібернетичі широко використовують і висновки, обернені функціональній А., і перенесення функцій з моделі на зразок на підставі тотожності структур. Цей вид А. можна назвати структурною аналогією. Такі А. допомагають використовувати знання про будову тих чи інших організмів тварин, щоб створювати штучні пристрої, які функціонували б аналогічно (див. *Біоніка*).

Велику роль відіграють у кібернетичі А. типу ізоморфізмів. Ототожнюючи логічні й числові співвідношення, використовують ЕОМ для розв'язування логічних задач. Відповідність між станами елементів ЦОМ і станами *нейронів* дає підставу використовувати цю машину як модель нервової системи — і навпаки. А. типу ізоморфізму мавули застосування в процесі формулювання поняття про *інформаційну кінетик*.

Коли йдеться, напр., про співвідношення машини й мислення, використовують каузальну А.: причини однакових явищ повинні бути однаковими. Іноді при цьому каузальну А. доповнюють іншими формами А. Так, згля. логік А. Тьюрінг (1912—54) обґрунтовує положення про тотожність функцій людини й машини за допомогою експерименту заміни людини машиною в думці, тобто застосовує А. функціональної замінності — імітацію. Це спричинило критику, сумнівів в правомірності такої А. й навіть правдивої філософії до заперечування кібернетики.

В загальному випадку вивід за А. є лише ймовірним. Визначати правдивий вивід за А. в загальному випадку є важкою проблемою в галузі логіки науки. Але стосовно до певних форм і окремих випадків форми виводу за А. можна виявити, що умови правомірності виводу існують. Щодо, наприклад, виводу від спільності одних властивостей до спільності інших, то можна сказати, що такий вивід буде тим правомірнішим, чим більше спільних властивостей встановлено у моделі й прототипу. При цьому важливо, щоб властивості було добираємо без упередженості. Якщо спільність ознак подано у засновках, то ознаки повинні максимально відрізнятися одна від одної. Разом з тим переконування властивість має бути такого самого типу, як і ті, спільність яких встановлено в засновках. Так, якщо спільність між моделлю і прототипом встановлено за властивостями мех. характеру, то й переконування властивість матиме механічний характер.

Велике теор. і практичне значення має А. між нервовою системою та обчисл. машинами, конструювання яких є однією з основних проблем кібернетики. Таку А. використовують для поліпшення конструкції машин і для кращого розуміння функціонування нервової системи (див. *Нейронні сітки*). Обчисл. машини типу *цифрових диференціальних аналізаторів* працюють за принципом А. В них створюють фіз. систему, описану тим рівнянням, яке треба розв'язати, а потім зміриваються одержують потрібні результати. Так, розподіл струму в електр. колах деякого виду описують тими самими рівняннями, що й розподіл т-ри в доменній печі, тиски у струменях повітря, які обтікають літак, і т. д. У такому випадку *аналогові обчислювальні машини* дає числовий розв'язок таких рівнянь у вигляді певних значень струму на виході машини. Як правило, АОМ розв'язують обмежений клас однотипних задач з низькою точністю розв'язків. *Цифрові обчислювальні машини*, в яких інформацію представлено цифровими кодами, не мають над АОМ, вони універсальні й працюють з практично необхідним ступенем точності. Проте цифрові машини не можуть повністю відобразити реальні процеси мислення, здійснювані в мозку. В діяльності мозку важливу роль відіграють і аналогові процеси, причому інформація, очевидно, багато разів змінює свою форму з дискретної на неперервну й навпаки. Якщо ЦОМ багато операцій виконує послідовно, а це потребує виняткової точності, то величезні адитивності мозку, велика точність і надійність його роботи досягаються не за допомогою швидкодії, точності й надійності виконання кожної операції, а через механізм паралельної обробки інформації і якості своєрідної форми представлення її, лише віддалено відображувані в цифрових і аналогових машинах.

Ряд складних задач, наприклад, розв'язування в цифровій формі екстремальних задач, автомат. класифікація й навчання складних

форм поведінки приводить до неадекватних висног щодо кількості операцій та обсягу пам'яті. Разом з тим подібні задачі нерідко легко розв'язують найпростіші фіз. системи, наприклад, промінні світла «відшукують» найкоротший шлях з оптично неоднорідному середовищі або газ у посудині переходить з нерівноважного стану до рівноваги, «відшукуючи» максимум *ентропії*. В розв'язуванні задачі відшукання максимуму «ентропії» молекули газу відіграють роль «обчислювальних елементів», які працюють паралельно.

Створити таку пристрої за А. є можливим, який реально працює, — це одне з найважливіших завдань кібернетики. Розв'язувати цю задачу або способом *комплікування машин* чи створення *гібридних обчислювальних машин*, або способом створення моделей на зовсім нових принципах, які б адекватніше відображували суть мислення.

Літ.: Матеріалістическа диалектика и методы естественных наук М., 1989. Умнов А. И. Аналогия в практике научного исследования. М., 1970. Олсоя Г. Ф. Лингвистические аналогии. Пер. с англ. М., 1947 (библиогр. с. 213-214).

А. І. Убімов, В. І. Возданович.

**АНАЛОГОВА МОДЕЛЬ** — допоміжна щодо досліджуваної системи (об'єкта), система (квазіоб'єкт), яка має фізичну природу, відмінну від природи досліджуваної системи, і на певних етапах пізнання може замінити цю систему, даючи дослідникам цінні відомості. А. м. може бути матеріальною штучною (коли її виготовляють як установку, пристрій, схему), призначену для дослідження якоїсь групи явищ і матеріальною природною, коли характеристиками одного (фіз., соціального, економічного тощо) явища користуються для того, щоб одержати характеристики ін. природи в ін. умовах. А. м. може бути уявною, тобто бути якимсь умовним образом, що дає інформацію про досліджувану систему. Матем. апарат аналогового моделювання ґрунтується на висновках *подібності теорії*.

Матеріальна штучна А. м. може бути єдиним пристроєм, що дає безпосередньо пряму аналогію й відтворює весь хід досліджуваного процесу з допомогою будь-якого іншого процесу, що має іншу фіз. природу. До таких моделей (їх іноді наз. математичними—аналоговими) належать, напр., мех. маятники, що його розглядають як модель для вивчення електро-мех. коливань синхронного електр. генератора. Здебільшого А. м. виконують як електр. моделі, дуже зручні для експериментів. У цих моделях струм, напруга, а іноді й потужність є *аналогом* величин ін. фіз. природи. До електр. моделей прямої аналогії належать такі різновиди А. м., як моделі з суцільним середовищем, з провідною пластинкою (провідним папером), електролітичні ванни й різні сіткові моделі полів (див. *Моделювання на суцільних середовищах*).

На відміну від А. м., що побудовані за принципом прямої аналогії, існують *квазіаналогові моделі*, що ґрунтуються на принципі еквівалентності. А. м. може бути структурною моделлю, що відтворює на основі рівнянь окре-

мі етапи процесу за ланками модельованої системи, і кожен їх зв'язаний, — відтворює весь процес. Напр., структурною А. м. є універсальна *аналогова обчислювальна машина* (див. «МН», «ЭМУ»).

Спеціалізовані А. м., що передбачають, на відміну від універсальних, розв'язування лише вузької групи задач, іноді будують лише частково як структурні. Напр., у розрахунковому столі електр. мережі, призначеному досліджувати стійкість і перехідні процеси в електр. системах, реалізуються електромех. аналогії під час дискретного (за інтервалами часу) зображення руху генератора і *модельовання фізичного розподілу струмів, напруг і потужностей у мережі*.

Лит. Венников В. А. Теория подобия и моделирование применительно к задачам электроэнергетики. М., 1966 (Б.бл. р. с. 474, 442, 311). Чейко А. В. Основы аналоговых вычислительных машин. М., 1967. И у х о в Г. Е. Методы анализа и синтеза канальных электронных цепей. К., 1967 (Библиогр. с. 560, 564). В. А. Венников.

**АНАЛОГОВА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА (АОМ)** — обчислювальна машина, яка обробляє інформацію, подану в аналоговій (неперервній) формі. В загальному випадку АОМ — якесь спеціально сконструйоване матеріальна система (модель), призначена для підтримування (модельовання) певних, характерних для даного класу задач, співвідношень між неперервно змінними фіз. величинами (машинними змінними) — *аналогами відповідних відправних матем. змінних розв'язуваної задачі*. Залежно від фіз. процесу, покладеного в основу *моделі математичної*, розрізняють електричні (електронні), електромех., мех., гідравлічні, пневматичні й інші АОМ, перехідні процеси й статичні стани в яких характеризуються співвідношеннями машинних змінних. Як такі змінні використовують електр. напруги й струми, кутові й лі-

Васіловія, аналогові розрахунки використовували під час землемірних робіт і для складання карт. Близько 80 р. до н. е. греки побудували планетарій, за допомогою якого вони визначали положення Сонця й планет, використовуючи птолемеєву (геоцентричну) модель Сонячної системи. На початку 15 ст. в Самарканді узяб. математик ал-Кафі збудував механізм для визначення моменту часу, коли дві планети перебувають в одній меридіональній площині. Пізніше побудували ще один обчисл. пристрій, за допомогою якого визначали положення Сонця, Місяця й п'яти відомих тоді найближчих планет у заданий момент часу. В 1620 створено першу лічильну лінійку, в якій використано поняття логарифма. Близько 1814 нім. інженер Геріан сконструював перший планіметр, яким вимірювали на плані площу, обмежену довільною кривою. Безпосереднім попередником сучасних АОМ став мех. інтегратор, що його винайшов 1876 англ. фізик Дж. Дж. Томсон. Англ. фізик У. Томсон (Кельвін) висловив ідею зв'язати кілька таких інтеграторів для розв'язування дифер. рівнянь. Принцип аналогових розрахунків, що його запропонував Кельвін, застосовують дотепер. У 1904—11 вітчизняний вчений О. М. Крилов, мабуть, не обізнаний з роботами Кельвіна, розробив теорію подібних пристроїв і побудував АОМ з чотирма інтеграторами.

На початку 20 ст. було багато зроблено в галузі створення аналогових пристроїв для знаходження коренів многочленів і для обчислювання коеф. Фур'є. В 1931 в США створено *АОМ механічну* Але через громоздкість, велику вартість і малу швидкість ці АОМ не мали широкого застосування. В кінці 30-х — на початку 40-х років 20 ст. в СРСР, США й інших країнах з'явилися *АОМ електромеханічні*, а в середині 40-х років —

Механічна й електричні системи аналогії

Таблиця 1

| Механічна система                                   | Аналогічна електрична система    |                                      |
|---|----------------------------------|--------------------------------------|
|   | 1-а система                      | 2-а система                          |
| Маса $m$  | $L$ — індуктивність              | $C$ — ємність                        |
| Переміщення $x$                                     | $i$ — заряд                      | $\Phi$ — потокозчеплення             |
| Швидкість $v = \frac{dx}{dt}$                       | $I$ — струм                      | $U$ — напруга                        |
| Сила $Q = m \frac{dv}{dt}$                          | $L \frac{di}{dt} = E - e. p. c.$ | $C \frac{dU}{dt} = I - \text{струм}$ |
| Коефіцієнт швидкісного тертя $\alpha = \frac{Q}{v}$ | $\frac{E}{I} = R$ — опір         | $\frac{1}{U} = \gamma$ — провідність |
| Коефіцієнт пружності $\frac{Q}{x}$                  | $\frac{1}{C}$                    | $\frac{1}{L}$                        |

нійш переміщення, тиск у рідкому й газовому середовищах тощо. Напр., в електронних АОМ машинними змінними, як правило, є електр. напруги.

Принципи аналогових обчислювань застосовували ще на витанку історії. У 3800 р. до н. е. на землях, на яких згодом виникла

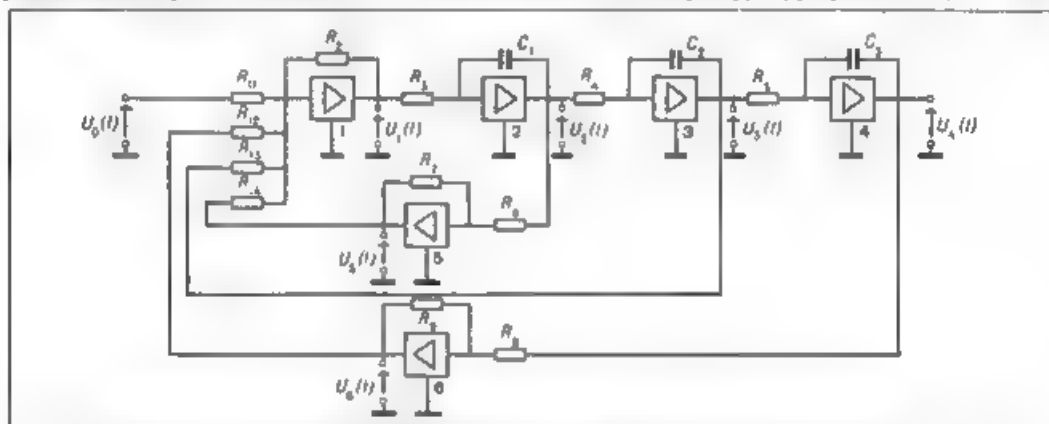
електронні. Так, уже 1945 під керівництвом рад. електротехніка Л. І. Гутенмахера створено електронну аналогову машину з періодичною розв'язувань. Тоді ж під керівництвом С. О. Лебедева (нар. 1902) побудовано АОМ для розв'язування систем звичайних дифер. рівнянь, АОМ на підсилювачах операційних

створено з нашої країни в 1949. У 40—50-х роках 20 ст. розроблено та вдосконалено багато осн. елементів і вузлів сучасних АОМ. Це дало змогу зменшити розміри машин і підвищити точність їхньої роботи.

Сучасні АОМ поділяють на дві групи: на машини, побудовані за принципом простої аналогії, і на машини, побудовані за принципом складної аналогії. У машинах, що діють за принципом простої аналогії, зв'язок між машинними змінними та змінними відправних розв'язуваних рівнянь здійснюється за допо-

простої аналогії, які являють собою набір розв'язувальних елементів, призначених реалізувати елементарні матем. операції або сукупності їх. Під час розв'язування задачі ці елементи поєднуються один з одним відповідно до виду заданих рівнянь.

Загальний порядок розв'язування задач на АОМ полягає ось у чому. 1) На основі заданої системи рівнянь складають *структурну схему моделі*, яка становить блок-хемму сполучення *розв'язувальних пристроїв* АОМ, строго відповідну структурі рівнянь. 2) За зада-



Структурна схема моделі для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь 3-го порядку

могою постійних коефіцієнтів. У машинах, побудованих за принципом складної аналогії, цей зв'язок не виступає в явному вигляді, а є складнішим. До машин цієї групи належать, наприк., машини, побудовані за принципом полілінійної подібності, і квазіаналогові машини (див. *Квазіаналогова модель*).

Т. ч., АОМ простої аналогії призначено для виочислення якогось матеріального об'єкта за допомогою об'єкта іншої фіз. природи. Це можливо лише в тому разі, коли обидва об'єкти можна описати аналогічними за формою рівняннями. У табл. 1, наприк., показано *аналогію* між мех. системою і двома типами електр. систем.

За інший приклад можна взяти аналогію між електростатичним, постійним магнітним і стаціонарним електр. полями (див. табл. в ст. *Моделювання на суцільних середовищах*). Подібну аналогію можна одержати для гідрравлічних, пневматичних, електродинамічних та інших систем.

Одне з провідних місць серед машин простої аналогії займають сіткові АОМ (див. *Електричні моделюючі сітки*), принципи дії яких полягає в наближеній реалізації дифер. рівнянь у частинних похідних, представлених у скінченних різницях за допомогою сіток, що складаються з  $R, L, C$ -елементів. При цьому всю ділянку, в якій знаходяться розв'язок, розбивають на кілька елементарних об'єктів і для кожного з них будують електр. схему заміщення. Великого поширення в науці й техніці набули структурні АОМ

ними макс. значеннями змінних відправних рівнянь обчислюють масштабі коефіцієнти, які являють собою відношення змінних відправного рівняння до відповідних машинних змінних (див. *Програмування АОМ*). 3) За коефіцієнтами відправних рівнянь і за обчисленими масштабовими коефіцієнтами обчислюють значення параметрів схеми (визначили опорів та ємностей, параметри неолінійних розв'язувальних елементів і варіаторів коэф.). 4) Розв'язувану задачу набирають на АОМ за допомогою *набірника* поля. Набирання задачі на АОМ являє собою поєднання розв'язувальних елементів відповідно до обраної структурної схеми і встановлення необхідних параметрів схеми. 5) Настроюють схему і розв'язують задачу. Розв'язок задачі у вигляді функції часу записує самописець, або осцилограф. В окремих випадках досить переглянути розв'язок на електроннопроменевій трубці осцилографа (див. *Пристрої записування аналогової інформації*).

На мал. наведено структурну схему розв'язування лінійного дифер. рівняння 3-го порядку

$$a_0 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dx(t)}{dt} + a_3 x(t) = y(t),$$

побудовану методом зниження порядку похідної. Тут

$$U_1(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \cdot \frac{1}{M_1}, \quad U_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{1}{M_2},$$

Короткі технічні характеристики АОМ простей аналогів

Таблиця 2

| Тип АОМ    | Вид рівнянь                    | Максимальний порядок розв'язуваних диференціальних рівнянь | Допустима тривалість інтегрування, сек        | Габарити, см або займана площа, м <sup>2</sup> | Споживана потужність, кет |       |
|------------|--------------------------------|--|---|--|---------------------------|-------|
|            |                                |  |   |  | 26 а                      | 220 а |
| «ИПТ-6»    | Лінійні                        | 9  | 150   | 20×40  | 0,5                       | 2     |
| «ИПТ-9»    | «                              | 16   | 200   | 700×80×120                                     | 1,3                       | 5     |
| «ЭМУ-3»    | Не лінійні                     | 9  | 200—400                                       | 822×478×1320                                   | —                         | 2,1   |
| «ЭМУ-7»    | Лінійні                        | 6  | 150   | 120×41×70                                      | 0,06                      | 0,35  |
| «МН-7»     | Не лінійні                     | 6  | 150   | 0,5  | —                         | 0,74  |
| «МН-8»     | «                              | 32   | 1800  | 60   | —                         | 25    |
| «ЭМУ-4»    | «                              | 6  | 200   | 68×50×100                                      | 0,07                      | 0,76  |
| «ЭМУ-8»    | «                              | 6  | 2000  | 68×50×54                                       | 0,07                      | 0,35  |
| «МН-10»    | «                              | 6  | 200   | 0,3  | —                         | 0,130 |
| «ЭМУ-9»    | Набір із стандартних елементів | —  | 5000  | 35×35×30                                       | —                         | 0,06  |
| «МН-6»     | Набір не лінійних елементів    | —  | Не обмежена                                   | 43,8×45,8×33,8                                 | —                         | 0,7   |
| «ОДА»      | Не лінійні                     | 19   | 150   | 250×50×175                                     | —                         | —     |
| «МН-14»    | «                              | 30   | 1000  | 60   | —                         | 15    |
| «ЭМУ-10»   | «                              | 26   | 1000  | 20   | —                         | 2     |
| «МН-11»    | «                              | 9  | Частота повторень розв'язування — 100 раз/сек | —  | —                         | —     |
| «МН-10М»   | «                              | 80   | 100   | 15   | —                         | 10    |
| «Одг-трощ» | «                              | 55   | 1000  | 0,2  | —                         | 0,25  |
| «МН-16»    | «                              | 50   | 1000  | 171,4×108,6×53                                 | —                         | 25    |
| «МН-17М»   | «                              | 80   | 100   | 75,20×104,2×2390                               | —                         | 0,1   |
|            |                                |  |   |  |                           | 15    |

Короткі технічні характеристики деяких вітчизняних спеціалізованих аналогових і піваналогових обчислювальних машин

Таблиця 3

| Тип машини            | Призначення машини  | Кількість характеристик розв'язуваних задач   | Габарити, см або займана площа, м <sup>2</sup> | Споживана потужність, кет |
|-----------------------|---|---|--|---------------------------|
| «ЭМСС-7М»             | Для розрахунку статично невизначених систем типу баластів рам, можна застосовувати й для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь | Кількість схем-аналогів стрижнів — 75   | 133,4×83,6×138                                 | 0,4                       |
| «Альфа»<br>(«ЭМСС-Я») | Для розрахунку різних систем безвельної механіки  | Кількість схем-аналогів стрижнів — 85   | 4  | 3,5                       |
| «Ітератор»            | Разом з АОМ для розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь з лінійними граничними умовами  | Максимальний порядок розв'язування системи рівнянь — 7<br>Максимальне число точок в інтервалі інтегрування які входять у крайові умови, — 4 | 30×128×85                                      | 1                         |
| «Аркус»               | Для розв'язування лінійних і не лінійних диференціальних рівнянь з лінійними й нелінійними крайовими умовами                                | Максимальний порядок розв'язуваних рівнянь — 8  | —  | 1,8                       |
| «Оптимум-3»           | Для розв'язування транспортів за априорного програмування   | Максимальна кількість пунктів виробництва — 20, пунктів споживання — 60   | 2,5  | 2,2                       |
| «АСОР-1»<br>(«Ритм»)  | Для розрахунку втручаннях за заданого планування та керування   | Максимальне число робіт у графіку — 200 подій у графіку — 148   | 190×230×200                                    | 2                         |
| «УСМ-1»               | Для розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного й параболічного типу   | Степа має 1458×2 точок  | 80   | 30                        |

$$U_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{1}{M_3}, \quad U_4(t) = \frac{x(t)}{M_x}.$$

$$U_5(t) = \frac{v(t)}{M_v},$$

де  $M_1, M_2, M_3, M_x, M_v$  — масштабні коеф. Обчислюють їх, виходячи з максимально можливої величини напруги (максимальної змінної)  $U_{\max}$  на виході розв'язувального елемента. При цьому обов'язково треба, щоб було задано макс. значення змінних відправного розв'язуваного рівняння. Тоді

$$M_1 = \frac{\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)_{\max}}{U_{\max}}, \quad M_2 = \frac{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{\max}}{U_{\max}},$$

$$M_3 = \frac{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{\max}}{U_{\max}}, \quad M_x = \frac{x_{\max}}{U_{\max}},$$

$$M_v = \frac{v_{\max}}{U_{\max}}$$

Проте макс. значення змінних розв'язуваного рівняння не завжди заздалегідь відомі. В цих випадках масштабні коеф. задають орієнтовно, а в процесі налаштування схеми, коли напруги на виходах розв'язувальних елементів починають перевищувати  $U_{\max}$ , їх емпірично перераховують до потрібних значень. В тих випадках, коли задано макс. значення всіх змінних, параметри схеми розраховують, використовуючи систему рівнянь, яка зв'язує вхідні й вихідні величини кожного з розв'язувальних елементів.

Тепер АОМ широко застосовують для розв'язування важливих практичних задач науки й техніки. Зокрема, за допомогою АОМ простої аналогії розв'язують дифер. рівняння в частинних похідних, які описують події різної фіз. природи (теплові, електричні, магнітні та ін.), процеси тепло- й масообміну, мех. властивості фіз. систем тощо. Осн. застосування структурних АОМ простої аналогії — розв'язування лінійних і нелінійних звичайних дифер. рівнянь із заданими початковими умовами (задача Коші). Проте безперервне вдосконалювання розв'язувальних елементів і методів розв'язування задач приводить до того, що ці машини почали використовувати й для розв'язування крайових задач звичайних дифер. рівнянь, лінійних і нелінійних алгебр., трансцендентних та інтегр. рівнянь і деяких типів рівнянь у частинних похідних. АОМ простої аналогії використовують і як керуючі пристрої в різних системах керування і як вимірювальні пристрої в системах збирання й обробки інформації. Такі АОМ ефективно застосовують і для дослідження нелінійних систем автомат. регулювання й керування. У зв'язку з цим виділяється ціла низ-

ка задач: аналіз динаміки систем; визначення оптимальних з погляду деяких критеріїв параметрів, структури й зовнішніх втручень систем при випадкових впливах. Осн. перевагами АОМ у розв'язуванні перелічених задач є значно більша, ніж у ЦОМ швидкодія, порівняно невелика вартість, можливість розв'язувати задачі в реальному масштабі часу й простота спількування оператора з машиною. Вадю АОМ є порівняно велика похибка розв'язку, проте в більшості практичних задач відправна інформація задається з похибкою, суцільною з похибкою АОМ, тому ця вада далеко не завжди відіграє істотну роль.

Дальше вдосконалення АОМ здійснюють у технологічному (переведення елементів на інтегральні схеми або гібридні схеми) і в конструктивному відношенні (зменшення похибки елементів, автоматизація процесу підготовки задач до розв'язування і самого розв'язування їх). Дуже перспективними є використання заразом аналогових і цифрових обчисл. машин (див. Гібридна обчислювальна машина, Комплексування машин), воно дає змогу завдяки поєднанню переваг машин обох типів одержувати новий якісний ефект. У табл. 2 наведено короткі тех. характеристики вітчизняних АОМ простої аналогії, у табл. 3 — технічні характеристики спеціалізованих аналогових і квазіаналогових машин.

Л. М. Тетельбаум Л. М. Электронное моделирование М., 1959 [Бібліогр. с. 48—319], Коган В. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования М., 1963 [Бібліогр. с. 496—505] Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин К., 1964 Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных устройств. Н., 1967 [Бібліогр. с. 560—564], Грубоб Н. Н., Кирдяв В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства Справочник К., 1969 [Бібліогр. с. 178—181] Карпилюк У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Пер с англ. М., 1962 Вычислительная техника Справочник Пер с англ. т. 1 Аналоговые вычислительные устройства М. — Л., 1964, Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины Пер с англ. ч. 1—2 М., 1967—68 [Бібліогр. ч. 1, с. 453—456]

Г. С. Пухов.

**АНАЛОГО-ЦИФРОВА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА** — див. Гібридна обчислювальна машина.

**АНАЛОГО-ЦИФРОВА СИСТЕМА** — див. Комплексування машин.

**АНАЛОГО-ЦИФРОВИЙ ПЕРЕТВОРЮВАЧ**, перетворювач аналог — код — пристрій, який здійснює автоматичне перетворення (вимірювання та кодування) неперервно-змінних у часі аналогових величин на еквівалентні значення числових кодів. Кількісний зв'язок між аналоговою величиною  $A(t_i)$  і відповідною їй цифровою величиною  $N_i$  для будь-якого моменту часу  $t_i$  визначається співвідношенням

$$N_i = \frac{A(t_i)}{\Delta A} \pm \delta N_i,$$

де  $\Delta A$  — врок квантування, тобто аналоговий еквівалент одиниці молодшого розряду коду;  $\Delta N_{\text{к}}$  — похибка перетворення на цьому кроці. Як вхідні аналогові величини  $A(t)$  здебільшого використовують часові інтервали, кути повороту, електр. напруги (струми), частоту коливань та фазові зсуви. Вихідні коди  $N_k$  подають найчастіше у двійковій, двійково-десятковій або десятковій системах числення. Розрізняють перетворювачі в безпосередній відмінок, перетворювачі послідовної лічби, перетворювачі в порівняльнич кодуванням і перетворювачі комбіновані. А. н. п. мають задовольняти певну сукупність техн., метрологічних та експлуатаційних вимог. Їхні осн. характеристики: швидкодія (визначається макс. кількістю одноразових перетворень за сек), точність (характеризується макс. сумарною або середньоквадратичною похибкою перетворення, яка в свою чергу складається з статичної та динамічної похибок), чутливість і кількість каналів. Статична похибка складається з похибки дискретності (зукволеної квантуванням сигналу за рівнем) та іструментальних похибок (їхні джерела для різних типів перетворювачів різні); динамічна випливає внаслідок перехідних процесів у колах порівнювання й еталонних джерелів і через несталість аналогової величини в процесі кодування. Внаслідок квантування сигналу за часом при відтворенні його за дискретними відліками з'являється ще й похибка наближення. Чутливість характеризується мінім. значенням аналогового сигналу, що його перетворювач надійно розрізняє як одиницю коду. Кількість каналів визначає максимальну кількість давачів аналогових величин, які можна одночасно під'єднати до перетворювача.

Літ. Гитис Э. П. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. М. - Л., 1961 [бібліогр. с. 364, 374]. Дроздов Е. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации. М. 1964 [бібліогр. с. 539, 541]. Кончалов А. И. Преобразователи формы информации. Н. 1965 [бібліогр. с. 174, 175]. Получившие свое распространение и совершенствующие преобразователи информации. Л. 1967 [бібліогр. с. 308, 316].

А. І. Кончалов

**АНОТУВАННЯ АВТОМАТИЧНЕ** — процес складання короткого змісту (анотації) документа за допомогою електронної цифрової обчислювальної машини. В два підходи до розв'язування проблеми А. а. 1) логіко-граматичний, що спирається на повний синтаксичний і логічний аналіз тексту оброблюваного документа; 2) статистико-ймовірнісний, який ґрунтується на використанні кореляцій між частотою елементів тексту та їхнім значенням. Необхідною умовою реалізації логіко-граматичного підходу є попередній синтаксичний аналіз тексту, внаслідок якого кожному слову приписуються відомості про його зв'язки з ін. словами. При цьому підході найбільш уживаним є метод А. а., який полягає в зведенні речень до стандартного вигляду суб'єкт - предикат - групи залежних від них слів. Із стандартних речень виділяються

структура типу суб'єкт — група залежних від нього слів. Припускають, що повторення цих структур свідчить про їхню семантичну цінність. Порівнюючи структури, що повторюються, їх стандартизують за допомогою списків синонімії. Набір іменних словосполук, повторюваних у тексті, становить наразі анотації. Статистико-ймовірнісні методи А. а. ґрунтуються на двох гіпотезах: 1) найчастіше повторювані слова в тексті — найбільш значущі; 2) відрізок тексту, в якому найбільше часто повторювалих слів, найбільш значу-

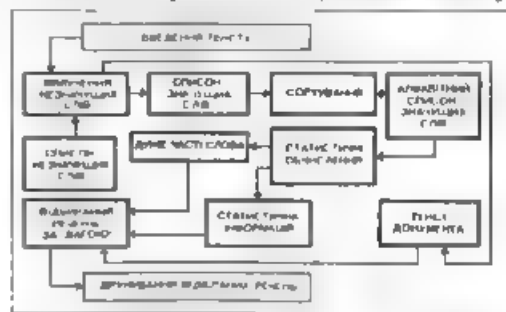


Схема автоматичного анотування за методом Р. Луна

щий. Логіко-граматичні методи А. а. далекі від практичної реалізації внаслідок труднощів щодо повної автоматизації синтаксичного аналізу. Статистико-ймовірнісні методи А. а. реалізуються легко. Коли їх використовують, в результаті А. а. утворюється не зв'язний текст, а набір розрізаних слів і словосполук (див. *Індексування*). Для об'єднання їх у зв'язні речення розробляють спец. алгоритми. В інформаційній практиці використовують системи А. а., які ґрунтуються на статистико-ймовірнісних методах. Див. також *Реферування автоматичне*. В. А. Москович.

**АНСАМБЛЬ ПОВІДОМЛЕНЬ** — сукупність повідомлень, вироблених джерелом повідомлень із заданими статистичними властивостями.

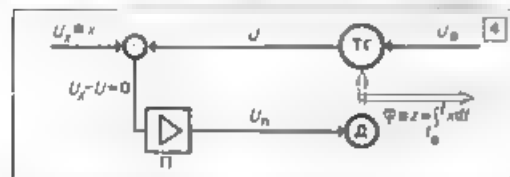
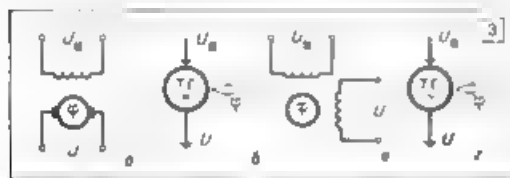
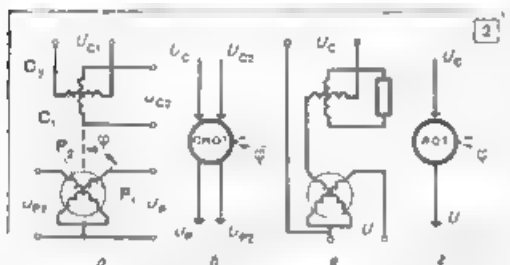
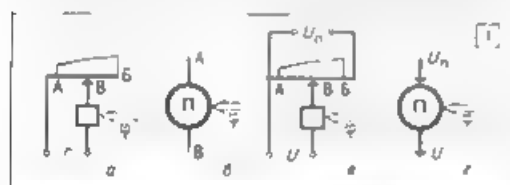
**АНТИГРАДІЄНТ функції** — вектор, компоненти якого дорівнюють за абсолютною величиною компонентам градієнта функції, але мають протилежний знак.

**АОМ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНА** — комплекс найпростіших електромеханічних і механічних аналогових обчислювальних пристроїв (АОП), які реалізують математичні операції додавання, віднімання, множення, ділення, відтворення функції одного або двох аргументів, інтегрування та диференціювання. Вхідними й вихідними фіз. величинами електромех. АОП можуть бути механічні (збільшеного кут повороту) й електричні (переважно напруга постійного чи змінного струму). АОМ є, не такі надійні в роботі (особливо, якщо вони мають ковзні контакти), вони чутливіші до зміни т-ри й вологості, але, як правило, їх простіше виготовити і вони дешевші. В багатьох АОМ є є принципові похибки. Точність АОМ є. можна збільшити, зменшую-



чи навантаження, застосовуючи високоякісні матеріали, старанно виготовляючи їх тощо. Для всіх електромех. АОП характерне те, що в них немає природної оборотності. До електромех. АОП належать в основному потенціометри, обертові трансформатори й тахогенератори.

Потенціометр (мал. 1, а-в) становить опір з двома нерухомими (А, Б) і одним рухомих (В) контактами. Наявність рухомого контакту дає змогу використовувати потенціометр як змінний опір (ЗО), що змінюється за законом  $r = f(\varphi)$ , або як подільний напруги



1. Потенціометр: а — як змінний опір (б — умовне позначення його); в — як подільник напруги (г — умовне позначення його).
2. Обертовий трансформатор: а — синусно-косинусний (б — умовне позначення його); в — лінійний (г — умовне позначення його).
3. Тахогенератор: а — постійного струму (б — умовне позначення його); в — змінного струму (г — умовне позначення його).
4. Інтегровальний пристрій (П — підсилювач, Д — двигун).

(ПН), вихідна напруга якого дорівнює  $U = \frac{U_n}{r_n} f(\varphi)$ , де  $\varphi$  — кут повороту повзунка,  $r_n$  — повний опір,  $U_n$  — напруга живлення потенціометра. Особом потенціометра є калі-

брований дріт, намотаний на плоский каркас. Повзунок у вигляді важеля з контактною шпилькою, притиснутою до дроту, в місці, де немає ізоляції, закріплюють у спец. стакані. Потенціометр як ПН застосовують для відтворення залежностей  $z = xF(y)$ , зокрема як множильний пристрій, що реалізує  $z = xy$ . Потенціометр як ЗО використовують для відтворення ф-цій  $z = F(x, y)$ . Застосування ЗО в мостових схемах дає змогу реалізувати дуже складні залежності, напр.,

$$z = \prod_{k=1}^m F_k(z_k) \prod_{j=1}^n F_j(y_j) \quad (1)$$

Синусно-косинусний потенціометр відтворює одночасно дві ф-ції  $z_1 = x \sin y$ ,  $z_2 = x \cos y$ .

Обертовий трансформатор (мал. 2, а-в), або синусно-косинусний обертовий трансформатор (СКОТ), являє собою індукційну електр. мікромашину в двох статорних ( $C_1, C_2$ ) та двох роторних ( $P_1, P_2$ ) обмотках, яка має один мех. вхід  $T$  (кут повороту ротора), два електр. входи  $U_{C1}, U_{C2}$  (амплітуди напруг, що живлять обмотки  $C_1, C_2$ ) й два електр. виходи  $U_{P1}, U_{P2}$  (амплітуди в. р. с., індукованих в обмотках  $P_1, P_2$ ), при цьому  $U_{P1} = k_T (U_{C1} \sin \varphi + U_{C2} \cos \varphi)$ ,  $U_{P2} = k_T (U_{C2} \sin \varphi - U_{C1} \cos \varphi)$ , де  $k_T = \text{const}$ . СКОТ широко використовують для моделювання різних залежностей з тригонометричними ф-ціями, напр.,  $z_1 = x \sin y$ ,  $z_2 = x \cos y$  та ін. СКОТ з особливим з'єднанням обмоток (мал. 2, в, г) перетворюється на лінійний обертовий трансформатор (ЛОТ) з вихідною напругою, що дорівнює  $U = k U_C \varphi$ ,  $|\varphi| \leq 60^\circ$ , де  $k = \text{const}$ .

Тахогенератор (мал. 3, а-в) — електр. мікромашина, що генерує напругу

$$U' = k U_3 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{де } k = \text{const}, U_3 — \text{напруга}$$

збудження,  $\varphi$  — кут повороту ротора чи якоїсь призначеної для реалізації операції диференціювання. Щоб відтворити операцію інтегрування, тахогенератор вмикають у схему інтегровального привода (мал. 4). В АОМ в. на постійному струмі застосовують потенціометри й тахогенератори постійного струму; на змінному — обертові трансформатори й тахогенератори змінного струму. Практично застосовують лише спеціалізовані АОМ в. Проте потенціометри як найпростіші електромех. АОП широко використовують і в універсальних електронних АОМ, напр. «МН-7», «МЛУ-10» та ін.

Лит. Ходоров Т. Н. Электромеханические индукционные счетно-решающие устройства Л., 1980 [6бл.огр с 180-181]. Лебедев А. Н. Счетно-решающие устройства М., 1988. Воденцев А. Т. Потенциометры М., 1949 [6бл.огр. с. 322-326]. А. М. Лебедев.

АОМ ІТЕРАТИВНА — аналогова обчислювальна машина, що здійснює процес розв'язування задач протягом якоїсь кількості циклів. Машина має додаткові властивості незалежного керування і виконує потрібний мінімум логічних і програмних операцій, у ній є

пристрої для вибирання й передавання інформації в одного циклу операцій в інший (паралельний чи наступний). Програму розв'язування задають здебільшого на *мабінному полі*, а лікпо розв'язують вузько спеціалізованою задачі, процес здійснюється відповідно до *алгоритму*, реалізованого пристроєм керування. Як правило, в АОМ і, реалізують ітераційні способи розв'язування (напр., *ітератори*). Але є й АОМ і, в яких на кожному циклі реалізується принципово точне розв'язування першоподі задачі за фіксованим значенням деяких параметрів, що змінюються від циклу до циклу. Це буває, напр., при розв'язуванні задач оптимізації систем автомат. регулювання, рівнянь у частинних похідних тощо.

Літ. див. до ст. Аналогова обчислювальна машина  
І. М. Нітенберг

**АОМ МЕХАНІЧНА** — комплекс найпростіших механічних аналогових обчислювальних пристроїв (АОП), які здійснюють математичні операції додавання, віднімання, множення, ділення, відтворення функцій одного чи двох аргументів, інтегрування та диференціювання. Ці пристрої називають ще лічально-розв'язувальними механізмами (ЛРМ). Механічні АОП набагато надійніші (а іноді й точніші) за електричні, електромеханічні та ін., в них не протікають електромаг. перехідні процеси, і здебільшого для них не потрібні спец. джерела живлення. Їхні вади — відносно великі габарити й вага, складність виготовлення, велика вартість, мала гнучкість при комбінуванні їх в АОМ. Механічні АОП у багатьох випадках витіснені електро-мех. і електр. АОП, але практичного значення вони не втратили. Застосовують їх, коли треба забезпечити велику надійність роботи або коли функції та їхні аргументи, що їх реалізують, обов'язково треба відтворювати мех. переміщеннями. Особливо широко застосовують такі ЛРМ, як підсумовувальні (коничні диференціальні) й функціональні перетворювачі (кулачкові механізми, механізми з некрутими зубчастими колесами, з графіками нелінійних залежностей та з періодичними шкалами). У більшості ЛРМ є не більш як по два входи й один вихід, на яких фігурують фіз. величини — кути повороту  $\varphi$  або поступальні переміщення  $L$  веденого (вихідного) й ведучих (вхідних) ланок. Аналітичний вираз, який описує поводження найпростішого мех. АОП, є законом руху веденої ланки й може мати вигляд:  $\varphi_2 = \varphi(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\varphi_2 = \varphi(\varphi_1, L_2)$ ,  $\varphi_1 = \varphi(L_1, L_2)$ , або  $L_2 = \varphi(L_1, L_2)$ ,  $L_2 = \varphi(\varphi_1, L_2)$ ,  $L_1 = \varphi(\varphi_1, L_2)$ , де  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  і  $L_1$ ,  $L_2$  — переміщення ведучих ланок. Багато АОП мають т. а. природну оборотність, тобто допускають змінювання на прямому передаванні переміщення по одному з входів на зворотний. Ця властивість збільшує можливість застосування їх для реалізації не лише прямих матем. операцій, а й обернених (напр., множення й ділення), але для цього треба вжити спец. заходів, щоб забезпечити передавання руху в потрібному напрямі.

Осн. розрахунками, що їх доводиться проводити, проектуючи й застосовуючи ЛРМ, крім значущого для АОП розрахунку масштабів, є силовий розрахунок (він полягає у визначенні зусиль або моментів, що їх треба прикласти до ведучих ланок, щоб подолати навантаження на ведені ланки) й розрахунок мертвих ходів (який дає змогу встановити точність відтворення відповідної матем. операції) АОМ м. бувають спеціалізовані й універсальні (див. також Аналогова обчислювальна машина, АОМ електромеханічна). Літ. Кобринський Н. Е. Математические машины непрерывного действия. М., 1954 (библиогр. с. 444—447); Лебедев А. Н. Счетно-решающие устройства. М., 1968. А. М. Лебедев.

**АОМ ПНЕВМАТИЧНА** — обчислювальна машина неперервної дії, в якій роль машинних елементів відіграють величини тиску повітря в різних точках спеціально побудованої мережі. Осн. елементами АОМ п. є дроселі (пневматичні опори), пневматичні ємності й мембрани. Дроселі бувають постійні, регульовані, змінні й нелінійні. Постійний дросель — це ділянка каналу пневматичної мережі, на якій співвідношення між різницею тисків на кінцях ( $p_1 - p_2$ ) і витратою повітря  $G$  має вигляд  $G = a(p_1 - p_2)$ , де  $a$  — сталий для цього дроселя коефіцієнт (коефіцієнт витрати). В регульованих дроселях коеф.  $a$  можна змінювати. У змінних дроселях коеф.  $a$  змінюється в процесі розв'язування задачі залежно від часу чи від іншої змінної. Регульовані й змінні дроселі будують переважно у вигляді сопла і якогось загородження. Відстань від сопла до загородження змінюється, а залежно від цього змінюється й коефіцієнт витрати. Нелінійні дроселі характеризуються нелінійною функціональною залежністю витрати від різниці тисків. Коеф.  $a$  в цьому разі є складною функцією геометрії дроселя і параметрів газу. Їх зазвичай визначають експериментально й обробляють у критеріях подібності — числах Рейнольдса.

Пневматичні ємності являють собою гаузі й проточні камери. Внаслідок стисливості повітря тиск у камері зростає в міру її заповнення. На основі діючих дроселів і пневматичної ємності в пневматичі будують вперіодичну ланку. Тиск на вході ланки позначений з тиском у камері (його тут вважа-

ють за вихідний) рівнянням  $\tau \frac{p_{\text{вих}}}{dt} + p_{\text{вих}} = k p_{\text{вх}} + k_0 p_{\text{ат}}$ , в якому коеф.  $k$  і  $k_0$  залежать від коеф. витрати дроселя, а  $\tau$  — ще й від місткості камери. Отже, коли на вході тиск сталий, на виході він змінюється за експоненціальним законом.

Мембрани використовують, щоб перетворювати тиск повітря на мех. переміщення. Переміщення це надто мале, воно становить величину порядку сотих часток міліметра, але й цього достатньо для того, щоб перемішувати загородження в дроселі. Саме такий зв'язок дуже часто використовують, конструюючи різні блоки АОМ п. У пневма-

тиці найчастіше застосовують мембранні з жорстким центром

АОМ п., як і електронна аналогова обчислювальна машина, складається з набору різних функціональних блоків. Входи й виходи цих блоків являють собою штуцери, які для розв'язування даної задачі з'єднують планками відповідно до з'єднань електронних АОМ. Іноді схема мережі може бути жорсткою, тоді блоки АОМ п. складають на платах, з'єднуювальні канали в яких вилізують, штампують чи витравлюють. Осн. функціональними бло-

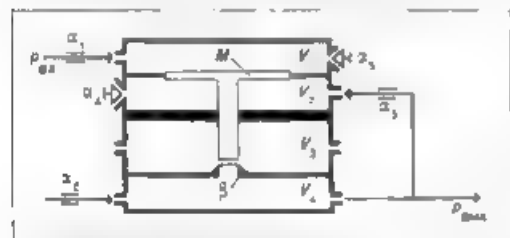


Схема пневматичного підсилювача.

ками АОМ п. є відключач, суматор, інтегратор, множильний пристрій та функціональний перетворювач.

Підсилювач (мал.) складається з дроселя β типу сопло-заслінка, яким керує мембранний блок М, трьох постійних дроселів α<sub>1</sub>, α<sub>2</sub>, α<sub>3</sub>, двох регульованих дроселів α<sub>4</sub> і α<sub>5</sub> і чотирьох пневмоємностей V<sub>1</sub>—V<sub>4</sub>. В сміність V<sub>1</sub> через дросель α<sub>1</sub> подається зовнішній тиск p<sub>вх</sub>. Тиск у камері V<sub>1</sub> діє на мембрану, шток якої є заслінкою дроселя β. Внаслідок переміщення заслінки змінюється тиск у камері V<sub>2</sub>. Цей тиск створюється джерелом живлення і є вихідним. Пропорційна залежність p<sub>вих</sub> від p<sub>вх</sub> забезпечується негативним зворотним зв'язком. Цей зв'язок виражається у вигляді тиску, який надходить з виходу підсилювача через дросель α<sub>3</sub> на зворотний бік мембрани в камері V<sub>2</sub>. Змінюючи регульовані дроселі α<sub>4</sub>, α<sub>5</sub>, коефіцієнт підсилення підсилювача можна змінювати в широких межах. Описаний підсилювач характеризується обмеженою витратою повітря на виході, бо в каналі живлення є постійний дросель. Через це при великих навантаженнях часто застосовують підсилювач потужності.

Найпростіша схема суматора є такою, як з'являється в результаті сумування в точку пучок лінійних дроселів. Якщо сумарна витрата повітря в точці з'єднання дорівнює нулю, пристрій описується рівнянням

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (p_i - p_{\text{вих}}) = 0, \text{ звідси } p_{\text{вих}} = \sum_{i=1}^n k_i p_i, \text{ при цьому } 0 < k < 1 \text{ і}$$

$\sum_{i=1}^n k_i = 1$ . Ці співвідношення обмежують сферу застосування такого суматора. Схеми без зазначених обмежень побудовано за принципом компенсації.

Інтегратори будують за схемою, що містить аперіодичну ланку (коєф. передавання її дорівнює одиниці), з позитивним зворотним зв'язком. Інтегратором, побудованим за такою схемою, є, напри., Інтегратор Феррієра, що працює в діапазоні низьких робочих тисків 0—100 мм вод. ст.

Множення тисків p<sub>1</sub> та p<sub>2</sub> ґрунтується на тому, що коефіцієнтом витрати дроселя, до якого підведено тиск p<sub>1</sub>, можна керувати за допомогою тиску p<sub>2</sub>. Тоді за певних умов реалізуються залежність p<sub>вих</sub> = k p<sub>1</sub> p<sub>2</sub>, в якій k — стала число. За цим принципом побудовано, напри., множильно-діляльний пристрій Ін-ту проблем керування АН СРСР.

Помилка при розв'язуванні задач на АОМ є значно більшою, ніж при розв'язуванні їх на електронних АОМ, а частотний діапазон (обчислюють його в частках герца) вузький. Через це їх застосовують у тих галузях, де істотну роль відіграють їхні переваги: висока надійність, вибухобезпечність, нечутливість до високих температур, простота обслуговування, невелика вартість. Такими галузями є хім. виробництво, металургія, теплоенергетика, газова пром-сть, нафтодобування, нафтопереробка тощо. Найкращі в АОМ п. рухомі мех. вузли та низька їхня точність істотно звужують сферу застосування їх. Цих над не мають цифрові пневматичні пристрої струмінної техніки (див. Пневмоніка), які дедалі ширше застосовуються, витісняючи АОМ п.

АОМ п., є, напри., моделююча установка ПОМ-2 (СРСР), призначена для розв'язування звичайних лінійних дифер. рівнянь до 6-го порядку, та установка Феррієра (НДР) для моделювання різних ланцюгів регулювання. Д-р Дмитрієв Я. Н., Чернышев В. І. Пневматические вычислительные приборы неперывного действия М., 1962 (Машгиз, с. 92—93). Пневмо- и гидроавтоматика М., 1964.

Л. А. Назаренко  
APL — мова програмування системи APL/360, що працює в режимі розподілу часу; призначена для розв'язування інженерних задач. Осн. одиницями інформації в APL є скалярні й масиви. Масиви трактують як одну величину, але за допомогою індексів можна звертатися до його елементів. Вектор (одновиірний масив) записують як послідовність чисел, розділених пробілами. Задаючи багатовиірні масиви, використовують спец. символ р. Напри., оператор

$$\mu \leftarrow 23 \text{ р } 46 \text{ і } 24 \text{ і } 28$$

присвоює ідентифікаторові μ значення — матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

В APL використовують ряд примітивних одиомісних і двоісних ф-цій (операцій), визначених і для скалярів і для масивів. Так, додавання

$$234 + 1 - 62$$

дає в результаті вектор 3—3 8. Крім примітивних, є й широкий набір складних ф-цій, напри.,

ф-ція вибирання перших (або останніх)  $n$  компонент з матриці, множення матриць тощо. Ф-ції використовують, будуючи вирази. Програма мовою APL являє собою послідовність відмічених операторів. Ост., з них є оператори присвоювання, умовного й безумовного переходу й засоби редагування програм після введення й безпосередньо під час введення. Багатий набір системних команд дає змогу слідувати за процесом розв'язування задач та одержувати різні відомості про стан ресурсів машини.

Лит.: APL/360 reference manual. Chicago, 1968.  
Т. О. Гринченко

**АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА** — апроксимация для заданої функції такої іншої функції з певного класу, для якої середньоквадратичне відхилення від даної функції мінімальне. Середньоквадратичним відхиленням наз. усереднення з деякою вагою по заданій множині точок квадрату різниці заданої й апроксимуючої ф-ції. Середньоквадратичні наближення, або наближення за методом найменших квадратів, влучні з практичного погляду. Дуже часто значення наближуваної ф-ції беруть в експериментів, і, отже, вони мають випадкові помилки, в тому не доцільно вимагати точного збігу наближуваної й апроксимуючої функцій у заданих точках.

Нехай задано ф-цію  $f(x)$  із деякого класу  $E$ . Розглянемо задачу про наближення цієї ф-ції ф-ціями  $\varphi(x)$  із якогось вузкого класу  $E_1$ . За міру близькості ф-цій  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  можна вважати величину  $\varepsilon$ , яка виражається ф-лою

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n p(x_i) [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2} \quad (1)$$

або

$$\varepsilon = \sqrt{\int_0^1 p(x) [f(x) - \varphi(x)]^2 dx} \quad (2)$$

де  $p(x)$  — якась невід'ємна ф-ція, що називається вагою. Якщо ф-цію  $\varphi(x) \in E_1$  вибрано так, що величини (1) або (2) набувають найменшого значення, то наближення називають відповідно точковим та інтегральним середньоквадратичним.

Для спрощення дальших викладок доцільно використати поняття абстрактного гільбертового простору  $H$  (див. Простір абстрактний у функціональному аналізі), у якому задано скалярний добуток. Скалярним добутком двох елементів  $x, y \in H$  наз. комплексне число  $(x, y)$ , яке задовольняє умови: а)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ; б)  $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$  ( $\lambda, \mu$  — комплексні числа); в)  $(x, x) \geq 0$ , при цьому  $(x, x) = 0$  тільки у випадку  $x = 0$ . Норму  $\|x\|$  елемента  $x \in H$  визначають рівністю  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . Прикладами гільбертового простору є простори  $L_2$  та  $L_2$ . Простір  $L_2$  — це простір числових послідовностей, у якому скалярний добуток елементів  $x =$

$= \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  та  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$  визначається за ф-лою

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \quad (3)$$

а простір  $L_2$  — це простір інтегрованих з квадратом ф-цій із скалярним добутком

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx \quad (4)$$

Загальнішими за  $L_2$  і  $L_2$  є простори  $L_2$  і  $L_2$  з вагою, в яких скалярні добутки визначають відповідно за ф-лами

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \bar{y}_i \quad (3')$$

та

$$(f, g) = \int_a^b p(x) \cdot f(x) \bar{g}(x) dx \quad (4')$$

Елементи  $x$  та  $y$  називаються ортогональними, якщо  $(x, y) = 0$ . В задачі наближення елементів гільбертового простору важливим є поняття лінійної залежності й незалежності систем елементів. Елементи  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  наз. лінійно незалежними, якщо з рівності

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n = 0 \quad (5)$$

випливає, що  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . В протилежному випадку елементи наз. лінійно залежними. Вираз  $\varepsilon = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$  наз. лінійною комбінацією елементів.

Розглянемо задачу про найкраще наближення елемента  $x \in H$  лінійною комбінацією  $\varepsilon$  лінійно незалежних елементів  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Ця задача полягає у визначенні константи  $c_i$  з умови мінімуму величини  $\varepsilon = \|x -$

$-\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i\|$ . Задача зводиться до того, щоб знайти мінімум ф-ції  $r = \varepsilon(c_1, c_2, \dots, c_n)$  л. змінних. Користуючись необхідною умовою існування екстремуму ф-ції багатьох змінних, тобто умовою

$$\frac{\partial r}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

для визначення  $c_i$  одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь (див. Рівнянь класифікація)  $n$ -го порядку

$$\sum_{j=1}^n c_j (\varphi_j, \varphi_i) = (x, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Оскільки визначник системи (7) є визначником Грама, який, як відомо, для системи лінійно незалежних елементів відмінний від нуля, то система (7) має єдиний розв'язок, тобто найкраще наближення  $x_n$  існує і визна-

частістю однозначно. У випадку, коли система  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  ортонормована, тобто  $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$  при  $i \neq j$ , а  $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$ , система (7) спрощується і набуває вигляду

$$c_i = (x, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

В цьому випадку  $s_n = \sum_{i=1}^n (x, \varphi_i) \varphi_i$ , тобто найкраще наближення в відрізку ряду Фур'є елемента  $x$  за системою  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , а  $c_i$  — коэф. Фур'є. Величина  $\epsilon$  визначається за ф-лою

$$\epsilon = \sqrt{|x|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2}. \quad (9)$$

Якщо ортонормована система  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  є повною, тобто такою, що з рівності  $(x, \varphi_i) = 0$  ( $x \in H, i = 1, 2, \dots$ ) випливає  $x = 0$ , то  $\epsilon \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Прикладом повної ортонормованої системи в просторі  $L_2$  є система

$$\varphi_1 = \{1, 0, 0, \dots\}, \quad \varphi_2 = \{0, 1, 0, \dots\}, \\ \varphi_3 = \{0, 0, 1, \dots\}, \dots \quad (10)$$

У просторі  $L_2$  повністю ортонормованими системами є, наприр., система тригонометричних ф-цій

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad (11)$$

на відрізку  $[-\pi, \pi]$ , система многочленів Лежандра

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad (12)$$

на відрізку  $[-1, 1]$ .

Розглянемо докладніше задачу про точкове середньоквадратичне наближення ф-цій. Нехай ф-цію  $f(x)$  задано на якійсь множині точок  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  відрізка  $[a, b]$ . Припустимо, що ф-ції  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ , визначені на  $[a, b]$ , є лінійно незалежними на множині  $x$ , тобто з рівностей

$$c_1 \varphi_1(x_i) + c_2 \varphi_2(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n$$

випливає, що  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ . Задача про найкраще наближення ф-ції  $f(x)$  лінійною комбінацією  $s_m(x) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x)$  зводиться до знаходження констант  $c_i$ , які мінімізують функціонал

$$\sum_{i=1}^n p_i \left[ f(x_i) - \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x_i) \right]^2, \quad (13)$$

де  $p_i > 0$  — відомі постійні.

Введемо скалярний добуток елементів  $f(x)$  і  $g(x)$  за ф-лою

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f(x_i) \cdot g(x_i) \quad (14)$$

Систему (7) в цьому випадку можна записати у вигляді

$$\sum_{j=1}^m c_j \sum_{k=1}^n p_k \varphi_j(x_k) \cdot \varphi_i(x_k) = \\ = \sum_{k=1}^n p_k \cdot f(x_k) \cdot \varphi_i(x_k), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

Розглянемо окремі випадки ф-цій  $\varphi_i(x)$ , які найчастіше трапляються на практиці. Нехай  $\varphi_i(x) = x^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Тоді маємо  $s_m(x) = c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1}$  і система (15) для визначення  $c_i$  має вигляд

$$\sum_{j=1}^m c_j \sum_{k=1}^n p_k x_k^{j-1} x_k^{i-1} = \sum_{k=1}^n p_k \cdot f(x_k) x_k^{i-1}, \quad (16) \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

За ф-ції  $\varphi_i(x)$  часто беруть ортогональні на множині рівновіддалених точок  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , (з кроком  $h$ ) многочлени Чебишова

$$P_{i,n}(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{i}{i+j} \frac{t^{i+j}}{n^{i+j}}, \quad (17) \\ i = 0, 1, \dots, n,$$

де  $t = \frac{x - x_0}{h}$ ,  $t^{(i)} = t(t-1) \dots (t-i+1)$ ,  $n^{(i)} = n(n-1) \dots (n-i+1)$ .

У цьому випадку константи  $c_i$  визначають за ф-лою

$$c_i = \frac{(2i+1)n^{(i)}}{(n+i+1)^{(i+1)}} \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot P_{i,n}(t_j), \quad (18) \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

У багатьох випадках найкраще наближення доцільно шукати у вигляді тригонометричного многочлена

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (19)$$

Якщо  $p_i = 1$  і рівновіддалені точки  $x_1, x_2, \dots, x_n, N > 2n+1$  беруть на відрізку  $[0, 2\pi]$ , то коэф. визначають за ф-лами

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \cos kx_i, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (20)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \sin kx_i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В задачі найкращого інтегрального середньоквадратичного наближення на відрізку  $[a, b]$  задано якусь ф-цію  $f(x)$  і систему лінійно незалежних ф-цій  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ . Вважатимемо, що ці ф-ції належать гільбертовому просторові  $L_2$  з вагою, для якого скалярний добуток

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx,$$

де  $p(x)$  — деяка невід'ємна ф-ція. Якщо найкраще наближення шукати у вигляді  $s_n(x) =$

$= \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi_i(x)$ , то для визначення  $c_i$  одержимо систему

$$\sum_{j=0}^n c_j \int_a^b p(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot \overline{\varphi_i(x)} dx = \int_a^b p(x) f(x) \overline{\varphi_i(x)} dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

Як і в випадку точкового наближення, розглянемо деякі найбільш поширені класи ф-цій  $\varphi_i(x)$ . Одним із таких класів є система  $\varphi_i(x) = x_i$ . В цьому випадку система (21) має вигляд

$$\sum_{j=0}^n a_{i+j} c_j = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (22)$$

$$\text{де } a_k = \int_a^b p(x) x^k dx, \quad b_k = \int_a^b p(x) f(x) x^k dx.$$

Оскільки система  $\{x^i\}$  є повною, то довільну ф-цію  $f(x) \in L_2$  з вагою можна наблизити алгебр. многочленом як завгодно точно.

Широкий клас алгебр. многочленів, якими часто наближають задані ф-ції, становлять многочлени (многочлени Якобі), які для відрізка  $[-1, 1]$  з вагою ф-цією  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  ( $\alpha, \beta > -1$ ) утворюють ортогональну систему і мають вигляд

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]. \quad (23)$$

Якщо  $\alpha = \beta = 0$ , то маємо многочлени Лежандра. Якщо  $\alpha = \beta = -1/2$ , тобто при  $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ , то маємо многочлени Чебишова 1-го роду

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

а в випадку  $\alpha = \beta = 1/2$ , тобто при  $p(x) =$

$= (1-x^2)^{1/2}$  — многочлени Чебишова 2-го роду

$$V_n(x) = (1-x^2)^{-1/2} \sin[(n+1) \arccos x], \quad (25)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Для періодичних ф-цій найкраще наближення природно шукати у вигляді тригонометричного многочлена (19). При цьому коеф.  $a_k$  і  $b_k$  визначають за ф-лами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \cdot dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Якщо  $f(x)$  парна ф-ція, то  $b_k = 0$ ; якщо ж  $f(x)$  непарна, то  $a_k = 0$ . За допомогою тригонометричних многочленів задану ф-цію  $f(x) \in L_2$  також можна наблизити з довільним ступенем точності.

Розглянемо один обчислювальний алгоритм середньоквадратичної апроксимації функції багатьох змінних  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  (функція відома своїми наближеними значеннями  $y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  в  $N$

точках у вигляді  $y = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(X)$ ,  $X(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Оцінимо й похибки знайденого розв'язку. Умову

$$y_i = \sum_{k=1}^m c_k \cdot \varphi_k(x_{ji}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (27)$$

$$m \leq N,$$

вважатимемо правильною з абсолютною похибкою, яка не перевищує  $\eta$ . Ця похибка виникла внаслідок неточності зображення умови (27) та неточності визначення величин  $\varphi_k(x_j)$ . Припустимо, що замість  $y_j$  відомі величини  $z_j = y_j + \xi_j$ , де  $\xi_j$  — незалежні й мають нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією  $\sigma_j^2$ , причому  $\sigma_j = \sigma/p_j$ . Ваги  $p_j$  вважаються відомими, а  $\sigma$  — невідомою. На основі спостережень  $z(x_1, x_2, \dots, x_N)$  оцінимо  $c_k$  і  $\sigma$ . Невідомі коеф.  $c_k$  шукатимемо за найменшим квадратів методом (м. в. к.), мінімізуючи по  $c_k$  ф-цію

$$I = \sum_{j=1}^N p_j \left[ z_j - \sum_{k=1}^m c_k \cdot \varphi_k(x_j) \right]^2. \quad (28)$$

Виходячи з принципу максимуму правдоподібності, м. в. к. можна дати ймовірнісне тлумачення. Для цього складемо ф-цію правдоподібності вибірки  $z_1, z_2, \dots, z_N$  незалежних вимірів

$$Z(z_1, z_2, \dots, z_N) = (P_1, P_2, \dots, P_N)^{1/2} \times$$

$$\times (2\pi)^{-N/2} \cdot \{\sigma^2\}^{-N/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^N p_j \times \right. \\ \left. \times \left[ z_j - \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x_j) \right]^2 \right\}. \quad (29)$$

Звідси видно, що при довільному  $\sigma^2$  функція  $Z$  набуває найбільшого значення лише тоді, коли величина  $\sum_{j=1}^N p_j \left[ z_j - \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x_j) \right]^2$  набуває найменшого значення, тобто при виборі  $c_k$  з умови (28).

Розв'язування задачі (28) зводиться до розв'язування нормальної системи лінійних алгебр. рівнянь

$$\sum_{k=1}^m (\Phi_k(x_i), \Phi_k(x_j)) c_k = (\Phi_i(x_i), z_i), \quad (30)$$

$i = 1, 2, \dots, m.$

або в матричній формі

$$Ac = b, \quad A = \{a_{ik}\}, \quad c = \{c_k\}, \quad b = \{b_i\}, \quad (30')$$

де

$$a_{ik} = (\Phi_i(x_j), \Phi_k(x_j)) = \sum_{j=1}^N p_j \Phi_i(x_j) \Phi_k(x_j), \\ b_i = (\Phi_i(x_j), z) = \sum_{j=1}^N p_j \cdot \Phi_i(x_j) \cdot z_j. \quad (31)$$

При безпосередньому розв'язуванні одержаної системи слід мати на увазі, що застосовувати прямі методи доцільно тоді, коли її порядок порівняно невисокий. Коли ж порушуються допустимі обмеження по обсягу пам'яті ЕОМ або стає значною похибка округлень, доцільно користуватись ітераційними методами. Оскільки системи (30), як правило, погано обумовлені, то замість них розв'язують систему

$$(A + \alpha E)c = b, \quad (32)$$

де  $E$  — одинична матриця, а  $\alpha > 0$  — якийсь параметр. Внаслідок розв'язування одержуємо наближені значення  $c_k$  шуканих коеф.  $c_k$  разом з довірчими інтервалами

$$[\bar{c}_k - \gamma \sqrt{(A^{-1})_{kk}} \sigma, \bar{c}_k + \gamma \sqrt{(A^{-1})_{kk}} \sigma], \quad (33)$$

які покривають  $c_k$  з заданою ймовірністю  $P$ .  $(A^{-1})_{kk}$  — діагональний елемент оберненої матриці системи (30), а  $\sigma$  міститься в інтервалі  $[\gamma_1 \cdot 1/(N-m), \gamma_2 \cdot 1/(N-m)]$  ( $\gamma_1, \gamma_2$  і  $\gamma$  при заданих  $P$  і  $N-m$  відшукуються за спец. таблицями. Мішана статистико-детермінована оцінка неусувної похибки середньоквадратичної апроксимації має вигляд:

$$|c_k - \bar{c}_k| \leq \frac{\sqrt{\sigma}}{\det A} \frac{\eta}{\min_j |\Phi_k(x_j)|} +$$

$$+ \gamma \sqrt{(A^{-1})_{kk}} \left( \sigma + \frac{\eta}{\sqrt{N-m}} \sqrt{\sum_{j=1}^N p_j} \right), \quad (34)$$

$$\left| z_i - \sum_{k=1}^m \bar{c}_k \Phi_k(x_i) \right| \leq \eta + \gamma_1 \sqrt{\frac{m}{p_j}} \left( \sigma + \frac{\eta}{\sqrt{N-m}} \sqrt{\sum_{j=1}^N p_j} + \frac{m \eta \sqrt{\sigma}}{\det A} \times \right. \\ \left. \times \frac{\max_{k,j} |\Phi_k(x_j)|}{\min_{k,j} |\Phi_k(x_j)|} \right).$$

Для обчислювання похибок округлень необхідно фіксувати конкретний метод розв'язування системи (30). Так, наприклад, для відносної похибки округлень розв'язку  $c_k$ , знайденого методом квадратного кореня, досліджено мажорантні

$$\frac{|c - c_k|}{|c_k|} \leq 2^{-\epsilon_m} \|A^{-1}\|, \\ \frac{|c - c_k|}{|c_k|} \leq 2^{-\epsilon} \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

та ймовірнісні

$$\left( M \frac{|c - c_k|}{|c_k|} \right)^{1/2} \leq 2^{-\epsilon_m} (M \|A^{-1}\|)^{1/2}, \\ \left( M \frac{|c - c_k|^2}{|c_k|^2} \right)^{1/2} \leq 2^{-\epsilon} (M \|A^{-1}\|^2 \|A\|)^{1/2}$$

оцінки, відповідно для обчислень з фіксованою та плаваючою комами (тут  $\epsilon$  — розрядність даної ЕОМ, знак  $M$  — матем. сподівання, знак  $\| \cdot \|$  — евклідова норма). Див. Дзякшич Ю. В. Метод найменших квадратів і основні математико-статистичної теорії обробки наближень. М., 1962 [Бібл.огр. с. 341-343]; Березкин П. С., Жидков Н. П. Методы вычисления, т. 1. М., 1966; Воеводич В. В. Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. М., 1969 [Бібл.огр. с. 148-153]; Демидович Б. П., Марон И. А., Шуваляков Э. Э. Численные методы анализа. М., 1967; М. С. Корняк, А. Ю. Дзякшич, В. С. Остапчук.

**АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ** — заміщення різних функцій «близькими» до них, зручнішими для користування функціями, які належать до певної заданої сім'ї функцій. У найпростішому й основному за своїм значенням одновимірному випадку А. ф. ідеться про наближене представлення заданої ф-ції  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  за допомогою виразу вигляду  $\Psi(x; K) \equiv \Psi(x; k_1, \dots, k_n)$ , де компоненти  $k_1, \dots, k_n$  параметричного вектора  $K$  визначають з умови якомога найменшого відхилення  $\Psi(x; K)$  від  $f(x)$  при  $a \leq x \leq b$  або, інакше кажучи, відстані  $\mu(f, \Psi)$  між ф-ціями  $f$  і  $\Psi$ , які тут вважають неперервними на  $[a, b]$ . Ця вимога набуває певного змісту



при ототожненні  $\mu(f, \Psi)$  з нормою різниці:  $\|f - \Psi\| = \|f - \Psi\|_{[a,b]}$  або, з загальнішою вигляді, різницею з вагою:  $\|f - \Psi\|_w$ , де вага  $w = w(x)$  додатна при  $a \leq x \leq b$ . У звичайних постановках задачі А. ф. з саме при апроксимації  $(A)$  рівномірній (Чеби-Повський), або «гранично-степеневій» і А. середньої степеневій заміру відхилення  $\mu(f, \Psi)$   $\mu(K)$   $\|f(x) - \Psi(x; K)\|$  при  $w(x) \equiv 1$  беруть відповідно (норма рівномірна чи середня степенева):

$$\mu_{\infty}(f, \Psi) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Psi(x; K)| \equiv L(K), \quad (1)$$

$$\mu_q(f, \Psi) = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - \Psi(x; K)|^q dx \right\}^{1/q}, \quad (2)$$

Взявши в ф-лі (2)  $q = 2$  або  $q = 1$ , одержимо найважливіші випадки середнього квадратичного відхилення та «відхилення в середньому». Визначивши (якщо це можливо) значення  $K_i = K_i^*$ ,  $i = 0, \dots, n$ , з умови мінімуму  $L(K)$  або величини інтеграла в ф-лі (2), одержимо апроксимуючу ф-цію  $\Psi(x; K^*)$ , яка дає найкращіше наближення (Н.) за відповідною нормою —  $\mu$ -наближення ( $\mu$ -Н.) до  $f(x)$  при  $a \leq x \leq b$  в класі ф-цій вигляду  $\Psi(x; K)$ , тобто розв'язок відповідної задачі А. Слово «найкращіше» перед  $\mu$ -Н. досить часто опускають, а під розв'язком задачі А. за даною нормою (задачі  $\mu$ -Н.) часто розуміють не саме одержуване  $\mu_{\infty}$ -Н. або  $\mu_q$ -Н.  $\Psi(x; K^*)$ , а набір (параметричний вектор)  $K^*$ , що його визначає, — точніше  $K_{\infty}^*$  або  $K_q^*$  відповідно.

Щоб спростити трактування або з причин обмеженості інформації розглядають ще й дискретизовані відоміми значеннями задач  $\mu_{\infty}$ -А. і  $\mu_q$ -А., з яких неперервна область  $[a, b]$  заміщується якоюсь  $N$ -точковою сіткою  $B_N \subset [a, b]$ , а інтеграл у ф-лі (2) — відповідною сумою.

На практиці найчастіше застосовують задачі А. з параметрами, які входять лінійно:  $\Psi(x; K) = k_0 \varphi_0(x) + k_1 \varphi_1(x) + \dots + k_n \varphi_n(x)$ , (3)

де  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$  — ф-ції, лінійно незалежні на  $[a, b]$ . У цьому разі (А. поліноміальній) при  $\varphi_i(x) = x^i$  та квазіполіноміальній при іншому виборі  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n$  завжди забезпечено існування розв'язків  $K_{\infty}^*$ ,  $K_q^*$ , які реалізують точний мінімум відповідного відхилення. Якщо параметри  $k_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , входять нелінійно — це має місце не завжди. Зауважимо, що при  $\mu_{\infty}$ -А. незалежно від того, існує чи не існує точний розв'язок  $\Psi(x; K_{\infty}^*)$ , залишаються принципово застосованими ітеративні методи (див. *Апроксимація функцій*

*рівномірне*) для послідовного зниження, наскільки це практично можливо, величини  $\mu_{\infty} > \frac{1}{K} \mu_{\infty}(f, \Psi(x; K))$ . Питання лінійного чи нелінійного входження параметрів  $k_i$  в  $\Psi(x; K)$  не слід змішувати з питанням про лінійну або нелінійну залежність  $K^*$  від заданої ф-ції  $f(x)$ . Якщо  $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ , то навіть при А. типу (3), взагалі кажучи,  $K^*[f] \neq c_1 K^*[f_1] + c_2 K^*[f_2]$ , крім випадку  $\mu_q$ -Н. З цим пов'язана порівняна простота прямої (без необхідності ітерацій) обчисл побудови  $\mu_q$ -Н. типу (3) (див. *Апроксимація функцій середньоквадратична*).

Те, що повинен існувати хоча б один розв'язок  $K^*$  при  $\Psi(x; K)$  вигляду (3), має місце й для багатовимірних варіантів випадку (3), коли замість скалярного аргумента  $x \in [a, b]$   $b \equiv G_1$ , маємо точку  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , яке пробігає деяку обмежену замкнену область  $G = G_m$  в  $m$ -вимірному евклідовому просторі  $R_m$ . При багатовимірності (нескінченності) розв'язку  $K^*$  ми на  $A^*$  з усякою мого рази опукли, обмежена і замкнена. У випадку норми  $\mu_q$  для  $q > 1$ ,  $m > 1$  розв'язок  $K^*$  завжди єдиний, що забезпечується строгою опуклістю норми  $\mu_q$ ,  $1 < q < \infty$ . Для  $\mu = \mu_{\infty}$  або  $\mu_1$  може мати місце єдиність або множинність  $\mu$ -Н., що залежить від конкретного випадку, тобто при фіксованому вигляді  $\Psi(x; K)$  і фіксованій  $G_m$ ,  $m > 1$ , істотно, від взятої  $f(x)$ . При  $m = 1$  єдиність розв'язку  $K_{\infty}^*$  або  $K_1^*$  виявляється забезпеченою для довільно взятої (неперервної)  $f(x)$ , коли система  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  є  $T$ -системою, тобто задовольняє на  $[a, b]$  відому з теорії рівномірної А. ф. умову Хаара (зокрема, випадки А. многочленів  $\Sigma k_i x^i$  класичними тригонометричними сумами або експоненціальними сумами  $\Sigma k_i e^{i \varphi_i}$  з наперед заданими множинами  $\varphi_i$ ).

Переходячи до характеристики (тобто критерію розпізнавання)  $\mu$ -Н. вигляду (3), для  $\mu = \mu_q$ ,  $q = 2, 4, 6, \dots$  при  $m > 1$  питання розв'язується однаково, в алгебричній відносності  $k_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  формі, з допомогою умови ортогональності  $(f - \Psi)^{q-1}$  на  $G_m$  до  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ . Визначимо, що в термінах ортогональності формулюється ще при  $m = 1$  характеристика Н. у середньому  $\Psi(x; K^*)$ , коли останнє співпадає з  $f(x)$  не більш, як у скінченному числі точок  $x \in [a, b]$ ; тільки тут ідеться про ортогональність сигнум-функції  $\text{sign}(f - \Psi)$  до  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Істотно інакше формулюють теорему характеристики для  $\mu_{\infty}$ -Н., а саме: у термінах чебишинського альтернансу для випадку  $T$ -систем  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  і квазіальтернансу — для випадку нехарівських систем. Слід відзначити, що в трактуванні задач  $\mu_{\infty}$ -Н. в теоремах характеристики тісно пов'язані критерії оцінки

набл. розв'язків  $K = \hat{K}$ , що дають строгу верхню межу для  $L(\hat{K}) - L(K^*)$ .

До задач А. з параметрами, які входять нелінійно, належать класична задача дробово-раціональної А. вигляду

$$\Psi = R_{l,m-1}(x) = \frac{k_0 + k_1 x + \dots + k_l x^l}{k_{l+1} + k_{l+2} x + \dots + k_{n+1} x^{n-1}}, \quad (4)$$

загальна задача експоненціальної А.:  $\Psi(x; K, S) = \sum k_i e^{S_i x}$  при  $x_i$ , які наперед не фіксуються, та ін. До виду (4) досить близькою є А. за допомогою частки від ділення двох квазіполіномів, регулярно аналітичних на  $[a, b]$ .

На практиці в кожному конкретному випадку постановки задачі А. для даної ф-ції  $f(x)$  доводиться з'ясувати передусім питання про доцільний вибір самого способу А., тобто норми  $\mu$  і вигляду  $\Psi(x; K)$ . Коли необхідно забезпечити достатню малість відхилів  $\|f - \Psi\|$  в усіх  $x \in G$  перевагу, природно, віддають нормі  $\mu_\infty$  (у цьому розумінні  $\mu_\infty$  Н. наз. також, дещо умовно, найкращим). Якщо потрібна малість  $\|f - \Psi\|$  є сумарний опіція, тоді підійде норма  $\mu_1$  або  $\mu_2$ . Норма  $\mu_1$  має принципову перевагу над іншими, коли значення самої ф-ції  $f(x)$  задано з похибками, що мають випадковий характер. Враховують і порівняну простоту побудови лінійних  $\mu_1$ -Н., яка, зрештою, втрачається, коли параметри нелінійно входять у  $\Psi(x; K)$ . Вибір норми  $\mu_\infty$  набуває особливої переваги при А. ф.  $f(x)$ ,  $x \in G_\infty$ , заданої чеканно як розв'язок крайової задачі рівняння у частинних похідних еліптичного або параболічного типу, з урахуванням теорем про максимум модуля, яка має місце.

А що ж до вибору форми  $\Psi(x; K)$ , то вона повинна бути придатною для якомога точнішого відтворення поведінки даної ф-ції  $f(x)$  при  $x \in G$  й зручною у використанні для обчислювання при підстановці індивідуальних значень  $x$  або для виконання аналітичних операцій. Ці вимоги добре задовольняють многочлени  $P_n(x)$ . Але для обчисл. застосувань (зокрема, при складанні стандартних підпрограм для введення ф-цій в ЕЦОМ) не менш важливе значення мають раціональні дроби (4), які гнучкіше пристосовуються до  $f(x)$  у випадках, напр., аналітичної  $f(x)$ , яка має полюси поблизу відрізка  $[a, b]$ , або неперервної  $f(x)$  з графіком, що включає при  $a \leq x \leq b$  кутову точку чи точку з вертикальною дотичною, тощо. Збільшувати гнучкість А. іноді можна при збереженні поліноміальності форми А. й замінюючи змінну з введенням, напр.,  $x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$  замість  $x$ .

Лім. Натансон Д. П. Конструктивная теория функций М.-Л., 1949 [бібліогр. с. 679—686]; Гончаров В. Л. Теория интерполирования и прибли-

жения функций М., 1954 [бібліогр. с. 321—325]; Смирнов В. П., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л., 1954 [бібліогр. с. 425—434]; Акиев-вер Н. Н. Леммы по теории аппроксимации. М., 1963 [бібліогр. с. 397—401]; Рунге К. В. Основы численных методов чебышевского приближения К., 1969 [бібліогр. с. 612—623]; Cheney E. W. Introduction to approximation theory New York, 1966; Meinardus G. Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung Berlin, 1967; Коллати Л. Функциональный анализ и вычислительная математика Пер. с нем. М. 1989 [бібліогр. с. 422—431]. Г. Я. Рунге В. Т. Гаусс.

**АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ РІВНОМІРНА** (Чебишовська) — апроксимация функций при умові мінімізації рівномірної норми відхилення. На відміну від апроксимации функций середнеквадратичної, задача А. ф. р. допускає точне пряме (без ітерацій) розв'язання тільки в небагатьох варіантах уважк, але суцього окремих випадках, відомих з часу праць рос. математика П. Л. Чебишова (1821—94) та його найближчих послідовників. У загальнішій постановці вона потребує застосування ітеративних чисельних методів А. ф. р.; розробка таких методів набула виразного значення у зв'язку з розвитком сучас. обчисл. техніки, зокрема ЕЦОМ.

Одні з найважливіших задач А. ф. р. полягає в тому, щоб знайти набір  $K = (k_0, \dots, k_n)$  коэф. многочлена  $P_n(x) = P_n(x; K) = k_0 + k_1 x + \dots + k_n x^n$ , який задовольняє вимогу мінімхсу

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x; K)| \equiv L(K) = \min_K |f(x) - P_n(x; K)| \equiv \rho \equiv E_n(f). \quad (1)$$

де  $f(x)$  — неперервна ф-ція, задана на відрізку  $a \leq x \leq b$ .

Відповідно до теорем Чебишова, пореформульованої за Кірхбергером і Валле Пуссеном, єдиний розв'язок  $K = K^*$  задачі (1) збігається з розв'язком  $K = K_X^*$  формульованої аналогічно (1) якоїсь (дискретної — інтерполяційної в загальному розумінні) елементарної задачі А. ф. р. виду

$$\max_{x \in X} |f(x) - P_n(x; K)| \equiv L_X(K) = \min_K |f(x) - P_n(x; K)| \equiv \rho_X, \quad (\min L_X(K) = \rho_X).$$

де  $X = \{x_0, \dots, x_{n+1}\} \subset [a, b]$  означає таку  $(n+2)$ -точкову підмножину  $X = \hat{X}$ , для якої величина  $\rho_X$  (що залежить від вибору  $X$ ) має найбільше можливе значення, яке точно співпадає з  $\rho = \rho_{[a, b]}$ . Побудову многочлена  $P_n = P_n(x, K_X^*)$  — розв'язку задачі (2) при даному виборі  $X$  можна виконати, використовуючи ньютонів звичайний інтерполяційний апарат розділених різниць, за даними

$$P_n(x_i) = f(x_i) - (-1)^i \rho_X, \quad |v_i| = 1, \quad (3)$$

$$i = 0, \dots, n+1;$$

$$\rho_X = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})}{X(x_i) \equiv (-1)^i \cdot (3^i)}$$

З  $n + 2$  умов (3) — (3'), завжди сумісних, одна служить для контролю обчислень.

Оск. метод послідовних чебишовських інтерполяцій (ПЧІ) для А. ф. р. в застосуванні до загальної задачі (1) полягає в доцільно організованому процесі послідовної побудови (за схемою (3) — (3')) розв'язків задач типу (2) в  $X = X^{(v)}, v = 0, 1, 2, \dots, p_{X(v+1)} > p_{X(v)}$  (метод підвищувальної дії), причому має місце рівномірна збіжність процесу  $(K_{X(v)}^* \rightarrow K^* = K_X^*)$  з досить швидкою реалізацією, при  $v \rightarrow \infty$ , двох осн. граничних співвідношень:

$$\rho - p_{X(v)} \rightarrow 0 \text{ і } L(K_{X(v)}^*) - \rho \rightarrow 0 \quad (4)$$

При цьому набір  $X^{(v+1)}$  складається з точок знакоперемінних екстремумів відхилення  $\Delta_{(v)}(x) = f(x) - P_n(x; K_{X(v)}^*)$ . Рекомендований склад початкового набору:

$$X^{(0)} = \left\{ \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} \times \cos \frac{(n+1-i)\pi}{n+1} \mid i = 0, \dots, n+1 \right\} \quad (5)$$

Аналогічно формулюють цей метод і при можливій дискретизації самої задачі (1), коли відрізок  $[a, b]$  замінюють якоюсь заданою на ньому  $N$ -точковою сіткою  $B_N (N > n + 2)$ ; при цьому для спрощення програми числ. реалізації розв'язку на ЕЦОМ перехід від  $X^{(v)}$  до  $X^{(v+1)}$  іноді зумовлюється вимогою замінити лише однієї з  $n + 2$  точок, з включенням в  $X^{(v+1)}$  точка абс. максимуму за  $x \in [a, b]$  ф-ції  $|\Delta_{(v)}(x)|$ . У будь-якому варіанті методу ПЧІ неможливо кроці водночас одержувати і оцінку досягнутого ступеня точності на основі встановлення верхньої межі для  $L - \rho$ .

Розроблений для тієї самої задачі (1) також збіжний, але менш стандартизований метод (метод знижувальної дії), який ґрунтується на принципі монотонності:  $L(K^{(v+1)}) < L(K^{(v)})$ . Схожі методи одного й другого принципів дії застосовні і при заміні алгебричних многочленів  $P_n(x)$  тригонометричними або, загальніше, квазіполіномами  $P_r(x) =$

$= \sum_{s=0}^n k_s \varphi_s(x)$  якоїсь «Т-системи» ф-цій  $\varphi_s(x), s = 0, 1, \dots, n$ , тобто системи лінійно незалежних і неперервних ф-цій  $\varphi_s$ , які задовольняють умову Хаара: визначник  $(n+1)$ -го порядку  $|\{\varphi_s(x_i)\}|, 0 \leq i, s \leq n$  не повинен перетворюватися на 0 ні для якого набору різних між собою  $n+1$  точок  $x_0, \dots, x_n$  на  $[a, b]$ . А у випадках нехаарівських систем  $\{\varphi_s\}$  і, зокрема, багатовимірних  $\{\varphi_s(x, y, \dots, v)\}$  при можливій багатозначності розв'язку зада-

чі А. ф. р. питання значайно полягає в тому, щоб знайти один із шуканих наборів  $K^* \in \{K^*\}$ , де відомо напевно, що множина  $\{K^*\}$  є опуклою. Неперервну область апроксимації  $B$  тут доводиться взагалі замінювати підмножиною точок якоїсь сітки  $B_N$ , а застосовні до дискретизованої т. ч. задачі рівномірної А. ф. р. (рівносильній задачі А. ф. р. для системи несумісних лінійних рівнянь) важливі методи підвищувальної й знижувальної дії виявляються зводними до двох взаємно двоїстих варіантів *симплекс-методу* для програмування лінійного (ПЛ).

Вище було розглянуто задачі А. ф. р. з лінійно вхідними параметрами (апроксимації многочленами  $P_n$  або квазімногочленами  $F_n$ ). Для цих задач найбільшою мірою розроблено обчисл. методи побудови розв'язків, а також критерії характеризації точних розв'язків та оцінка набл. розв'язків. У разі А. ф. р. многочленами Т-системи для точних розв'язків має місце критерій чебишовського альтернансу: різниця  $f(x) - P_n(x; K^*) =$

$$= f(x) - \sum_{s=0}^n k_s^* \varphi_s(x) \text{ повинна в яких-небудь}$$

$n+2$  точках  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  відрізка  $[a, b]$  набувати найбільших за абс. значенням значень  $\pm L(K^*)$  з чоргуванням знаків. А в разі систем  $\varphi_s(b), s = 0, 1, \dots, n$ , нехаарівських ( $b \equiv x$  в одновимірних задачах,  $b \equiv (x, y, \dots, v)$  в задачах багатовимірних) місце це настільки безпосередньо наочне, але таке, що зберігає ефективний характер, узагальнення в форми критерію квазіальтернансу. Цей критерій пов'язується з наступним нехаарівським аналогом теорема Чебишова, який суттю свого змісту точно зберігає силу й для багатовимірних задач А. ф. р., але для більшої простоти його можна сформулювати тут для випадку одновимірної ( $b = x$ ). Яскравий розв'язок  $K = K^*$  задачі А. ф. р. формального типу (1), але з заміною  $P_n(x; K)$  на квазіполіном  $F_n(x; K)$  нехаарівської системи  $\varphi_s(x), s = 0, 1, \dots, n$ , а також розв'язком аналогічної елементарної задачі А. ф. р. одержуваної при заміні відрізка  $[a, b]$  якоюсь його (заздалегідь невідомою) мінімальною за складом  $r$ -точковою підмножиною  $\hat{X} = \{\hat{x}^{(1)}, \dots, \hat{x}^{(r)}\}$ , де  $r \leq n + 2, r \geq 1$ . При цьому для  $i = 1, \dots, r, |f(\hat{x}^{(i)}) - P_n(\hat{x}^{(i)}; K^*)| = L(K^*)$ , а знаки вказаних  $r$  відхилень  $f - P_n^*$  збігаються зі знаками (необов'язково чергуючими, інколи навіть однаковими між собою) коеф. елементарної лінійної залежності між  $r$  виразами  $k_0 \varphi_0(\hat{x}^{(i)}) + \dots + k_n \varphi_n(\hat{x}^{(i)}), i = 1, \dots, r$ , розглядуваних як лінійні форми від  $k_0, k_1, \dots, k_n$ . Застосування цього критерію квазіальтернансу істотно ефектизується при дискретизації задачі А. ф. р. (з використанням сітки  $B_N \subset [a, b]$ ).

З теоремою про чебишевський альтернанс та її узагальненням тісно пов'язується висхідне (а поліноміальному одновиірному випадку) до Вайля Пуссена (1910) питання астановлення нижньої межі для мінімаксного відхилення  $\rho$ , а, отже, й верхньої межі для  $L(\bar{K}) - \rho$ , що безпосередньо доставляє критерій строгої оцінки точності набл. реалізації  $(\bar{K})$  розв'язку розглядуваних задач А. ф. р.

Для задач А. ф. р. за допомогою виразів  $\Psi(x; K)$  з невідійним вхідним параметрами  $k_s, s = 0, 1, \dots$ , я відзначимо, що у випадку важливої задачі А. ф. р. для  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  за допомогою раціонального дробу  $R_{1, n-1}(x) = P_1(x; K')/P_{n-1}(x; K')$  осв. вживаний підхід полягає в поширюванні методу ПЧІ. Метод зберігає свою ефективність, хоч тут доводиться особливо враховувати випадок скорочуваності шуканого дробу й, окрім того, можливість «осічок» при несприятливому виборі інтерполяційних підмножин  $X \subset [a, b]$ . До узагальнююче-близької, але делікатнішої за своєю природою задачі А. ф. р. за допомогою частки двох квазіполіномів, при заміщенні області апроксимації  $B$  (можливо, й багатовимірної) сіткою  $B_N$ , можна застосовувати порівняно трудомісткий, але безвідмовно діючий «метод лінійних нерівностей» — метод проб, для того щоб взяти «р» $_{B_N}$  у вузькому амаку (використовуючи апарати ПЛ). У загальніших випадках невідійних задач А. ф. р., знов-таки при сітковій дискретизації області апроксимації, застосовують різні прийоми послідовної диф. лінеаризації за параметрами  $\{k_s\}$ .

При А. ф. р. велике значення має вибір виду апроксимуючого виразу  $\Psi(x; K)$ . Конкретизуючи вид  $\Psi(x; K)$ , треба враховувати в належних випадках функціональні співвідношення, які задовольняє  $f(x)$  (парність, непарність тощо), а в разі нескінченного інтервалу — асимптотичну поведінку  $f(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Напр., апроксимуючи при  $x \in [a, b] = [-h, h]$  ф-цію  $f(x) = x^r$  в класі дробів  $R_{3,3}(x)$  і враховути функціональне співвідношення  $f(-x) \equiv [f(x)]^{-1}$ , природно, замість загального виду вказаного дробу, виходити з

$$\Psi = \frac{1 - k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3}{1 - k_1 x + k_2 x^2 - k_3 x^3},$$

$$(\Psi(-x) \equiv [\Psi(x)]^{-1}). \quad (6)$$

скорочуючи так більше як удвоє кількість потрібних параметрів.

При А. ф. р. в загальній формі, такий як  $P_n(x)$  або  $R_{1, n-1}(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , одним з істинних параметрів є саме число  $n$ , бажане значення якого  $n = n_0$  має відповідати якнайекономнішому виконанню вимог виду  $\rho^{(n)} \equiv E_n[f] \leq \eta$  або  $\rho^{(n)} \equiv E_{1, n-1}[f] \leq \eta$  при заданому  $\eta > 0$ . В разі форми  $R_{1, n-1}(x)$  попереднє взяття у вигляді значення

$n = n_0$  можна виконувати зондуванням за допомогою проб, використовуючи апарати ПЛ із заміною відрізка  $[a, b]$  сіткою  $B_N \subset [a, b]$ . В разі форми  $P_n(x)$ , допускаючи для спрощення формулювань  $[a, b] = [-1, 1]$ , щоб прибл. визначити  $n_0$  можна використати послідовність  $\{A_\eta\}$  коэф. розкладу  $f(x)$  в ряд за многочленами Чебишова  $T_\nu(x)$  (умова  $|A_{n_0+1}| + |A_{n_0+2}| + \dots \leq \eta + \epsilon$ ) або, що те саме, коэф. розкладу  $f(\cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , в тригонометричний косинус — ряд. За регулярної аналітичності  $f(x)$  еквівалентні результати швидше одержують певним способом послідовного «згортання» степеневого розв'язання  $f(x)$ . Зазначимо, що подібні, застосовувані для попереднього визначення  $n_0$ , способи зондування самі по собі можуть доставляти наближення (Н.)  $\Psi(x; K)$  відповідного типу, для яких відхилення  $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Psi(x; K)| = L(K)$  виявляється (за критерієм строгої оцінки) часом досить близьким до шуканого чебишевського мінімаксу; такі «близькомінімаксні» Н.  $\Psi(x; K)$  іноді використовують у спорадичному програмуванні для ЕЦМ замість трудомісткої ітеративної побудови чебишевських  $\Psi(x; K^*)$ .

При поліноміальній апроксимації ф-ції  $f(x)$  більш або менш регулярної структури, щоб полегшити орієнтовно прикидання близького до  $n_0$  значення  $n$ , можна використати й апріорні оцінки верхніх меж значень  $\rho^{(n)} \equiv E_n[f]$  типу відомих оцінок (1912) Бернштейна й Джексона.

Наведемо приклади такого роду оцінних теорем.

1. Якщо всередині  $[a, b]$ , де  $b - a = 2h$ , в обмежена  $(n+1)$ -а похідна  $f^{(n+1)}(x)$ , причому  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , тоді

$$E_n[f] \leq \frac{2M}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}. \quad (7)$$

2. Якщо на  $[a, b] \equiv [a, a+2h]$  в неперервна  $f^{(r)}(x)$  а  $\max |f^{(r)}(x)| = M_r$ , то для кожного  $n > r$

$$E_n[f] \leq \left(\frac{\pi}{2} h\right)^r \frac{M_r}{(n+1)n \dots (n-r+2)} < C_r \frac{M_r}{(n+1)^r},$$

де

$$C_r = \left(\frac{\pi}{2} h\right)^r \frac{r!}{r!}. \quad (8')$$

2Г. Оцінний ф-лі (8) — (8') відповідає схожого типу точніша й аконтеніша у випадку апроксимації за допомогою  $t_n(x) \equiv$

$\sum_{\nu=0}^n (k_\nu \cos \nu x + l_\nu \sin \nu x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ )  $2\pi$  — періодичної  $f(x)$  з неперервною

$f'(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $\max |f'(x)| = M$ ;

$$E_n^T(f) \leq c_r \frac{M_r}{(n+1)^r}, \quad 1 < c_r < \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Коэф.  $c_r$ , що входить в (9), явний вираз якого (трохи складного вигляду) було знайдено 1937, є для заданого  $r$  найкращим з можливих.

3. Якщо аналітична ф-ція  $f(z)$ , регулярна всередині еліпса комплексної площини з фокусами в точках  $z = -1, 1$  і з півсюмою осей  $R$ , є неперервною й на контурі цього еліпса, то для ф-ції дійсного змінного  $f(x)$  на відрітку  $-1 \leq x \leq 1$  при будь-якому натуральному  $n$ ,

$$E_n(f) \leq \frac{2M}{R-1} \left(\frac{1}{R}\right)^n, \quad (10)$$

де  $M = \max |f'(z)|$  на контурі еліпса.

Використовуючи А. ф. р. виду  $P_n(x)$  або  $R_{1,n-1}(x)$ , складаючи бібліотеку стандартних підпрограм введення ф-цій  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  в ЕЦОМ, необхідно мати на увазі доцільну в деяких випадках відозміну постановки питання, а підрозділянням  $[a, b]$  на кілька частинкових інтервалів  $[\xi_r, \xi_{r+1}]$ ,  $r = 0, \dots, s$ ;  $\xi_0 = a$ ,  $\xi_{s+1} = b$  і з реалізацією А. ф. р. вказаного типу роздільно для кожного  $[\xi_r, \xi_{r+1}]$ . Стяжки  $\xi_0, \dots, \xi_s$  треба при цьому вибирати в умовно приблизної рівності окремим мінімальним відхиленням на  $[\xi_r, \xi_{r+1}]$ ,  $r = 0, \dots, s$ . Хоч застосування таких кускових Н. потребуватиме зберігання в пам'яті машини трохи більшої кількості коэф., але потребу точності Н. можна забезпечити при менших значеннях  $n$  — з відчутною економією машинного часу, якщо використовувати підпрограми.

Окрім подібних кусково-поліноміальних Н., в останні роки предметом численних досліджень стали (допускаючи різні узагальнення) Н. зрощено-поліноміальні («сплайн-Н.») виду

$$S_n(x) = P_n(x) + \sum_{i=1}^r c_i (x - \xi_i)_+^k$$

де символ  $x_+^k$  означає  $x^k$  при  $x \geq 0$  і 0 — при  $x < 0$ . Ці  $S_n$ -Н. (нехазарські в загальному випадку) як інструмент А. ф. р. за своєю точністю є проміжними між відповідними Н. поліноміальними й кусково-поліноміальними (ближче до перших), але, окрім спільності аналітичного вираження, вони виявляють (при певності  $k = 2p - 1$  і при  $p \leq s$ ) ще й добрі інтерполяційні властивості з цінним застосуванням до апроксимації лінійних функціоналів. Якщо спеціалізувати вищесказане при  $k = 1$ , вийде кусково-лінійна й відповідно полігональна апроксимація, нерідко застосовувана в інженерно-тех. практиці. При  $f'(x) \neq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) найкраща з названого розуміння кусково-лінійна апроксимація виявляється точно збіжною з найкращою сплайн-апроксимацією  $S_1$ .

Лит. Ахмезер Н. П. Лекції по теорії апроксимації. М., 1965 [Біоліогр. с. 397—403]. Ремез В. Я. Основи численних методів чебышевського наближення. К., 1989 [Біоліогр. с. 613—623]. Ремез В. Я. К вопросу построения чебышевских приближений. В кн. Труды четвертого Всесоюзного математического съезда, т. 2. Л., 1964. Олександренко В. Л., Порханова А. О. Побудова чебышевського поліноміального наближення функції однієї змінної за методом підвищуючої дії «Автоматика», 1967, 34.4. Cheney E. W. Introduction to approximation theory. New York, 1966. Hailston A. Rational Chebyshev approximation. В кн. Mathematical methods for digital computers, v. 2. New York 1967. Weierstrass J., Stoer J., Wommat W. Rational Chebyshev approximation «Numerische Mathematik», 1967, Bd. 10, № 4. Melnik G. Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin, 1967. Hart J. P. (van). Computer approximation. New York 1968.

В. Т. Гаврилюк, Е. Я. Ремез.

«АРАГАЦ» — електронна цифрова обчислювальна машина загального призначення. Швидкодія — 8 тис. операцій за 1 сек. Розроблено її 1960 в Средаєському н.-д. Інституті матем. машини. У машині триадесна система команд, розрядність коду команди — 42, форма представлення чисел — двійкова з плаваючою комою, числа представлені в машині в нормалізованому вигляді (32 розряди займає мантиса числа, один розряд — знак мантиси, шість розрядів — порядок числа і один розряд — знак порядку, два розряди для числа не використовуються). Оперативний ЗП — на феритових осердях ємністю 1024 42-розрядних слів, проміжний ЗП — на двох магнітних барабанах заг. ємністю 2048 слів і зовн. ЗП на магн. стрічках заг. ємністю 300 тис. слів. Крім того, в машині є блок довготривалого ЗП на 256 слів. Всього в машині використано 3500 електронних ламп.

Введення даних — з перфотріщини (швидкість 36 слів за 1 сек), виведення — друкувальним пристроєм (зі швидкістю 20 рядків за 1 сек).

Лит. Грубова В. Я., Кирдан В. С. Електронні висчислювальні машини і моделюючі пристрої. Справочник. К., 1969 [Біоліогр. с. 178—181].

В. Я. Карпаченко.

АРИФМЕТИЗАЦІЯ МЕТАМАТЕМАТИКИ — метод, що його розробив австрійський математик К. Гедель (н. 1906), вивчаючи дедуктивні можливості формальних систем. За допомогою А. м. можна відтворити в межах елементарної арифметики різні матем. суцільності про об'єкти довільної формальної системи (тобто про ф-лі, доведення тощо). Всі такі об'єкти можна розглядати як слова певного вигляду в належному скінченному алфавіті, в якому мають бути логічні й матем. символи, позначення для звичних та деякі допоміжні букви. Нехай обрано якусь нумерацію всіх слів в алфавіті даної формальної системи  $\Sigma$ . Тоді метаматематичним відношенням, визначеним для об'єктів системи  $\Sigma$ , відповідають числом предикати, задані на номерах цих об'єктів. Отже, вивчення властивостей системи  $\Sigma$  стає частиною арифметики. Наведемо приклади предикатів, що їх

розглядають, описуючи дану формальну систему

$V(Y)$  « $Y$  є змінна».

$Fm(X)$ : « $X$  є формула».

$Fv(X, Y)$ : «Змінна  $Y$  входить вільно до формули  $X$ ».

$Neg(Z, X)$ : «Ф-ла  $Z$  є заперечення ф-ли  $X$ ».

$Dis(Z, X_1, X_2)$ : «Ф-ла  $Z$  є диз'юнкція ф-л  $X_1, X_2$ ».

$\Psi(Z, X, Y)$ : «Ф-лу  $Z$  одержують із ф-ли  $X$ , замінюючи *квантор загальності* на змінну  $Y$ ».

$Ax_Z(X)$ : « $X$  є аксіома  $Z$ ».

$Mr(Z, X_1, X_2)$ : «Ф-лу  $Z$  виводять з ф-л  $X_1, X_2$  за правилом *modus ponens*».

$Prf_Z(X, Y)$ : « $Y$  є доведення ф-ли  $X$  у системі  $Z$ ».

Згадану вище нумерацію об'єктів системи  $Z$  можна вибрати так, щоб перелічені предикати (та інші відношення такого роду, що становлять інтерес для метаматематики) відобразилися внаслідок цієї нумерації в примитивно-рекурсивні числові предикати. Всі такі предикати можна виразити мовою елементарної арифметики (див. *Арифметика формальна*). Через це кожному з перелічених вище метаматем. предикатів можна поставити у відповідність арифм. ф-лу, яке описує цей предикат (теринями обраної нумерації об'єктів системи  $Z$ ). Напр., можна побудувати такі формули

$Fm(x)$ : « $x$  є номер якоїсь ф-ли».

$Neg(z, x)$ : « $z$  є номер ф-ли, а  $x$  — номер її заперечення».

$Prf_Z(x, y)$ : « $y$  є номер доведення ф-ли з номером  $x$  у системі  $Z$ » тощо.

Відси випливає, що мовою елементарної арифметики можна записувати різні твердження про систему  $Z$ . Важливими прикладами таких тверджень є:

$$Prf_Z(x) \Leftrightarrow_{DI} \exists y Prf_Z(x, y)$$

$$\text{con}_Z \Leftrightarrow_{DI} \forall x \forall z (Fm(x) \& Fm(z) \& Neg(z, x) \rightarrow \neg (Prf_Z(x) \& Prf_Z(z))).$$

Перша з цих ф-л виражає предикат:  $x$  є номер ф-ли, довідної в  $Z$ ; друга ф-ла твердить, що система  $Z$  несуперечлива. Припустимо тепер, що зафіксовано якусь досить сильну формальну систему  $A$  для елементарної арифметики. Тоді деякі ф-ли, що описують метаматематику розглядуваної системи  $Z$ , можна довести в  $A$ . Отже, у межах системи  $A$  можна доводити теореми про властивості самої системи  $A$  та сильніших систем. За  $A$  здебільшого беруть систему, що ґрунтується на аксіоматиці Пеано. Від вибору системи  $A$  залежить, наскільки широким буде клас довідних метаматем. тверджень. Отже,  $A$  м. полягати ось у чому: формулювання метаматем. теорем перекладають мовою арифметики; доводять ці теореми засобами заданої формальної системи  $A$ .

Враховуючи аналогію між формальними системами та обчисл. машинами, зазначимо,

що є певна подібність між  $A$  м. й такими процедурами, як автомат. програмування чи машинний переклад з однієї мови на іншу. В обох випадках відбувається кодування вхідної інформації мовою даної формальної системи (чи машини), а потім ці коди переробляють відповідно до правил функціонування розглядуваної системи (чи машини). Використовуючи метод арифметизації, треба мати на увазі, що клас метаматем. теорем, кодів яких (відповідні арифм. ф-ли), довідні в системі  $A$ , залежать не лише від вибору цієї системи  $A$ , але й від способу кодування. Річ у тому, що загадані вище ф-ли, які виражають арифм. мовою осн. метаматем. предикати (ф-ли  $Fm(x)$ ,  $Prf_Z(x, y)$  тощо), було визначено неоднозначно. Потрібно було лише, щоб вони й справді описували відповідні предикати (щоб, напр., будь-яку ф-лу  $\Psi(x)$ , що її область істинності збігається з множиною номерів ф-л системи  $Z$ , можна було вибрати як  $Fm(x)$ ). А отім, дві рівносильні ф-ли можуть і не бути дедуктивно еквівалентними щодо даної системи  $A$ . В зв'язку з цим здебільшого висунувають додаткову вимогу, щоб арифметизація була, з певною розуміння, природною. Цю вимогу можна уточнити так: треба, щоб примитивно-рекурсивні описи осн. метаматем. предикатів копіювали визначення цих предикатів, дані при зйовитовому викладенні метаматематики, а ф-ли, що виражають ці предикати, щоб мали ту саму структуру, що й відповідні примитивно-рекурсивні описи. Остання умова неодмінно виконується, якщо для побудови потрібних ф-л використовують т. з. процедуру Геделя.

За допомогою арифметизації було одержано фундаментальні результати з осн. метаматематики. Зокрема, було доведено, що в жодній формальній системі не можна вивести всі істинні ф-ли арифм. мови (див. *Гедель теорема про неможливість*). Водночас метод арифметизації показує, що можливість формальних систем досить широка. Наведемо тут один характерний приклад, який ілюструє ці можливості. Нехай, як і вище,  $A$  є досить сильна арифм. система. Тоді для якоїсь ф-ли  $\varphi$  може виявитися, що в  $A$  вивідно:  $\neg Prf_A(\varphi) \& \forall z (Neg(z, \varphi) \rightarrow \neg Prf_A(z))$ , де  $\varphi$  — номер ф-ли  $\varphi$  в заданій нумерації об'єктів системи  $A$ . Це означає, що  $\varphi$  не залежить від аксіом  $A$ . Придавши  $\varphi$  до  $A$  як нову аксіому, одержимо сильнішу формальну систему. Істинним моментом при цьому є те, що незалежність  $\varphi$  встановила сама система  $A$ . Очевидно, що це веде до розгляду «самовдосконалюваних» формальних систем. Такі розгляди становлять значний інтерес і для осн. математики, і для *автоматичної теорії*.

Лит.: Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York-Toronto, 1955; Feferman S. Arithmetization of metamathematics in a general setting «Fundamenta mathematicae», 1960, v. 49.

М. Н. Бєлєв

**АРИФМЕТИКА З ПЛАВАЮЧОЮ КОМОЮ** — спосіб виконання арифм. операцій над числами, представленими у вигляді мантиси й по-

рядну В ЕЦОМ А. з п. к. реалізується або структурно, або програмно. Виконати операцію — це значить обчислити порядок і мантису результату. Порядком суми й різниці є більший з порядків операндів, порядком добутку — алгебр. сума порядків співмножників, порядком частки — різниця порядків діленого та дільника. Щоб обчислити мантису суми (різниці), додають (віднімають) вирівняні мантиси операндів за правилами додавання (віднімання) чисел з фіксованою комой; при цьому мантиси вирівнюються, зсуваючи мантису того операнда, у якого порядок менший, на число розрядів, що дорівнює різниці порядків операндів. Мантиса добутку (частки) є добутком (часткою) мантис операндів, зваженим за правилами, описаними для чисел з фіксованою комой. Якщо результат одержано ненормалізований, то збільшеного при виконанні операцій А. з п. к. він автоматично нормалізується в машині. Див. також *Арифметичні операції, Операції над числами, С. М. Берстенов.*

**АРИФМЕТИКА З ФІКСОВАНОЮ КОМОЮ** — спосіб виконання арифм. операцій над числами, положення ком в яких є строго визначеним і не змінюється в процесі виконання операцій. Таке зображення чисел дає змогу спростити виконання операцій машинним і збільшити їхню швидкість, але зауважує діапазон припустимих чисел порівняно з формою зображення чисел в арифметиці з плаваючою комой. Якщо після обчислень перед комой число цифр більше, ніж припустимо в даній машині, то виробляється сигнал переповнення. В машинах, які не мають плаваючої форми зображення чисел, щоб уникнути переповнення при обчислюванні, необхідно зводити масштаби множників. Напр., якщо в якійсь машині неприпустимі числа, більші за 1, а припускається, що буде одержано суму порядку 10, то кожен з доданків треба помножити на 0,1 і врахувати цей множник при подальших обчисленнях. *С. М. Берстенов.*

**АРИФМЕТИКА ФОРМАЛЬНА** — загальна назва класу формальних систем, які більш чи менш повно описують т. з. елементарну теорію чисел (як відому, напр., від аналітичної теорії чисел). З них особливе місце належить системі, пов'язаній з аксіоматикою Дж. Пеано. Ця формальна система (система Р) є відправним пунктом для багатьох сучас. логіко-матем. досліджень. Мова системи Р містить символи 0 і 1 і знаки арифм. операцій додавання й множення. Вирази вигляду  $1 + 1 + \dots + 1$  застосовують для позначення натуральних чисел, вони наз. цифрами (0 і 1 теж відносять до цифр). Крім того, мова системи Р має потенційально нескінченну кількість символів для змінних.  $a, b, x, y, \dots$  Вирази, які можна побудувати з символів 0, 1 і змінних за допомогою додавання й множення, наз. термами (цифра — це окремий випадок терма). Вирази вигляду  $t_1 = t_2$ , де  $t_1, t_2$  — терми, є елементарними формулами. Решту ф-л арифметики будують

з елементарних за звичайними правилами логіки предикатів, тобто за допомогою логіч. зв'язок і *кванторів*. Розрізняють вільні й зв'язані змінні. Ф-ла, в якій немає вільних змінних, являє собою жност висловлювання про натуральні числа (істинне чи хибне). Ф-ла, що залежить від  $n$  вільних змінних, задає певний  $n$ -місний теоретико-числовий предикат.

Дедуктивний апарат системи Р побудовано так. Крім аксіом і правил виведення класичного числення предикатів з рівністю, в ній арифм. аксіоми, що описують характерні властивості натуральних чисел:

$$1 \ (a + 1 = 0),$$

$$(a + 1 = b + 1) \rightarrow (a = b),$$

$$a + 0 = a,$$

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot (b + 1) = (a \cdot b) + a.$$

Крім того, є схема аксіом метем. індукції:

$$(\mathfrak{U}(0) \wedge \forall x (\mathfrak{U}(x) \rightarrow \mathfrak{U}(x + 1))) \rightarrow \forall x \mathfrak{U}(x),$$

де  $\mathfrak{U}(x)$  — будь-яка арифм. ф-ла. Використовуючи зазначені аксіоми і правила виведення, визначають поняття довідності. В межах системи Р можна побудувати значну частину арифметики. За допомогою схеми індукції доводять осн. властивості додавання та множення (переставний, сполучний, розподільний). Відношення  $a < b$  виражається ф-лою  $\exists c (a + 1 + c + 1 = b)$ , при цьому довідними виявляються осн. властивості нерівностей. Аналогічно мовою системи Р виражають ряд відношень, пов'язаних з подільністю. Напр., твердження про те, що від ділення  $a$  на  $b$  одержують частку  $q$  й остачу  $r$  записують так:

$$(a = b \cdot q + r) \wedge (r < b).$$

Так формалізується теорія подільності (включаючи теорему про найбільший спільний дільник, елементарні властивості простих чисел тощо). Зазначені факти показують, що система Р досить сильна. Спираючись на ці можливості даної формальної системи, в її межах можна моделювати будь-які обчислення і, отже, провести далекосягну аналогію між системою Р та обчисл. машиною.

Механізм такого моделювання розробив астр. математик К. Гедель 1931. Він довів, що для кожної примітивно-рекурсивної ф-ції  $f(x_1, \dots, x_n)$  можна побудувати арифм. ф-лу  $\mathfrak{U}_f(x_1, \dots, x_n, y)$ , що виражає відношення  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ . Побудову цієї ф-ли провадять індукцією за довідною примітивно-рекурсивного описування ф-ції  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Так, напр., якщо  $f(x)$  є суперпозицією примітивно-рекурсивних ф-цій  $g(x)$  і  $h(x)$  і якщо відповідні ф-ли  $\mathfrak{U}_g$  і  $\mathfrak{U}_h$  вже побудовано, то ф-лу  $\mathfrak{U}_f(x, y)$  визначають так:

$$\exists z (\mathfrak{U}_h(x, z) \wedge \mathfrak{U}_g(z, y)).$$



Аналогічно, якщо ф-цію  $f(x, y)$  одержано за схемою примітивної рекурсії з простіших ф-цій  $g(x)$  і  $h(x, y, z)$ , то ф-лу  $\mathcal{U}_i$  будують як якусь стандартну комбінацію відповідних ф-л  $\mathcal{U}_j$  і  $\mathcal{U}_k$ . Можна сказати, що процедура побудови ф-л вигляду  $\mathcal{U}_i$  (процедура Геделя) являє собою транслятор з мови примітивно рекурсивних програм на мову  $\Lambda$ . Ф. За допомогою геделівської процедури в  $P$  можна доводити різні властивості примітивно рекурсивних ф-цій. Напр., виходячи з примітивно рекурсивного опису показникової ф-ції  $a^x$ , можна легко довести за індукцією тотожність  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ . Геделівська процедура дає змогу сформулювати й довести цю тотожність у системі  $P$ , неважаючи на те, що в цій системі немає знака для операції піднесення до степеня. Взагалі ж таке твердження. Нехай до мови системи  $P$  приєднамо додаткові символи, що означають які-небудь примітивно рекурсивні ф-ції. Додамо як нові аксіоми визначальні рівності для цих ф-цій. Тоді одержана таким способом розширена система  $P'$  виявляється по суті еквівалентною початковій системі  $P$ . Кожна ф-ла, що  $\Pi$  виводить у  $P'$ , після повного перекодування переходить у ф-лу, що  $\Pi$  виводить у  $P$  (перекодування потрібне, щоб усунути зайлишкові символи, його здійснюють за допомогою геделівської процедури й, отже, воно не міняє змісту ф-ла). Ця властивість забезпечує системі  $P$  значну гнучкість, тому  $\Pi$  вручно використовувати в різних метаметах. дослідженнях (див. *Арифметизація метаматематики*).

Важливим виявом описаного ефекту, що його досягають процедурою Геделя, є можливість моделювати в системі  $P$  довільні обчислення. Відомо, що роботу будь-якого алгоритму за будь-яку задану кількість кроків можна описати за допомогою певної примітивно рекурсивної ф-ції. Але для можливої такої ф-ції  $f(x_1, \dots, x_n)$  існує таке твердження. Нехай  $f(n_1, \dots, n_k) = m$ . Тоді в  $P$  довідноку є ф-ла  $\mathcal{U}_f(n_1, \dots, n_k, m)$  і для будь-якого  $i \neq m$  довідноку є ф-ла  $\neg \mathcal{U}_f(n_1, \dots, n_k, i)$ . Звідси випливає, напр., що для будь-якої Тьюрінгової машини й для будь-якого набору початкових даних можна побудувати висновок, який відтворює крок за кроком процес роботи даної машини. Тому, якщо машину можна застосувати до початкових даних і вона обчислює якийсь результат, то цей факт можна встановити в системі  $P$ .

Незважаючи на багатство виражальних і дедуктивних засобів, система  $P$  неповна, тобто в ній не можна вивести всі істинні арифм. твердження (див. *Гедель теорема про неповноту*). Можна будувати сильніші формальні системи, приєднуючи до системи  $P$  які-небудь істинні, але не вивідні в ній твердження як нові аксіоми. Треба лише, щоб множину аксіом одержаної системи можна було перелічити за допомогою певного алгоритму. Кожна така система також неповна. Проте можна побудувати трансфінитну послідовність фор-

мальних систем зростаючої сили, які в сукупності вичерпують усі істинні твердження про натуральні числа, які можна виразити арифм. мовою. В цьому напрямі ведуть інтенсивні дослідження.

Л.м. Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1952; Гудковий Р. Л. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1961; Feferman S. Transfinite recursive progressions of axiomatic theories. «The Journal of symbolic logic», 1962, v. 27, M. 3. М. В. Вайсман.

**АРИФМЕТИЧНА І АНАЛІТИЧНА ІЄРАРХІЯ** — два способи класифікації числових множин, в основу яких покладено мови арифметики відповідно 1-го і 2-го ступеня.

Арифметична ієрархія охоплює множини, які можна виразити мовою елементарної арифметики (див. *Арифметика формальна*). Ці множини, як множини істинності, можна одержати, навіплюючи квантори на рекурсивні предикати числових змінних. Їх класифікують за числом змін кванторів і за знаком першого квантора. Так, рекурсивно передічні множини можна зобразити у вигляді  $\exists y \forall x A(x, y)$  із загальнорекурсивним  $A$ ; вони, за означенням, становлять клас  $\Sigma_1$  в арифм. ієрархії. Доповнення до рекурсивно передічних множин, представі у вигляді  $\forall y \exists x A(x, y)$ , об'єднуються у клас  $\Pi_1$ . Взагалі  $\Sigma_n$  складається з множин, одержаних навішеними на рекурсивні предикати  $n$  дочергових кванторів, перший з яких — квантор існування. Аналогічно визначають клас  $\Pi_n$ . Побудовані так класи  $\Sigma_n, \Pi_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), при цьому  $\Sigma_0 = \Pi_0$  дорівнюють класові всіх рекурсивних множин, характеризують за допомогою певної канонічної форми кванторних виразів. Простими тотожними перетвореннями будь-яку арифм. множину можна звести до канонічного вигляду.

Аналітична ієрархія охоплює ширший клас множин, які представі мовою т. з. арифметики 2-го ступеня. Ця мова відрізняється від мови елементарної арифметики наявністю функціональних змінних, які пробігають множину всіх нескінченних числових послідовностей, і наявністю кванторів, що зв'язують ці змінні. За допомогою тотожних перетворень ф-л цієї мови можна звести до такого вигляду, що всі функціональні квантори виявляються внесеними на початок формули. Класифікацію проводять за числом поргунань функціональних кванторів. Напр.,  $\Pi_1^1$  є сукупність множин, які представі формулами (у зведених формі) з одним функціональним квантором загальності. В аналітичній ієрархії є дуже нефективні засоби породжування множин (функціональні квантори). Тому в ній виділяють рекурсивні ієрархії, які використовують конструктивні принципи. Ці принципи полягають приблизно в тому, що допускаються деякі прості види лічбового перебору, проітерованого за досить достаттними для огляду трансфінитними відділками. Важливим прикладом такого роду є гіперарифметична ієрархія, яка становить досить природне продовження

арифметичної. Ця ієрархія вичерпує класи множин, які потрапляють у  $P_1$  разом зі своїми доповненнями. Ведуться дослідження щодо побудови та вивчення природних класів ще нижчих ієрархій.

Л. М. Гіджерс, Х. Т. Річардс, рекурсивні функції і ефективна вимірність. Пер. з англ. М. 1972 [Бібліопр. в. 597—398]. М. В. Вєлікий

**АРИФМЕТИЧНИЙ ПРИБІР (АП)** — один з головних блоків електронної цифрової обчислювальної машини (ЕОМ), призначений виконувати арифметичні й логічні операції. Класичний А. п. (мал. 1) складається з суматора  $См$  (осн. вузол А. п.), двох регістрів ( $P_1$  і  $P_2$ ) з відповідними логіч. схемами та пристроєм, що керує блоком А. п. (КП АП). Частини регістрів (на мал. виділені тоном) відповідають логіч. схемам, що стосуються певних регістрів. Суматор призначений для підсумовування чисел, регістри  $P_1$  і  $P_2$  — для зберігання доданків чи зменшуваного й від'ємника, співмножників чи діленого й дільника — залежно від виконуваної операції.

КП керує послідовністю дій, що їх виконує А. п., й координує його роботу. Зовнішні зв'язки А. п. з іншими пристроями цифрової машини зображено на мал. 1. З запам'ятовувальним пристроєм (ЗП) цей пристрій зв'язаний кодовими сигналами читання (КШЧ) та записування (КШЗ), що яких у нього вводяться початкові дані й виводяться з нього результати обчислень. З пристроєм керування процесора А. п. зв'язаний керуючими сигналами, по яких до нього надходять синхронізуючі імпульси з КП, а з нього до КП подаються імпульси, що сигналізують про закінчення обчислень, та ін. керуючі імпульси. А. п. працює за таким принципом: код арифм. чи логіч. операції з КП процесора надходить у КП А. п., де дешифрується й формується сигнал, який відповідає цьому кодові операції, дані по КШЧ вибирають із ЗП перший операнд за адресою, вказаною в команді. Перший операнд проходить через  $P_1$  і  $См$  і встановлюється на  $P_2$ . Другий операнд, вибраний із ЗП за другою адресою, вказаною в команді, надходить також по КШЧ на  $P_2$ . Після прийняття обох операндів починається виконання операції: на  $См$  формується результат операції (операції множення й ділення також зводяться в А. п. до операції додавання й віднімання). З закінчення формування результату виробляється ознака кінця операції, за якою результат операції записується через КШЗ за адресою, вказаною в коді команди. На цьому закінчується виконання логіч. чи арифм. операції; причому крім формування результату, в А. п. можуть вироблятися різні ознаки результату, напр.,  $+$  — ознака негативного результату,  $-$  — переповненого і т. д. Ці ознаки надходять до КП обчисл. машини і впливають на дальший хід обчисл. процесу. Основні характеристики й структура А. п. залежать від прийнятої системи числення, способу реалізації обчисл. процесу, форми подання чисел, способу подавання від'ємних чисел, розрядності чисел, типу застосо-

вуваних схем, складу операцій, прийнятої методики обчислювань і необхідної швидкості. Залежно від прийнятої системи числення розрізняють двійкові, десяткові та двійково-десяткові А. п. Найчастіше використовують двійкову систему числення, бо її технічно простіше за інші реалізувати (а взагалі можна будувати А. п. з будь-якою основою системи числення). Застосовують і двійково-десяткові А. п. (напр., у машинах сімейства «МНР»).

Відповідно до способу реалізації обчисл. процесу А. п. можуть бути послідовної, паралельної й паралельно-послідовної дії. В арифметичному пристрої послідовної дії кожний операнд вводиться послідовно, розряд за розрядом, починаючи від знака операнду, і операції над операндами проводяться також послідовно, порозрядно: числа тут подаються у вигляді часової послідовності сигналів і мають один загальний вихід, причому кожному розрядові відводиться певна часова позиція відносно заданого початку відліку. Такий А. п. перетворює часові послідовності, що зображують обидва доданки, на часову послідовність, що зобразить суму, яка видається по спец. коду, починаючи від молодших розрядів і кінчаючи старшими розрядами та знаком. Цю функцію звичайно виконує двійковий суматор однорозрядний. Якщо його доповнити схемою зберігання переносів (мал. 2), то він може бути послідовним суматором з А. п. послідовної дії. В такому А. п. менше, як в А. п. паралельної дії, обладнань, але в нього й менша швидкість. В А. п. паралельної дії (мал. 3) всі розряди кожного операнда надходять водночас по м'янах (м-розрядність числа); дії над числами проводяться також одночасно з усіх розрядів. Логічно такий А. п. можна уявити, якщо сподіючись на однорозрядних суматорів так, щоб вихід з попереднього суматора  $ОС_1$  був вхідом наступного однорозрядного суматора  $ОС_2$ . Арифметичний пристрій паралельно-послідовної дії займає проміжне місце між першими двома А. п., тут усі розряди оброблюваного числа розчленовуються на групи, розряди, що стосуються однієї групи, обробляються одночасно (паралельно), а групи обробляються послідовно.

Щодо форми подання чисел, то розрізняють А. п., які оперують з числами з фіксованою комою (див. Арифметика з фіксованою комою), з плаваючою комою (див. Арифметика з плаваючою комою) та з цілими числами. Є й А. п., які виконують операції з числами з фіксованою й плаваючою комою та з цілими числами водночас (напр. «Днепр-2»). При обробці чисел з плаваючою комою можливі два способи виконання операцій: а) послідовний, при якому обчислюється порядок результату, а потім його мантиса, послідовно на одному й тому самому обладнанні; б) паралельний, коли порядок і мантиса результату обчислюють одночасно на різному обладнанні. Перевага А. п. першого типу — малі апаратні затрати (практично можна вико-

ристовувати А. п., поданий на мал. 1, з деякими незначними доповненнями). Вада — мала швидкість. Для збільшення швидкості обробки чисел з плаваючою комою А. п., зображений на мал. 1, доповнюють підсумовувальним пристроєм для обробки порядків і лічильником циклів — для підрахування числа асудів під час зрівнювання порядків. В А. п. з плаваючою комою є більший діапазон представлення чисел, аніж в А. п. з фіксованою комою за однакової розрядності. В А. п. з фіксованою комою апаратні витрати менші, ніж в А. п. з плаваючою комою однієї й тієї самої розрядності, але й діапазон представлення чисел менший, і програмування (у зв'язку з необхідністю вводити масштабування) утруднено.

Залежно від способу представлення від'ємних чисел у ЦОМ (зворотним або додатковим кодом) суматори в А. п. будуть з циклічним переносом або без нього.

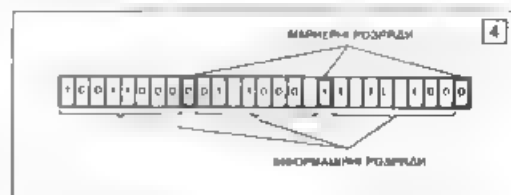
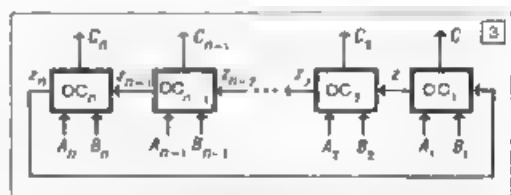
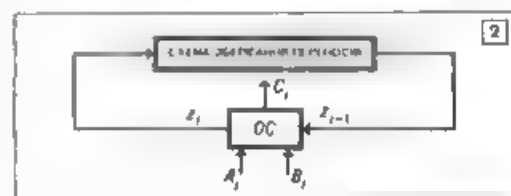
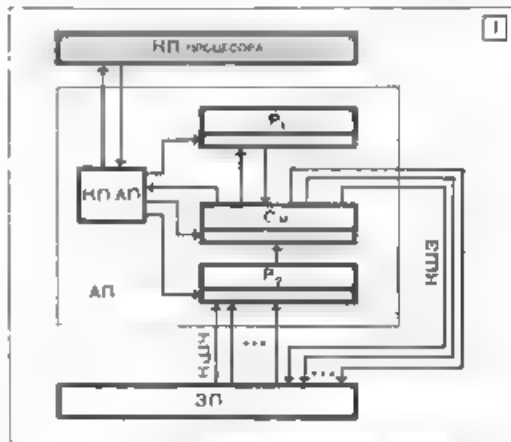
З розрядністю А. п. пов'язана точність і швидкість обчислювача: чим вища розрядність, тим більша точність обчислювань, але тим менша швидкість. Оптимальна довжина числа дорівнює або кратна стандартній порції інформації, яку обробляє А. п. Вона змінюється залежно від того, застосовується ЦОМ. Так, розрядність слова малих ЦОМ, як правило, становить 8, 12, 16, 18 і 24 біт; великі машини мають розрядність 24, 32, 36, 48 або 64 біти.

Розрядність А. п. може бути постійною і змінною. А. п. перших обчисл. машин, як правило, мали постійну, фіксовану розрядність. При цьому, якщо використовувалась різнорозрядна інформація, то зменшувалась продуктивність А. п. й нерационально використовувалась пам'ять. Усе більше вітчизняних («Днепр-2», «МІР» та ін.) і зарубіжних машин («Nova 1200», «Supersova», «Patashate-16» та ін.) використовують змінну розрядність. Дискретність змінного слова може бути різною. Але звичайно для окремої ЕЦОМ установлюють певну дискретність довжини операнду, яка дорівнює якомусь заданому числу розрядів  $\mu$ . Число задовжки  $\mu$  розрядів наз. символом. Максимально можлива довжина числа тоді дорівнює  $\frac{n}{\mu} = k$  символів (де  $n$  — розрядність числа). Для економного записування алфавітної інформації доцільно вибирати  $\mu = 6$ , а для економного записування двійково-десяткової інформації — влучно встановити кратним чотирьом ( $\mu = 4$ ,  $\mu = 8$ ). Поширилося представлення інформації 8-розрядними символами  $\mu = 8$  (які наз. байтами).

Є два способи зазначати змінну довжину слова: а) довжина поля зазначається в команді й задається як число розрядів у полі й може змінюватися від одного розряду (при  $\mu = 1$ ) до якого-сь заданого максимуму. Цей спосіб підходить для будь-якої дискретності одиниць інформації; б) в пам'яті відводяться спец. розряди, в які корисна інформація не записується, вони служать лише для того,

щоб зазначати довжину поля. Це т. з. «маркерні» розряди. «1» в маркерному розряді вказує, що цей символ є останнім у числі й що наступний символ належить іншому числу (мал. 4).

Під час обробки інформації змінної довжини в А. п. виникають нові функції: працювати з різнодовжинними операндами, визначати довжину результату; заокруглювати результат за довжиною; очищати символи, які опиняться за межею слова; виробляти ознаки за довжиною результату. Для того, щоб здійсню-



1. Блок-схема арифметичного пристрою та його зв'язки з іншими пристроями ЦОМ.
2. Блок-схема арифметичного пристрою послідовної дії.
3. Блок-схема арифметичного пристрою паралельної дії.
4. Спосіб зображування маркерних розрядів.

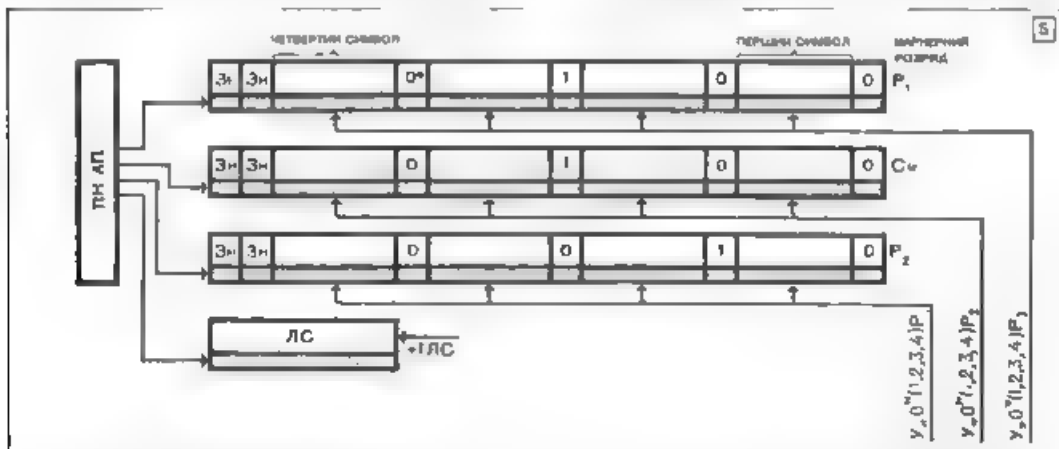
вати ці функції, треба, щоб А. п. мав обладнання для приймання інформації про довжину операцій, для зберігання її під час операції та для формування довжини результату. А. п. за певною довжиною результату здійснює заокруглювання, виробляє ознаки результату й установлює в «0» ті розряди С<sub>м</sub>, які опинилися за межею маркера праворуч.

В загальному випадку для всіх операцій збільшення кількості розрядів у символі веде до зменшення кількості необхідного обладнання й до збільшення швидкодії. Проте при виборі надто великого  $\mu$  ( $\mu > 8$ ) незначне збільшення точності обчислень призводить до значного збільшення числа розрядів у слові. Зважаючи на нові функції А. п., які виникають під час обробки інформації змінної довжини, можна побудувати А. п., який реалізує ці функції (мал. 5). На мал. 3 зображено найпростіший чотирисимвольний А. п. із введеними в нього необхідними доповненнями: розрядами для запам'ятовування маркерів, лічильником для підрахування числа символів у першому операнді (ЛС); посимвольною установкою в «0» у регістрах  $P_1$ ,  $P_2$  й С<sub>м</sub>. Маркерні розряди необхідні, щоб зазначити межі слова: в  $P_1$  — кінець 1-го операнду, в  $P_2$  — кінець 2-го операнду, в С<sub>м</sub> — кінець результату.

Довжина результату (в символах) визначається звичайно довжиною 1-го операнду, число символів у якому підраховує ЛС. Посимвольна установка в «0» необхідна для очищення окремих символів, які залишаються за маркером справа, бо за будь-якої кількості символів в операндах (1, 2, 3 або 4 символи) в операції беруть участь усі чотири символи.

й результат, бо в таких А. п. немає нагромаджувальних елементів. Комбінаційні зв'язки між елементами. В нагромаджувальних А. п. (див. *Суматор нагромаджувальний*) операнди надходять послідовно один за одним, результат операції залишається на суматорі й після зникнення вхідних сигналів. Схеми нагромаджувальних А. п. звичайно мають імпульсні й імпульсно-потенціальні зв'язки між елементами.

Структура і складність А. п. залежать від складу операцій (набору мікропрограм), що їх виконує машина. Будь-яка арифм. операція розкладається на кілька елементарних операцій або мікрооперацій, виконуваних у необхідній послідовності. До мікрооперацій належать: установка в нуль регістрів, суматорів або окремих розрядів А. п.; приймання коду якимсь із блоків А. п.; видавання коду; інвертування коду; зсув коду зліво разом зі знаком (у бік старших розрядів); зсув коду зліво без знакового розряду; зсув коду вправо разом зі знаком (у бік молодших розрядів); зсув коду вправо без знакового розряду; обмін кодами між різними блоками А. п.; додавання кодів. Час виконання елементарної операції додавання (віднімання) є ось, показником швидкодії А. п. Операції віднімання (або мікропрограма операції «віднімання») в А. п. нагромаджувального типу 3-адресної машини з фіксованою номою складається з таких мікрооперацій: установлення в нуль усіх блоків А. п.; приймання 1-го коду на приймальний регістр; передавання 1-го коду на суматор і приймання 2-го коду на приймальний регістр; інвертування



5. Блок-схема найпростішого чотирисимвольного арифметичного пристрою (з зазначенням маркерних розрядів; Y — установка, Зн — знак).

Залежно від типу застосовуваних схем А. п. ділять на комбінаційні й нагромаджувальні. В комбінаційних А. п. (див. *Суматор комбінаційний*) результат на виході з'являється лише одночасно зі вхідними сигналами; зі зникненням вхідних сигналів пропадає

2-го коду (операнда); підсумовування, одержування результату на суматорі; видавання результату за 3-ю адресою.

Структура А. п. залежить і від прийнятої методики обчислювань у ЦОМ (див. *Операції машини*), тобто від вибору алгоритмів опера-

цій. Особливо впливає на пошуку логічну схему А. п. прийнята методика виконання множення й ділення. В будь-якому випадку для виконання множення треба, щоб А. п. мав щонайменше три регістри: множеного, множника і сум часткових добутків. Множення двійкових чисел з А. п. можна звести до послідовності додавань і зсувів. Найбільший практичний інтерес становить такий алгоритм множення: множення починається з молодших розрядів множника, множник зсувається вправо, сума часткових добутків також зсувається вправо, множення закінчується нерухожим. Цей алгоритм множення можна розчленувати на такі етапи: 1) на початку операції всі регістри устанавлюють у нульовий стан ( $P_1, P_2, i \text{ см}$ ), після цього множене розміщують на  $P_2$ , множник — на  $P_1$ , суму часткових добутків — на  $\text{см}$ ; 2) аналізуються молодший розряд множника (на  $P_1$ ); якщо він має значення 1, то до суми часткових добутків додається множене, розміщене на  $P_2$ , якщо він має значення 0 — виконується дія 3; 3) множник і сума часткових добутків зсуваються на один розряд управо, молодші розряди часткового добутку потрапляють у вивільнені старші розряди  $P_1$  (регістру множника); 4) дії 2 і 3 повторюються  $n$  разів ( $n$  — розрядність співмножників); 5) знак співмножника в процесі множення участі не бере, зі співмножниками оперують як з додатними числами; знак результату формується під час додавання знаків операндів за мод 2.

Цей алгоритм реалізується на А. п. структурну схему якого наведено на мал. 1. Ціх самих регістрів досить і для виконання операції ділення, вона також реалізується в А. п. за допомогою  $n$  операцій зсування й відсумовування (віднімання), тому на виконання множення й ділення йде значно більше часу, аніж на додавання. Для виконання логічних операцій використовують звичайно ті самі кола, що й для арифм. операцій. Послідовність виконання мікрооперацій, передавання інформації між окремими блоками всередині А. п. і зв'язок його з ін. частинами машини здійснює схема керування А. п. (ПК А. п.).

Зі зростанням застосування ЦОМ спостерігається тенденція до збільшення кількості й ускладнення функцій, що їх виконує А. п., а внаслідок цього А. п. значно розширюється й перетворюється на операційний пристрій (ОП). В ОП, який складається з кількох (більше як з трьох) операційних регістрів, певним чином з'єднаних між собою (ОП з гніздовою пам'яттю); є ОП з кількох суматорів (багатосуматорні ОП) та ін. типи ОП.

Одні шляхи вдосконалення ОП — збільшення швидкості за рахунок логіч. і тех. можливостей (до логіч. можливостей відносять розробку нових методів виконання операцій і досконаліших методів прискорювання операцій, суміщення виконання кількох операцій у часі; до технічних — використання нових, надійніших і швидше діючих елементів, введення в машину кількох А. п.).

Лит.: Акушевский И. Н., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах М., 1968 [С. 67—с. 430—433] Кардеев М. А. Арифметика цифровых машин М., 1969 [С. 61—с. 575]. Каган Б. М., Каневский М. М. Цифровые вычислительные машины и системы М., 1970 [С. 61—с. 613]. Т. Ф. Сдобняков

**АРИФМЕТИЧНИЙ ПРИСТРІЙ ПАРАЛЕЛЬНО-ПОСЛІДОВНОЇ ДІЇ** — арифметичний пристрій, у якому всі розряди кожного операнда вводяться одночасно по  $n$  каналах. Операції над числами в ньому проводяться також одночасно по всіх розрядах. Див. також *Суматор паралельний*.

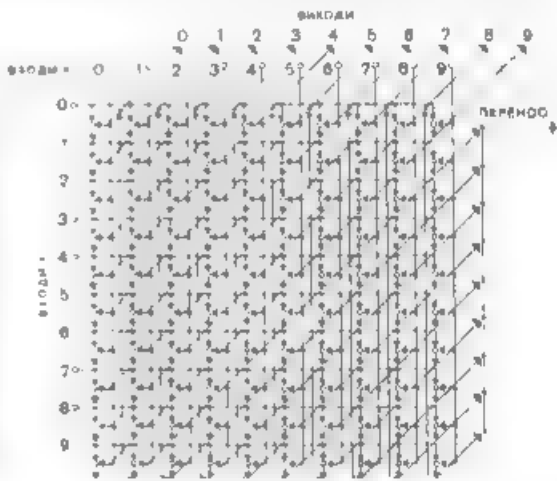
**АРИФМЕТИЧНИЙ ПРИСТРІЙ ПАРАЛЕЛЬНО-ПОСЛІДОВНОЇ ДІЇ** — арифметичний пристрій (АП), в якому розряди числа поділяються на групи і розряди кожної групи обробляються одночасно (паралельно), а групи розрядів — послідовно. Такий метод обробки інформації використовують, як правило, тоді, коли розряди, що входять до однієї групи, мають самостійне значення, наприклад, тетради (двійкові еквіваленти десятикових цифр) розрядів при представленні чисел у двійково-десятиковій системі числення. Тому А. п. п.-п. д. застосовують у ЦОМ, де як основною системою числення користуються двійково-десятиковою системою і не потрібна висока швидкість. Структура АП таких ЦОМ відрізняється від арифметичного пристрою послідовної дії тільки тим, що зсуваються й підсумовуються не двійкові цифри, а тетради.

Одн. елементом А. п. п.-п. д. є чотирирозрядний двійковий суматор паралельної дії, який забезпечує потетрадне додавання чисел. Після додавання пари тетрад результат переноситься на вихідний регістр і визначається перенос у старшу тетраду. В наступному такті на очищений суматор надходять наступні тетради та імпульс переносу, одержані в попередньому такті, і т. д. При додаванні двійкових тетрад на звичайному двійковому суматорі треба вводити додаткові схеми для формування одиниць переносу, коли одержана сума перевищує дев'ять (у чотирирозрядному двійковому суматорі перенос формується, якщо сума перевищує шістнадцять) і для одержання тетрад суми, що відповідають десятичним цифрам. Щоб спростити схему А. п. п.-п. д., застосовують кодування чисел не в звичайному базисі 8421, а в базисі 8421 з надлишком 3, в базисі 2421 і т. д. Простішу схему А. п. п.-п. д. одержують, коли замість суматора використовують десятиковий лічильник. Кожна десятикова цифра числа представляється послідовністю імпульсів, кількість яких дорівнює значенню цифри. При додаванні двох чисел у лічильник послідовно заносяться цифри однозначних розрядів доданків. У деяких ЦОМ, де користуються двійково-десятиковою системою числення, для підвищення швидкодії застосовують табличний метод додавання чисел. У цьому разі суматор роблять у вигляді матриці, яка реалізує таблицю додавання десятикових цифр (мал. а). Матриця являє собою прямокутну решітку

провідників, у вузлах якої розміщено двохдові схеми збігу (мал. 6). Діагональне розміщення в таблиці результатів додавання двох десяткових розрядів дає змогу об'єднати спільною шиною виходи схем збігу, що лежать на одній діагоналі матриці. Крім того, можна об'єднати всі діагоналі з однаковими сумами за модулем 10. Перевоси в наступний розряд одержують, об'єднуючи діагоналі, розміщені в таблиці додавання нижче від діагоналі «9». Табличним методом додавання користуються, напр., у ЦОМ «МИР».

операції додавання розряди операндів передаються на входи однорозрядного суматора  $\Sigma$  за допомогою асинхронних сигналів  $\{q_i\}_1$  і  $\{q_i\}_2$ . Суматор на виході  $S$  формує значення поточних розрядів суми операндів, які за допомогою серії керуючих сигналів  $\{q_i\}_3$  та  $\{q_i\}_4$  записуються в регістр  $R_2$ . На виході  $p$  однорозрядного суматора формується сигнал перенесення в старший розряд, який і затримується на період проходження керуючих імпульсів  $\{q_i\}$  і підсумовується в наступному

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |



Таблиця додавання десяткових цифр (а) і матриця (б) арифметичного пристрою паралельно-последовної дії

Дит., Прагматичний М. В. (та ін.). Микроелектроніка і однокоридні структури для побудови логічних і арифметичних пристроїв. М. 1967 [бібліогр с. 224-226]. Ричардс П. К. Арифметичні операції на цифрових вычислительных машинах. Пер с англ. М. 1957 [бібліогр с. 412-419].

Ю. А. Бузичев, С. М. Водичев.

**АРИФМЕТИЧНИЙ ПРИСТРІЙ ПОСЛІДОВНОЇ ДІЇ** — арифметичний пристрій, у якому операції над числами виконуються порозрядно. В А. п. п. д. число представляється як часова послідовність імпульсів, у якій кожному розряду числа відповідає певна часова позиція; усе число передається по одній шині. Передача інформації послідовним кодом і перетворення її виконуються за допомогою спец. синхронізуючих імпульсів, від періоду проходження яких залежить частота передавання розрядів чисел. У ЦОМ, що мають А. п. п. д., числа представляються, як правило, у формі з фіксованою комою.

Осн. вузлами А. п. п. д. є асинхронні регістри з колами рециркуляції та суматор однорозрядний (мал.). Приймання операндів на вхідні регістри  $R_1$  та  $R_2$  відбувається за допомогою керуючих сигналів  $\{q_i\}_1$ ,  $\{q_i\}_2$  та  $\{q_i\}_3$ ,  $\{q_i\}_4$ . На вхідні регістри операнди подаються, починаючи з молодших розрядів. При виконанні

танті з черговою парою розрядів операндів.

При додаванні чисел у зворотному коді для реалізації циклічного перенесення зміст  $R_2$  пропускається через суматор (на мал. це коло циклічного передавання показано пунктиром). При цьому час додавання двох  $n$ -розрядних чисел становить

$$T_{\text{дод}} = 2(n + 1)t,$$

де  $t$  — період проходження керуючих імпульсів  $\{q_i\}$ . У процесі додавання операндів регістри  $R_1$  та  $R_2$  поступово звільняються. У зв'язку з цим А. п. п. д. можна виконувати на двох регістрах функції регістра суми ( $R_2$ ) може виконувати один з регістрів ( $R_1$  або  $R_2$ ) операндів. Коло рециркуляції регістра забезпечує порозрядне переадресування змісту регістра в процесі асинхронного його. Необхідність відновлювати інформацію в регістрі виникає під час виконання операцій множення та ділення. Ці операції в А. п. п. д. можна виконувати, користуючись схемою, яку наведено на мал., якщо доповнити її деякими допоміжними елементами. Час виконання множення в А. п. п. д. визначається



миле БНІП-1 (8 шт.), блоків перемножувальних УБП-1 (8 шт.), споживана потужність 1,3 квт. «А» можна використовувати в проектних орг. ціях, н. д. ін. тах, обчисл. центрах, вузах Л. М. Грєдло Г. П. О структуре электронной модели с расширенным кругом задач В. ин. Вопросы теории и прикладной математического моделирования М., 1985; Пухова Г. Е. (та ін.) Электронная симулирование систем математическая машина «АРК» // «Вспомогательная и автоматизация управления», 1984, № 3.

**АСЕМБЛЕР** — загальноприйнята назва транслятора з автокоду. А. перетворює первісну програму, написану автокодом, на перемішувану програму мовою машинною. Оскільки А. здійснює трансляцію мовою автотранслювання, то під час завантаження програми потрібно налаштування умовних адрес, тобто адрес, значення яких залежить від розміщення цієї програми в пам'яті ЦОМ і від її зв'язків з ін. незалежно перетворюваними програмами.

В найпростішому випадку А. переводить одне речення первісної програми в один об'єкт (команду, константу) модуля завантаження (т. є. трансляція «один в один»). При цьому власне розміщення об'єктів у модулі завантаження і, зрештою, у пам'яті машини визначається порядком речень у первісній програмі на автокод і цілком залежить від програміста. А. виконує й допоміжні функції, такі, як підготування до друку документів потрібної форми, роздрукування зв'язків цієї програми з ін. програмами тощо. Для цього в автокодах передбачено команди А., які не породжують об'єктів у робочій програмі і призначені лише для допоміжних дій А.

Трансляція здобільшого потребує, щоб первісну програму було просякнуто двічі: за першим разом здійснюється *мем'ялі розподіл* і присвоєння значень символічним назвам; за другим разом формується робоча програма у вигляді модуля завантаження. В процесі трансляції А. проводить повний синтаксичний контроль первісної програми (див. *Синтаксичний аналіз програм*), забезпечуючи при цьому досить точну діагностику помилок за місцем і за характером.

Розширення можливостей автокодів досягають завдяки використанню *макрокоманд*, побудованих за правилами, близькими до правил написання команд автокоду, але таких, які описують складніші ф-ції, для реалізації яких потрібна група звичайних команд. У цьому разі перед трансляцією макрокоманди замінюють макророзширеними — послідовностями команд базовою мовою згідно з макро-визначеннями. В цих останніх задаються прототип макрокоманд зі структурою списку параметрів і процедура генерування макро-розширення. Транслятор, який виконує ф-ції макрогенератора й А., наз. *макросемблером*. При трансляції з мов високого рівня А. нерідко використовують, щоб виконати завершальну фазу трансляції, ю. М. Налєвський.

**АСИНХРОННІ АУТОМАТИ** **ТЕОРІЯ** — теорія математичних моделей дискретних пристроїв для переробки інформації, в яких довжини вхідних тактів і величини затримок

у внутрішніх елементах не обов'язково однакові. Вхідним тактом в асинхронних автоматах (АА) наз. проміжок часу між двома сусідніми змінованими вхідних сигналів (структурну схему АА див. у ст. *Автомат асинхронний*). Першими прикладами АА були реледно-контактні схеми: в цих моменти надходження зовн. сигналів на об'єкти реле, як правило, надто довільні й через неузгодженість характеристик не можна вважати, що всі реле спрацюють одночасно. Величезна задача А. є. т. — з'ясувати принципові можливості АА як перетворювачів послідовностей вхідних сигналів на послідовності вихідних сигналів. Коли за будь-якої комбінації  $a_i$  вхідних сигналів, яка триває досить довго, й за будь-якого внутр. стану  $a_i$  АА переходить у т. є. стійкий стан  $a_n$ , тобто такий, що не змінюється, поки не зміниться вхідний сигнал, то такий АА зводиться до *автомата скінченності*; стан  $a_n$  є значенням ф-ції переходу  $\delta$ :  $a_n = \delta(a_i, a_n)$ . Поведінка багатьох АА значно складніша, їх визначають за допомогою різних моделей, що є в А. є. т.; напр., в одній з моделей виходять з того, що величини затримок невідомі й, можливо, змінні. В таких АА одній вхідній послідовності можна відповісти множиною можливих послідовностей станів, і в заг. випадку не можна говорити про реалізацію автоматних відображень. Для такої моделі важливими завданнями є визначення класів автоматів, поведінка яких не залежить у тому чи ін. розумінні (напр., у розумінні переходу в той самий стійкий стан протягом одного вхідного такту) від величин затримок, і таких способів з'єднання АА, за яких ця незалежність зберігається. В іншій моделі елементи мають довільні, але фіксовані затримки. При цьому вихідну послідовність визначають однозначно, але вона може залежати від довжин тактів вхідної послідовності. Автоматні відображення в таких АА реалізуються тоді, коли при будь-якому досить тривалому вхідному такті встановлюється стійкий вихідний сигнал. Але й у цьому разі відображення може не бути скінченно-автоматним; якщо затримки несумірні, то можливе представлення нерегулярних подій. Це пояснюється тим, що наступний стан у такому автоматі залежить не лише від наявного стану і входу, а й від якоїсь сукупності *лінійних форм* від величин затримок  $t_1, \dots, t_n$ ; при несумірних  $t_1, \dots, t_n$  число різних лінійних форм може виявитися нескінченним. В обох моделях затримка пропускає лише сигнали, довжина яких не менша за час спрацювання затримки. Такі затримки іноді наз. *фільтрами*. Розглядають і моделі, що мають різні види затримок, у т. є. затримки з випадковим часом спрацювання, що його описано певним імовірнісним розподілом.

Отже, в А. є. т. розглядають моделі пристроїв, поведінка яких складніша за поведінку скінченних автоматів. Проте цю складність у реальних АА розглядають як небажану за-

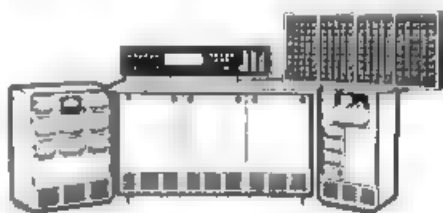


ваду, бо впливом її є залежність перехідних процесів від співвідношення часових характеристик елементів, а така залежність через неминучу неузгодженість цих характеристик може виявитися недетермінованою. Такі недетерміновані перехідні процеси (їх наз. змаганнями або гонками) можуть призводити до помилок і збоїв у роботі автомата. Тому важливе практичне завдання А. а. т. — усунути змагання, тобто синтезувати АА, в яких переходи з одного стійкого стану в інший від дії даного входного сигналу відбуваються однозначно й не залежать від величин затримок елементів та від тривалостей входних тактів. Такі АА функціонують як закриті скінченні автомати. Змагання усувають за допомогою «протигонкових» методів моделювання станів абстрактних автоматів, введення додаткових затримок у деяких модах зворотного зв'язку й побудови схем з наперед заданими властивостями, які гарантують, що змагання не буде.

Літ. Кувшинов О. П. Об асинхронных логических сетях «Проблемы передачи информации», 1961, в. 5. Чаагарс Н. Г., Пяльс Е. П. Синтез асинхронных нечетных автоматов. М., 1965. Рогинский В. И. Динамика работы дискретных автоматов с линейными задержками «Проблемы передачи информации», 1967, т. 3, в. 1. Якуба И. Г. Синтез асинхронных нечетных автоматов. Рига, 1970. Колдуэлл С. Логический синтез рележных устройств. Пер. с англ. М., 1962. Миллер Р. Теория переключательных схем. Пер. с англ. т. 2. М., 1971. О. П. Кувшинов.

«АСОР», автоматизована система організації робіт — семейство спеціалізованих обчислювальних машин для розв'язування й моделювання задач сіткового планування й керування. Розробив його Ін-т кібернетики АН УРСР. Призначено «АСОР» для розрахунку та відображення невеликих за обсягом сіток, фрагментів такої сітки чи укрупнених сіткових графіків. Високий ступінь вичислювального розв'язування та оперативність одержання його дають змогу використовувати «АСОР» як машину-порадник для керівників комплексів робіт під час планування й керування з допомогою сіткових методів. Розроблено дві модифікації «А.», «АСОР-1» («РНТМ») — квазіаналогова модель, має набір окремих моделей робіт — величинних двополюсників, у яких тривалість виконання робіт моделюється величиною електр. напруги. Моделі робіт при наборі задачі, поєднуючись між собою відповідно до конфігурації сіткового графіка, утворюють модель сітки. За допомогою «АСОР-1» можна одержувати такі характеристики сіткового графіка: а) величину й форму критичного шляху; б) найраніші можливі строки початку й закінчення робіт; в) найпізніші допустимі строки початку й закінчення робіт; г) резерв часу робіт. Індикацію критичного шляху здійснює спец. мнемосхема. Введення інформації — ручне, виведення — візуальне (на світловій мнемосхемі) й за допомогою цифрового вимірювального приладу. Макс. число робіт у графіку — 200. Похибка вимірювання характеристик графіка, зведена на шкалі машини, не вища, як 5%.

«АСОР-2» — комбінована (цифро-аналогова) модель задач сіткового планування й керування (мал.). Моделами робіт сіткового графіка є схеми електр. затримки сигналів цифровими лічильниками. Моделами подій є схеми збігу. Моделі робіт і моделі подій поєднуються між собою відповідно до конфігурації сітки. В початок моделі сітки посилается імпульсний сигнал початку робіт, який затримується в моделях робіт на час, пропорційний їхній тривалості. Затримка сигналу закінчення кінцевої події пропорційна



Спеціалізована обчислювальна машина «АСОР-2».

тривалості критичного шляху. Крім характеристик сітки, зазначених вище, «АСОР-2» має змогу визначити конфігурацію шляхів критичної зони, що відповідають заданому коеф. напруженості, стям фронту робіт на заданий момент часу, календарні строки початку й закінчення робіт з урахуванням особливостей існуючого календаря та візуальну індикацію дерева макс. шляхів у графіку з коренем у початковій події. Макс. число робіт у графіку — 400 (у т. ч. фіктивних робіт — 160), макс. число подій — 160.

Роздільна адатність щодо рівнокритичних шляхів та їхніх відрізків не нижча за 1% макс. тривалості однієї роботи. Похибка одержання характеристик сітки, зведена до шкали машини, не більша як  $\pm 0,5\%$ . Початкові дані вводяться з перфострічки або пульта керування. Результати виводяться на друкувальну машину, цифрові індикатори та світлову мнемосхему. Завдяки цифровому способу подання інформації «АСОР-2» перспективна щодо виключення в комплексі з ЕЦОМ. Розвиток спеціалізованих машин для моделювання задач сіткового планування та керування (див. *Сіткові методи планування й управління*) йде шляхом створення цифрових моделей, розробки ефективних систем відображення інформації та агрегування таких моделей з універсальними електронними обчисл. машинами.

Лит. Васильев В. В., Клепикова А. Н., Тимошенко А. Г. Решение задач оптимального планирования на электронных моделях. К., 1966. [Библиогр. с 161-164]. Васильев В. В. [та ін.]. Специализированная цифро-аналоговая вычислительная машина АСОР-2 для моделирования задач сетевого планирования и управления. «Механизация и автоматизация управления», 1968, № 4.

В. В. Васильев

**АСОТ**, агрегатна система засобів обчислювальної техніки — систематизований набір агрегатних пристроїв з уніфікованими зовнішніми зв'язками для забезпечення збирання, зберігання, переробки й видавання інформації; дає змогу компоувати інформаційні та керуючі обчислювальні системи з заданим поєднанням технічних параметрів (продуктивності, обсягу вхідної й вихідної інформації та надійності).

В АСОТ реалізовано принцип *агрегатно-блокової побудови засобів обчислювальної техніки*. Складається АСОТ з окремих конструктивно й функціонально відокремлених пристроїв. Деякі пристрої компоують в блоки (конструктивно завершена частина пристрою). Вліваючи типичні кількості блоків, можна змінювати тех. характеристики пристрою. Структура АСОТ забезпечує можливість поступово модернізувати й розвивати тех. засоби. Цього досягають шляхом уніфікації конструктивно-технологічної бази на кожному етапі розробки, а також єдності організації внутрішньосистемного зв'язку й побудови матем. забезпечення за принципом модульності.

За функціональним призначенням усі агрегатні пристрої АСОТ ділять на групи: 1) центр, пристрій керування й переробки інформації — процесор (спеціалізований й універсальні); 2) пристрій зберігання інформації — внутрішній й зовнішній запам'ятовувальні пристрої (ЗП); 3) пристрій зв'язку з об'єктом; 4) пристрій зв'язку з оперативним персоналом; 5) пристрій введення інформації з носіїв та виведення на них; 6) пристрій виходу на позасистемні лінії зв'язку і 7) пристрій внутрішньосистемного зв'язку. Спеціалізовані процесори (СПР) призначено для розв'язування окремих задач або набору простих задач, напр., задач первинної переробки інформації. Залежно від цього СПР можуть бути з жорсткою або з гнучкою програмою. Універсальні процесори обробляють інформацію при розв'язуванні складних задач керування, й тому числі задач оптимальної організації виробництва, техніко-економічного й оперативно-виробничого планування тощо. Вони здатні виконувати програми, складені в основній системі команд, незалежно від складу додаткових пристроїв (внутрішніх ЗП, пристроїв переробки інформації в режимі з плаваючою комою й переробки скінченно-десяткової інформації).

Номенклатуру АСОТ по групі внутрішніх ЗП розраховано на забезпечення можливості широко варіювати технічні параметри обчисл. комплексів за ємністю й типом використовуваних ЗП, є оперативні ЗП (ОЗП), постійні (ПЗП) й напівпостійні (НПЗП). Пристрої зв'язку з об'єктом (ПЗО) призначено для введення інформації в обчисл. машину від датчиків й видавання керуючих сигналів на виконавчі механізми та регулятори. До групи пристроїв зв'язку з об'єктом входять аналого-цифрові й цифро-аналогові перетворювачі, перетворювачі кодів й допоміжне обладнан-

ня. Пристрої зв'язку з оперативним персоналом призначено для введення поточної інформації за участю людини й виведення інформації обслуговуючому персоналові в начотній і зручній для сприймання формі або у формі документів. Зв'язок між функціональними пристроями або їхніми групами (процесора з пам'яттю, процесора з пристроями введення-виведення і т. ін.) здійснюється за допомогою пристроїв внутрішньосистемного зв'язку.

Перша черга АСОТ, розроблена в використанні дискретної елементної бази (умовно позначають АСОТ-Д) має набір агрегатних пристроїв, призначених для компоування різних модифікацій універсального процесора, та два види спеціалізованих процесорів. До складу обчислювального комплексу будь-якої обчислювальної системи, побудованої із засобів АСОТ-Д, входять: процесори універсальні й спеціалізовані, головна пам'ять, пристрої внутрішньосистемного зв'язку. Для всіх модифікацій універсального процесора прийнято єдину уніфіковану систему команд, яка забезпечує обробку двійкових чисел з фіксованою й плаваючою комою, десяткових чисел, логік, і символічної інформації. Умовна назва мінім. і макс. модифікацій універсального процесора відповідно «М-2000» і «М-3000». Спеціалізовані процесори «М-1000» і «М-1010» орієнтовані на обробку двійкових чисел невисокої точності з фіксованою комою (16 розрядів) і логік кодів.

До номенклатури запам'ятовувальних пристроїв АСОТ-Д, з яких компоують головну пам'ять, входять: ОЗП ємністю 8192 36-розрядних слів з циклом звертання 8 мксек, ОЗП ємністю 2078 18-розрядних слів з циклом звертання 8 мксек, ПЗП ємністю 8192 36-розрядних слів з циклом звертання 32 мксек, комбінований ЗП, який містить по 4096 18-розрядних слів оперативної й постійної пам'яті, НПЗП ємністю від 512 до 2048 36-розрядних слів (нароцється агрегатно). Перезаписування інформації здійснюється вручну змінюю перфокарт з циклом звертання 3 мксек.

Процесор моделі «М-1000» виконує операції над 16-розрядними двійковими числами з фіксованою комою (додавання — 20 тис. опер./сек, множення — 5 тис. опер./сек). Ємність пам'яті — 4096 + 16 384 32-розрядних слів з довільним поєднанням оперативних і постійних ЗП. Допускають відключення до 256 пристроїв введення-виведення. Процесор «М-1010» відрізняється від процесора «М-1000» меншими логіч. можливостями, але він простіший і має більшу швидкість.

Процесор моделі «М-2000» виконує операції над двійковими числами з фіксованою комою 16- і 32-розрядного формату (додавання — 40 тис. опер./сек, множення — 15—19 тис. опер./сек). Пам'ять набирають із ОЗП і ПЗП блоками по 8192 36-розр. слів (до 6 блоків). Ця модель допускає наявність до 3 мультимедіаційних каналів (до 256 пристроїв введення-виведення в кожному).

Процесор моделі «М-3000» розраховано на виконання операцій двійкової арифметики над числами з фіксованою (16- і 32-розрядного формату) і плаваючою комою (32- і 64-розрядного формату) та операцій над цілими десятковими числами змінної довжини (до 31 десяти розряду). Швидкодія при виконанні операцій над числами з фіксованою комою: типу додавання — до 100 опер./сек, типу множення — до 25 тис. опер./сек. Пам'ять має до 12 блоків ОЗП або ПЗП. Кількість мультимплексорних і селекторних каналів — до 7 и будь-якому співвідношенню.

Істотною владою АСОТ-1 є черга — надлишковість апаратури в кожному функціональному й конструктивно завершеному пристрої як наслідок уніфікації тех. баз. Оскільки в АСОТ-Д використовують тільки дискретні елементи, потрібний великий обсяг конструктивних елементів для реалізації окремих пристроїв. У поєднанні з надлишковим складом функціональних пристроїв, необхідних для створення конкретних автомат. систем керування, це зумовлює їхню високу вартість.

Цю ваду значною мірою усунуто в 2-й черзі розробки АСОТ (уточню — АСОТ-М), яку виконано на мікроелектронній елементній базі на удосконаленні структурних та архітектурних принципів. Осн. структурною одиницею тех. засобів АСОТ-М є агрегатний модуль — пристрій, який має уніфіковані зовнішні зв'язки, виконує будь-які функції по обробці та зберіганню інформації, комутації передачі, перетворенню фіз. сигналів тощо.

Новий набір засобів АСОТ-М має процесор моделі «М-6000» та групу агрегатних модулів, які служать для побудови систем на базі цього процесора. Цей набір дозволяє комбінувати проєкти як шляхом автономної та низової інформаційної й керуючої обчисл. системи для технологіч. об'єктів і наукового експерименту, що працюють у реальному масштабі часу, а також багатопроцесорних систем рівної структури, які забезпечують високу продуктивність і живучість.

За функціональним призначенням набір агрегатних модулів АСОТ об'єднується в такі групи пристроїв: обчислювального комплексу, введення-виведення, зв'язку з об'єктом, пристрої-узгоджувачі.

Набір агрегатних модулів АСОТ-М поєднує в собі розвинені систему введення-виведення і систему команд, яка забезпечує зручність у програмуванні; зручну систему пріоритетного переривання, яка дозволяє суміщувати виконання операцій введення-виведення з розрахунком. Набір агрегатних модулів забезпечує високу продуктивність (до 200 тис. адресних та до 1800 тис. безадресних мікрооперацій за 1 сек); використання пам'яті (від 8192 до 65 736 байт); можливість підключення швидкодіючих каналів прямого доступу до пам'яті, які виконують операції введення-виведення без переривання процесора; високу надійність, простоту і зручність в обслуговуванні; малі габарити, сучасне естетичне оформлення.

Математичне забезпечення має транслятор з мов ФОРТРАЙ, АЛГОЛ-60, із спеціалізованих мов, комплекс програм керування введенням — виведенням, бібліотеку стандартних програм тощо.

Впровадження АСОТ дасть значний економічний ефект у порівнянні з системами різних обчисл. машин, побудованих на різних ресурсних елементах та конструктивних базах. Літ.: Агрегатная система средств вычислительной техники К. 1989. Управління лінійно-чисельними комплексами АСВТ М-4000 М., 1971. Резанов В. В., Вихомуров В. Г., Костелянский В. М. Основные концепции и общее описание устройств первой очереди АСВТ — Костелянский В. М., Итенберг И. Н., Чахона Г. М. Новый набор агрегатных модулей — дальнейшее развитие АСВТ. «Механизация и автоматизация управления», 1971, № 4. В. М. Бегало.

**АСТАТИЗМ n-ПОРЯДКУ** — властивість автоматичної системи цілком усувати усталену похибку при зміні зовнішнього діяння за за-

коном  $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i t^i$ , при  $t \rightarrow \infty$ . Необхід-

на й достатня умова А. n-п. для лінійних стаціонарних систем полягає в тому, щоб *передательна функція* замкнутої системи за похибкою  $W_e(p)$  містила в собі нуль n-кратності, тобто, щоб  $W_e(p) = p^n W_{e0}(p)$ , причому  $\lim_{p \rightarrow 0} W_{e0}(p) \neq 0$ . Відповідна умова для дискретних систем має вигляд:  $W_e^*(z) = (z - 1)^n W_{e0}^*(z)$ ;  $(\lim_{z \rightarrow 1} W_{e0}^*(z) \neq 0)$ . Виконання

циєї умови можна досягти двома різними способами — залежно від наявності чи відсутності в системі зв'язків за заданням (збуренням). У разі відсутності зв'язків за заданням виконання цих умов можливе при наявності в замкнутому контурі n-інтеграторів. Тоді передательна ф-ція розімкненої системи матиме вигляд для неперервних систем

$W_{\text{роз}}(p) = \frac{1}{p^n} W_1(p)$ , причому  $\lim_{p \rightarrow 0} W_1(p) \neq 0$ .

І для дискретних систем —  $W_{\text{роз}}^*(z) = \frac{1}{(z-1)^n} W_1^*(z)$ , причому  $\lim_{z \rightarrow 1} W_1^*(z) \neq 0$ .

В разі наявності зв'язків за заданням (точніше при комбінуванні принципів регулювання за заданням і за відхиленням) А. n-п. можна досягти за належного вибору передательної ф-ції коректуючого зв'язку за заданням  $W_k(p)$ . Якщо передательна ф-ція розімкненої системи  $W_{\text{роз}}(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ , то

А. n-п. має місце в разі виконання умови  $B(p) (1 + W_k(p)) = G(p) p^n$  (причому  $\lim_{p \rightarrow 0} B(p) \neq 0$ ,  $\lim_{p \rightarrow 0} G(p) \neq 0$ ). Відповідна умова для дискретних систем має вигляд:

$B^*(z) (1 + W_k^*(z)) = G^*(z) (z - 1)^n$ ,  $(\lim_{z \rightarrow 1} B^*(z) \neq 0; \lim_{z \rightarrow 1} G^*(z) \neq 0)$ . У системах

стабілізації розглядають астатизм відносно збурення, в слідуючих системах — відносно задання.

А. А. Тунік



**БАГАТОВАРІАНТНИХ ЗАДАЧ РОЗВ'ЯЗУ-  
ВАННЯ** — розв'язування задач методом *posat-*  
*doynogo analizu variatsii*.

**БАГАТОВИМІРНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧ-  
НОГО КЕРУВАННЯ** — автоматичні систе-  
ми, в яких число як керування координат,  
так і керувань діянь дорівнює двом і більше.  
Специфіка Б. с. а. к. полягає в тому, що по-  
водіння кожної керованої координати  $y_i(t)$   
визначається не тільки керуючим діянням  
 $u_i(t)$ , а й (у загальному випадку) всією сукуп-  
ністю цих діянь  $u_1 \dots u_m(t)$ , які утворюють  
вектор керування  $U$ , та вектором збурюваль-  
них діянь  $A$ . Необхідність створювати Б. с. а. к.  
виникає в тих випадках, коли треба керу-  
вати одночасно кількома взаємоз'язаними  
параметрами якогось фіз. процесу. Як при-  
клад можна навести систему стабілізації час-  
тоти й напруги генераторів в енергосистемах,  
систему керування швидкістю обертання й  
тиском газів у турбореактивних двигунах,  
систему керування товщиною прокату в різ-  
них прогонах прокатного стану за допомогою  
керування швидкістю обертання й мірою від-  
тиску валків тощо. У ряді випадків застосу-  
вання Б. с. а. к. є єдиним засобом досягнення  
мети керування.

Типову блок-схему багатовимірної системи  
подано на мал. У загальному випадку розмір-  
ності векторів регулюючих діянь  $U$ , керу-  
вання координат  $Y$  та збурень  $A$  можуть  
відразнятися одна від одної. Як і одновимірні  
системи, Б. с. а. к. можна класифікувати за  
принципом керування — на замкнені, роз-  
імкнені (зі зв'язками за збуреннями, на мал.  
ці зв'язки показано пунктиром) і комбіновані  
системи автоматичного керування; за спосо-  
бом передавання сигналів — на неперервні  
та дискретні системи керування; за харак-  
тером функціональних зв'язків між координат-  
ними системами — на лінійні й нелінійні сис-  
теми керування, за призначенням — на стабі-  
лізаційні системи, слідуючі системи, системи  
програмного керування й самонастроювані  
системи (зокрема, системи екстремального  
регулювання).

Матем. описування Б. с. а. к. можна вико-  
нувати за допомогою характеристик «вхід-ви-  
хід» і термінами простору станів. Надалі обме-  
жимося описами лише лінійних Б. с. а. к., у  
яких вхідних координат стільки, як і вихідних.  
Неперервні лінійні Б. с. а. к. можна описува-  
ти (термінами характеристик «вхід—вихід»):

а) системами диференціальних рівнянь

$$Q(D)Y(t) = P(D)\Psi(t), \quad (1)$$

де  $Q(D)$ ,  $P(D)$  —  $(n \times n)$ -матриці в еле-  
ментах  $q_{ij}(D)$  і  $p_{ij}(D)$ . Елементи являють  
собой многочлени оператора диференціювання

$D \equiv \frac{d}{dt}$ ,  $Y(t)$ ,  $\Psi(t)$  — вхідний і вихідний  
вектори відповідно;

б) векторно-матрицевими рівняннями згортки

$$Y(t) = \int_0^t G(t-\tau)\Psi(\tau)d\tau + \Phi(t), \quad (2)$$

де  $\Phi(t)$  — реакція Б. с. а. к. на ненульові  
початкові умови, яка визначається початко-  
вими значеннями координат і коренями  
 $D_1 \dots D_n$  характеристичного рівняння, а  
 $G(t)$  — вагова  $(n \times n)$  матриця (матриця ім-  
пульсних перехідних функцій), кожний еле-  
мент якої  $g_{ij}(t)$  є реакцією і-виходу на  
дельта-функцію, яка діє на  $j$ -вхід, при всіх  
інших входах, які дорівнюють нулеві, й  
при нульових початкових умовах;

в) передавальними матрицями. Перетворен-  
ня Лапласа матриці  $G(t)$  визначає передаваль-  
ну матрицю (матрицю передавальних функ-  
цій)  $G(p)$ , яку можна також визначити, пере-  
творивши за Лапласом (при нульових почат-  
кових умовах) рівняння (1):

$$Y(p) = G(p)\Psi(p); \quad G(p) = Q^{-1}(p)P(p)$$

де  $p$  — параметр перетворення Лапласа

Поки що тут розглянуто передавальні ма-  
триці та інші характеристики вхід—вихід  
у загальному вигляді — і для замкнених, і  
для розімкнених систем. Між передавальними  
матрицями замкнених і розімкнених Б. с. а. к.  
існують співвідношення, аналогічні відповід-  
ним співвідношенням для передавальних  
функцій. Так, якщо  $G_1(p)$  — передавальна  
матриця об'єкта керування, яка зв'язує век-  
тори  $U(p)$  та  $Y(p)$ , а  $G_2(p)$  — передавальна  
матриця керуючого пристрою (див. мал.),  
то передавальна матриця замкненої системи  
за задавальними діяннями ( $\Psi$  — вхід,  $Y$  —  
вихід) має вигляд

$$G_{\Sigma}(p) = [E + G_1(p)G_2(p)]^{-1}G_1(p)G_2(p), \quad (3)$$

де  $E$  — одинична матриця. Якщо вектор збу-  
рень  $A$ , який діє на об'єкт, зв'язаний з векто-  
ром у передавальною матрицею  $G_A(p)$ , то пе-  
редавальна матриця замкненої системи за  
збуреннями  $G_{\Delta A}(p)$  (при відсутності керуючого  
пристрою за збуреннями) має вигляд

$$G_{\Delta A}(p) = [E + G_1(p)G_2(p)]^{-1}G_A(p). \quad (4)$$

Характеристичне рівняння замкненої Б. с.  
а. к. має вигляд:

$$\det [E + G_1(p)G_2(p)] = 0 \quad (5)$$

де  $\det [\cdot]$  — визначник відповідної матриці.

Характеристики «вхід — вихід» описують лише повністю керовану й повністю спостережувану частину системи (див. *Спостережуваність й керуваність умови*). Рухи некерованої або неспостережуваної частини Б. с. а. к., серед яких у загальному випадку можуть відбуватися й нестійкі рухи, не можна описувати характеристиками «вхід — вихід». У цьому розумінні найповніший опис Б. с. а. к., який охоплює й рухи Пінкероованих і неспостережуваних частин (якщо такі є), гарантується описуванням термінами простору станів, тобто за допомогою систем рівнянь 1-го порядку виду:

$$\dot{X} = AX + B\psi, \quad Y = CX, \quad X_{t=0} = X(0), \quad (6)$$

де  $\psi$  — вхід і  $Y$  — вихід усієї замкнутої системи (див. мал.) —  $n$ -вимірні вектори, а вимірність вектора  $X$  дорівнює  $N$ , причому числові матриці  $A$ ,  $B$  і  $C$  мають розміри  $N \times N$ ;  $N \times n$  та  $n \times N$  відповідно. Від опису Б. с. а. к. типу (6) можна легко перейти до характеристик «вхід — вихід». Так, перетворивши, за Лапласом, (6), за нульових початкових умов передельну матрицю системи  $G(p)$ , аналогічну в даному випадку  $G_{\infty}(p)$ , в (3), можна визначити як  $G(p) = -C'(pE - A)^{-1}B$ . Характеристичне рівняння в цьому випадку можна записати у вигляді:

$$\det(pE - A) = 0. \quad (7)$$

Якщо виконуються умови спостережності й керуваності, то корені рівняння (7) (власні числа матриці  $A$ ) збігаються з коренями (5). Якщо ж внаслідок скорочення полюсів передавальних функцій, які входять до матриці  $G_1(p)$ , нулями передавальних функцій матриці  $G_2(p)$ , керуючого або коректуючого пристрою з'являються некерувані й неспостережувані частини, то відповідні корені зникають у (5), але залишаються в (7).

Для лінійних дискретних Б. с. а. к. за стосовують відповідні дискретні аналоги, а саме:

а) системи різницевих рівнянь  $Q(z) Y_n = P(z) \psi_n$ , де  $z$  — оператор зсуву на один інтервал  $z Y_n = Y_{n+1}$ ,  $Q(z)$  й  $P(z)$  —  $(n \times n)$ -матриці з елементами  $q_{ij}(z)$  та  $p_{ij}(z)$ , які є поліномами відносного оператора  $z$ ;

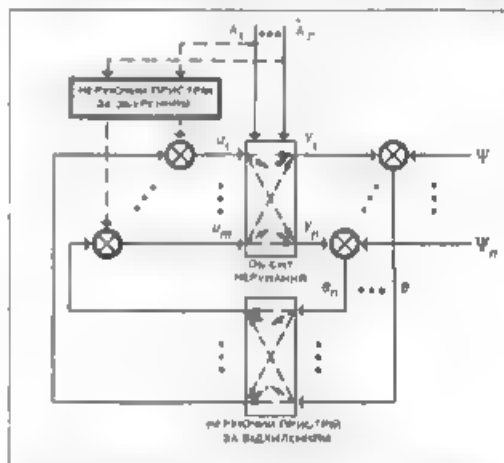
б) дискретні аналоги інтегр. зворотки:  $Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} G(n-i) \psi_i + \Phi_n$ , де  $G(n-i)$  — вагова матриця,  $\Phi_n$  — реакція на ненульові початкові умови;

в) передавальні матриці:  $Y^*(z) = G(z) \psi^*(z)$ , де  $z = e^{T}$  ( $T$  — інтервал дискретності) — символ Лапласа дискретних перетворень. Співвідношення, аналогічні до (3 і 4), бувають і в дискретних Б. с. а. к. Рівняння в термінах простору станів має вигляд:

$$X_{n+1} = AX_n + B\psi_n, \quad Y_n = CX_n, \quad (8)$$

де під матрицями  $A$ ,  $B$  і  $C$  і векторами  $X$ ,  $Y$  і  $\psi$  розуміють те саме, що й у (6).

Лінійні Б. с. а. к. бувають стійкими, якщо корені характеристичного рівняння (7) замкненої Б. с. а. к. містяться в лівій півплощині комплексної змінної. Якщо система повністю керувана і спостережувана, то перевірку умов стійкості можна здійснювати й за розміщенням коренів характеристичного рівняння (5). Для стійкості дискретних Б. с. а. к. необхідно, щоб корені відповідного характеристичного рівняння розміщувались усередині кола



Блок-схема багатовимірної системи автоматичного керування

одичного радіуса. Перевірку цих умов без знаходження коренів характеристичного рівняння можна виконати алгебр. або частотними методами (див. *Гурвіца теорема*, *Стійкості дискретних систем теорія*, *Стійкості критерії*). Оскільки для Б. с. а. к. більшої розмірності розкриття визначника типу (5 і 7) пов'язано з громіздкими обчислюваннями, то перевірку умов стійкості й побудови області стійкості в просторі параметрів таких Б. с. а. к. здійснюють на ЕЦОМ. Частотні критерії Попова, Якубовича і Ципкіна широко використовують і для аналізу стійкості нелінійних Б. с. а. к. спец. виду (див. *Стійкості неперервних систем теорія*). Загальніші результати з аналізу стійкості нелінійних Б. с. а. к. можна одержувати *Ляпунова методами*. Якщо можна визначити корені характеристичного рівняння Б. с. а. к., то аналіз якості Б. с. а. к. можна здійснити відомими методами за розміщенням цих коренів у комплексній площині (див., напр., *Кореневого зображення метод*). У ряді окремих випадків (двовимірні Б. с. а. к., Б. с. а. к., що складаються з однакових підсистем, зв'язаних між собою безінерційними зв'язками тощо) аналіз якості дуже ефективно провадять, використовуючи відомі способи частотних методів аналізу якості одновимірних систем (див. *Систем автоматичного керування аналіз і Частотні*

характеристики систем автоматичного керування)

Методи синтезу Б. с. а. к. (див. Систем автоматичного керування синтез) обирають залежно від мети, яка стоїть перед конструктором Б. с. а. к. Так, одним з найвідоміших підходів до синтезу Б. с. а. к. є синтез керуючого пристрою за умовами автономності. Під автономністю Б. с. а. к. розуміють незалежні між собою зміни керування координат, а це еквівалентне розпадові системи рівнянь, яка описує динаміку Б. с. а. к., на я незалежних рівнянь окремих контурів. Для лінійних систем ці умови мають вигляд  $\Pi = G_1(p) G_2(p) = \text{diag} \{h_{11}(p) \dots h_{nn}(p)\}$ , де  $G_1(p)$  й  $G_2(p)$  — те саме, що й у (3). Це означає, що окремі елементи багатовимірного керуючого пристрою слід обирати так, щоб добуток його передавальної матриці  $G_2(p)$  і передавальної матриці об'єкта  $G_1(p)$  був діагональною матрицею. Однак не в усіх випадках умови автономності забезпечують найкращу якість функціонування Б. с. а. к. Якщо є змога змінити вектор збурень  $\lambda$ , то синтез високочастотних і швидкодіючих Б. с. а. к. можна здійснити, використовуючи теорію інваріантності систем автоматичного керування. Істотні результати одержано в розв'язуванні задачі синтезу Б. с. а. к. при стаціонарних випадкових діях. Якщо в (2) вхідний сигнал  $\Psi(t)$  складається з корисного випадкового сигналу  $r(t)$  і завади  $n(t)$  з заданими матрицями кореляційних функцій, то з'ясування полягає в тому, щоб визначити вигоду матрицю  $G(t)$ , яка дає мінімум функціоналові  $\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^2(t)$ , де  $\hat{\sigma}_i^2$  середньоква-

дратична похибка між справжнім і бажаним значеннями  $i$ -ї вихідної величини. Якщо структуру системи не задано, матрицю  $G(t)$  знаходять, поширюючи методи розв'язування задачі Вінера (див. Вінер — Хелфс рівняння першого роду) на багатовимірний випадок. Якщо елементи  $G(t)$  задано, то вказаний функціонал можна мінімізувати, змінюючи варіаційні параметри *своєї функції*  $\Phi(t)$  (див. Оптиміальних параметрів системи вибір).

Проблема синтезу оптимальних Б. с. а. к. тісно пов'язана з задачами евристичного числення і програмування математичного. Так, у деяких випадках (3) функціонал, що характеризує якість роботи системи, може мати ви-

гляд лінійної форми  $I = \sum_{i=1}^n C_i u_i$  усталених

значень координат системи при лінійних обмеженнях  $U > 0$ ,  $AU = b$ , де  $A = (m \times n)$ -числова матриця ( $m < n$ ),  $b$  —  $n$ -вимірний вектор. Тоді значення вектора  $U$ , який мінімізує (максимізує) форму  $I$ , відшукують методом програмування лінійного. Але найчастіше функціонал якості являє собою нелінійну ф-цію координат. Так, напр., якщо рух багатовимірного об'єкта керування опису-

ється рівнянням виду (6) (з заміною  $\Psi$  на  $u$ ), то в більшості випадків функціонал якості

має вигляд  $I = \int_0^T V dt$ , де  $V$  — квадратична

форма:  $V = X' L X + U' M U$ ,  $L$ ,  $M$  — матриці  $(N \times N)$  і  $m \times m$  відповідно) вагових коефіцієнтів, а знак ' означає транспонування. В цьому випадку відшукування керування  $u$  як функції координат простору станів  $X$ , який екстремізує функціонал  $I$ , можна виконати методами програмування динамічного, програмування нелінійного, використанням контрарна принципу максимуму тощо (див. Оптиміальних процесів теорія). Оскільки ф-ція  $V$ , яка входить у функціонал  $I$ , аналогічна до ф-ції Лапунова, існує глибокий зв'язок між синтезом оптимальних Б. с. а. к. і методами Лапунова. Якщо за показник якості роботи Б. с. а. к. брати нелінійну ф-цію  $\Phi$  усталених значень керуючих координат  $U$  і збурень  $\lambda$ ,  $\Phi = \Phi(U, \lambda)$ , то відшукування екстремуму  $\Phi$  за  $U$  для різних збурень  $\lambda$  можна виконати багатовимірною системою екстремального регулювання.

Синтезовані алгоритми керування Б. с. а. к. досить складні, тому реалізація сучасних Б. с. а. к. ґрунтується на широкому використанні новітніх досягнень обчислювальної техніки

Літ. Маєров М. В. Системи многосвязности регулирования М. 1985 (Бібліогр. с. 381—384); Каткович В. И., Полуянов Р. А. Многомерные дискретные системы управления М. 1986 (Бібліогр. с. 410—413); Чинаев П. И. Методы анализа и синтеза многомерных автоматических систем. М. 1969 (Бібліогр. с. 372—375)

К. Д. Жук, А. А. Туник, П. І. Чинаев.

**БАГАТОЕТАПНЕ ОБСЛУГОВУВАННЯ** — обслуговування системою масового обслуговування, при якому кожного повинна бути виконана по чергому кілька приладів. Б. о. буває в поточкових лініях на виробі, в обчисл. процесах тощо. Залежно від макс. довжини черги  $l_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , перед  $k$ -м приладом розрізняють такі випадки систем масового обслуговування з Б. о.:  $l_k = 0$ ,  $l_k < \infty$ ,  $l_k = \infty$ .

Аналітично досліджувати масового обслуговування системи з Б. о. досить важко. В деяких випадках вдається одержати стаціонарні характеристики таких систем. У випадку, коли  $l_k = \infty$ , для системи масового обслуговування, в яку надходить найпростіший потік, і час обслуговування має показниковий розподіл, і вихідний потік для кожного приладу є найпростішим. Це дає змогу зводити дослідження системи масового обслуговування з Б. о. до дослідження системи масового обслуговування з очікуванням. У системах, де  $0 < l_k < \infty$ , природа вихідних потоків складніша. Якщо вхідний потік найпростіший, а тривалість обслуговування має показниковий розподіл, то є аналітичні ф-ли для стаціонарних характеристик систем з Б. о.

С. М. Броді.

**БАГАТОЗНАЧНІ СХЕМИ** — клас схем, вхідні інформаційні сигнали в яких забувають більше як двох дискретних значень, причому кожне значення інформаційного сигналу визначається станом одного виходу схеми. Інтенсивне дослідження принципів побудови Б. с. та застосування їх почалося в 60-х роках 20 ст.

Проблематика вивчення Б. с. має багато спільного з проблематикою, що постає при вивченні тех. схем дискретної техніки. Режим роботи яких характеризується двома стійкими станами (двійкових схем). Більшість аспектів вивчення Б. с.: з погляду природи використовуваного фіз. явища, за методом кодування стійких станів, з погляду особливостей зберігання й переробки інформації, в плані принципів побудови й методів тех. реалізації їх тощо. Разом з тим кількісна зміна характеристик режиму роботи в Б. с. пов'язана з певними якісними змінами в їхній структурі, в принципах побудови й методах тех. реалізації, у способах використовуваних тех. чи інших фіз. явищах. Відповідно до цього Б. с. мають деякі специфічні особливості, що становлять інтерес не лише в теоретичному плані (напр., з погляду схемотехніки), а й мають істотно важливе прикладне значення.

В Б. с. використовують електромагн., акустичні, пневматичні й гідралічні явища. Найбільше вивчено й розроблено в плані практичних застосувань Б. с. електромагнітні схеми.

Характеристики Б. с. з погляду способу кодування стійких станів незалежно від природи використовуваного фіз. явища наведено в класифікаційній схемі (мал. 1). З погляду особливостей зберігання й переробки інформації розрізняють схеми без властивості запам'ятовувати і схеми, які мають цю властивість. Б. с. з властивістю запам'ятовування ще наз. схемами з багатьма стійкими станами, або багатостійкими схемами.

Принципи побудови Б. с. визначаються, насамперед, особливостями зберігання та переробки інформації на їхній основі, а також вибором того чи іншого способу кодування стійких станів, природою використовуваного фіз. явища тощо. У Б. с. без властивості запам'ятовувати незалежно від того, затримують вони сигнал чи ні, стійкі стани режиму роботи забезпечуються відповідним вибором характеристик (квантуванням значень) інформаційних сигналів таких схем. Відповідно до цього загальний принцип побудови їх полягає у використанні деякого прохідного чотириполюсника з вхідним сигналом, який набуває певної кількості дискретних значень, і монотонною залежністю вихідного сигналу від вхідного. Внаслідок указаної особливості Б. с. без властивості запам'ятовувати самостійного значення не мають і, будучи пристрої перетворення дискретної інформації, їх зазвичай використовують у поєднанні з Б. с., які мають властивість запам'ятовування. Один з найшарше застосовуваних принципів побудови Б. с., які мають властивість запам'ятовувати, оснований на викорис-

танні чотириполюсника (ф. мал. 2, а) з нелінійною (наприклад, східчастого вигляду, мал. 2, б) амплітудною характеристикою  $U_{\text{вих}} = \varphi(U_{\text{вх}})$ , охопленого колом зворотного зв'язку (33)  $\beta$ ,  $U_{\text{вих}} = \beta U_{\text{вх}}$ . В усталеному стані

$$U_{\text{вх}} = U_{\text{вих}} = U_1; \quad U_{\text{вих}} = U_{\text{вх}} = U_0. \quad (1)$$

Якщо коло зворотного зв'язку  $\beta$  лінійне і характеризується виразом  $U_1 = kU_0 - U_0$ , де  $k$  — коеф. підсилення кола зворотного зв'язку,  $U_0$  — стала напруга зміщення на його виході, то в цьому разі поведінка схеми (мал. 2, а) описується такою системою рівнянь:

$$U_1 = \varphi(U_1); \quad U_1 = kU_1 - U_0. \quad (2)$$

Стійким станам режиму роботи схеми за графічного розв'язування системи (2) відповідають точки перетину характеристики чотириполюсника і прямої зворотного зв'язку, в яких виконується

$$\frac{\partial \varphi(U_1)}{\partial U_1} < \frac{1}{k}. \quad \text{Число}$$

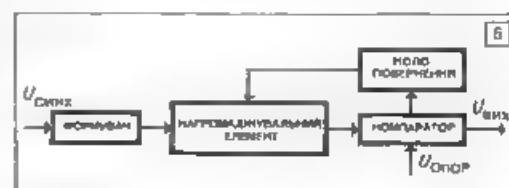
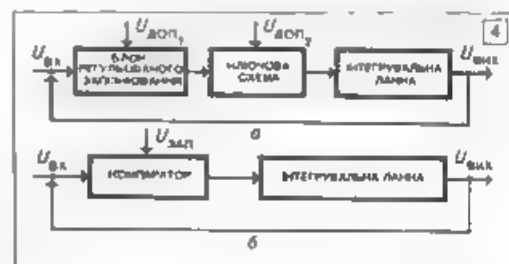
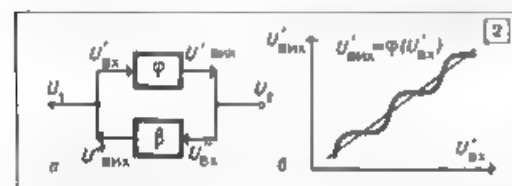
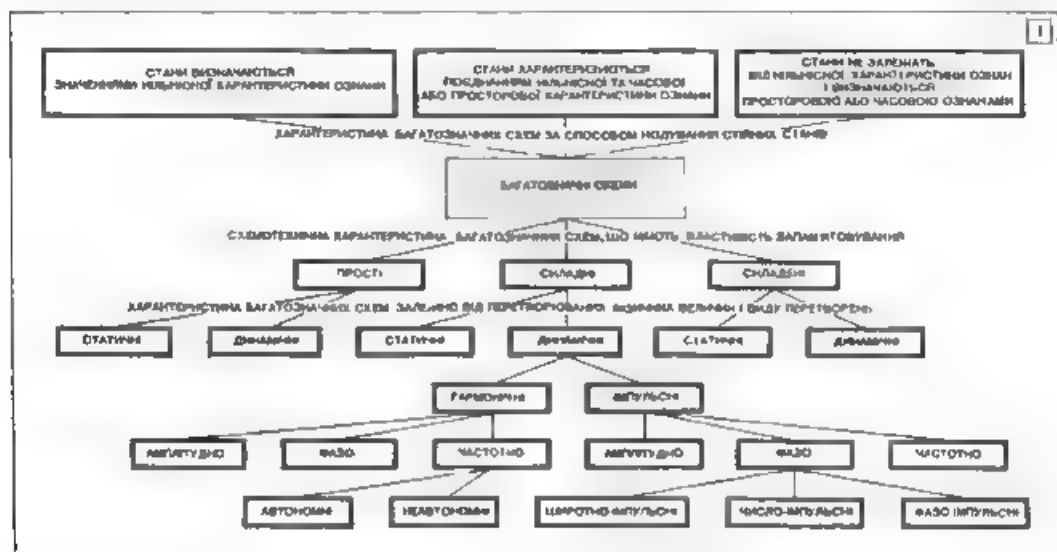
точок перетину, а, отже, й стійких станів у загальному випадку визначається видом характеристик чотириполюсника й кола зворотного зв'язку, а також їхнім взаємним розташуванням. У найпростішому випадку, коли коло лінійне і положення прямої визначається вибором значень  $k$  і  $U_0$ , загальна задача побудови Б. с. практично зводиться до побудови чотириполюсника з нелінійною амплітудною характеристикою потрібного виду. Огля. ідея побудови чотириполюсника цього типу полягає в тому, щоб забезпечити можливість перетворення нелінійної залежності між деякими величинами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які мають, взагалом кажучи, різну фіз. природу, на потрібну амплітудну характеристику. В загальному випадку така можливість забезпечується внаслідок виконання кількох послідовних перетворень  $U_{\text{вих}} = \varphi_1(x_1); x_2 = \varphi_2(x_2), \dots, x_n = \varphi_n(U_{\text{вих}})$ . На практиці, проте, як правило, буває досить виконати лише одне перетворення, а яких принаймні одне — нелінійне. При цьому характеристика чотириполюсника в цілому набуває вигляду:

$$U_{\text{вих}} = \varphi_1(\varphi_2(U_{\text{вх}})) \quad (3)$$

Залежно від характеру фіз. величин і виду перетворень над ними відповідно до (3) розрізняють Б. с.: **статичні**, перетворювання в яких виконуються над величинами, не залежними явно від часу, й **динамічні**, в яких принаймні одна перетворювана величина є явною ф-цією часу або частоти гармонічних коливань. Динамічні Б. с., перетворювана напруга в яких змінюється за гармонічним законом, наз. **гармонічними**. Динамічні схеми, перетворювана напруга в яких є періодичною послідовністю імпульсів, наз. **імпульсними**. Якщо ознака стійкого стану виробляється в самій схемі й практично повністю залежить від значень її параметрів, то таку Б. с. наз. **автоном-**

ною. Схема, в якій ознака, яка визначає стійкий стан, виробляється зовнішніми відносно неї пристроями (наприклад, у схемах, які використовують перестроювану вибірову систему, це генератор, сигнали на виході якого містять потрібний спектр частот), наз. *в автономію*. В неавтономних Б. с. ознаки стійких станів практично не залежать від їхніх параметрів. Це, як правило, веде до підвищення їхньої стабільності й поліпшення багатьох інших важливих тех. і експлуатаційних характеристик.

Залежно від схмотехнічних особливостей реалізації елемента, який забезпечує потрібний нелінійний характер принаймні одного з перетворень (3), Б. с. на основі нелінійного чотирьохполюсника можна поділити на прості, складні та складені. В простих Б. с. потрібну нелінійну залежність забезпечує елемент, неподільний у радіотехнічному розумінні, наприклад, багатотунельний діод, вольт-амперна характеристика якого містить кілька ділянок від'ємного опору (в цьому разі нелінійний чотирьохполюсник



1. Класифікація багатозначних схем.
2. Загальна блок-схема багатозначної схеми на основі нелінійного чотирьохполюсника із зворотним зв'язком (а) та приклад амплітудної характеристики нелінійного чотирьохполюсника (б).
3. Блок-схеми можливих варіантів технічної реалізації автономної (а) та неавтономної (б) частотно-гармонічних багатозначних схем.
4. Блок-схеми можливих варіантів технічної реалізації широтно-імпульсних автоімпульсних (а) та неавтономних (б) багатозначних схем.
5. Блок-схема можливого варіанта реалізації фазо-імпульсних багатозначних схем з дискретним збудженням значення нільової характеристики ознаки стійких станів.



випроджується в невідільний двополюсник). У складних Б. с. потрібну невідільність забезпечує певна композиція невідільних елементів, кожен з яких, загалом кажучи, може й не бути невідільним у зазначеному вище розумінні. Істотно важливим для цього класу схем є те, що вид реалізовуваної в них колінійної залежності (а, отже, і кількість стійких станів), як правило, не пов'язується з кількістю використовуваних елементів і визначається відповідним вибором режиму роботи схеми загалом. Складені схеми реалізуються внаслідок певної композиції елементів за умови, що кожен з них уже реалізує певну невідільну залежність (Б. с., що містять послідовно увімкнені тунельні діоди, об'єднання Б. с., характеризованих меншою кількістю стійких станів) або кількість їх певною мірою пропорційна потрібній кількості стійких станів (багатофазний релаксатор).

Незалежно від виду виконуваних перетворювань і методів реалізації їх динамічним імпульсно-імпульсним і амплітудно-гармонічним складним Б. с. властиві всі ті вади, що і схеми з амплітудним кодуванням інформації (залежна залежність амплітуди від параметрів, слабка завадозахищеність). Такі схеми практично не набули застосування.

Необхідною умовою побудови фазо-гармонічної (частотно-гармонічної) схеми є виконання перетворювань, за яких однією з проміжних величин, які беруть участь у перетворюваннях, є фаза  $\varphi$  гармонічних коливань:  $U_{\text{вих}} = f_1(\varphi)$ ,  $\varphi = f_2(t_{\text{вх}})$  (відповідно частоти  $\omega$  гармонічних коливань:  $U_{\text{вих}} = \varphi_1(\omega)$ ;  $\omega = \varphi_2(U_{\text{вх}})$ ) і принаймні одна з ф-цій перетворювання є нелінійною (напр., східчастою). Як приклад, що характеризує можливість тех. реалізації схем цього класу, на мал. 3 подано блок-схеми автономної (а) й неавтономної (б) частотно-гармонічної Б. с.

Необхідною умовою побудови часо-імпульсних схем є реалізація чотириполюсника, в якому виконуються послідовності перетворювань виду  $U_{\text{вих}} = \varphi_1(\theta)$ ;  $\theta = \varphi_2(U_{\text{вх}})$ , в яких принаймні одне є нелінійним. Тут  $\theta$  — параметр, який характеризує тривалість імпульсу, використовувану як ознаку стійких станів: власне тривалість  $\tau$  (широтно-імпульсна Б. с.), пропорційний  $\tau$  фазовий зсув певної послідовності імпульсів відносно послідовності, вибраної за опору (фазо-імпульсна Б. с.), пропорційне  $\tau$  число імпульсів (число-імпульсна Б. с.). На мал. 4 подано блок-схеми можливих варіантів широтно-імпульсних автономної (а) й неавтономної (б) схем. Як приклад, що характеризує можливість тех. реалізації фазо-імпульсних схем, на мал. 5 наведено блок-схему одного з варіантів таких схем на основі елементів з дискретним пристроєм значення кількісної характеристики ознаки стійких станів.

Число-імпульсна Б. с. можна побудувати на основі широтно- і фазо-імпульсних Б. с. з використанням додаткового пристрою пере-

творювання тривалості імпульсів або фаз на число їх (напр., на основі статичного тригера з двома стійкими станами або на основі схем, які не є багатостійкими).

Необхідною умовою побудови частотно-імпульсних схем є виконання послідовності перетворювань  $U_{\text{вих}} = \varphi_1(T)$ ;  $T = \varphi_2(U_{\text{вх}})$ , де  $T$  — період (частота) проходження імпульсів і принаймні одна з ф-цій перетворення немонопотільна. Перше з зазначених перетворень можна виконати, напр., на основі резонансного контура або нерезонансного генератора (автогенератора релаксаційних коливань в автономних схемах і синхронізованого релаксаційного генератора — в неавтономних).

Використовування в побудові чотириполюсника нелінійних (з кількома екстремумами або точками перегину) залежностей, які мають різну природу, веде до розробки Б. с. з комбінованою ознакою стійких станів. Особливістю таких схем є наявність у кожного стану не однієї, а кількох ознак, напр. тривалість імпульсу і його зсуву за фазою. Крім збільшення кількості станів, ці схеми характеризуються й ширшими функціональними властивостями завдяки можливості роздільного керування ознаками.

Складені Б. с. можна реалізувати на основі широкого класу елементів, які є веподільними з погляду конструктивної, схемної або радіотехнічної реалізації. Схеми такого типу, як правило, потребують більших затрат обладнання, ніж прості й складні, а збільшення кількості стійких станів призводить до відповідного збільшення затрат обладнання й ускладнення структури схем. На відміну від простих і складних Б. с., вихідний канал яких завжди складається з одного провода (через що ці схеми завжди багатозначні), вихідний канал складених Б. с. може мати один або кілька проводів.

Незважаючи на виняткову перспективність у плані розвитку структур дискретних пристроїв (особливо 4-го і старших поколінь), розробка простих Б. с. перебуває на стадії експерименту. Найбільше уважено й розроблено в інженерному плані складні та складені Б. с., серед яких насамперед слід відзначити фазо-імпульсні схеми. Розроблені Б. с. характеризуються кількістю стійких станів від одиниці (параметрони) до кількох десятків і навіть сотень (частотно-гармонічні схеми на основі фазового детектора). Одержано перші зразки Б. с. (складні та складені фазо-імпульсні схеми) в мікроелектронному виконанні (на основі МОН-структур).

Б. с. складні та складені застосовують у пристроях автоматички, цифрової вимірювальності (в т. ч. у приладах серійного виробн. — частотомири і лічильники, вимірювачі часових інтервалів тощо) і цифрової обчислювальної техніки. В обчисл. техніці застосовують переважно багатозначні схеми, на основі яких створюють багатозначні логічні елементи ЦОМ, тобто елементи, які реалізують

ф-ції багатозвальної логіки й багатозначні елементи пам'яті (тригери). У зв'язку з застосуванням елементів названого типу в техніці дискретних пристроїв виникає ряд специфічних теор. та інженерних задач, розв'язування у рамках *структурної теорії автоматів* в багатозначним структурним алгебраїзмом. Практичне використання Б. с. спрощує структури відповідних пристроїв, знижує затрати обладнання, споживання енергії, габарити й вартість і підвищує надійність, а також поліпшує деякі інші тех. та експлуатаційні характеристики. В СРСР (з-д «Точелектроприлад», Київ) уперше в світі налагоджено серійний випуск цифрових вимірювальних приладів на багатостійких елементах.

Лит. Сигорський В. П., Ситников Л. С., Утінков Л. Л. Многоустойчивые элементы дискретной техники. М. Л., 1966 [Бібл.огр. с. 351-358]. Ситников Л. С. Многоустойчивые элементы в цифровой измерительной технике. К., 1970 [Бібл.огр. с. 135-137]. Павський Ю. Л. Принципы построения многозначных физических схем. К., 1971 [Бібл.огр. с. 365-368]. Ю. Л. Павський

**БАГАТОКОНТУРНА СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ** — система автоматичного керування, де є два чи більше контурів, по яких здійснюються зв'язки між різними координатами (а часто й збурювальними діями) в мету реалізації різних функцій (компенсації збурення, самонастроювання тощо).

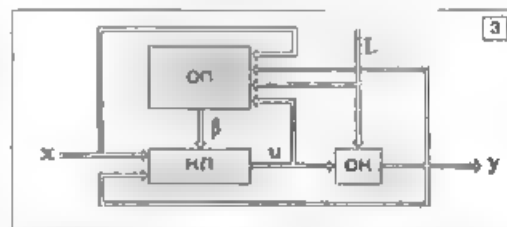
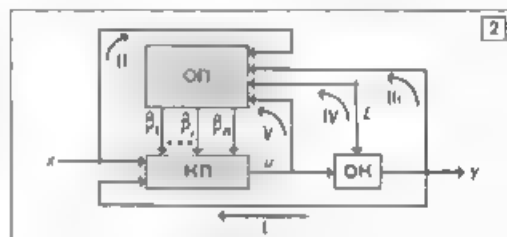
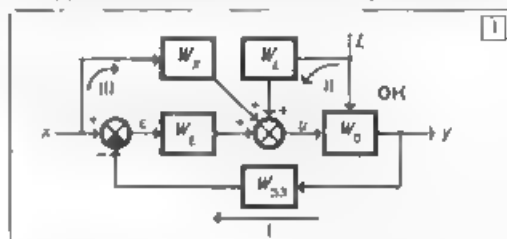
Прикладом Б. с. а. к. може бути комбінована система автоматичного керування (мал. 1). У цій системі керуюче дієння  $u$  визначається трьома зв'язками:  $u = W(x, z, L)$ , де  $z = z - W_{\text{вк}} y$ ;  $W_x, W_L, W_z, W_e, W_{\text{вк}}$  — оператори, які виражають зв'язок між відповідними координатами системи, ОК — об'єкт керування. Зв'язки в системі здійснюються по трьох контурах: I — по керуванню координаті  $y$  (зворотний зв'язок), II — по збурювальному діянню  $L$ , III — по задавальному діянню  $x$ . Схему самонастроюваної Б. с. а. к. наведено на мал. 2. Оск. контур зворотного зв'язку I тут зв'язує вихід об'єкта керування ОК —  $y$  з входом керуючого пристрою КД. Крім того, є ще два контури зворотного зв'язку — III та V, а також контури зв'язки по задавальному діянню  $x$  — II і збурювальному діянню  $L$  — IV. В об'єкті пристрої ОП проводиться ідентифікація об'єкта керування й визначаються оптим. (у розумінні прийнятого критерію якості систем автоматичного керування) параметри  $\beta_1 - \beta_n$  керуючого пристрою з урахуванням характеристик ОК, збурення  $L$  та задавального діяння  $x$ . Аналогічну систему для багатовимірної випадку наведено на мал. 3.

Поняття контура в наведених структурних схемах Б. с. а. к. пов'язується з реалізацією тієї чи іншої функції (компенсації збурень, самонастроювання, ідентифікації тощо). В цьому розумінні Б. с. а. к. відрізняється від багатовимірної системи, де наявність взаємозв'язку ще не означає формування певної функції керування, а часто розглядається як

форма представлення процесу взаємного впливу між окремими ланками або координатами системи.

Матем. опис Б. с. а. к. значайно виконують у вигляді окремих залежностей (рівнянь) усіх розглядаємих контурів, а опис багатовимірної системи автомат. керування подають, як правило, у вигляді одного матричного рівняння, в якому не виділяють рівнянь локальних контурів.

Початок систематичним дослідженням Б. с. а. к. покладено при розв'язуванні задачі вибору зв'язків між окремими регуляторами



1. Схема комбінованої багатоконтурної системи автоматичного керування.  
2. Схема самонастроюваної багатоконтурної системи.  
3. Схема багатовимірної самонастроюваної системи (усі координати — вектори; В — вектор настроєних параметрів КП).

з умов автономності. Дальший розвиток теорії Б. с. а. к. пов'язаний з розробкою теорії інваріантності систем автоматичного керування.

Структуру Б. с. а. к., характеристики й параметри окремих ланок визначають, виходячи з комплексу різних завдань, що їх покладають на систему (напр., ідентифікація, компенсація збурень, визначення показників якості керування, оптим. параметрів керуючих пристроїв), і вимог (часто суперечливих) до якості керування (напр., точність, швидкість, економічність, завадостійкість), — тобто синтез Б. с. а. к. вимагає системного підходу. Розв'язати такий комплекс задач у рам-

ках одноконтурних систем неможливо, в зв'язку з цим Б. с. а. к. набувають широкого застосування при автоматизації керування виробничим процесом, керуванні енерг. установками, в нафтохімії, в керуванні двигунами рухомих об'єктів тощо.

Лит. Возмисеменский И. И. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров. Автоматика и телемеханика, 1936, № 4-5. Норина Ю. Г., Пивень Н. Д. Основы теории автоматического регулирования в применении к тепловым установкам. М., 1947. 16.6. Логос с. 305-306. Павленко А. Г. Технические кибернетики К 1942. 16.6. Логос с. 412-418. Теория инвариантности в системах автоматического управления. М., 1964.

К. Д. Жук, К. В. Кременко.

## БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІСТЬ ПРОБЛЕМА

МА — вибір розв'язку, коли належить множина функцій мети  $f = \{f_i(\alpha)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), де  $\alpha$  — якість альтернатива, під якою розуміють або неперервну векторну зміну, що належить опуклій замкненій області, яку звичайно характеризують системою лінійних чи нелінійних нерівностей, або дискретну зміну, що набуває скінченної множини заданих значень. Б. п. виникає і при дослідженні складних систем керування, і в ігрових ситуаціях.

Оскільки оптимізуємо по кожному критерію не завжди можна досягти при одному й тому ж значенні  $\alpha^0$ , то визначають, як саме розуміти розв'язок. Звичайно під таким розв'язком розуміють множину ефективних альтернатив. Альтернативу  $\alpha^0$  наз. ефективною, якщо немає інших альтернатив, кращих за неї хоч би по одному критерію і не гірших щодо решти критеріїв. Критерії множини  $f$  мають різний фіз. зміст, одні з них максимізуються, а інші мінімізуються. Перш ніж перейти до формулювання задачі, на основі якої можна знайти множину ефективних альтернатив, зауважимо, що коли  $\alpha^0$  — ефективна альтернатива множини критеріїв  $f = \{f_i\}$  ( $i = 1, \dots, M$ ), то  $\alpha^0$  — ефективна альтернатива множини ф-цій  $W = \{w_i(f_i(\alpha))\}$  ( $i = 1, \dots, M$ ), де  $w_i(f_i(\alpha))$  — монотонна ф-ція  $f_i(\alpha)$  і навпаки.

Для знаходження ефективних точок виберемо такі монотонні ф-ції  $w_i(f_i(\alpha))$ , щоб вони були безрозмірними і всі мінімізувалися. З цією метою введемо такі монотонні перетворення: для критеріїв, які максимізуються

$$w_i(f_i(\alpha)) = \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_i(\min)} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1)$$

і для критеріїв, які мінімізуються

$$w_i(f_i(\alpha)) = \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_i(\max) - f_i^0} \quad (i = m+1, \dots, M), \quad (2)$$

де  $f_i^0$  — оптим. значення  $i$ -го критерію,  $f_i(\min)$  — найменше значення максимізованого критерію, а  $f_i(\max)$  — найбільше значення

мінімізованого критерію. Значення  $f_i^0$ ,  $f_i(\max)$ ,  $f_i(\min)$  знаходять при  $\alpha \in U$  чи  $\alpha \in V$ , де  $U$  — випукла замкнена область,  $V$  — дискретна множина  $V = \{\alpha_j\}$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Розв'язок параметричної задачі

$$\min_{\substack{\alpha \in U \\ \alpha \in V}} W(\alpha) = \min_{\substack{\alpha \in U \\ \alpha \in V}} \left\{ \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_i(\min)} + \sum_{i=m+1}^M \gamma_i \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_i(\max) - f_i^0} \right\} \quad (3)$$

для всіх  $\gamma_i \in \Gamma = \left\{ \gamma_i > 0, \sum_{i=1}^M \gamma_i = 1 \right\}$  при до-

статньо загальних умовах дасть множину ефективних альтернатив. У цьому разі залишається проблема вибору єдиного розв'язку з множини непорівняльних ефективних альтернатив, тобто задача вибору компромісного розв'язку. Відомі різні підходи до визначення компромісу. При одному з підходів під компромісним розв'язком розуміють такий, який дає мінім. відносний відхил від оптим. значень за всіма критеріями відповідно до заданої переваги, яка визначається ваговими коефіцієнтами  $\rho_i$ , такими, що

$$\rho_i \in R^+ = \left\{ \rho_i > 0, \sum_{i=1}^M \rho_i = 1 \right\}. \text{ Якщо критерії рівноцінні, то } \rho_i = \frac{1}{M} \quad (i = 1, \dots, M) \text{ і}$$

компромісним розв'язком буде такий розв'язок, для якого відносні втрати, виражені співвідношеннями (1) і (2), однакові. А якщо критерії не рівноцінні, то компромісним розв'язком буде такий, для якого однакові співвідношення втрати

$$\tilde{w}_i(\alpha) = \rho_i w_i(f_i(\alpha)) = \rho_i \frac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_i(\min)}, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (4)$$

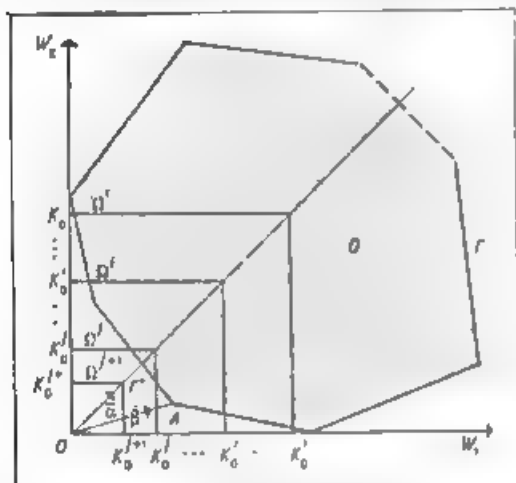
$$\tilde{w}_i(\alpha) = \rho_i w_i(f_i(\alpha)) = \rho_i \frac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_i(\max) - f_i^0}, \quad (i = m+1, \dots, M). \quad (5)$$

Як видно з (1) і (2),  $w_i$  задовольняють обмеження  $0 < w_i \leq 1$  в разі рівноцінних критеріїв або  $0 < w_i \leq \tilde{w}_i(f_i(\alpha)) = \rho_i w_i < 1$  для нерівноцінних. Отже, під компромісним розв'язком розумітимемо таку ефективну альтернативу  $\alpha^h \in U$  ( $\alpha^h \in V$ ), для якої справджуються такі рівності:

$$\rho_1 w_1(f_1(\alpha^h)) = \dots = \rho_M w_M(f_M(\alpha^h)) = k_0. \quad (6)$$

Якщо на основі експертних оцінок методів визначено  $\rho_1 \in P^+$ , то компромісною альтернативою  $\alpha^k$  буде та, при якій спрацюють-ся рівності (6) і мінімізується критерій (3). В силу лінійності критерію (3) мінімуму досягають на нижній межі для  $w_1$  ( $f_1(\alpha)$ ), тобто при мінімально можливому  $k_0 > 0$ . Шукане  $k_0$  у цьому разі можна знайти за методом дихотомії.

Пояснимо викладений вище підхід геометрично на прикладі двох рівноцінних критеріїв



Геометрична інтерпретація вибору компромісного розв'язку на прикладі двох рівноцінних критеріїв

рівн  $f_1$  і  $f_2$  для  $\alpha \in U$ . На мал. 6—область значень критеріїв  $W_1$  і  $W_2$  на множині обмежень  $U$ ,  $G$  — границя цієї множини,  $G'$  — область значень критеріїв  $w_1$  і  $w_2$ , в якій ці критерії набувають значення, не більшого за  $k_0$ . Компромісний розв'язок буде в точці  $G'$  перетину бісектриси координатного кута  $w_1 w_2$  (критерії  $f_1$  і  $f_2$  рівноцінні) з границею області  $G$ . Для нерівноцінних критеріїв як координатні фіції виберемо  $w_1 = \rho_1 w_1$  і  $w_2 = \rho_2 w_2$ , де  $w_1$  і  $w_2$  визначаються відповідно виразами (4) і (5). Тоді критерії  $w_1$  і  $w_2$  рівноцінні, і для знаходження компромісного розв'язку можна користуватися зазначеною процедурою.

Оскільки проблеми в задачі багатокритеріальної оптимізації є вибір процедури визначення переваги на множині критеріїв і спосіб введення узагальненого критерію, оптимізація якого дає розв'язок відповідно до вибраної схеми компромісу й певної переваги.

Дет. Волкович В. Л. Многокритериальные задачи и методы их решения. «Кибернетика и вычислительная техника», 1989, в. 1, Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М., 1971 [бібліогр. с. 382–383], Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. Пер. с англ. М., 1961 [бібліогр. с. 808–825], Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 798–819].

В. Л. Волкович.

**БАГАТОКРОКОВІ ЗАДАЧІ** — задачі, в яких множини шуканих параметрів, що визначають розв'язок, розбивають на кілька груп так, що значення параметрів, які входять у дану групу, визначають на певному етапі (кроці) багатокрокового процесу розв'язування. Б. з. особливо часто виникають при керуванні тривалими процесами в умовах невизначеності або протидії противника (багатоетапне програмування стохастичне, багатокрокові ігри), коли на проміжних етапах прийняття рішень одержують додаткову інформацію про стан керованого процесу. Б. з. вивчають методами програмування динамічного.

Н. З. Шор.

**БАГАТОКРОКОВОГО ПРОЦЕСУ ВИРОБНИЦТВА МОДЕЛЬ** — модель математична, створена для вивчення міжгалузевих аспектів розвитку економіки, а також для розв'язування задач про вузькі місця у виробництві. Ця модель належить до класу моделей програмування динамічного.

Задачу оптим. керування багатокроковими процесами виробн. в дискретним часом ставлять так. Нехай  $x(t)$ ,  $z(t)$ ,  $c$ ,  $a$  ( $t = 1, \dots, N$ ) —  $n$ -вимірні вектори,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  —  $(n \times m)$  — матриці. Треба знайти послідовність  $x(t)$ ,  $z(t)$ ,  $t = 1, \dots, N$ , яка максимізує форму ( $c, x(N)$ ) при обмеженнях:

$$\left. \begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + A_1 x(t) + A_2 z(t); \\ t &= 0, \dots, N-1; x(0) = c; \\ z(t) &> 0; t = 0, 1, \dots, N-1; \\ B_1 z(t) &\leq B_2 x(t); z(t) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Задачі виду (1) розв'язують звичайно методами програмування лінійного, використовуючи схеми декомпозиції, які враховують блокову структуру обмежень.

Іноді моделі, які описують багатокрокові процеси виробн., розглядають у дифер. формі; тоді задачу оптим. керування записують у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1 x(t) + A_2 z(t); 0 \leq t \leq T; \\ x(0) &= c; \\ z(t) &> 0; 0 \leq t \leq T; \\ B_1 z(t) &\leq B_2 x(t); 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Треба вибрати таке керування  $z(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , щоб одержати максимум функціоналу

$$L = \sum_{t=1}^T c_t x(t); (|x(t)| = x(t)), \text{ при виконанні умов (2).}$$

Для розв'язування такого роду задач розроблено спец. методи, ґрунтовані на теорії динамічного опуклого програмування і на використанні принципу максимуму; вивчено властивості оптим. керування також при  $T \rightarrow \infty$  (так звані аналітичні теореми).

Н. З. Шор.

**БАГАТОКРОКОВОГО ПРОЦЕСУ РОЗПОДІЛУ МОДЕЛЬ** — модель математична, використовувана для описування економічних

процесів, таких, як планування капіталовкладень на тривалий період, розвиток та реконструкція галузей підприємств і в інших важливих економічних застосуваннях.

Задачу багатокрокового розподілу ресурсів формують так. Нехай  $r$  видів ресурсів розподіляються на  $N$  кроках процесу. Позначимо через  $x_i(k-1)$  кількість ресурсів перед  $k$ -м кроком,  $x_{ij}(k)$  — кількість ресурсів  $i$ -го виду, використовуваних для одержання додатково якоїсь кількості  $j$ -го ресурсу,  $g_j(x_{1j}(k), \dots, x_{rj}(k))$  — ф-ція, яка показує кількість ресурсів  $i$ -го виду, одержуваних при використанні вектора ресурсів  $\{x_{ij}(k)\}_{j=1}^r$  на  $k$ -у кроці. Т. з., є природні обмеження

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \sum_{j=1}^r x_{ij}(k) + g_j(x_{1j}(k), \dots, x_{rj}(k)); \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

$$x_i(0) = c_i; \quad x_{ij}(k) > 0; \quad i, j = 1, \dots, r;$$

$$k = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{j=1}^r x_{ij}(k) = x_i(k); \quad i = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, N$$

При цих обмеженнях і заданому векторі початкових ресурсів  $\{x_i(0)\}$  треба максимізувати певну цільову функцію кінцевих ресурсів  $F(x_1(N), \dots, x_r(N))$ . При  $r \leq 3$  задачу багатокрокового розподілу розв'язують методами програмування динамічного. При  $r > 3$  для розв'язування таких задач краще застосовувати загальні методи нелінійного програмування (див. *Програмування математичне*). Якщо ф-ції  $g_j$  та  $F$  лінійні, то можна застосовувати методи програмування лінійного.

Н. З. Шор.

**БАГАТОПОЛЮСНИК КОНТАКТНИЙ** — схема контактного, в якій з кількох вхідних і вихідних полюсів, Б. к. з  $n$  вхідними і  $m$  вихідними полюсами наз.  $(n, m)$ -полюсником. Б. к., в якому полюсів два (один вхідний і один — вихідний), наз. контактним двополюсником.

**БАГАТОПОЛЮСНИК КОНТАКТНИЙ РОЗДІЛЮВІЙ** — багатополіусник контактний, між будь-якою парою вхідних полюсів якого реалізується функція, що тотожно дорівнює нулеві, тобто ні при якому стані Б. к. р. між його вхідними полюсами немає замкненого шляху. Прикладом розділювального  $(1, 2^m)$ -полюсника може бути *дерево контактне* з  $m$  ребрами. **БАГАТОПОЛЮСНИК КОНТАКТНИЙ УНІВЕРСАЛЬНИЙ** для множини функцій алгебри логіки  $P$  — багатополіусник контактний з  $k$  вхідними й одним вихідним полюсами, тобто  $(k, 1)$ -полюсник, такий, що якою б не була функція  $f(x_1, \dots, x_k) \in P$ , то знайдеться такий вхідний полюс, що між ним і вихідним полюсом реалізується ця сама функція  $f(x_1, \dots, x_k)$ .

**БАГАТОПРОГРАМНА ОБРОБКА ІНФОРМАЦІЇ**, мультипрограмна обробка інформації — обробка інформації на цифрових обчислювальних машинах, що забезпечує практично одночасне виконання кількох програм. При Б. о. і. використовують реальне суміщення з машини розв'язування кількох задач (або суміщення певних фаз розв'язування) та позірне суміщення, основане на черговому, напр. на циклічному, обслуговуванні яким-небудь пристроєм усіх розв'язуваних задач. Прикладом реального суміщення є одночасне обчислювання якоїсь задачі центр процесором і введення (або виведення) інформації для ін. задачі, здійснюване автономним пристроєм введення (чи виведення). До реального суміщення належить і одночасне розв'язування кількох задач на багатопроцесорних ЦОМ. Позірне суміщення розв'язування кількох задач на одному процесорі можна досягти, напр., періодичним перемиканням його в розв'язування однієї задачі на розв'язування іншої.

Однією з осей переваг Б. о. і. при реальному суміщенні є краще узгодження роботи порівняно повільних пристроїв введення—виведення зі швидкодіючим центром процесором. Це пояснюється тим, що в разі однопрограмною роботи ЦОМ протягом проміжних часу, потрібних для введення чи виведення інформації, центр, процесор, як правило, не діє. Такі самі простоя процесора виникають і в разі організації однопрограмною роботи ЦОМ у *діалоговому режимі*. При Б. о. і. ймовірність простою центр процесора значно зменшується, бо під час введення чи виведення однієї з задач центр, процесор може бути завантажений розв'язуванням ін. задачі. При цьому важливо, щоб обчислювальна система була добре збалансована за продуктивністю й кількістю зв'яз. пристроїв, які обслуговують процесор. Б. о. і. на ЦОМ організує керуюча програма *операційної системи*. Ще однією з осей переваг Б. о. і. при реальному й позірному суміщенні є незалежна одночасна робота на машині кількох користувачів. До методів організації Б. о. і. належать ще пакетна обробка інформації, обробка інформації в режимі розподілу часу та обробка інформації в реальному масштабі часу.

Б. о. і. можлива, якщо є спец. апаратні засоби. Осн. з них: 1) пристрій пам'яті на базі дисків магнітних або барабанів магнітних, які за обсягом значно перевищують обсяг головної пам'яті ЦОМ. Призначення цієї (проміжної) пам'яті — зберігати всю або частину інформації протягом проміжного часу, коли ці задачі не розв'язує центр, процесор. У момент часу, коли процесор повертається до розв'язування котроїсь із цих задач, інформацію про неї викликають у гол. пам'ять ЦОМ. За допомогою такого розподілу інформації досягають оперативності роботи центр, процесора; 2) засоби, що дають змогу перемишувати (редоціювати) програми й дані в межах гол. пам'яті ЦОМ. Редоціюваність (перемістимість) програм і даних потрібна для того,

щоб чергову порцію інформації, викликає у проміжної пам'яті, можна було перемістити на будь-яке вільне місце в гол. пам'яті. Реалізованості (перемістимості) програм досягають за допомогою апаратних засобів, які в момент виконання команди забезпечують перетворення адрес математичних, які є в програмі, на істинні (фізичні) адреси; 3) система переривання, що реагує на сигнали, які надходять від воєн. пристроїв і нагромаджувачів, і в разі потреби перериває (а потім відновлює) задачу, яку в цю мить розв'язує центр. процесор, для забезпечення оперативного обслуговування пристроїв і нагромаджувачів; 4) засоби, що забезпечують пам'яті загист. Захист воєн. чи проміжної пам'яті забезпечує керуюча програма (див. Керувальні дані); 5) автономні канали обміну воєн. пристроями й воєн. нагромаджувачами; воєн. забезпечують реальне суміщення роботи центр. процесора з процесами введення — виведення інформації; 6) електронний годинник (таймер), що контролює за допомогою керуючої програми часовий перебіг обчисл. процесу та здійснює планування його.

Порівняти Б. о. і. перед однопрограмною обробкою привади до того, що більшість сучасних ЦОМ використовують у багатопрограмному режимі.

А. І. П. Кітень

**БАГАТОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА** — крайова задача для одновимірної диференціального або інтегро-диференціального рівняння, в якого встановлено обмеження на розв'язки більше як у двох точках.

**БАЙЕСА ФОРМУЛА**, формула ймовірностей гіпотез — формула елементарної ймовірностей теорії, яка дає змогу обчислювати апостеріорні (післядослідні) ймовірності гіпотез про настання якоїсь події, якщо відомо, що ця подія здійснювалась. Нехай подія  $A$  може настати тільки сумісно з однією з послідовності подій  $B_1, B_2, \dots$ , які взаємно виключають одна одну, причому відомі ймовірності  $p(B_k)$  всіх цих подій та умовні ймовірності  $p(A/B_k)$  події  $A$  при умові, що  $B_k$  здійснювалась; тоді умовні ймовірності

$$p(B_k/A) = \frac{p(B_k)p(A/B_k)}{\sum_i p(B_i)p(A/B_i)} \quad k = 1, 2, \dots$$

М. П. Слободенко

**БАЙЕСІВСЬКЕ ВІРІШУВАЛЬНЕ ПРАВИЛО** — статистичне вирішувальне правило, що забезпечує мінімум середнього ризику рішення. Під середнім риском розуміють от що  $\theta$  об'єкти або ситуації, певні параметри яких цікавлять нас (напр., назви класів до яких ці об'єкти належать). Інформацію про об'єкти задають у формі наборів ознак  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , одержуваних шляхом приймачів вимірювань. Припускається, що при кожному можливому значенні шуканого параметра  $\gamma$  набори ознак  $x$  являють собою реалізації випадкової величини з відомим умовним розподілом ймовірностей  $p(x/\gamma)$ . Припускається також,

що апіорний розподіл ймовірностей  $\xi(\gamma)$  шуканих параметрів відомий. Щоб визначити ці параметри, можна зазначити вирішувальне правило  $\delta$ , яке відображає простір ознак  $X$  на множину рішень  $A$ , тобто зазначає для кожного об'єкта, описаного набором ознак  $x \in X$ , рішення  $\lambda = \delta(x) \in A$ . Це рішення оцінює дійсне значення шуканого параметра  $\gamma \in \Gamma$  для даного об'єкта. Множина рішень  $A$  у загальному випадку може не бути тотожною (точніше, ізоморфна) множині  $\Gamma$  значень шуканих параметрів. Задається функція втрат  $L(\gamma, \lambda)$ , яка встановлює, якого кількісного збитку надає рішення  $\lambda$  у разі, коли дійсне значення параметра дорівнює  $\gamma$ . Середній риск  $r(\delta, \xi)$  рішення визначають як математичне сподівання втрат при використанні цього вирішувального правила  $\delta$ :

$$r(\delta, \xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{x \in X} L(\gamma, \delta(x)) p(x/\gamma) \xi(\gamma),$$

де  $\sum$  тут позначає підсумовування дискретних або інтегрування за ймовірнісною мірою неперервних величин. Б. в. п.  $\delta^*$  визначено умовою  $r(\delta^*, \xi) \leq r(\delta, \xi)$  при всіх можливих правилах  $\delta$ . Для кожного набору ознак  $x$  Б. в. п. зазначає таке рішення  $\lambda = \delta^*(x)$ , при якому середня умовна втрата  $\sum_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \lambda) p(\gamma/x)$  є мінімальною. Приклад

Б. в. п. — байєсів алгоритм розпізнавання з відомими. Нехай  $X$  — будь-який простір ознак, для якого задано розподіл  $p(x/\gamma)$  та  $\xi(\gamma)$ . Шуканий параметр  $\gamma$  — це номер класу розпізнаваного об'єкта;  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ . Множина рішень (тобто номерів класів, зазначених алгоритмом) відрізняється від  $\Gamma$  і має вигляд:  $A = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ , де  $\gamma_0$  — додатковий клас нерозпізнаних об'єктів (відмов від розпізнавання). Функцію втрат задають у такому вигляді:  $L(\gamma, \lambda) = 0$  при  $\lambda = \gamma$ ,  $L(\gamma, \lambda) = \epsilon$  при  $\lambda = \gamma_0$  і  $L(\gamma, \lambda) = 1$  при  $\lambda \neq \gamma$ ,  $\lambda \neq \gamma_0$  (втрата при відмові приймається меншою, ніж при помилці:  $0 < \epsilon < 1$ ). При зазначених умовах байєсів алгоритм зводиться ось до цього:  $\delta^*(x) = \gamma_k$ , якщо  $p(\gamma_k/x) = \max_{i=1, \dots, N} p(\gamma_i/x) > 1 - \epsilon$  і  $\delta^*(x) = \gamma_0$  в протилежному разі.

Б. в. п. використовують у теорії статистичних рішень, у розпізнаванні образів, в теорії (байєсова стратегія), в оптимального керування теорії і т. ін.

Важливим окремим випадком використання Б. в. п. у розпізнаванні образів є байєсівське навчання. При навчанні, крім шуканого параметра — номера класу  $\gamma$ , невідомими є ще й кілька інших параметрів  $\beta$ , що характеризують розглядувані об'єкти (іноді такі додаткові невідомі параметри називають  $\alpha$  чи  $\mu$ ). Припускається, що значення заважливих параметрів є сталими для сукупності всіх розглядуваних об'єктів у кожній конкретній задачі навчання і відомо апіорний розподіл ймовірностей цих значень  $\eta(\beta)$  для ансамблю однотипних задач навчання. Задачу байєсівського навчання можна форму-

лювати по-різному. Напр., її можна поставити як задачу побудови Б. в. н., що вказує значення параметрів  $\beta$  або значення певних функцій від цих параметрів за заданою *навчальною вибіркою*. До навчальної вибірки  $n = ((x_{(1)}, y_{(1)}), \dots, (x_{(m)}, y_{(m)}))$  входять набори ознак  $x_{(q)} \in X$  об'єктів, для яких вказано їхні класи  $y_{(q)} \in Y$  (при навчанні з ідеальним учителем вказуються дійсні значення  $y_{(q)}$ , в реальності — відповіді  $\lambda_{(q)}$  деякого допоміжного вирішувального правила, які є оцінками дійсних значень  $y_{(q)}$  і в принципі можуть і не збігатися з ними). Одержані при навчанні оцінки значень зважаючих параметрів або функцій від цих параметрів підставляють потім як значення самих параметрів або їхніх функцій при побудові байєсівського алгоритму розпізнавання (Б. в. н., що зазначає шукані класи об'єктів). Прямодло вимагати, щоб оцінки параметрів, одержані при навчанні, давали змогу здійснювати розпізнавання якнайкращим способом. Тому в найзагальнішому випадку байєсівське навчання аразу формулюють як задачу побудови байєсівського алгоритму розпізнавання в присутності зважаючих параметрів і полягає воно в мінімізації середнього умовного *риску розпізнавання* об'єктів при заданій навчальній вибірці. Припускається, що відомі такі статистичні характеристики: умовний спільний розподіл ймовірностей елементів навчальної вибірки  $p(x, y) = p(x_{(1)}, y_{(1)}, x_{(2)}, y_{(2)}, \dots, x_{(m)}, y_{(m)})$  і набори ознак розпізнаваних об'єктів  $p(x, y, \beta, \gamma)$ . Середній *риск* рішення  $\lambda = \delta(x, y)$ , прийнятих алгоритмом розпізнавання для наборів ознак  $x$ , коли задано навчальну вибірку  $n$ , задають як  $r(\delta, \xi) = \sum_{x \in U} \sum_{y \in Y} L(y, \delta(x, n)) p(x, n|y)$ .

де  $U$  — множина навчальних виборок, а умовний спільний розподіл ймовірностей  $p(x, n|y)$  елементів навчальної вибірки й набору ознак розпізнаваного об'єкта одержуємо за відомими статистичними характеристиками:  $p(x, n|y) = \sum_{\beta} p(x|\beta, y) p(n|\beta, y)$  тут  $B$  — множи-

на значень зважаючих параметрів. Звичайно запроваджують такі спрощувальні припущення: 1) елементи навчальної вибірки статистично незалежні  $p(n|\beta) = \prod_{q=1}^m p(x_{(q)}, y_{(q)}|\beta)$  і

2) при відомих значеннях зважаючих параметрів набори ознак розпізнаваних об'єктів статистично не залежать від навчальної вибірки:  $p(x, \beta, y) = p(x, \beta, y)$ . При цьому  $p(x, n|y) = \sum_{\beta} p(x|\beta, y) p(n|\beta, y)$ , і для

наведеного вище прикладу подібне байєсівське навчання зводиться до заміни умовних ймовірностей класів  $p(y|x)$  оцінками  $\hat{p}(y|x) = \sum_{\beta} p(y|\beta, x) p(\beta|x)$ , які являють собою

умовні математичні сподівання ймовірностей

$p(y|x, \beta)$ , що є функціями від зважаючих параметрів Г. Л. Гімельфарб

**БАЙЄСІВСЬКЕ НАВЧАННЯ** — процес вми-  
ни *правила вирішувального*, що реалізується *розпізнавальною системою*, в результаті якого мінімізується середній умовний *риск розпізнавання* при даній навчальній вибірці. Осн. відміна Б. в. від інших видів навчання полягає в тому, що при Б. в. не провадять оцінки параметрів розподілів, а знаходять апостеріорний розподіл їх за даною *навчальною вибіркою*. Див. також *Навчання розпізнавати образи*.

**БАЙЄСІВСЬКИЙ МЕТОД** — метод прийняття рішення про неспостережувані характеристики, який ґрунтується на тому, що відомо апіорний розподіл *ймовірностей* цих характеристик і умовний розподіл результатів експерименту при заданих значеннях неспостережуваних характеристик. В. м. названо за ім'ям англ. математика 18 ст. Т. Байєса, який запропонував формулу, що пов'язує апостеріорні й апіорні ймовірності:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B, A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B, A_j)}$$

де  $A_i$  — попарно несумісні події, об'єднання яких включає подію  $B$ .

Б. м. широко використовують у теорії статистичних рішень, в *теорії та в теорії розпізнавання образів* Б. м. полягає в більшості у виборі найімовірніших значень характеристик. У розпізнаванні образів цьому відповідає вибраний найвірогідніший, відповіді розпізнавання (див. *Відповіді розпізнавальної системи*), що забезпечує мінім. ймовірність помилкових рішень. У заг. випадку Б. м. полягає в виборі рішення, що відповідає мінімумові середнього *риску* рішення (див. *Байєсівське вирішувальне правило*). Нехай  $\{x\}$  — спостережувані реалізації розглядуваної випадкової події або величини;  $d_i, i = 1, \dots, n$  — можливі рішення щодо значень шуканих характеристик цієї події (здебільшого рішення наз. статистичною гіпотезою). При використанні Б. м. треба, щоб було задано т. з. апіорні відомості: безумовні ймовірності гіпотез  $p(d_i)$  й умовні ймовірності (щільності ймовірностей) реалізацій  $p(x/d_i)$  при кожній з гіпотез  $d_i$ . Від цих апіорних відомостей можна легко перейти до умовних ймовірностей гіпотез при спостережуваній реалізації  $p(d_i|x)$ , які наз. апіорними ймовірностями. Найвірогідніше рішення у Б. м. визначають за макс. апіорною ймовірністю. Якщо апіорні ймовірності гіпотез  $p(d_i)$  невідомі, можна використати т. з. *емпіричний Б. м.*, у якому ці ймовірності статистично оцінюються за заданою вибіркою реалізацій  $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$ .

Г. Л. Гімельфарб  
**БАЙТ** (англ. byte) — одиниця кількості інформації, яка являє собою групу з сусідніх двійкових розрядів (з восьми, іноді з шести

розрядів), якою цифрова обчислювальна машина може оперувати як одним ділом під час передавання, зберігання й обробки даних (інформації). Відомі одиниці інформації — слова; вони звичайно кратні за довжиною Б. Це значно спрощує угодження процесів і обладнання в ЦОМ. Б. використовують для представлення букв і спец. символів (вони займають здебільшого увесь Б.) або десятичних цифр (розміщують їх звичайно по дві цифри в Б.). 1Б. = 8 біт. Див. Інформації кількість.

**БАЛАНС МІЖГАЛУЗЕВИЙ** — система показників, які характеризують виробництво та розподіл суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу. Б. м. в моделі математично наг-ва, яку описують системою матеріальних рівнянь, що характеризують вироб. і розподіл продукції:

$$X = AX + Y, \quad (1)$$

де  $X$  — вектор валового випуску;  $Y$  — вектор кінцевого випуску;  $A$  — матриця коэф. прямих витрат. Кожен компонент вектора  $X$  та  $Y$  означає відповідно валовий і кінцевий випуск по галузі, а кожний коэф.  $a_{ij}$  матриці  $A$  показує ту кількість продукції галузі  $i$ , яка потрібна для вироб. одиниці валової продукції в  $j$ -й галузі. Модель балансу (1) при заданих значеннях компонентів вектора  $Y$  і коэф. матриці  $A$  дає змогу знаходити збалансовані обсяги вироб. по всіх галузях нар. господарства.

Основу Б. м. становить сукупність усіх галузей матеріального виробництва. Кожна галузь відображається в балансі дати як виробник і як споживач. Галузі як виробники продукції відповідає певний рядок, а галузі як споживачі продукції певний стовпчик. У рядках Б. м. відображається розподіл обсягу продукції кожної галузі матеріального вироб., а в стовпчиках — структура матеріальних затрат і чистої продукції кожної галузі.

На основі моделі Б. м. можна розрахувати коэф. повних затрат. Ці затрати виражають затрати одного продукту на вироб. одиниці кінцевого випуску іншого продукту не тільки безпосередньо, у вигляді прямих затрат, а й опосередковано, через інші продукти, які беруть участь у вироб. Останнім часом у нар.-госп. плануванні використовують динамічні міжгалузеві моделі, що їх описують системою рівнянь вигляду:

$$X_i = A_i X_i + B_i \Delta X_i + Y_i^*, \quad (2)$$

де  $Y_i^*$  — вектор кінцевої продукції, що її використовують для споживання;  $B_i$  — матриця коэф. капіталоспоживності у  $i$ -му році;  $\Delta X_i$  — приріст валової продукції. Певна система Б. м. в рамках однієї економіко-матем. моделі об'єднує матеріальні баланси, баланс трудових ресурсів, баланс національного доходу,

баланс всього суспільного продукту, фінансовий баланс грошових доходів та витрат населення.

Лит. Гребцов Г. И. [та ін.]. Основы разработки межотраслевого баланса. М., 1962. Дудкин Л. М. Оптимальный материальный баланс народного хозяйства. М., 1966 [бібліогр. с. 167—182]. Коссов В. В. Межотраслевый баланс. М., 1966 [бібліогр. с. 218—221]. Економіко-математичні моделі. М., 1969.

Ю. С. Архангельский, Л. Г. Сабирова.  
**БАЛАНСОВІ МОДЕЛІ** — економіко-математичні моделі, що характеризують рівність (баланс) між надходженням та розподілом якогось ресурсу (продукція, трудові ресурси, потужності). Принципова схема Б. м. має вигляд (на прикладі матеріальних балансів):

$$S_i^*(t) + \sum_k x_k^*(t) + x_i^*(t) = \sum_j a_{ij}^*(t) x_j(t) + y_i^*(t) + P_i^*(t) + \sum_k x_k^{*h}(t) + S_i^*(t+1),$$

де  $i, j$  — індекси продукції;  $t$  — індекс періоду (року, кварталу тощо);  $k, r$  — індекс району (республіки, економ. району, області, міста, підприємства);  $S_i^*(t)$ ,  $S_i^*(t+1)$  — залишки продукції на початок (кінець) періоду  $t$ ;  $x_k^*(t)$  — обсяг перевезення з району  $r$  до  $k$ ;  $x_i^*(t)$  — обсяг виробництва;  $a_{ij}^*(t)$  — норма витрати продукції виду  $i$  на виробництво одиниці продукції  $j$ ;  $y_i^*(t)$  — потреби населення в предметах ужитку;  $P_i^*(t)$  — інші потреби (на капітальне будівництво, ремонтно-експлуатаційні потреби, приріст резервів продукції тощо). Аналогічно будують баланси потужностей, трудових ресурсів, розвіданих корисних копалин. Б. м. призначені для вивчення темпів, що складає, та пропорцій розвитку нар.-г-ва і розробки взаємоузгоджених планів на різних рівнях керування. Комплекс Б. м. планування суспільного вироб. включає взаємопов'язані й взаємодіючі моделі підприємств і галузей нар.-г-ва. Результати розрахунків за Б. м. підприємства застосовують для складання моделей галузей, а результати розрахунків галузевих моделей — для складання Б. м. на рівні нар.-г-ва.

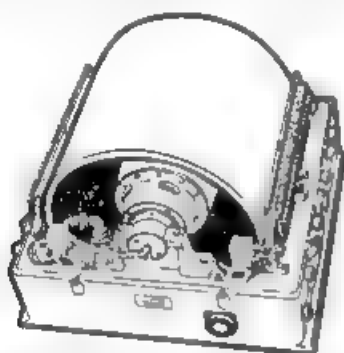
Лит. Коссов В. В. Межотраслевый баланс. М., 1966 [бібліогр. с. 218—221]. Моисеев Н. Н. Математика - управление - экономика. М., 1970. Ю. С. Архангельский, Л. Г. Сабирова.

**БАРАБАН МАГНІТНИЙ** — циліндр, вкритий шаром магнітотвердої речовини, на якому можна записувати дискретну інформацію шляхом вибіркового намагнічування ділянок його поверхні. Поблизу поверхні Б. м. (маг.) прикріплено магн. головки записування — зчитування, що спричиняють під час записування або зняття під час зчитування змину магн. індукції найближчої ділянки поверхні. Записування (намагнічування) здійснюється потоком розсіявання головки. Зчитування забезпечується наведенням ярс у головці під час проходження ділянки з залишковою намагніченістю, тобто виявляється зміна індукції. Тут зчитуваний сигнал залежить від швид-



кості змін індукції, яка пропорційна швидкості руху В. м. Можна зчитувати з нерухомої поверхні, напр., при кроковому русі, використовуючи принцип магн. підсилювача, явища Холла чи Керра.

Як правило, головки нерухомі відносно осі В. м., і кожна працює з доріжкою — кільце-подібною ділянкою поверхні, що проходить від головки. Одна головка може обслуговувати групу доріжок В. м. за допомогою електро-, гідро- або пневмомеханічних засо-



Головка магнітна

бів переміщення головки паралельно осі обертання. При такій конструкції пристрої в Б. м. коштують менше, але при цьому збільшується час доступу до інформації. Одну доріжку можуть обслуговувати кілька головок, розподілених по колу; це зменшує час доступу до кількох *мсек.* Загальна кількість доріжок на В. м. — від кількох одиниць до кількох сотень.

Ширина доріжки фактично менша за розмір головки в напрямі, паралельному осі обертання, і залежить від геом. розмірів і магн. характеристик покриття її головки. Ця ширина визначає т. з. поперечну щільність запису (до 10 доріжок на *мм.*). Для збільшення поперечної щільності запису головки збирають у кілька об'ємів, паралельних осі обертання, в відповідний зсувом. Характеристикою використання поверхні є також щільність (т. з. поздовжня) запису інформації в напрямі обертання. Вона досягає 70 *біт/мм* і залежить (крім геом. розмірів і магн. характеристик головки та покриття) від способу формування в обмотці головки послідовності імпульсів струму, і обмежується робочою частотою головки (1—2 *Мгц*). Зі зменшенням зазору між головкою і В. м. поздовжня щільність запису збільшується. Якщо головки нерухомі відносно осі обертання, зазор становить здебільшого не менше як 20 *мкм* (при суворих мех. вимогах до В. м.). Застосовують головки, що «плавають» на аеростатичному (наддувному) або аеродинамічному (заоплюваному) повітряному шарі завтовшки бл. 3 *мкм*. Використовують і Б. м., що «плавають» в нерухомій об'ємі з головками.

Б. м. застосовують у ЦОМ у складі *запам'ятовувальних пристроїв зовнішніх* і як проміжний ЗП, і як дешевий циклічний операційний *запам'ятовувальний пристрій*.

Серійні мікрозв'язки ЗП на Б. м. НЕ—11 мають ємність 6,8 *Мбіт* із середнім часом звертання 30 *мсек.*, а найбільший з Б. м. UNIVAC Fastscan — 450 + 900 *Мбіт* з часом звертання 92 *мсек.*

Лит. Каган Б. М., Адашко В. И., Пурз Р. Р. Запоминающие устройства большой емкости М. 1968 [66,109 с. 314—317] Макурочка В. Г. Магнитная запись в вычислительной технике. М., 1968 [66,109 с. 166—167].

О. О. Вараванов  
**БЕКУСА НОРМАЛЬНА ФОРМА** — окремий вид формальних граматики породжувального типу, які описують клас контекстно вільних мов. Б. з. ф. запровадив амер. математик Бекус для описування мови **АЛГОЛ-60**. Згодом ці граматики набули широкого визнання й великого поширення. Б. з. ф. задається словником термінальних (або основних) символів (напр., у мові **АЛГОЛ-60** — це букви, цифри, логіч. значення, знаки операцій, роздільники, дужки, дозвольні слова: *real, integer, Boolean, procedure* тощо), словником нетермінальних символів (що їх наз. *метаазійними*), один з яких наз. аксіомою, і сукупістю металінгвістичних формул (МЛФ), кожна з яких призначена знаходити одну метазмінну (в мові програмування аксіомі відповідає поняття *програми*). Кожну МЛФ побудовано з термінальних і нетермінальних символів за допомогою металінгвістичних зв'язок:  $=$  (означає «рівне за визначенням») та *верт. риска* (означає «або»); кожна з них задає правило породження допустимих значень відповідних метазмінних, якими є осн. символи або *ланцюжки* їх, розташовані між роздільниками | або одержувані послідовною заміною метазмінних, що містяться в цих ланцюжках, їхніми допустимими (породжуваними) значеннями. Прикладом Б. з. ф. є задання синтаксису цілого числа в описі мови **АЛГОЛ-60**:

$\langle \text{ціле} \rangle ::= \langle \text{цифра} \rangle | \langle \text{ціле} \rangle \langle \text{цифра} \rangle$

$\langle \text{цифра} \rangle ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

Тут  $\langle \text{ціле} \rangle$  й  $\langle \text{цифра} \rangle$  є метазмінні, а цифри від 0 до 9 — осн. символи мови. Це визначення цілого числа є рекурсивним, згідно з яким будь-яка цифра є цілим числом, або будь-яке ціле, до якого справа приписано цифру, також є цілим числом і дає змогу одержати число у вигляді довільної послідовності цифр, напр. 28 379, 8, 032 та ін. Див. також *Граматики формальні*.

К. Л. Ющенко.  
**БЕЛМАНА ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТІ** — основний принцип методів динамічного програмування, який твердить, що оптимальна поведінка системи характеризується тією властивістю, що який би не був первісний стан і розв'язки до деякого моменту часу, наступні розв'язки мають становити оптимальну поведінку щодо стану, який одержують у результаті прийнятих розв'язків. У випадку *N* — етапною задачі програмування динамічного Б. п. о. подають у вигляді рекурентного співвідношен-

ня  $f_{k+1}(s) = \max_{u \in M} f_k(s, u)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $f_0(s) = \Phi(s)$ , де  $f_k(s) = \Phi_k(s)$ , що виражає макс. дохід за  $k$  кроків залежно від пераічного стану  $s$ ;  $u$  — керуючий оператор переходу за один крок, який вибирають з множини  $M$  допустимих керуючих операторів,  $\Phi(s)$  — задана ф-ція доходу. На базі цього співвідношення будують чисельні методи динамічного програмування. У задачах оптим. керування В. п. о. виражається у вигляді нелінійного рівняння з частинних похідних (див. Беллмана рівняння). Див. також Оптимізаційне керування теорія.

Н. З. Шер.

**БЕЛЛМАНА РІВНЯННЯ** — рівняння в частинних похідних 1-го порядку, одержане в результаті застосування методу програмування динамічного для функції, що виражає в задачах оптимального керування оптимальне значення функціоналу залежно від початкового стану. Нехай рух морованого об'єкта описується векторним диференціальним рівнянням:

$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ ,  $u \in U$ , де  $x$  — вектор фазових координат,  $U$  — множина керувань. Задано функціонал  $I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u) dt$ . Задання по-

лягає в тому, щоб з усіх допустимих керувань  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , що переводять початкову фазову точку  $x_0$  у точку  $x_1$ , обрати таке, яке надає функціоналові  $I$  найменшого можливого значення. Щоб розв'язати цю задачу, вводять ф-цію  $T(x)$ , яка виражає залежність оптим. значення функціоналу  $I$  від початкового стану  $x$  і яку визначено за множини  $G$  тих точок фазового простору, для яких є адійсним перехід у точку  $x_1$  за скінченний час.

Нехай  $\omega(x) = -T(x)$ . Ф-ція  $\omega(x)$  в ділянці  $G$  (за винятком окремої підмножини меншої розмірності, ніж розмірність фазового простору), задовольняє рівняння  $\max_{u \in U} (q_u(x), f(x, u)) = 0$ , де  $q_u(x) = \text{градиент ф-ції } \omega(x) \text{ у точці } x$ . Це рівняння і в Б. р. Рівняння, що є модифікацією Б. р., використовують і для дослідження ігор диференціальних. Див. також Оптимізаційне керування теорія.

Н. З. Шер.

**БЕРЖА ГРАФ** — граф без ланок (орієнтований), без кратних петель і кратних дуг одного напрямку

**БЕРНУЛЛІ РОЗПОДІЛ** — розподіл ймовірностей випадкової величини  $\xi$ , яка набуває значень  $0, 1, \dots, n$  з ймовірностями  $P_n(k) = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ . Числа  $n$  та  $p$  — параметри В. р. Цей розподіл виникає в такій ситуації, що часто зустрічається і має назву схеми Бернуллі: проводять однакові й незалежні випробування, в кожному з яких з однією й тією самою ймовірністю  $p$  виявляється подія  $Y$  — успіх, і з ймовірністю  $1-p$  протилежна подія  $\bar{Y}$  — невдача. Нехай  $\xi$  — число успіхів при  $n$  випробуваннях у схемі Бернуллі. Тоді  $\xi$  має В. р. з параметрами  $n$  і  $p$ . Напр.,

кількість попадань при  $n$  пострілах має В. р., якщо ймовірність попадання в ціль за один постріл дорівнює  $p$ . В. р. наз. ще й біноміальним розподілом.

М. Я. Воронко

**«БЕРРАУЗ КОРПОРЕЙШЕН»** (Burroughs Corporation) — американська фірма, що розробляє й випускає конторське обладнання, засоби оргтехніки та обчислювальні машини для комерційних розрахунків. Засновано її 1886. Першу ЦОМ «B205» випустила 1954. У сімействі «500», особливо в його останніх моделях, розвинуто концепцію ЦОМ із структурою, системою адресації, форматом даних і списком інструкцій, орієнтованих на ефективну трансляцію програм, написаних мовами типу АЛГОЛ, ФОРТРАН та ін. Розвиток цієї концепції тривав в машинах сімейства «700», що його випускають з 1970. Сімейство складається з трьох моделей, які є багатопроцесорними обчислювальними системами з віртуальною пам'яттю. Найбільша модель сімейства може мати до 8 процесорів (центральної та периферійних) і до 5120 каналів введення — виведення. У сімействі є набір пам'ятей з циклом 1,5; 1,2 і 0,5 мсек; призначено ЦОМ для розв'язування статистичних задач, задач лінійної оптимізації та задач керування.

Лім Зейденберг В. К., Матвеев К. А., Таранова Е. В. Обзор вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970, стр. 1. С. J. Computer dictionary and handbook Indianapolis — New York, 1968.

Ю. П. Соловьев

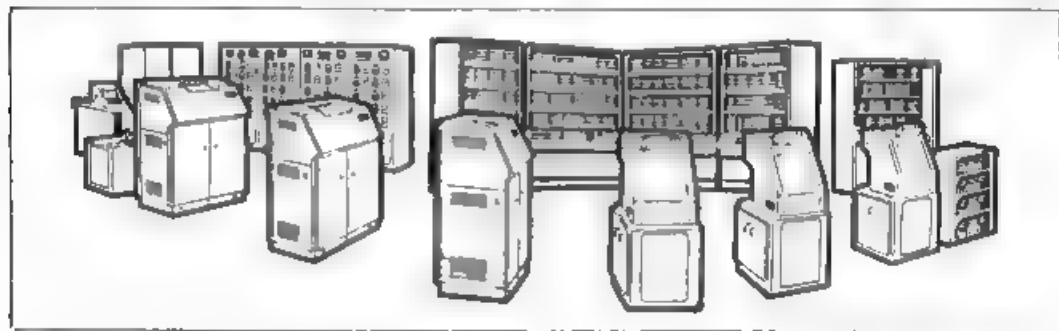
**«БЭСМ»** — сімейство цифрових обчислювальних машин загального призначення, орієнтованих на розв'язування складних задач науки й техніки. Розроблено в ін-ті точної механіки й обчислювальної техніки АН СРСР.

Роботу над першою машиною закінчено 1952. В цій трьохадресній машині паралельної дії на електронних лампах (4000 ламп) використано двійкову систему числення з плаваючою комою. За структурою, конструкцією й характеристиками вона була на рівні кращих закордонних машин. «БЭСМ» оперувала 39-розрядними словами з середньою швидкістю 10 тис. операцій за 1 сек. Спочатку в ній використовували оперативний ЗП на електронно-акустичних лініях затримки, який згодом було замінено пристроєм на електронно-променевих трубках, а потім — пристроєм на феритових осердях ємністю 1024 слова з довільним вибиранням. Зовнішній ЗП був на двох магн. барабанах по 5120 слів (швидкість читання з барабана — 800 чисел за 1 сек) і магн. стрічки (120 тис чисел). Як пристрій введення використовували перфострічку, для виведення — магн. стрічку з подальшим друкуванням на спеціально розробленому швидкодіючому фотодрукувальному пристрої, застосовуваному для видавання великих масивів даних. Крім того, машина мала електромеханічний друкувальний пристрій для друкування контрольних значень і результатів, якщо їх було мало порівняно з обсягом обчислень (швидкість роботи — 20 чисел за 1 сек).

Цікавими особливостями структури машин були місцеве керування операціями, які за тривалістю перевищували рамки стандартного циклу, та автономне керування під час переходу на підпрограми. Машина мала довгочасний запам'ятовувальний пристрій для підпрограм, частина якого була змінною. Для контролю застосовували серію *третіє* і спеціальні розроблені методи логічного контролю.

За період 1959—66 створено 4 моделі машин цього сімейства: «БЭСМ-2», «БЭСМ-3»,

кістю 300 мсек. Його тех. характеристики: довжина слова — 50 розрядів (2 — для перевірки на парність); система числення — двійкова, форма представлення чисел — в плаваючому комою, час виконання операцій: додавання — 1,2 мсек; множення — 2,1 мсек; система команд — одноадресна; довжина команди — 24 двійкові розряди (2 на слово); кількість основних команд — 50 плюс екстракоди; смист ОЗП на осердях — 32 тис. слів (8 блоків), її можна розширити до 120 тис. слів; час звертання до ОЗП — 2 мсек; кіль-



Цифрова обчислювальна машина «БЭСМ-6».

«БЭСМ-3М» і «БЭСМ-4». Удосконалення йшло шляхом збільшення і модернізації зовнішніх пристроїв, переходу на напівпровідникову елементну базу, збільшення смисті ОЗП на магн. осердях і смисті зовнішніх ЗП.

У 1967 створено найпотужнішу обчислювальну машину цього сімейства — «БЭСМ-6» (швидкодія 11 бл. і млн. операцій за сек, днів, мал.). Застосування в машині одноадресної системи команд підтверджує загальну тенденцію збільшення гнучкості командного керування. Характерними особливостями внутрішньої організації центральної частини машини є, зокрема, такі: високий ступінь локального паралелізму, наявність *запам'ятовувального пристрою* буферного надшвидкої дії, розширена система операцій, можливість організації магазинної пам'яті та поділ оперативної пам'яті на незалежні блоки. У машині широко застосовано суміщення виконання операцій звертання до оперативного ЗП з роботою арифм. пристрою та пристрою керування; в машині є п'ять рівнів попереднього перегляду команд. Структуру машини розраховано на застосування її в режимі розподілу часу і мультипрограмування. Це забезпечується: апаратною системою переривання, схемою захисту пам'яті, індексацією й розвиненою системою перетворювання віртуальних матем. адрес на фіз. адреси оперативної пам'яті в динаміці лічби. Передбачено й можливість використати будь-яку частину пам'яті як *запам'ятовувальний пристрій* магазинний, непряму адресацію й широкі засоби переадресацій.

Центр. процесор машини має 16 швидкодіючих регістрів, що працюють зі швид-

кістю ліній переривання — 40; час вибирання з пам'яті — 0,8 мсек, тактова частота — 10 Мгц. Електронна частина машини містить 120 тис. діодів і 40 тис. транзисторів. Зовнішні ЗП: 16 барабанів смистом до 32 тис. слів і 32 стрічкові механізми з смистом бобин на кожному механізмі — в 1 млн. слів.

До комплекту пристроїв системи введено: виведення входять: пристрій зчитування з перфокарт з пропускну здатністю 700 карт за 1 сек; пристрій зчитування з перфострічок — 1000 знаків за сек; швидкодіючий алфавітно-цифровий друкувальний пристрій на 98 знаків — до 400 рядків за 1 сек (128 знаків на рядок), західні карткові перфатори — по 100 карт за 1 сек, стрічкові перфатори — по 20 знаків за сек, 4 клавішні перфатори, 1 контрольний для перфокарт і 2 стрічкові перфатори.

«БЭСМ-6» має розвинене матем. забезпечення, до складу якого входять: операційна система керування поточною обробкою задач і система програмування символічними машинно-орієнтованими мовами і мовами високого рівня: ФОРТРАН, АЛГОЛ і ЛІСП. До складу матем. забезпечення входять і пакети стандартних програм для ФОРТРАНУ й АЛГОЛУ, які охоплюють широке коло інженерних і науково-тех. задач. Загальний обсяг матем. забезпечення досягає кількох сотень тисяч команд.

Операційна система (ОС) організовує мультипрограму обробку кількох задач, кожна з яких має повний обсяг віртуальної пам'яті, передбаченої в машині. ОС розподіляє фіз. ресурси пам'яті між задачами, використовуючи

її посторінкову організацію, забезпечує одночасну, суміщену з роботою центрального процесора, роботу зовнішніх ЗП і пристроїв введення — виведення та організовує зв'язок у роботу необхідних трансляторів і компіляторів, звернення до стандартних програм і стейнів за правильністю виконання робочих програм, фіксує помилки, які виникають при цьому.

Система програмування на автокоді дає змогу записувати в символічному вигляді програми, які зберігають усі структурні особливості машини, і є, отже, засобом одержування найефективніших програм. Завдяки системі програмування, які ґрунтуються на мовах високого рівня (АЛГОЛ і ФОРТРАН), завдання формуються в зручній і звичній формі. Мова ЛІСП відкриває широкі можливості для створення складних логічних програм.

Літ. Лебедев С. А., Мельников В. А. Общее описание ЛЭСМ и методики выполнения операций М, 1959. Машина вычислительная цифровая ЛЭСМ-6. Ян. Издательство радиоинженерности Калуга, т. 4. Вычислительная техника. Выпуск Электронные цифровые вычислительные машины общего назначения М, 1968. Грубов Н. И. Кирдан П. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства К., 1969 [6.6.11 стр. 179-181]. П. Я. Погодин.

БІАКС — феритовий елемент з розгалуженням магнітопроводом, у якому магнітні потоки замикаються навколо двох отворів зі взаємно перпендикулярними неперехресними осями. Перші зразки Б. мали форму прямокутного паралелепіпеда розміром  $1,25 \times 1,25 \times 2,1$  мм із симетрично розташуваними отворами квадратного перерізу  $0,5 \times 0,5$  мм. Попирекі й інші конструкції Б. Так, для поліпшення магн. характеристик, для зручності перевірки й монтажу вітківляли Б. виготовляють несиметричної форми, з отворами круглого перерізу різного діаметру.

Для Б. базується на взаємодії ортогональних магн. потоків у заг. ділянках магнітопроводу. Феритова зона навколо одного з отво-

чування зона навколо отвору. Магн. потоки при записуванні одиниць й нулів мають протилежні напрямки. Провідник 1 використовується і як західну обмотку. Під дією магн. однополярних струмів опитування, що проходять по провіднику 2, змінюється розподіл магн. потоків у перемичці між отворами. При цьому потік опитування збільшується, а потік записування зменшується, внаслідок чого в провіднику 1 індукується ерс зчитування. Амплітуда сигналу зчитування звичайно становить одиниць ма. Коли перестав надходити струм опитування, перемичний розподіл потоків відновлюється, тобто записана інформація при опитуванні не руйнується.

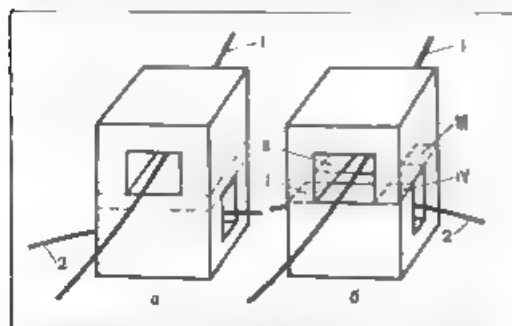
Б. застосовують у довгочасних запам'ятовувальних пристроях зі швидкою змінною інформації та в буферних ЗП з неруйнівним зчитуванням інформації, де допускається порівняно повільне записування й потрібна велика швидкість під час зчитування. Частота звертання під час записування в ЗП на Б. становить 200–300 кГц, а під час зчитування — 2–5 МГц. Б. використовують і для виконання логіч. функцій. У логічних Б. (мал., б) немає перемички між отворами. Спільною ділянкою магнітопроводу для взаємодіючих ортогональних магн. потоків є площинки I, II, III, IV. Швидкість Б.-транзисторних логіч. елементів у 2–3 рази більша за швидкість аналогічних феритно-транзисторних схем.

Літ. Баряж В. В. Магнитные элементы цифровых вычислительных машин М, 1967 [6.6.10 стр. 436–451].

**БІБЛІОГРАФІЧНИЙ ПОШУК** — процес складання і пошуку документів наукових, що відповідають на поставлений запит. Див. Пошук інформації автоматичний.

**БІБЛІОТЕКА СТАНДАРТНИХ ПІДПРОГРАМ** — сукупність стандартних підпрограм і системи використання їх. Її складовою частиною математичного забезпечення ЦОМ. Стандартичними підпрограмами (СП) наз. переважно самостійні програми або частини програм, які складені однією з мов програмування (МП) і задовольняють деякі критерії ефективності (точність обчислень, час виконання, простота у використанні та ін.) і певні вимоги до їхньої структури, організації входів і виходів, до перемішувальності в пам'яті машини й довжини, використання комрок і регістрів ЦОМ та ін. Деякі з цих вимог до СП характерні для програм мови машинно-орієнтованими. Поняття «підпрограми» існує в ряді МП (ФОРТРАН, ПЛ-1, автокоди на ЦОМ «Дніпро-2» і «Мінськ-2» та ін.).

Б.с.п. та СП мають різну структуру залежно від МП. СП може включати звернення до інших СП. За призначенням СП поділяють на класи. Типовими класами СП є: діагностика ЦОМ; введення — виведення й внутр. обмін; налаштовувальні й сервісні СП; обчисл. математика, статистичний аналіз і обробка даних; логіка й символічні викладки; дослідження операцій і моделювання;



Біакс: а — заліз'ятовувальний; б — логічний.

рів, напр. верхнього (мал., а), використовується для запам'ятовування інформації. Через отвір проходить провідник 1, по якому подаються двополярні струми записування. Величина струму записування має бути достатньою для цілковитого перемагні-

матем. програмування й методи керування, спец. СП користувачів ЦОМ. Б. с. п. на ЦОМ має таку типову структуру: каталог Б. с. п.; банк стандартних програм (підпрограми, стандартні масиви, осн. й типові програми тощо); система організації роботи Б. с. п.; системи обслуговування й контролю Б. с. п.; інструктивно-методичні матеріали. За характером використання й зберігання розрізняють Б. с. п.: загальні, особисті, постійні й тимчасові. Для сучасних ЦОМ розроблено великі Б. с. п., що містять сотні СП різними мовами програмування.

Літ. див. до ст. *Бібліотечних підпрограм метод.* О. С. Студале.

**БІБЛІОТЕЧНИХ ПІДПРОГРАМ МЕТОД** — метод автоматизації програмування за допомогою бібліотек стандартних підпрограм (БСП) і спец. систем використання й обслуговування їх. Б ефективним методом програмування, який дає змогу скорочувати час і обсяг робіт під час підготовки даних, складання та налагодження програм. Елементарним способом використання стандартних підпрограм (СП) є вписування їх у програми. Універсальними методами використання СП є методи компіляції, інтерпретації й комбінації їх. Вони реалізуються на ЦОМ за допомогою компілюючих і інтерпретуючих систем. Основою таких систем є компілююча програма (КП) або інтерпретуюча програма (ІП). Ці програми автоматично виконують такі функції: розшифровують (інтерпретують) звернення до СП; зчитують СП ззовні, нагромаджують, розподіляють пам'ять і розміщують (завантажують) СП в ОЗП; настрайовують СП (коректують адреси, формують команди) за їхніми місцями в ОЗП; організовують зв'язки між СП і програмами (формують входи — виходи і звернення до СП). ІП виконує ці функції в процесі виконання програми, а КП — до початку виконання її. Сучасні системи програмування на ЦОМ дають змогу автоматично використовувати БСП одними мовами програмування (МП) у програмах іншими МП. Системи підпрограм обслуговування БСП призначені для автомат. виконання таких функцій: відкривають БСП на ЦОМ, контролюють, включають, вивчають СП в БСП; виводять СП та їхні каталоги на друк чи перфорацію; виконують інформаційно-довідкові функції тощо. На сучасних ЦОМ системи використання БСП входять до складу операційних систем. Зазначені методи й системи організації БСП реалізовані на всіх сучасних вітчизняних і зарубіжних ЦОМ.

Літ. Бібліотека стандартних програм М. 1961. Глаухов В. М. Об одном методе автоматизации программирования «Проблемы кибернетики», 1959, а 2. Крилицкий Н. А. Микроинформ. Г. А. Фролов Г. Д. Программирование М., 1966 [б-д] стр. с. 596—599]. О. С. Студале.

**БІЛИЙ ШУМ** узагальнений випадковий

процес вигляду  $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \xi(\tau) d\tau$ , де  $u(t)$  — фінітна функція, а  $\xi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , випадковий процес з нульовим матем.

математичним сподіванням та кореляційною функцією  $R(t, \tau) = \delta(t - \tau)$ ,  $\delta(t)$  — узагальнена ф-ція від  $t$ , визначають її так. Для будь-яких фінітних ф-цій  $u_k(t)$ ,  $k = 1, 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) u_1(t) u_2(\tau) dtd\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) u_2(t) dt.$$

У практиці розроблення матем. моделей широко використовують *гаусівський випадковий процес* типу Б. ш. Такий процес можна одержати внаслідок диференціювання (а узагальненому розумінні) процесу броунівського руху. Цей процес є стаціонарним (у широкому розумінні) випадковим процесом зі спектральною щільністю  $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ , й абсолютно непереранною спектральною функцією. Б. ш., що є матем. абстракцією, не можна реалізувати в реальних умовах, його застосовують як зручну модель математичну в теор. дослідженнях. Так, напр., шуми електронних ламп, атмосферні шуми, шуми моря, що мають рівномірний спектр у скінченній смузі частот, можна досить добре апроксимувати процесом типу Б. ш.

О. М. Деметин

**БІЛІНІЙНІ ТА КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ.** І. Білінійною формою (б. ф.)  $A(x, y)$  в  $n$ -мірному векторному просторі  $V_n$  над полем скалярів  $K$  наз. ф-цію від двох векторних аргументів  $x$  і  $y$  із значеннями в полі скалярів  $K$ , лінійною відносно  $x$  при кожному фіксованому значенні  $y$  і лінійною відносно  $y$  при кожному фіксованому значенні  $x$ .

$A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ ;  $A(yx, y) = \gamma A(x, y)$ ;

$$A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2);$$

$$A(x, \gamma y) = \gamma A(x, y),$$

де  $\gamma \in K$ . Якщо в базисі  $\{e_i\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  простору

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j, \text{ і } \alpha_{ij} = A(e_i, e_j)$$

то 
$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Прикладом б. ф. є скалярний добуток векторів  $x, y$ , який у декартовому прямокутному базисі має вигляд:  $xy = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n$ . При переході до нового базису матриця  $A = (\alpha_{ij})$  б. ф.  $A(x, y)$  перетворюється на матрицю  $A_1 = S A S^T$ , де  $S$  — матриця переходу, а  $S^T$  — транспонована до  $S$  матриця. Б. ф. наз. симетричною, якщо  $A(x, y) = A(y, x)$ , і косиметричною, якщо  $A(x, y) = -A(y, x)$  для будь-яких  $x, y \in V_n$ . Кожну б. ф. можна зобразити у вигляді суми симетричної та косиметричної

б. ф. Це зображення однозначне. Якщо в б. ф.  $y^* = A(x, y)$  фіксувати  $y$ , то вона стає лінійним функціоналом від  $x$  на  $V_n$  (див. Лінійна форма). Якщо при цьому  $y^*$  розглядати як елемент спряженого простору  $V_n^*$ , то за допомогою б. ф.  $y^* = A(x, y)$  здійснюється лінійне відображення простору  $V_n$  в простір  $V_n^*$ . При цьому ранг відображення збігається з вимірністю образу, що визначається рангом матриці  $A$ , тобто рангом б. ф. Якщо цей ранг дорівнює  $n$ , то б. ф.  $A(x, y)$  не вироджена. Невироджені б. ф. відповідає взаємно однозначне відображення  $V_n$  на  $V_n^*$ . Б. ф., що її задано в скінченновимірному просторі, наз. білінійним функціоналом.

2. Квадратичною формою (к. ф.)  $A(x, x)$  наз. ф-цію від одного векторного аргументу  $x$ , яку можна одержати з б. ф.  $A(x, y)$ , замінивши  $y$  на  $x$ . Так, напр., квадрат модуля вектора  $x$  можна розглядати як скалярний добуток вектора  $x$  на самого себе:  $x^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ , в результаті одержують к. ф. від вектора  $x$ , віднесеного до декартового прямокутного базису. В заг. випадку к. ф. — довільний однорідний многочлен 2-го ступеня від  $n$  змінних:  $A(x, x) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$ .

В матричному запису

$$A(x, x) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

або скорочено:

$$A(x, x) = x^T A x,$$

де  $x$  — вектор-стовпець, а  $^T$  — знак транспонування. К. ф. зображують і за допомогою скалярного добутку вектора  $x$  і  $Ax$ :  $A(x, x) = (x, Ax)$ ;  $Ax$  одержано з вектора  $x$  застосуванням до нього оператора лінійного з матрицею  $A(\alpha_{ij})$ . Рівні б. ф. можуть породити ту саму к. ф., зокрема всі косиметричні б. ф. породжують нульову к. ф. Тому, щоб перейти від б. ф.  $A(x, y)$  до к. ф.  $A(x, x)$ , розглядають лише симетричну частину б. ф. Цю симетричну частину наз. полярною формою відносно к. ф. Симетричну матрицю полярної форми наз. матрицею к. ф. Якщо вона дійсна (комплексна), то й форму  $A(x, x)$  називають дійсною (комплексною). Рангом к. ф. наз. ранг її матриці  $A$ . Якщо  $\det A = |A| \neq 0$ , то к. ф. наз. не вироджена (або сингулярна). Коли змінюється координатний базис, матриця к. ф. змінюється так само, як і матриця полярної б. ф., а визначник перетвореної матриці  $\det A_1 = \det A \times (\det S)^2$ , де  $\det S$  визначає матриці переходу  $S$ . При будь-якому не виродженому лінійному перетворенні  $\xi_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} \eta_j$ , або в

матричній формі  $x = ly$ ,  $l = (l_{ij})$ ,  $\det l \neq 0$ , к. ф.  $A(x, x)$  переходить у нову к. ф.  $B(y, y) = y^T B y$ , де  $B = l^T A l$ . К. ф.  $A(x, x)$  і  $B(y, y)$  наз. еквівалентними (або конгруентними), вони мають однакові ранги.

Вибірання базису, що в ньому б. ф. і к. ф. мають найпростіший вигляд, наз. зведенням до канонічного вигляду. В просторі  $V_n$  завжди існує базис  $\{f_i\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  (канонічний), у якому к. ф.  $A(x, x) = \lambda_1 \eta_1^2 + \dots + \lambda_n \eta_n^2$  для кожного вектора  $x = \sum_{i=1}^n \eta_i f_i$ . Це й є канонічний вигляд к. ф.

Канонічний базис і канонічний вигляд не визначають однозначно. Ось, методами зведення к. ф. до канонічного вигляду є метод вилучення повних квадратів Лагранжа й метод невизначених коеф. Якобі. Щоб звести симетричну б. ф. до канонічного вигляду, треба спочатку звести до канонічного вигляду к. ф., що відповідає їй, а потім знову перейти до білінійної (полярної) форми. Отже, і матрицю симетричної б. ф. завжди можна звести до діагонального вигляду. Якщо простір  $V_n$  дійсний, то для к. ф. виконується т. з. закон інерції: кількість додатних і кількість від'ємних коеф. у канонічному вигляді форми  $A(x, x)$  є її інваріантом (не залежить від вибору канонічного базису). Заг. число членів у канонічному вигляді форми  $A(x, x)$  дорівнює її рангові й наз. його індексом інерції.

Число додатних членів наз. додатним індексом, а число від'ємних членів — від'ємним індексом. Різниця між числами додатних і від'ємних членів наз. сигнатурою форми. Дві к. ф. еквівалентні над полем дійсних чисел тоді й лише тоді, якщо їхні ранги й сигнатури однакові. К. ф. наз. додатною, якщо її додатний індекс інерції дорівнює вимірності простору. Така к. ф. набуває в усіх точках простору (крім початку координат) додатних значень. Теорема інерції к. ф. переноситься на б. ф., що їх породили. В евклідовому просторі метод зведення к. ф.  $A(x, x)$  до канонічного вигляду шляхом ортогональних перетворень наз. віднесенням її до головних осей. Напрямам головних осей відповідають екстремальні значення форми, які для одиничних векторів збігаються з її канонічними коефіцієнтами і є власними значеннями симетричного оператора  $A$  з матрицею  $A = (\alpha_{ij})$ . Тому їх можна знайти з характеристичного (вікового) рівняння, що має вигляд:  $\det \{\lambda E - A\} = 0$ , де  $E$  — одинична матриця. Корені цього рівняння завжди дійсні. Б. ф. і к. ф. використовують у теорії програвування лінійного.

Лит.: Матвеев А. М. Основы линейной алгебры. М., 1970; Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., 1966; Шилов Г. Е. Математический анализ. Ковчешмерные линейные пространства. М., 1969.

В. П. Белоусова.

**БІОІМІТАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ** — те саме, що й *Бернулі розподіл*.

**БІОЕЛЕКТРИЧНЕ КЕРУВАННЯ** — керування, при якому як команди або сигнали зворотного зв'язку використовуються сигнали біоелектричної активності. Жива тканина, реагуючи на електр. подразнення, може провільнити й керувати струм. Коли збудження в нерва переходить на м'яз, у м'язі відбувається процес збудження і виникають біоелектр. потенціали, а потім уже розвивається й помірніший процес — скорочення м'яз. Осцилограми потенціалів м'язів, які перебувають у стані збудження, наз. електроміограмми (ЕМГ). Осн. параметрами ЕМГ при зніманні їх поверхневими електродами є амплітуда й частота зміни потенціалів. Найбільшого поширення набув метод Б. к., в основі якого лежить використання біоелектр. активності м'язів. Дослідження показали, що для більшості скелетних м'язів існують залежності між потужністю біосигналу напруженої та швидкістю скорочення чи подовження м'язів. Ці залежності використовують, проектуючи біотех. системи керування, призначені для моделювання рухових реакцій.

Б. к. руховими функціями розвивається в двох напрямках. керування тех. пристроями (напр., протезами) з використанням зовн. джерел енергії (б.опротезування, і програмне багатоканальне Б. к. м'язовою діяльністю за допомогою командних сигналів, в основі яких лежить використання енерг. властивостей біопотенціалів м'язів).

Біокеровані протези руки, які вперше створено в СРСР, набули визнання й поширення. Здійснюється розробка багатофункціональних біокерованих протезів кінцівок. В електричній схемі створеного біокерованого протеза руки біопотенціали, що знімаються з м'язів поверхневими електродами, підсилюються в підсилювачі біопотенціалів, детектуються й згладжуються в інтеграторі. Напруга на виході цього блока пропорційна миттєвому значенню потужності біоструму. З інтегратора напруга надходить до перетворювача, в якому безперервні сигнали перетворюються на частотно-імпульсні. Через підсилювач потужності імпульси надходять на вхід мех. пристрою. Щоб керувати рухом, використовують біоструми, які відводяться з двох м'язів-антагоністів, і, відповідно, два канали підсилювання й перетворення інформації. На основі фізіол. досліджень у лабораторії космічних досліджень (США) розроблено керування шийним зчлененням т. з. «міографічного образу». Керуюча функція при цьому визначається миттєвим станом біоелектр. активності групи керуючих м'язів, що беруть участь у природному русі, за допомогою логічного пристрою. Участь відповідних м'язів при русі руки «вгору — вниз» «до себе — від себе» кодується двійковим кодом.

Велику роль у створенні біокерованих протезів відіграють системи зі зворотним

зв'язком. Для розробки їх використовують датчики різних типів: вібраційні, тензометричні, електрохем. тощо. Для Б. к. м'язовою діяльністю за допомогою перетворювального тех. пристрою за принципом «м'яз — пристрій — м'яз» або «людина — машина — людина» використовують енерг. властивості біопотенціалів м'язів.

Вивчення характеру біоелектр. активності м'язів методом ЕМГ дає змогу порівнювати фізіол. можливості виконання активних рухових актів у різних ситуаціях. Результати досліджень дають змогу приступити до створення складних систем Б. к. активними рухами кінцівок і тіла людини. До систем такого типу можна віднести пристрій, який реалізує метод програмного багатоканального Б. к. — «Міотон», створений в Ін-ті кібернетики АН УРСР. У «Міотоні» є кілька каналів, і це дає змогу реєструвати й керувати активністю груп м'язів, які беруть участь у складному русі. При керуванні використовуються закономірності зміни ступеня біоелектр. нервово-м'язової активності в процесі виконання деяких рухів. В основу покладено дані математичної статистики; вони показують, що середнє значення ЕМГ відповідає сумі частот елементарних електр. імпульсів, які виникають у нервово-м'язовій системі, а отже, — ступені збудження (блок-схему одного з каналів пристрою «Міотон» див. на Із. між. с. 440—441). Принцип роботи цього пристрою полягає в тому, що сигнал, знятий з м'язів, які беруть участь у певному руховому акті (алгоритм руху), підсилюється й використовується для вироблення сигналу, поданого на м'язи реципієнта. Реципієнт при відповідному доборі амплітуд збуджувальних сигналів повторює рух донора. Алгоритм руху, заздалегідь записаний у блоці «магічної пам'яті», може багато разів повторюватися для відтворення певних рухів. Кожний канал пристрою може працювати незалежно. Елемент зворотного зв'язку, введений у пристрій за принципом «біоелектролокація», дає змогу автоматично коригувати керуючий сигнал за допомогою зворотної імпульсації реципієнта. Нав'язування хворим рухів, близьких до природних, сприяє розвитку структурно-інформаційних перебудов у нервовій системі й дає змогу ширше використовувати її компенсаторні механізми під час лікування деяких рухових розладів. «Міотон» з успіхом застосовують, лікуючи хворих з порушеннями рухових ф-цій. Подібні дослідження проводять і за кордоном: у Югославії, Канаді, США та Польщі. В США, напр., створено апарат кисті, в якому для розкриття використовується стимулювання паретичного м'яза. Керуючим є трепетивий м'яз. Розширюються дослідження щодо створення засобів Б. к. серцевим ритмом, диханням та роботою штучних органів і систем на основі підтримання гомеостатичної сталості рівнів неперервних показників внутр. середовища організму. Вдосконалення методів Б. к. дасть змогу найбільш

чим часом розширити застосування їх не лише в галузі медицини, а й у галузі техніки. Див.: Кобряксий А. Е. [та ін.]. Биоматричная система управления. Доклады АН СССР, 1957, т. 117, № 1. А т е с а Л. С., Б у н и н а И. Ч. Г. Многоканальный метод воздействия при управлении нелинейными двуглазными функциями. В кн. Моделирование в биологической медицине. М. 1963, Алеев Л. С. Топоэлектрическая модель и рывок. Функции. Доклады. Вспышки. М. 1959, № 4. Bottomley A. H. Myoelectric control of powered prosthesis. The Journal of bone and joint surgery, 1965, v. 47B, № 3.

Л. С. Алеев

**БІОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ** — математичний апарат, застосований для вивчення біологічних об'єктів. Внаслідок різноманітності біологічних систем, різноманітності властивостей, умовданих фіз. та хім. процесами в живому й складності взаємодії з середовищем, у біологічних дослідженнях набувають застосування багато методів класичної та сучас. математики. Матем. методи використовують, насамперед, для обробки результатів експериментального вивчення біосистем. Методи математичної статистики спрямовані на виділення з досліджуваного процесу детермінованої та ймовірнісної складових, на вивчення вірогідності результатів спостереження. Обчислювання математичного сподівання дає змогу виявити середнє значення реакції біосистем. За цими значеннями, в т. ч. змінними в часі, за допомогою побудови адекватного матем. описування вказують детерміновану складову реакції.

Обчислення дисперсії та визначення довірчих інтервалів дають змогу оцінити можливі відхилення досліджуваного процесу від середнього значення й об'єктивно судити про ступінь стабільності системи. Чим більшу кількість даних одного дослідження піддають обробці, тим точніші результати дає статистичний аналіз. Визначаючи взаємозв'язок у часі між попереднім й наступним значеннями одного показника роботи біосистем, використовують обчислення коеф. автокореляції або автокореляційної ф-ції, а коли виявляють взаємозв'язок двох чи більшого числа показників — використовують обчислення коеф. взаємної кореляції, або кроскореляційної функції (див. Кореляційна теорія випадкових процесів). Досить поширеним методом аналізу даних біологічних експериментів є побудова гістограм розподілу експериментальних величин. Гістограми можна використовувати для апроксимації експериментальних даних придатним законом розподілу (див. Ймовірностей теорія) й розрахунку рівня організації біосистем (див. Біологічних систем організація). Параметри закону розподілу часто можуть правити за показники стану чи роботи біосистем. Розрахунок рівня організації біосистем може бути основою для вибору адекватної матем. моделі (див. Біологічних систем математичне моделювання).

Обробка експериментальних даних є основою дальшого вивчення біосистем. Аналіз закономірного взаємозв'язку різних показників у динаміці й матем. дослідження можна

проводити на основі застосування методів теорії дифер. рівнянь автоматичного керування теорії й варіаційних принципів механіки. При великій кількості показників роботи біосистем й при вивченні в основному логіч. співвідношень можна застосувати теорію абстрактних автоматів та логіку математичну. Аналіз структурних та функціональних особливостей біосистем можна здійснити за допомогою графік теорії й методів інформації теорії.

Дослідження ймовірнісних властивостей біосистем являє собою дуже складну задачу кібернетики біологічної. Пізнання складних актів назчання, пристосування та розвитку біосистем гальмують труднощі експериментального вивчення їх. Тепер розробляють матем. методи спеціально для цієї мети (див. Системні загальні теорії). Крім того, щоб описати ймовірнісні властивості біосистем, використовують випадковий процесів теорію, автоматів теорію, теорію стохастичних диф. рівнянь, теорію розпізнавання образів та теорію інформації.

Ю. Г. Антомонов

**БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ** — основний метод відображення роботи біологічних систем за допомогою адекватного математичного апарату. Визначення матем. апарату, що адекватно відображує роботу біологічних систем, є складним завданням, яке пов'язане з їхньою класифікацією. Біосистеми можна класифікувати за складністю (логарифмом числа станів), користуючись, напр., шкалою, за якою до простих систем належать системи, що мають до тисячі станів, до складних — від тисячі до мільйона і до дуже складних — понад мільйон станів. Іншою важливою характеристикою біосистем є закономірність, яка виражається законом розподілу ймовірностей станів. За цим законом можна визначити невизначеність її роботи за К. Шенноном і оцінку відносної організації. Отже, біосистеми можна класифікувати за складністю (за макс. різноманітністю, або максимально можливою невизначеністю) і відносною організацією, тобто за мірою організованості (див. Біологічних систем організація). На мал. наведено класифікаційну діаграму, на одній з осей якої відкладено максимально можливу невизначеність —  $H_{\max}$ , що характеризує число станів системи й визначається логарифмом числа станів, на 2-й осі — рівень відносної організації —  $A$ , що характеризує детермінованість системи. На діаграмі подано назви відповідних смуг та, що, наприклад, ділянка під цифрою 8 означає «дуже складні ймовірнісно-детерміновані біосистеми». Досвід випитання біосистем показує, що коли  $A$ , обчислене за гістограмою розподілу відхилень показника (або системи показників) залежно від його математичного сподівання, лежить у межах від 1,0 до 0,3, то це детермінована біосистема. До таких систем належать системи керування внутрішніми органами, в основному системи гормонального (гуморального) керування. Еле-



мент нервової системи — нейрон, органи внутрішньої сфери та системи обміну речовин також можна віднести до детермінованих біосистем. Матем. моделі таких систем будують на основі фіз.-хім. співвідношень між елементами або органами системи. Моделюють у цьому випадку динаміку змін вхідних, проміжних і вихідних показників. Саме такими, наприклад, є біофіз. моделі нервової клітини, серцево-судинної системи, системи керування вмістом цукру в крові й ін. Матем. апаратом, що адекватно описує поведінку таких детермінованих біосистем, є теорія дифер. та інтегр. рівнянь. На основі матем. моделей біосистем можна, використовуючи методи теорії автомат. керування (див. Автоматичного керування теорія), успішно розв'язувати завдання дифер. діагностики й оптимізації лікування. Найповніше розвинутою в галузь моделювання детермінованих біосистем.

Якщо організованість біосистеми щодо показника, що вивчається (або системи показників), лежить у межах  $0,3 \rightarrow 0,1$ , то такі біосистеми є ймовірнісно-детермінованими. До них належать системи керування внутрішніми органами з явно вираженою компонентою нервової регуляції (наприклад, система керування частотою пульсу) та системи гормональної регуляції у випадку розладу нормальної роботи. Адекватним матем. апаратом може бути подання динаміки змін показників у вигляді диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що підлягають певним законам розподілу. Моделювання таких біосистем розвинуто порівняно слабо, хоч і становить значний інтерес для кібернетики медичної.

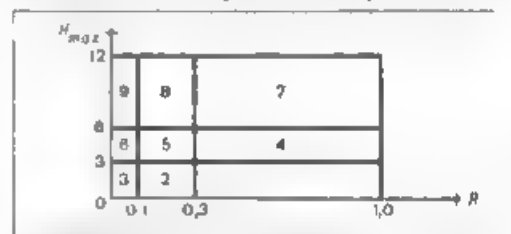
Ймовірнісні біосистеми характеризуються значенням організованості  $R$ , що лежить у межах від  $0,1$  до  $0$ . До них належать системи, що визначають взаємодію аналізаторів і поведінкові реакції, а тому числі й процеси навчання при простих умово-рефлекторних актах і складних взаємозв'язках між сигналами навколишнього середовища й реакціями організму. Адекватним матем. апаратом для моделювання таких біосистем є теорія детермінованих і випадкових автоматів з детермінованими й випадковими середовищами, випадкових процесів теорія та програмування евристична. Моделі простих ймовірнісних систем успішно розробляються.

Моделювання біосистем охоплює попередню статистичну обробку експериментальних результатів (див. Біологічних досліджень математичні методи), вивчення складності й організованості біосистем, вибирання адекватної матем. моделі й визначення числових значень параметрів матем. моделі за експериментальними даними (див. Кібернетика біологічна). Останнє завдання в загальному випадку є дуже складним. Для детермінованих біосистем, моделі яких можна описати лінійними диференціальними рівняннями, найкращі параметри моделі (коэф. дифер. рівняння) можна визначити методом спуску

(див. Градієнтний метод) у просторі параметрів моделі за інтегралом від квадрата похибки. У цьому випадку слід застосовувати процедуру спуску за параметрами,  $a_1, a_2, \dots$

$a_n$ , щоб мінімізувати функціонал  $I = \frac{1}{T} \times \int_0^T \{y^*(a_1, \dots, a_n) - y\}^2 dt$ , де  $T$  — період,

характерний час для показника  $y$ ,  $y$  — експериментальна крива змін показника біосистеми, а  $y^*$  — розв'язок матем. моделі. Якщо необхідно одержати найкраще (в розумінні інтеграла від квадрата похибки) наближення



Класифікаційна діаграма біосистем  
 1, 2, 3 —  $0 < N_{\max} < 3$  — прості системи,  
 4, 5, 6 —  $3 < N_{\max} < 6$  — складні системи,  
 7, 8, 9 —  $6 < N_{\max} < 12$  — дуже складні системи,  
 1, 2, 3 —  $0,1 < R < 0,3$  — ймовірнісні системи,  
 4, 5, 6 —  $0,3 < R < 0,5$  — ймовірнісно-детерміновані системи,  
 7, 8, 9 —  $0,5 < R < 1$  — детерміновані системи.

матем. моделі до роботи біосистеми за кількома показниками  $y_1, y_2, \dots, y_m$  за різними внутрішніми станами біосистеми або для різних характерних зовнішніх впливів, то можна, застосовуючи методи спуску в просторі параметрів моделі, мінімізувати суму частинних

функціоналів  $I = \sum_{i=1}^m I_i(a_1, \dots, a_n)$ . При ви-

користанні такої процедури вибору параметрів матем. моделі можна збільшити ймовірність одержання єдиного набору коефіцієнтів моделі, що відповідають прийнятій структурі. Метод матем. моделювання дає змогу одержувати не лише кількісні характеристики роботи біосистем, їхніх елементів і взаємозв'язку цих елементів, а й виявляти критерії роботи біосистем, установлювати певні загальні принципи їхнього функціонування.

Літ. Моделирование в биологии и медицине, в 3-х т. М., 1965. 68, Глушкова В. М. Введение в кибернетику К., 1964 [бібліогр. с. 319-322]; Вуш Р., Мостеллер Г. Стохастические модели обучения Пер. с англ. М., 1962. Ю. Г. Акимонов  
**БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ ОРГАНІЗАЦІЯ** — специфічна для живих систем структурно-функціональна упорядкованість. Рівень Б. с. о. дощо складніший за рівень природних систем неорганічної природи й штучних систем, які створює людина. Це зумовлене тривалою еволюцією біосистем. Формальне визначення Б. с. о. пов'язане з працями К.-Е. Шеннона, У.-Р. Ешбі, В. М. Глушкова, Г. Ферстера. У.-Р. Ешбі використав як міру складності системи її

різноманітність, або число її станів —  $n$ . Для оцінки складності системи користуються логарифмічною мірою, означаючи  $H_{\max} = -\log n$ , де  $H_{\max}$  — міра складності, або макс. невизначеність, системи.

Істотною стороною організації системи вважають, обчислюючи міру невизначеності її станів. Нехай система може набувати будь-якого  $i$ -го стану з ймовірністю  $p_i$  станів з ймовірністю  $p_i$ . Тоді міру невизначеності станів системи  $H$  визначають за формулою Шеннона:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i.$$

Оцінка рівня організації системи пов'язана в максимальною й поточною невизначеністю системи відповідно  $H_{\max}$  і  $H$ . Нехай у результаті еволюції, фізико-хімічного онтогенезу в системі, яка працювала раніше з макс. невизначеністю  $H_{\max}$  (цілком дезорганізована система), почали переважати певні стани, і вона набула поточної невизначеності  $H$ . Тоді організація системи для цього рівня розвитку визначається реалізованою в системі невизначеністю

$$O = H_{\max} - H, \quad (1)$$

де  $O$  — абс. організації системи. Значення абс. організації системи обмежене знизу нулем, а згори — величиною максимально можливою для даної системи невизначеності. Отже, організація детермінованої системи ( $H = 0$ ) також характеризується макс. невизначеністю, тобто будується за максимально можливому числі станів. Тільки тоді, коли система детермінована, зміна станів буде закономірною. Для організаційно замкненої системи рівність (1) означає закон збереження організації: організація і невизначеність на будь-якому етапі еволюції (життя, значання та ін.) дорівнюють максимально можливій невизначеності системи. Від співвідношення (1) легко перейти до формули обчислення відносної організації системи —  $R$ , поділивши обидві частини рівності на  $H_{\max}$ . Отже,

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}}. \quad (2)$$

Поточне значення невизначеності пов'язане з екстремією живих систем. Будь-яка біосистема характеризується структурною і функціональною організацією. Основною структурною організацією біосистем є розміри елементів системи, число елементів і число зв'язків між ними. Так, наприклад, розміри клітин нервового вузла є параметрами структурної організації, і користуючись *гістограмою* розподілу клітин цього вузла, можна за діаметром клітин визначити ступінь організації за формулами (1) і (2). Параметрами функціональної організації відділів нервової системи можуть бути міжспайковий інтервал спонтанної й спричиненої активності. За гістограмами міжспайкових інтервалів можна розрахувати величину абсолютної (1) й віднос-

ної (2) організації нервової клітини як елемента нервової системи. Осн. функція — генерація спайку (нервового імпульсу) забезпечується структурою самої клітини Аксоном, дендритами й синапсами (див. *Нейрон*). Клітини об'єднуються в сітку. Осн. функція сітки — переробляти інформацію, вона виявляється в зміні ритмічної активності: вихідних нейронів і ґрунтується на структурній організації сітки — числі елементів сітки, їхніх розмірах і числі зв'язків між елементами.

Складній біосистемі, напр. організмові, властива така структурно-функціональна побудова: елемент  $i$ -го рівня з ф-цією  $\varphi_i$ , система елементів  $i$ -го рівня зі зв'язками, що утворює структуру  $(i+1)$ -го рівня  $\varphi_{i+1}$ , на якій будується функція  $\varphi_{i+1}$ . У свою чергу, структура  $\varphi_{i+1}$  є елементом складнішої системи  $(i+2)$ -го рівня і т. д. Так, мікро-структурні елементи клітин — молекули та іони забезпечують генерацію спайку нервовою клітиною; здатність клітини генерувати імпульси використовується елементами сіткою, напр., для виділення найхарактерніших ознак предмета, що потрапив у поле зору; здатність елементарних сіток виділяти ознаки використовується в складнішій сітці для розв'язування задач класифікації, пізнання тощо. Структурно-функціональне ускладнення біосистем на різних рівнях ісправляє організму дав можливість розв'язувати дедалі складніші задачі. За формулами (1) і (2) можна обчислювати  $B$ ,  $O$ ,  $R$  і порівнювати їх.

Для структурованих біосистем, тобто для тих біосистем, які за числом елементів і зв'язків між ними є детермінованими, рівень організації можна розраховувати за вивисленими ентропійними оцінками.

На кожну біосистему впливає навколишнє середовище, формуючи її структуру й ф-ції. Біосистема, в свою чергу, активно впливає на зовн. середовище. Така взаємодія біосистем і дедалі складнішого середовища й забезпечує безперервну еволюцію біосистем. «Тільки різноманітність може знищити різноманітність» говорить У.-Р. Ешбі, підкреслюючи одну із сторін цієї взаємодії. Тільки організація може протистояти організації — можна додати в повний список. Основним принципом функціонування біосистем є середовище і динамічний принцип адекватності макс. різноманітності і організації біосистем на кожному рівні ієрархії й на кожному ступені еволюції адекватні макс. різноманітності й організації свого середовища. При цьому  $H_{\max}(t) \rightarrow H_{\max}(t+1)$  і  $R_s(t) \rightarrow R_e(t)$ , де  $s$  — індекс системи,  $e$  — індекс середовища,  $t$  — час. Розрізняють три ступені адекватності: а) слабкий ймовірнісний коли важливою є рівність макс. невизначеності й організованості системи та середовища незалежно від виду розподілу ймовірностей при йнятті станів середовищем і системою; б) жорсткий ймовірнісний, коли рівність різноманіт-

ності та організованості досягається внаслідок рівності законів розподілу, тобто  $P_{ij}(t) \rightarrow P_{ij}(t)$ ; в) детерміновану взаємодію, коли кожній ставовій середовища з якоїсь множини відповідає стан системи. Вивчення ступеня Б. с. о. в осп. завданням кібернетики біологічної, це необхідно для визначення підходящого матем. апарату при матем. моделюванні біологічних систем (див. *Біологічні системи математичного моделювання*).  
Літ.: Глушков В. М. Введення в киберетику К., 1964 (бібліогр. с. 319-322); Антонов Ю. Г. Системи. Складність. Динаміка К., 1989 (бібліогр. с. 135-128); Эшби У. Р. Введение в киберетику Пер. с англ. М., 1959 (бібліогр. с. 39); Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике Пер. с англ. М., 1963 (бібліогр. с. 783); Ферстер Г. О самоорганизующихся системах Пер. с англ. М., 1964.

Ю. Г. Алямов.

**БІОЛОГІЧНІ СИСТЕМИ** — клас складних систем, яким властивий ряд специфічних особливостей, що характеризують життя: здатність рости і розмножуватися, реагувати на зовнішні дії і змінюватися. Життя в Б. с. забезпечується обміном речовин, комплексом фіз.-хім. процесів і хіміч. реакцій синтезу й розкладу, які мають складний циклічний характер і ферментативну природу. Б. с. в підкріплених системах, які одержують зовні речовина та енергію і створюють з них складні структури, ентропія яких нижча за ентропію навколишнього світу. Б. с. можуть існувати лише завдяки розв'язку спец. підсистем керування, які регулюють ферментативні реакції обміну речовин і всю життєдіяльність організмів. Вони мають здатність сприймати і переробляти інформацію та виробляти керуючі (ефекторні) характеристики сигнали.

Для описування Б. с. потрібні такі поняття. Елемент системи — найменша структурна одиниця, якій ще властиві риси, які виражають гол. якість системи. Напр., для складного організму таким елементом є клітина, бо їй притаманні найважливіші якості життя. Для популяції таким елементом є особина з її якостями, які характеризують її поведінку. Елемент Б. с. має складну структуру й функції.

Складність структури системи визначається кількістю й різноманітністю елементів і підсистем, які умовно можна поділити на робочі та керуючі. Ступінь складності систем визначається здебільшого розвитком окремих елементів і підсистем, а також самої системи, сформованої в ієрархічній «поверхні».

Зв'язки — це енерг. і речовинні взаємодії систем та елементів. Фіз. зв'язки характеризуються безпосереднім видом і значимістю передаваної енергії й речовини в балансі енергії елемента чи системи-адресата. В інформаційних зв'язках енергії використовуються лише як носії сигналів, який керує діяльністю елемента чи системи. Для фіз. зв'язку важливими є вид і напруга передаваної енергії, а для інформаційної — код, тобто тип сигналів, напр., молекула РНК, нер-

вовий імпульс, слово чи річ. Зв'язки поділяють на зовнішні та внутрішні.

Складність діяльності Б. с. визначається числом умовно виділених її функцій (програм) і складністю цих функцій, яка виражається кількістю функціональних актів чи циклів, кількістю елементів і підсистем, які беруть у них участь, і їхньою тривалістю в часі. Складність функцій характеризується кількістю переробленої всередині системи інформації, тобто кількістю сигналів і складністю моделей.

Складні взаємовідношення, в яких перебувають Б. с., мають ієрархічний характер. Ступінь незалежності однієї системи від іншої, більшої системи приблизно визначається її життєздатністю, коли від неї відключити енерг. та інформаційні дії з боку інших, подібних систем. З поняттям складних відношень пов'язаний ступінь упорядкованості системи чи ступінь несуперечності діяльності її підсистем і елементів, тобто те, якою мірою окремі фіз. чи зав'язки, не протидіють одна одній. Збільшення ступеня впорядкованості підвищує стійкість системи, але знижує її здатність еволюціонувати.

Загальнішим і ширшим поняттям є рівень організації, під яким розуміють тип структурних і функціональних відношень, які визначають, арештують, життєздатність системи та її здатність до організації зовн. середовища. Організація і впорядкованість системи це є протилежними поняттями, бо за високого рівня організації система може значно змінюватися, а відносна гармонія між її частинами при цьому зберігається. Це можливе завдяки розв'язку моделюваної здатності в сфері керування («рівень свідомості»), які дають змогу передбачити в моделях динаміку змін середовища й самої системи, щоб відшукати найкращі варіанти її поведінки.

Еволюція, тобто ускладнювання системи й найкраще пристосування до середовища, відбувається по-різному: на різних мінливості елементів (напр., мутації) чи впливом цілеспрямованої зміни організації в сфері керування (напр., виховання людини чи адосконалювання суспільства).

Класифікація Б. с. має умовний характер, бо немає єдиного критерію для поділу і зв'язки існують проміжні форми. Прийнята в зоології й ботаніці система класифікації не придатна для розгляду Б. с. в інформаційному плані. Набагато доцільніше поділяти Б. с. на п'ять ієрархічних рівнів складності: одноклітинні організми, багатоклітинні організми, популяції, біогеоценоз і біосфера.

Одноклітинні організми — це величезна кількість видів мікроорганізмів (мікроплазми, віруси, бактерії, найпростіші). Розмір їх — від 0,1 до 100 мкм. Підсистеми — органіди клітини — можна поділити на робочі й керуючі. Клітина має складну будову, в якій напівтвердий кістяк (оболонка, перетинки й канали) поєднується зі вмонтованими в нього оргаїдами. Функції

клітини — обмін речовин, ріст і розмноження, реакції на зовн. подразники у вигляді зміни обміну й форми руху — в заг. вигляді характерні для всього живого. Усі роботи й керуючі ф-ції клітини підтримуються внаслідок хім. процесів ферментативної природи, починаючи від одержання енергії й аж до синтезу нових структур чи розщеплення існуючих.

Механізм керування клітиною — це послідовність дискретних процесів синтезу молекул білків — ферментів, необхідних для здійснення тієї чи іншої функції, й неперервних процесів зміни їхньої активності під час виконання регульованих реакцій. ДНК становить модель клітини — її структуру й функцій. У ній, як і в пам'яті машини, записано певні дані задачі й програму її розв'язування. В ДНК спец. триплетним кодом записано структуру всіх необхідних білків. Це займає, очевидно, приблизно третину її «пам'яті». Решта «пам'яті» занята «програмою зчитування», представленою «генами регуляторним», які відповідають за синтез спец. речовин-репресорів. Речовини-репресори викликають синтез потрібного ферменту лише тоді, коли від робочих підсистем надійде сигнал про готовність. Цей сигнал надходить у вигляді іншої активної речовини-регулятора. Так здійснюється виконання етапів циклічних ф-цій (напр., ріст і поділ) під контролем *зворотних зв'язків*. Синтез білків-ферментів відбувається за допомогою програмою з регульованими ланками: ДНК (ядро) — РНК (рибосоми) — білки — переміщення їх до місця дії.

Підсилювання чи гальмування активності вже синтезованих ферментів здійснюють поточкові й кінцеві продукти відповідних хім. реакцій. У цьому полягає другий механізм регулювання. Отже, й у цьому разі діють зворотні зв'язки. Тобто регулювання клітини можна уявити собі як складну сітку, яка складається з робочих і регулюючих дискретних і неперервних хім. реакцій. Перебіг їх характеризують просторові координати (фіксування на «стіжку» клітини) й концентраційно-часові характеристики, які забезпечують циклічні ф-ції (виділення) і неперервні процеси обміну.

Рівень організації одноклітинних порівняно з рештою Б. є невисокий, хоч за кількістю перероблюваної керуючої інформації його не можна порівняти з жодною тх системою. Нові пристосовані (адаптивні) програми тут не виробляються протягом життєвого циклу, а створюються лише внаслідок мутацій. Ступінь упорядкованості, очевидно, високий, бо «периферія» — органіди — має обмежену самостійність у межах регулювання діяння ферментів, а структуру жорстко задано моделлю в ДНК. А отім, зміни в окремих генах ДНК — мутації, які спричиняють великі відхилення у функціонуванні одного органіда, — переносяться іншими генами завдяки місцевому пристосуванню, тобто є можливість для еволюції виду. Цьому сприяє

швидкість розмноження шляхом поділу, яка дає змогу нагромаджувати окремі незначні зміни в структурі й функції. Внаслідок цього виникають нові функції.

Багатоклітинні організми проробили великий шлях еволюції від глибоко до людини. Вони досить різноманітні за величиною й складністю. Особливостями структури є диференціація клітин (м'язових, епітеліальних, сполучнотканинних і статевих), яка виявляється в посиленні й ускладненні якоїсь однієї функції клітини внаслідок ослаблення чи навіть зникнення інших функцій. Напр., скоротлива ф-ція в м'язовій клітині посилюється внаслідок зникнення ф-ції травлення. Диференціація клітин, об'єднані в органи й системи (робочі й керуючі), забезпечують відповідні ф-ції всього організму. До робочих систем належать: травна, видільна, дихальна, серцево-судинна, рухова й ретикуло-ендотеліальна. Керуючими системами є ендокринна й нервова. Отже, в багатоклітинному організмі можна виділити три ієрархічні рівні структурної складності: клітинний, організмний і системний. У межах кожного рівня є свої підсистеми, які теж становлять ієрархію.

Інформаційні зв'язки в організмі відбуваються через центр. нервову систему — кодом нервових імпульсів і через кров — кодом гормонів. Енергія й речовина передаються кров'ю й за допомогою скорочення м'язів внутр. органів.

Функції багатоклітинного організму описують поняттями рефлексу та інстинкту. Інстинкт об'єднує ієрархію й поєднування рефлексів у часі, спрямованих на збереження виду. Це своєрідна програма, яка складається з багатьох підпрограм. Можна виділити два інстинкти — продовження роду (складається він із статевого та батьківського) і самозбереження — з харчового й захисного. У програмі інстинкту можна виділити дві сторони: зовнішню діяльність — поведінку, що виявляється у тварин і людини в складному коді рухових актів, якими керує анімальна нервова система, а здійснюють їх м'язи, і внутрішню діяльність, що виявляється в нервовому *гомеостазі*, в поєднанні функцій внутр. органів, якими керують ендокринна й вегетативна нервова системи і які призначені забезпечувати виконання рухових актів (див. *Регулюючі системи організму*).

Програми керування й регулювання в заг. вигляді записані в ДНК, а докладно — в структурі нервової та ендокринної систем, які формуються в процесі росту, як взаємодією спадкової інформації (ДНК) а зовн. впливами. Взаємодіювання між внутр. і зовн. частинами програми (між поведінкою й гомеостазом) таке: провідною є, очевидно, програма життєвого циклу (ріст, дозрівання й розмноження), закладена в ендокринній системі. Стимули від неї йдуть в анімальну нервову систему, настроюючи й активізуючи відповідні складні умовні й без-

умовні рефлекси поведінки — добування їжі, пошуки самки, зирпшування малат. Самі рефлекси здійснюються залежно від подразників, одержуваних зовні. Регулювання гомеостазису «відстроюється» під рухові акти поведінки й водночас є для них зворотним зв'язком, бо енергетично обмежує їх. Отже, існує схема з чотирма взаємопов'язаними ланками й зворотним зв'язками.

В інформаційному плані індивідуальний розвиток організму можна уявити собі так: у ДНК закладено моделі всіх спеціалізованих клітин з їхньою тонкою структурою і функціями. ДНК містить і програми зчитування специфічної інформації для клітин, тобто, власне, програму росту і дозрівання всього організму і всіх його частин. Ця програма складається з етапів, представлених окремими частинами ДНК, в яких періоди дозрівання і прогресуючої спеціалізації клітин чергуються в розмноженнях. У ДНК закладено й регуляторні етапи, які включаються в периферії фактори — ініціатори, що впливають із сукупності клітин, які розмножуються. Індивідуальний розвиток організму на ранній стадії зростає, повторює історію еволюції видів, але з пропусками й зі зміщенням в часі. Ріст і дозрівання організму відбувається наслідком генетичної програми, закладеної в ДНК, із впливом зовнішнього середовища й відповідей на нього ростучого організму. Т. ч., середовище впливає на формування ростучого організму, хоч і обмежено. Рівень організації багатоклітинних організмів неоднаковий у різних видів. Чим складніший організм, тим вища організація і зорядкованість.

Старіння й умирання також необхідні для еволюції. Поки що немає єдиної думки про механізм старіння. Припускають, що планомірне послаблення деяких функцій запрограмоване в генах так само, як і ріст, і розвиток. Але справжній процес старіння, очевидно, є поєднанням програми старіння й нагромадження завад у вигляді помилки у генетичному апараті клітин та баластних хім. речовин всередині клітин і між ними. Завади порушують процеси регулювання, зменшують здатність протистояти хворобам.

Біологічний вид не слід розглядати як систему, бо він не має чітких меж у часі й просторі й виявляється в інших системах — популяціях. А втім, можна говорити про закони формування й зміни видів, що їх вивчають у генетиці. Основою генетики є вчення про мутації й рекомбінації як джерела нової генетичної інформації. При цьому треба враховувати, що в процесі реалізації мутантної моделі ДНК в організмі всі значущі зміни в генах роблять організм нежиттєздатним, бо вони порушують координацію між його частинами. Проте помірні зміни в моделі можливі наслідком значної гнучкості генетичної програми формування, яка допускає розвиток організму за рахунок напруження пристосувальних механізмів. Так виникає

генотип з рядом нових ознак — мутант. Щоправда, такі індивіди найчастіше неплідні або зі зменшеною плодючістю, а це приводить до швидкого витіснення їх з популяції пліднішими «нормальними» конкурентами. Тому нові види можуть виникати лише тоді, коли сприятливі мутації й рекомбінації поєднуються зі зміною зовн. умов. Відбувається природний добір.

Якщо популяція з новими цінними спадковими даними вже сформувалася, то й надалі вона поширюється й «доробляється» шляхом наступних мутацій і рекомбінацій, які підсилюють нову цінну ознаку і зменшують те внутр. напруження пристосування, за рахунок якого відбувалося формування організму за зміненою генетичною моделлю ДНК.

Популяцією наз. сукупність особин одного виду, об'єднаних місцем і часом проживання, завдяки чому вони можуть спілкуватися. Основу популяції становить число й частота генотипів, тобто варіантів наборів генів (реценсаних чи домінуючих), закладених у ДНК всієї сукупності особин. Це визначає можливості популяції в боротьбі за існування й перспективи її еволюції.

Елементом популяції є особина (фенотип) — тварина чи рослина з її ознаками — структурними й функціональними особливостями. Підсистемами популяції є сім'ї та зграї. Структура популяції може мати неоднакову рухомість і обмежену складність, що визначається різноманітністю й характером зв'язків, які великою мірою залежать від розвитку кори головного мозку. Зв'язки всередині системи бувають фізичні (безпосередні фізичні дії між особинами однієї популяції за допомогою рухів) та інформаційні (обмін сигналами — звуками, запахами й т. ін.), які відображають пряме діяння. Ступінь складності й багатоступінь сигналів залежать від розвитку кори головного мозку. Важко виділити програми, що стосуються власне популяції. Вона живе інстинктами особин як елементів системи. Тільки у вищих тварин з добре організованим мозком з'являються свої закони угруповання, які істотно впливають на життя індивідів.

Біогенетика — це система, що складається з популяції окремих біол. видів, об'єднаних спільністю географ. і клімат. умов. Елементами системи є особина, а підсистемами — сім'ї, зграї та популяції. Зв'язки бувають прямі — фізичні й інформаційні (сигнали) й непрямі — через неживу природу й навіть біол. види. Ступінь організації системи низький, підвищується він тільки з наслідком діяння на неї людських. Низькою є й упорядкованість цієї системи. Система існує при постійній міжвидовій і частково внутривидовій боротьбі. Біосфера — це сукупність усього живого на планеті.

Про Б. с. відомо поки що дуже небагато. Щоб збільшити ефективність управління Б. с., треба поглиблювати дослідження їх не лише традиційними методами, а й вивчаючи кількісні моделі, що їх створює кібернетика біологічна.

М. М. Амосов.

**БІОМЕДИЧНА ЕЛЕКТРОНІКА** — *дис. Медична електроніка.*

**БІОНІКА** (від грец. *біос* — життя) — науковий напрям, який вивчає принципи побудови й функціонування *біологічних систем* з метою створення нових машин, приладів, механізмів, будівельних конструкцій і техніко-логічних процесів, характеристики яких наближаються до характеристик живих систем. Використовують живу природу як джерело для нових тех. ідей. Б. досліджує аналогії між живими й штучними системами, зіставляє їхні найважливіші параметри, встановлює, з чому природа досконаліша й економічніша за сучас. техніку, і, спираючись на добуті висновки, шукає принципово нові шляхи оптим. розв'язування багатьох складних інженерних проблем.

У Б. звичайно виділяють три напрями експериментальну Б. (аналізання ідей і принципів живої природи, які можна показати в основу розв'язування тих або інших інженерних проблем); теоретичну Б. (розробку матем. моделей біосистем); технічну Б. (реалізація моделей математичних, створення нових тех. засобів і систем — приладів, апаратів і пристроїв, для яких основана на аналогії з біол. принципами і які перевершують за своїми характеристиками ті, які вже створено раніше).

За науковим змістом окремих напрямів Б. можна поділити на такі розділи: *нейробіоніку*, сприйняття й перетворення інформації в *аналізаторних системах*, біомеханіку, орієнтацію й навігацію та біоенергетику.

Нейробіоніка вивчає й реалізує в тех. пристроях принципи переробки інформації, виявлені в нервовій системі людини і тварин. Дослідження способів перетворення інформації в біол. системах почалося з вивчення нейронів і розробки їхніх різних матем. і тех. аналогів (див. *Модель нервової клітини*). Від побудови аналогів окремих нейронів перейшли до створення їхніх комплексів і вивчення їх моделюванням пучків нервів і сіток (див. *Нейронні сітки*). За допомогою штучних нейронів сіток досліджують різні сторони роботи головного мозку — пам'ять, виділення сигналів на фоні завад, логіч. операції, процес навчання тощо. Крім створення фіз. сіток з нейроподібних елементів, нервові сітки моделюють на ЕОМ. Моделювання нейронів і нервових сіток привело до побудови ряду пристроїв, які дають змогу розв'язувати деякі задачі, пов'язані з передаванням і обробкою інформації. Прикладом таких пристроїв є *нервотрони*. Роблять спроби за аналогією з живою природою впровадити штучні нейрони й цілі нейроподібні системи. Освоєння технології вироб. штучних нейронів у вигляді мікрокомпонент колоїдних розмірів ( $10^{-6}$ — $10^{-7}$  см) і молекулярних розмірів ( $10^{-7}$ — $10^{-8}$  см) дає б змогу різко збільшити надійність і швидкодію та зменшити вагу, габарити і споживану потужність електронних систем.

Вивчення сприйняття й перетворення інформації в аналізаторних системах окремих видів тварин дало змогу виявити багато раніше невідомих властивостей деяких органів чуттів і розробити на їхній зразок кілька оригінальних пристроїв. Так, на основі вивчення ока мечаховостя створено електронну модель, яка має здатність посилювати контрастність між крайми спостережуваного об'єкта й навколишнім фоном. Такий аналог ока дає б змогу поліпшити роботу телевізійних трактів деяких систем, таких, як системи одержування й аналізу знімків Місяця й інших планет, аерофотознімки земної поверхні з супутників тощо. Амер. фірма «Дженерал електрік» розробила біонічний пристрій «візілог», адатний виконувати деякі функції людського ока: сприймати зображення, проводити екімування й передавати інформацію. Гадають, що такі пристрої встать повсюди, на нсп. лотованих космічних кораблях. Вдалося побудувати досить вдалу електронну модель жаб'ячого ока. Вона адатна бачити контур зображення, враховуючи контрастність, відкидати інформацію про нерухомі предмети й вести спостереження тільки за рухомими об'єктами. Створення моделей ока й частини зорового аналізатора (див. *Модель зорового аналізатора*) по суті є першим кроком у виготовленні нового типу обладнання, призначеного для розв'язування складних задач виявлення, стеження й наводжування.

Дослідження органів слуху проводять у трохи менших масштабах, але теж інтенсивно. Вивчають конструктивні особливості звукових аналізаторів, механізми обробки акустичних сигналів і акустичні сервомеханізми. Розроблено електронну модель (у вигляді системи фільтрів), яка відтворює частотні характеристики людського вуха, й електронну модель слухового органа і забезпечує розрізнення слабких сигналів на фоні шумів завдяки кореляційному процесові (див. *Модель слухового аналізатора*). Співробітники Ленінградського ін-ту зв'язку ім. М. О. Бонч-Бруєвича побудували електронне вуха для оцінювання якості звучання музичних інструментів. Встановлено, напр., що слуховий аналізатор медузи адатний уловлювати інфразвукові коливання (частотою 8—13 Гц), які виникають у западинах штормових хвиль і поширюються зі швидкістю, більшою за швидкість наближення шторму. На основі принципу дії інфравуха медузи створено автомат, висник штормів (мал. 1). Він визначає напрям і силу шторму приблизно за 15 год. Побудовано кілька електронних пристроїв, адатних авалізувати запахи й визначати за ними сорти квітів, вин, тютюну, кави, бензину, медикаментів, харчових продуктів і парфюмерних товарів. Деякі прилади сприймають запахи при концентрації 0,00001% (мал. 2). Такі пристрої можна застосовувати як дегустатори різних продуктів, встановлювати в операційних, шахтах, на складах, у бензосховищах і на території фабрик і заводів.

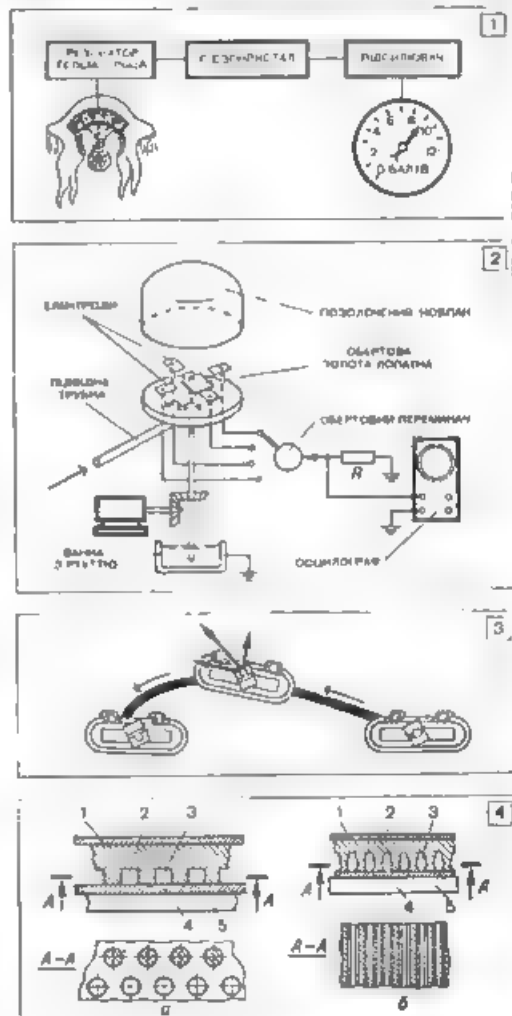
Біомеханіка вивчає структурні й функціональні особливості рук і ніг людини, механіку бігу, стрибків і повзання деяких тварин, форму тіла й локомоторний апарат риб, молюсків і ссавців та політ птахів і комах. Проведені дослідження дали багато цікавого. Так, аналіз способу пересування пінгвінів привів до створення оригінальної швидкохідної машини «Пінгвін», яка розвиває швидкість близько 30 км/год. Біг кенгуру підказав ідею створення стрибачої машини (мал. 3). Розроблено багато маніпуляторів, які тією або іншою мірою повторюють елементи конструкції людської руки. Значних успіхів досягла й гідробіоніка. Виготовлено дослідні зразки штучної «швидкохідної» дельфінної шкіри — «амніфлор» (мал. 4). Обшиті нею моделі торпеди й катера при тих самих потужностях силових установок рухаються на 15–20% швидше. Перспективними для майбутнього авіабудування є провіджувані біомімічні досліди польоту птахів і комах. Б. прагне розгадати феноменальну підйомну силу живого крила, намагається досягнути закономірності махального польоту, пізнати таємницю його великої економічності. Моделювання й вивчення ідеально відпрацьованого природою махального польоту може дати ключ до створення принципово нових, високосконалих літальних апаратів. Можливо, безшумний політ сови підкаже авіаконструкторам ефективні способи зменшення лобового опору, літальні механізми дельфи, бджоли, сарани, бабки та джмелі — засоби збільшення економічності, маневреності й відносної швидкості польоту сучас. повітряних лайнерів, а естаційний політ мух-дзюрчалки або зависання маленьких колібри в повітрі над квіткою — нові, відмінні від вертолітних, способи вертикального зльоту й посадки.

В останні роки склався ще один новий науковий напрям, у якому Б. співпрацює з архітектурою й буд. технікою — біоархітектура. Використовуючи як зразки моделі живої природи — стебла рослин, нерватуру живого листка й шкаралупу яйця, інженери створюють міцні й гарні архітектурні споруди: житлові будинки, мости, кіно-театри тощо.

Велику увагу приділяють біомімічним дослідженням органів стабілізації, локації, орієнтації й навігації у тварин. Дослідження в цій галузі привели до створення деяких оригінальних тех., напр. гіротрона — крилада, який пробують застосувати замість гіроскопа в швидкісних літаках і ракетах. Він працює за принципом джигжача комах; плоский, в якій воли коливаються, займає незмінне положення в просторі. Побудовано малогабаритний показник швидкості літака відносно землі, в конструкції якого використано деякі принципи будови й функціонування ока жука. Ретельно вивчають локаційні апарати кажанів, дельфінів та інших тварин і на основі цього створюють досконаліші радари, сонари, ультразвукові пристрої — «споводирі» для слуху.

Б. розв'язує широке коло завдань, пов'язаних з біоенергетикою живих організмів. Зокрема, великий інтерес становить вивчення й моделювання роботи м'язів, основаної на безпосередньому перетворенні хім. енергії на механічну (див. Штучний м'яз).

Другою важливою проблемою є розробка принципово нових економічних і дешевих біохім. джерел енергії. Розв'язуючи це завдання Б. йде в двох напрямках. Перший — одержання за допомогою бактерій горючих газів з органічних відходів. На цьому прин-



1. Блок-схема приладу для передбачення штурманів (штучне «вухо медузи»).

2. Схема «електронного носа».

3. Схема переміщення стрибачого автомобіля.

4. Схема випробуваних зразків штучної «швидкохідної» дельфінної шкіри «амніфлор»: а — тонка шкіра з окремими стовпчикоподібними опорами, б — тонка шкіра з суцільними ребристими опорами, в — гуконі, г — складені безплатні гумові оболонки, д — гумова діафрагма, е — в'язка деафлоруюча рідина, ж — стінка морської моделі.

ципі побудовано кілька невеликих експериментальних енерг. установок. Другий напрям пов'язаний із створенням електр. елементів, електроди яких містяться в посудині, яка має бактерії й запас корисн. Паралельно зі створенням біохім. джерел енергії проводять роботу в справі вивчення біоелектрогенезу — генерування електрики живими організмами. Відомо, напр., близько 500 різних видів риб, які генерують електроенергію. Найпотужніша «електростанція» — у морського вугра; вона адапта. виробляти електр. розряд, напруга якого досягає 650 в. Біоніки сподіваються, що за принципом електростанції вугра буде створено батарею, яка зможе швидко відновлювати витрачену енергію.

Б. — наука молода, але вона дедалі більше проникає в різні галузі виробн. й у сферу наукових досліджень.

Л. М. Бюнікина М., 1965. Вопросы бионики. М., 1967. Литвиненко Л. П. Бионика Б., 1967 [биол. с. 243—246]. Литвиненко Л. П. На пути к бионике. М., 1972 [биол. с. 21]. Жерард Ж. Бионика. Пер. с франц. М., 1971. Герсон Р. Чувства животных. Пер. с англ. М., 1977 [биол. с. 10, 197]. Ангелова Т. И. Бионика. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы 1958—1968. М., 1971.

Л. В. Литвиненко

**БІТ** (від англ. binary digit — двійкова цифра) — двійкова одиниця вимірювання *ентропії* й кількості інформації. Джерело з двома рівномірними подіомляннями має ентропію в одну двійкову одиницю. Походження терміна «Б.» пояснюється тим, що кількість двійкових одиниць вказує (з точністю до одиниці) на середнє число знаків, яке необхідно, щоб виписати це повідомлення в двійковому коді. Застосовують також натуральні й десяткові одиниці. Перехід від одних одиниць до інших відповідає зміні основ логарифмів у вказаній ентропії та інформації: кількість (10 замість 2). Формула переходу: 1 десяткових одиниць =  $1/\log_2 10$  біт  $\approx 3,32$  біт, 1 натуральних одиниць =  $1/\ln 2$  біт  $\approx 1,44$  біт.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прасов.

**БЛЕЙКА АЛГОРИТМ** — алгоритм одержання скороченої диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) булевої функції з довільної ДНФ. Грунтується він на теоремі Блейка якщо в довільній ДНФ булевої ф-ції здійснити всі можливі узагальнені склеювання, а потім усунути всі елементарні подвійняння, то в результаті одержують скорочену ДНФ функції. Операція узагальненого склеювання полягає в застосуванні тотожного співвідношення  $AC \vee BC = AC \vee BC \vee AB$ , що не змінює значення булевої ф-ції. В ряді випадків Б. а. визначає міним. форму булевої ф-ції: якщо скорочена ДНФ булевої ф-ції не містить заперечення змінних, то вона водночас є міним. формою, до того ж єдиною, якщо в простих імплікантах скороченої ДНФ всі змінні містяться лише в запереченням, то вона буде й мінимальною. Лише монотонні булеві ф-ції мають скорочені ДНФ, що не містять заперечень змінних. Б. а. застосо-

вують при мінімізації булевих ф-цій для одержання їхніх простих імплікант.

А. М. Воганов.

**БЛОК у програмуванні** — замкнена складова частина програми, що являє собою сукупність описів та операторів, які становлять сфору діяння деяких ідентифікаторів (імен). Поняття «блок» відповідає поняттю «підзадача» або «підалгоритм». Використовуючи блоки, задачу можна поділити на частини, які допускають автономне програмування їх. Кожний Б. вводить новий рівень позначень за допомогою описування ідентифікаторів і міток. У Б. може міститись, як оператор, інший Б. Блокова структура (див. АЛГОЛ-60, СИМУЛА, ПЛ-І) програми дає змогу при певній розподілі відводити одні й ті самі поля пам'яті машини для зберігання величин, описаних у неперетинних Б., і тим самим сприяє економічному використанню П. Див. також *Блок-схема програми*.

А. І. Халица.

**БЛОК ЗБЕРІГАННЯ ІНФОРМАЦІЇ** — див. *Награмаджувач*.

**БЛОК ЗМІННИХ КОЕФІЦІЄНТІВ** — пристрій для введення в розв'язувальні кола *аналогових обчислювальних машин* параметрів, які змінюються в часі за заданим законом і відповідають змінним коефіцієнтам модельованих процесів. Застосовують електромех. та електричні Б. з к. е. мех. будовою, застосовують лінійні потенціометри з відводами й без відводів. У першому випадку змінювання за владним законом напруги, що її знімають з позунок потенціометра, досягають, шунтуючи окремі ділячки потенціометра і підмикаючи до відводів різні живильні напруги. У другому випадку задане змінювання вихідної напруги потенціометра здійснюється власнім переміщенням позунок програмним механізмом. За такі механізми правлять профільовані кулачкові механізми, фотоелектр. *сіддучі системи*, фігурні струмозмінні тощо. В спеціалізованих АОМ застосовують потенціометри з профільованими за відповідним законом каретками Електромех. Б. з. к. будують і за аналого-цифровими схемами. В цьому разі використовують, як правило, перфострічку, рівномірне протягування якої здійснює механізм типу мальтійського хреста. Числові значення ординат зводжуваного змінного параметра попередньо кодують за якоюсь системою числення (здебільшого двійковою або двійково-десятьковою) й пробивають на перфострічці. Кожну щітку струмозмінного механізму з'єднують з відповідним розрядним входом *цифро-аналогового перетворювача*, на виході якого утворюється напруги, пропорційні ординатам модельованого змінного коефіцієнта. При подаванні на заг. електрод щіткового механізму змінної за величиною напруги, що утворюється в розв'язувальних колах АОМ, здійснюється операція множення. Найпростіші Б. з. к. будують, застосовуючи подільники напруги й кроковий привід. Значення відтворювальної ф-ції



задані у цьому разі, з єдністю на кабірному колі, платівки крокового шукача з відповідними кліматиками подільника напруги. Задана залежність відтворюється у вигляді східчасто апроксимованої кривої. Залежно від вимог до точності східчасто змінювану напругу можна подавати на вхід інтерполлятора. Досить ефективним є лінійний інтерполлятор, що має в своїй основі підсилювач операційний, який викликає за схемою інтегратора В електромех. Б. з. к. можна легко виконувати множення аналогових змінних, утворених у розв'язувальних колах АОМ, на змінні коеф., якщо підняти відповідні точки схеми електр. моделювання до входів потенціометричних подільників Б. з. к.

В електронних Б. з. к. є електронні подільники перетворювачі функціональні, налаштовані за законом змінювання виводжуваного параметра, і блоки множення. Щоб одержати на виході перетворювача задані ф-ції часу, на його вхід подають напругу, що лінійно зростає (аргумент). Електромех. Б. з. к. забезпечують більшу точність і стабільність відтворення заданих залежностей, ніж електронні, але поступаються перед ними в швидкодії.

Літ. Корж Б. И. Электронное моделирование устройств и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М. 1963 (Библиогр. с. 494-504). Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. М. — Л., 1964.

Б. Г. Лавин

**БЛОКИ ЦОМ ТИПОВІ** — пристрої, призначені для виконання елементарних операцій над словами. До Б. ЦОМ т. належать реєстри, дешифратори, лічильники й суматори.

Реєстри призначено для зберігання інформації та перетворення її під час реалізації елементарних операцій передавання та зсування слів. Реєстр являє собою набір запам'ятовувальних елементів, пронумерованих відповідно до розрядів слів, які зберігаються в ньому (молодшому розряді слова відповідає молодший розряд реєстра й т. д.). Під перетворенням інформації в реєстрі розуміють будь-яку однозначну зміну стану його розрядів (повну або часткову) під дією певних сигналів. До операцій перетворення інформації в реєстрі належать елементарні операції зсування й передавання коду на реєстр та установка перетворення. Під час операції зсування в реєстрі кожний розряд повинен одночасно й одержувати інформацію з наступного розряду і приймати нову інформацію з попереднього розряду. Здійснюється це проміжним запам'ятовуванням асоціованої інформації або на лінійних затримках, або на реактивних елементах, чи в допоміжному реєстрі — залежно від типу застосовуваної елементарної структури ЦОМ. Розрізняють лінійні та циклічні реєстри відповідно до виконання лінійної й циклічної модифікацій елементарної операції зсування. Елементарна операція передавання коду на реєстр полягає в змінюванні стану кожного розряду реєстра залежно від значення відповідного розряду виводжуваного слова. Передавати

слово на реєстр можна паралельним і послідовним способами. За паралельного способу всі розряди слова надходять на реєстр одночасно, за послідовного — проводиться порозрядне введення слова з боку молодших або старших розрядів реєстра з наступним зсуванням виводжуваної інформації на один розряд ліворуч або праворуч відповідно. Установці перетворення інформації в реєстрі полягають у переведенні реєстра з будівного стану в заданий (напр., у початковий нульовий чи одиницевий).

Дешифратором для  $n$  змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наз. пристрій, що його вихідними ф-ціями є різні константи одиниць  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n, x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_1 x_2 \dots x_n$ . Дешифратори встановлюють взаємодозначну відповідність між дешифровуваним словом і сигналом на відповідному виході дешифратора (сигнал набуває одиницевого значення, лише коли на вході дешифратора з'являється відповідне слово або група слів, для решти можливих слів він дорівнює нулю). Розрізняють дешифратори 1-го й 2-го родів. Перші реалізують систему ф-цій, можна з яких набуває одиницевого значення за відповідного єдиного значення слова на вході дешифратора. Другі реалізують систему ф-цій, що набувають одиницевого значення на певному відповідному діапазоні значень дешифровуваних слів. За способом побудови розрізняють лінійні, пірамідальні та прямокутні дешифратори. Лінійні й дешифратори  $n$  змінних являють собою сукупність не зв'язаних між собою  $2^n$  схем збігу на  $n$  входах, можна з яких реалізує відповідну конституенту одиниць. Пірамідальний дешифратор будують за методом каскадів: 1-й каскад реалізує конституенти одиниць для двох змінних  $x_1$  і  $x_2$ :  $x_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 x_2, x_1 x_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2$ ; 2-й каскад — конституенти одиниць для трьох змінних, причому його входними сигналами є вихідні сигнали 1-го каскаду й значення змінної  $x_3$  і  $\bar{x}_3$ . На наступному каскаді реалізуються всі конституенти чотирьох змінних, входними сигналами для нього є вихідні сигнали 2-го каскаду й значення змінних  $x_4$  і  $\bar{x}_4$  і т. д. На виході  $(n-1)$ -го каскаду реалізуються всі конституенти одиниць для  $n$  змінних. Прямокутний спосіб побудови дешифраторів зводиться до того, що вхідне слово поділяють на групи розрядів, дешифровані за допомогою частинних лінійних дешифраторів, що являють собою 1-й каскад дешифраторів. В наступному каскаді реалізують усі можливі кон'юнкції вихідів частинних лінійних дешифраторів. На відміну від дешифратора 2-го роду утворюються диз'юнкції ряду послідовно занумерованих конституент одиниць.

Лічильниками наз. пристрої, що лічать вхідні сигнали. Лічильник являє собою тригерний реєстр, адебільшого він реалізує елементарну операцію лічби. Якщо позначити через  $S_i$  якийсь  $i$ -й стан лічиль-

лика, що визначається станом його розрядів, то від діяння сигналу, напр.  $+1$ , лічильник переходить у сусідній  $S_{i+1}$  стан, а від діяння сигналу  $-1$  — у сусідній  $S_{i-1}$  стан — відповідно до заданого модуля лічби ( $+1$  — позначають додавання й віднімання за модулем). Досягаючи стану з граничним значенням  $1$ , лічильник устанавлюється у початковий стан. За напрямом переходів з одного стану в інший лічильники поділяють на прості і реверсивні. Прості лічильники здійснюють лічбу сигналів одного знака й переходять з них відбуваються в одному напрямі. Реверсивні лічильники лічать додатні й від'ємні сигнали, а переходять з них відбуваються в прямому й зворотному напрямі. Структура лічильника істотно залежить від способу кодування його стану. Розрізняють лічильники: з позиційним двійковим або десятковим, з позиційним одиницею або комбінованим і з непозиційним сусіднім кодуванням. У лічильнику з позиційним двійковим кодуванням стами кодується звичайних двійковими кодами послідовних цілих невід'ємних чисел, починаючи з нуля (аналогічно для десяткового кодування). Додавання до коду й віднімання одиниці від коду такого лічильника здійснюються за допомогою операції переносу і позиції (див. *Лекція переносу*) між розрядами лічильника. За одиницею кодування стан лічильника ототожнюється з місцеположенням певного коду в його розрядах (як такий код використовують код нулю (00...01) або (00...011), цей останній наз. ще парно-одиничним). Під діянням входного сигналу відбувається перехід лічильника в новий стан внаслідок зсуву коду ліворуч або праворуч — залежно від знака ліченого сигналу. Лічильник з одиничним кодуванням за структурою являє собою кільцевий зсувовий регістр. Кількість станів такого лічильника дорівнює кількості розрядів зсувового регістру. За комбінованого способу кодування лічильники ділять на частинні лічильники, всередині яких застосовують одиницею кодування, а між ними зв'язом організують так само, як і для лічильників з позиційним кодуванням. За сусіднього кодування станів перехід із будь-якого  $S_i$ -го стану в сусідній  $S_{i+1}$ -й (або  $S_{i-1}$ -й) здійснюється перемиканням лише одного розряду лічильника. Для сусіднього кодування можна використати, напр., непозиційну систему коду Грея. Для визначення станів лічильника використовують дешифратори.

Суматором наз. пристрій, що виконує елементарну операцію підсумовування. Розрізняють паралельні та послідовні суматори — залежно від того, як надходять усі розряди доданків у суматор: одночасно чи послідовно, починаючи з молодших. Паралельні суматори складаються з  $n$  однорозрядних підсумовувальних схем ( $n$  — кількість розрядів доданків), послідовні — з однієї. Однорозрядна підсумовувальна схема (ОПС)

здійснює додавання за модулем 2 відповідних розрядів доданків  $x_i$  і  $y_i$  і переносу  $p_i$  з попереднього розряду, внаслідок утворення суми  $Z_i$  в цьому розряді й перенос  $p_{i+1}$  в наступний розряд. Систему перемикальних функцій, яка описує ОПС, можна зобразити так

$$\begin{cases} Z_i = x_i + y_i + p_i, \\ p_{i+1} = x_i y_i \vee (x_i + y_i) p_i. \end{cases} \quad (1)$$

За способом побудови ОПС розрізняють комбінаційні, нагромаджувальні й амплітудні суматори. Комбінаційні — будують з логіч. елементів, які реалізують функціонально повний набір елементарних операторів (див. *Елементна структура ЦОМ*). Систему функцій (1) має бути зображена у вигляді, що відповідає операторним виразами застосовуваних логіч. елементів. Обидва доданки надходять на вхід комбінаційного суматора одночасно. Основною нагромаджувальною однорозрядною суматором є тригер з лічильним входом, на який по черзі надходять підсумовувані цифри й перенос. Амплітудні суматори проводять підсумовування амплітуд струмів або напруг так само, як і комбінаційні. Способи організації паралельних суматорів в ОПС визначаються способом організації поширення сигналу переносу від молодших розрядів до старших. Розрізняють суматори з послідовним поширенням переносу (ПШП), з маскрізним, одночасним і груповим. У суматорах з ПШП перенесення в даний розряд можна зробити лише після того, як відбудеться додавання в попередньому розряді. В суматорах із маскрізним переносом організується спеціальний поширення переносу з дужче циклічними елементами так, що перенос, який виникає в попередніх розрядах, обходить ті розряди, в яких сума доданків за модулем 2 дорівнює 1. В суматорах з одночасним переносом значення переносу з даного розряду є функцією входів усіх попередніх розрядів і виникає одночасно з усіх розрядах. У суматорах з груповим переносом кілька розрядів об'єднуються в групи, причому всередині групи перенос у кожному розряді виникає одночасно, а між групами можна організувати або послідовно, або маскрізне, або одночасне перенесення. За способом фіксації закінчення процесу підсумовування всі суматори ділять на синхронні й асинхронні. В синхронних суматорах на виконання додавання відводять час, не менший за макс. час поширення переносу по ланцюжку переносів. Асинхронний принцип керування закінченням підсумовування ґрунтується на визначенні фактичного закінчення поширення переносів. Такі суматори мають схеми визначення завершення переносу. Для підсумовування чисел, поданих зворотним кодом, суматори мають ланцюг циклічного переносу, який зв'язує перенос, що виникає в знаковому розряді, зі входом молодшого розряду суматора.

Якщо від'єднати числа кодуються додатковим кодом, цього ланцюга в суматорі немає.

Лит. Глушкова В. М. Синтез цифрових автоматов. М., 1982 (бібліогр. с. 464—469). Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах К, 1986 (бібліогр. с. 299—301). Карцев М. А. Арифметика цифровых машин М., 1969 (бібліогр. с. 559—575). З. М. Курченко.

**БЛОКОВИЙ СИНТЕЗ ЦОМ** — представлення структури проектованої машини у вигляді композиції блоків і їхніх зв'язків з описом функціонування кожного блока композиції та часової діаграми всієї сукупності блоків. На етапі В. с. ЦОМ розв'язують такі завдання: визначають за формальним описом функціонування пристроїв набір типових блоків, за допомогою яких можна реалізувати це функціонування, описують функціонування кожного блока в аналізній композиції та характер зв'язку між ними й аналізують часові співвідношення між сигналами, що надходять на входи виділень блоків, і сигналами, що виходять з блоків (як інформаційними, так і керуючими). Завдання кодувати пристрій, функціонування якого зображено у вигляді композиції блоків з заданого набору, дуже складне. Складність його визначається неоднороздільністю допустимих декомпозицій первинного пристрою на типові блоки й суперечністю критеріїв, якими керуються проєктувальники під час пошуку цієї декомпозиції. Критеріями, що їх використовують, розв'язуючи завдання декомпозиції, можуть бути: типізація (знаходження такої декомпозиції, при якій кількість різних використовуваних типових блоків мінімальна, а в ідеальному випадку використовують лише один стандартний типовий блок), конструктивна однорідність (знаходження такої декомпозиції, при якій типові блоки об'єднані в однакові конструктивні одиниці та зв'язки між цими конструктивними одиницями однотипні), мінім. устаткування (пошук декомпозиції, що дає найменшу сумарну кількість елементів у сукупності типових блоків) тощо.

Заг. методу розв'язування завдання пошуку композиції типових блоків, яке забезпечило б необхідне функціонування синтезованого пристрою, не існує, і розв'язування цього завдання має, як правило, евристичний характер. Більш-менш точні методи є лише на рівні елементного синтезу ЦОМ, коли з окремих доданих елементів ЦОМ синтезують самі типові блоки цифрової обчислювальної машини (суматори, регістри, дешифратори, лічильники тощо). В цьому разі вдається використати розвинений апарат теорії перемикальних функцій. Якщо в В. с. ЦОМ використовують типові блоки, то опис функціонування цих блоків і реалізація їх на рівні обраної системи елементів, як правило, відомі. А якщо виділяють нестандартні блоки, то їхнє функціонування описують формально й синтезують їх або з типових субблоків (тобто розв'язують знову завдання В. с. ЦОМ, але вже щодо блока), або безпосередньо з елементів, які входять до обраної елементної бази (якщо при цьому еле-

менти розглядають як типові субблоки, то формально знову розв'язують завдання В. с. ЦОМ). Після того, як знайдуть композицію блоків, що відповідає синтезованому пристроєві, потрібно описати зв'язки між блоками. Ці зв'язки бувають двох типів: інформаційні (функціональні), що визначають напрям передавання інформації в одного блока в другий, і керуючі, які визначають передавання сигналів керування між блоками композиції та між пристроями (для блоків, що їхні зони, канали частково або цілком збігаються в каналах між пристроями, виділеними й описаними на попередніх етапах синтезу). Сукупність виділених блоків, зв'язків між блоками однієї композиції та блоками, що належать до різних пристроїв, визначають блокову структуру ЦОМ.

Як і на етапі виділення алгоритмічної структури ЦОМ, блокову структуру ЦОМ можна формально описати алгоритмічною мовою (напр., мовою типу СИМУЛА, СИМСКРИПТ, СЛЕНГ та ін.) і провести моделювання на ЦОМ, що реально існує. Моделювання відбувається за прикладі потоку реальних програм. Моделюванням можна встановити необхідні часові співвідношення в роботі блоків, об'єми буферних нагромаджувачів, потрібних для узгодження роботи блоків, перевірити правильність роботи блоків тощо. Див. також Алгоритмічний синтез ЦОМ, Автоматизація проєктування ЦОМ, Блоки, ЦОМ типові.

Лит. Глушкова В. М. Синтез цифрових автоматов М. 1982 (бібліогр. с. 464—469). Геллер С. И., Журавлев К. И. Основы логического проектирования цифровых вычислительных машин М., 1969 (бібліогр. с. 299—301). Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах К, 1986 (бібліогр. с. 299—301). Д. О. Постолов.

**БЛОК-СХЕМА ПРОГРАМИ** — графічне зображення обчислювального процесу, що його повинна реалізувати відповідна програма цифрової обчислювальної машини. Розрізняють принципову й робочу В.-с. п. Принципова В.-с. п. зображує обчисл. процес на рівні типових процесів обробки інформації. Ці процеси значною мірою залежать від класу розв'язуваних задач. Так, для задач обробки економіч. інформації типовими процесами є введення інформації, компонування, редагування, сортування, керування масивами даних, виведення інформації, перетворення масивів даних тощо. В розвинених системах математичного забезпечення ЦОМ ці процеси реалізуються стандартними підпрограмами (див. Бібліотека стандартних підпрограм). Призначення принципової В.-с. п. — дати наочне уявлення про алгоритм розв'язування задачі, а ній відображується технологічний процес обробки інформації на ЦОМ, з її допомогою можна глибше вивчити задачу, виявити вади постановки задачі й усунути їх на ранній стадії, виявити закономірності алгоритму обробки інформації, знайти типові частини, ефективно використати запам'ятовувальні пристрої зовнішні

ЦОМ та оцінити витрати часу на програмування й орієнтовний час обробки даних на ЦОМ.

Роботи Б.-с. п. починають складати після того, як складуть і ретельно проаналізують принципіву Б.-с. п. Троба щоб робота Б.-с. п. відображала всі розгалуження обчисл. процесу, всі звертання до стандартних підпрограм із зазначенням параметрів фактичних, розрахункових формул і структур інформаційних масивів. У структурі Б.-с. п. одержаного є основна й допоміжна час-

дійснюється введення чергової перфокарти з масиву М1. Два наступні блоки перевіряють, чи скінчився масив М1, і, якщо ні, то чи стосується запис диварного цеху. Якщо стосується, то такий запис пересилається в масив М2. Потім керування передається на блок читання чергового запису в масиву М1. Якщо масив М1 вичерпано, то закриваються масиви М1 і М2, і робота програми завершується.

Е. П. Хотимов.

**БЛОКУВАННЯ ОБСЛУГОВУВАННЯ** — явище тимчасового переривання процесу обслуговування або сповільнення його в системах масового обслуговування. В реальних системах Б. о. відповідають дії різних факторів, що утруднюють нормальне функціонування системи або окремих її частин. Такими факторами бувають несправності устаткування, відсутність матеріалів, робочої сили чи коштів, несприятливі метеорологічні умови, діяння гальмування в біологічних системах тощо. Див. також *Масового обслуговування система*. **БОЛЬША ЗАДАЧА** — одна з найважливіших варіаційних задач в добре розвинутою теорією необхідних і достатніх умов екстремуму. Формулюється так: серед усіх гладких кривих  $y(x)$ , що задовольняють диференціальні рівняння зв'язку

$$\Phi_1(x, y, y') = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (1)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad n < \infty$$

та граничні умови

$$\Phi_r(x_1, y(x_1)) = 0, \quad r = \overline{1, p}, \quad p \leq n + 1$$

$$x_1 = a, \quad y(x_2) = b, \quad b = (b_1, \dots, b_n), \quad (2)$$

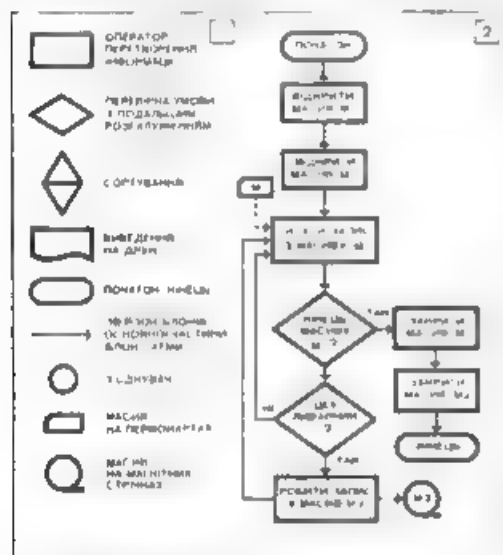
знайти таку, яка надає мінімуму функціоналові

$$Y(y(x)) = g(x_1, y(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx. \quad (3)$$

Щоб така задача мала сенс, потрібно, щоб функції  $\Phi_1$ ,  $\Phi_r$ ,  $g$ ,  $f$  задовольняли певні вимоги, зокрема, щоб система (1) допускала представлення у вигляді  $y' = F_1(x, y)$ , де  $F_1$  — диференціальні ф-ції своїх аргументів, ф-ції  $\Phi_r(x, y)$ ,  $r = \overline{1, p}$ , щоб були незалежні тощо. Гладкі або кусково-гладкі ф-ції  $y(x)$ , що задовольняють рівняння (1) і (2), наз. допустимими.

У наведеній формі Б. з. є задачею з рухомими лівими і фіксованими правими кінцями. Можна розглянути Б. з. в обома рухомими кінцями. Окремими випадками Б. з. є *Майєра задача* (коли у функціоналі  $Y \equiv 0$ ) і *Лазарєва задача* (коли  $g \equiv 0$ ).

Б. з., рівняння (1) — (3), можна звести до якоїсь із двох останніх задач. Напр., якщо розглядати криві  $(y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x))$ , які підлягають, крім умов рівнянь (1) і (2), додатковим умовам  $y'_{n+1} = f(x, y, y')$ ,



1. Помітчасті блоки в блок-схемі програми.  
2. Приклад блок-схеми програми

тини. До основної частини належать усі функціональні блоки алгоритму розв'язування задачі й зв'язки між ними, до допоміжної належать усі пояснювальні блоки і зв'язки їх з основними функціональними блоками.

Існують міжнародний і галузеві стандарти, що визначають форму блоків (символів) і ліній на Б.-с. п. (мал. 1). У Б.-с. п. використовують і різні графічні символи, щоб позначити зовн. і внутр. носії запису інформації (перфокарти, перфострічки, папір, стрічки магнітні, барабани магнітні, диски магнітні, оперативна пам'ять), наводять коментарі, зазначають фізичну заміну машинних носіїв інформації тощо. Залежно від масштабу розв'язування задач набір блоків може дещо змінюватися.

Приклад. Нехай  $x$  масив відомостей щодо заводу М1, який зберігається на перфокартах; потрібно вибрати з нього записи, що стосуються диварного цеху, й записати їх до масиву М2. Б.-с. п. для даного випадку наведено на мал. 2. Перші два блоки забезпечують можливість звертання до масивів М1 і М2. У блоці читати запис із масиву М1

$y_{n+1}(x_1) = 0$  і записати  $Y$  у вигляді  $Y = -g(x_1, y(x_1)) + y_{n+1}(x_2)$ , то в такому вигляді Б. з. еквівалентна задачі Майєра. Важливу роль у теорії Б. з. відіграє правило множників: для кожної допустимої кривої  $C$ , яка надає мінімуму  $Y$ , існують ф-ції  $\lambda_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , обмежені й неперервні на  $(x_1, x_2)$  (крім значень  $x$ , які відповідають кутовим точкам  $C$ ) і константа  $\mu_0$ , такі, що ф-ція  $F(x, y, y', \lambda) = \mu_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \Phi_i$  задовольняє майже всюди рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i} dx + C_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

де  $C_i$  — сталі, а для рухомого (лівого) кінця кривої  $C$  виконується умова трансверсальності:

$$\left( F - \sum_{i=1}^n y_i' \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) dx + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i'} dy_i + \mu_0 dx \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (5)$$

Висновки, що випливають з правила множників.

1. У кожній точці допустимої кривої  $C$ , яка задовольняє рівняння (4), крім кутових точок, справджуються рівності (я припущенні, що відповідні похідні існують)

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

рівняння Ейлера.

2. У кожній кутовій точці кривої  $C$ , яка задовольняє рівняння (4), ліва й права границі кожної з ф-цій  $\frac{\partial F}{\partial y_i'}$ ,  $i = \overline{1, n}$  збігаються.

сл — умови Вейерштрасса — Ердмана. Допустима крива, для якої справджуються рівняння Ейлера, наз. екстремалією. Крім рівнянь Ейлера, що необхідно виконуються для будь-якої кривої, яка дає мінімум  $I$ , для Б. з. вдомі необхідні умови Вейерштрасса, Клебша і т. з. 4-а необхідна умова мінімуму. Відомі також умови, достатні для того, щоб допустима крива  $y(x)$  давала мінімум  $Y$ . Кожну з цих умов можна одержати, якщо на ф-ції  $f, \Phi_i, \varphi_j$  і т. д. накладати додаткові вимоги.

Теорію Б. з. використовують при розв'язуванні різних задач оптимізації, зокрема тих, що пов'язані з вивченням рухомих об'єктів.

Лит. див. до ст. Варіаційне числення.

Ю. М. Даниш.

**БУБНОВА — ГАЛЬОРКІНА МЕТОД** — один з чисельних методів розв'язування операторних рівнянь. Див. Операторні рівняння способи розв'язування.

**БУЛЕВА АЛГЕБРА** — алгебрична структура з двома бінарними операціями  $x \cup y, x \cap y$ , однією унарною операцією  $x'$  і двома виділеними елементами «0» та «1», для якої справджуються рівності (аксіоми Б. а.):

$$x \cup y = y \cup x;$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z;$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z);$$

$$x \cup 0 = x;$$

$$x \cup x' = 1;$$

$$x \cap y = y \cap x,$$

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup z,$$

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z);$$

$$x \cap 1 = x;$$

$$x \cap x' = 0.$$

Названо П за прізвищем англ. математика Дж. Буля (1815—64), який ввів її, вивчаючи закони логіки (числення класів, числення висловлювань і числення відношень). Використовують Б. а. в алгебрі множин, алгебрі логіки, імовірностей теорії, релейно-контактних схем теорії тощо.

Лит. Буль Дж. Миров Л. А. Булева алгебра. М., 1969 (бібліогр. с. 308—313). Сикорский Р. Булевы алгебры. Пер. с англ. М., 1969 (бібліогр. с. 340—363). Б. Г. Параскін.

**БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ** — функції, що так само, як і їхні аргументи, набувають значень в області з двох елементів. За ці елементи в логіці математичній беруть значення «істинне» і «хибне», а в автоматів теорії — «0» і «1». Б. ф. названо за прізвищем англ. математика Дж. Буля (1815—64), праці якого започаткували розвиток алгебри логіки. Б. ф.  $f(x_1, \dots, x_n)$  повністю визначається заданими її значеннями на всіх наборах значень її аргументів, число яких дорівнює  $2^n$ . Ці значення можна задавати, напр., у вигляді таблиці або вектора, у якого на  $i$ -му місці ( $i = 1, 2, \dots, 2^n$ ) стоїть значення  $f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ , де  $x_1^0, \dots, x_n^0$  — запис числа  $i - 1$  двійковою системою числення. Б. ф. можна задавати й аналітично, як вирази, що являють собою суперпозиції певних Б. ф. (прийнятих за пераєскі) і змінних (зокрема, у вигляді формул алгебри логіки, в т. ч. диз'юнктивних і кон'юнктивних нормальних форм). Амер. математик Е. Пост (1897—1954) знайшов необхідні й достатні умови повноти будь-якої системи  $S$  Б. ф., тобто умови виразності будь-якої Б. ф. за допомогою суперпозиції Б. ф. із  $S$  та змінних. Е. Пост побудував і всі замкнені (відносно суперпозиції) класи Б. ф. і знайшов їхні базиси, тобто в певному розумінні мінім. підкласи таких Б. ф., через які виражаються всі Б. ф. цього класу.

Б. ф.  $f(x_1, \dots, x_n)$  задають і графічно — на  $n$ -вимірному одиничному гіперкубі, кожна вершина якого з координатами  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  відмічається значенням  $f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ .

Множина  $B. \phi.$  м змінних з визначеними на ній операціями *заперечення*, *кон'юнкції* й *диз'юнкції* (див. *Логічні операції*) становить вільну *булеву алгебру* з  $n$  твірними. Інша будова алгебра з  $n$  твірними є гомоморфним образом алгебри  $B. \phi.$  з  $n$  твірними й тому є ізоморфною алгебрі класів еквівалентності, що їх задають в алгебрі  $B. \phi.$  якимось відношенням конгруентності.

$B. \phi.$  застосовують при побудові контактних і реледно-контактних схем, схем з порогових елементів, схем з т. з. функціональних елементів у якомусь базисі (напр., схем з елементів, що реалізують функції  $\&, \vee, \neg$ ) тощо.  $B. \phi.$  реалізують схемою, виходячи з того, що їх можна зобразити як суперпозицію  $B. \phi.$  з якоїсь фіксованої функціонально повної системи  $B. \phi.$  Від складності зображення залежить складність схеми. Це призводить до важливої проблеми — мінімізації булевих функцій, тобто знаходження найпростіших зображень їх. Дві  $B. \phi.$  м змінних наз. функціями одного типу, якщо одну з них можна одержати з другої, перетавивши повним чином аргументи й замінивши деякі аргументи їхніми запереченими.  $B. \phi.$  одного типу реалізуються фізично однаковими схемами. Число  $B. \phi.$  м змінних дорівнює  $2^n$ ; воно дуже швидко зростає з зростанням  $n$  (напр.,  $2^8 = 256$ ;  $2^{16} = 65536$ ). Правда, з поглядом схеми реалізації можна обмежитися розглядом тільки типових  $B. \phi.$  з всього 402 різні типи  $B. \phi.$  чотирьох змінних. Але вже при  $n = 6$  число типів вимрюється квадратськими. Майже всі  $B. \phi.$  допускають лише дуже складну схему реалізації: жодна  $B. \phi.$  м змінних потребує для своєї схеми

реалізації асимптотично не менше як  $\frac{2^n}{n}$  контактів (див. *Шемна функція*). Тому досліджують і класи  $B. \phi.$ , істотно менші, ніж множина всіх  $B. \phi.$ : класи  $B. \phi.$  лінійних, монотонних, самодійствих, симетричних, інваріантних відносно деяких інверсій аргументів  $B. \phi.$ , які мають значення *сі* на певній множині наборів тощо. В теорії аргументів і тех застосуваннях розглядають ще й часткові  $B. \phi.$ , тобто  $\phi$ -ці, не визначені для деяких значень їхніх аргументів

Лит Глушков В. М. Синтез цифрових автоматів. М., 1962 [Бібліогр. с. 464—489]. Яблонский С. В. Гаврилов Г. П., Кузнецов В. В. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1968 [Бібліогр. с. 113—117]. В. Ф. Костяков.

**БУХГАЛТЕРСЬКОГО ОБЛІКУ АВТОМАТИЗАЦІЯ** — використання в сфері бухгалтерського обліку технічних засобів збирання, передавання та обробки інформації для максимального підвищення оперативності обліку й вірогідності одержуваних даних та для зниження трудомісткості виконуваних операцій, щоб можна було якнайефективніше використовувати облікову інформацію в плануванні й управлінні господарством. Бухгалтерський облік тепер удосконалюють в основному в таких напрямках: підвищують

його аналітичність, забезпечують правильне економічне групування затрат для виявлення ефективності їх і здійснюють широку механізацію обліково-обчисл. робіт, щоб підвищити продуктивність праці рахівників. Якість обліку, його чіткість і своєчасність багато з чому залежать від застосовуваних форм рахівництва, від того, наскільки ці форми сприяють раціоналізації робіт і автоматизації процесів обробки даних. Внаслідок прискорення темпів розвитку г-в і ускладнення внутр. і зовн. зв'язків підприємств почав відставати облік особливо техніка обробки інформації.

В обліковому процесі розрізняють дві стадії. На 1-й стадії первинний облік ним рикють і реструктурують облікові дані; на 2-й (оперативній і бухгалтерській облік) — ці дані систематизують і узагальнюють в облікових реєстрах. Для первинного обліку застосовують офіційований і мірну тару, зазначай й лічильні ваги, кількостні давачі, лічильники й різні вимірні прилади, які фіксують задані режими або відхилення від них. Для прискорення процесу реєстрації облікових даних і механізації процесів підготовки первинних документів використовують бланки постійних реквізитів і шифри, виготовлені друкарським способом. Документи заповнюють за допомогою розмножувальних апаратів і комбінаторно-адресувальних машин. Для механізації записування даних застосовують друкарські машини, телеграфні апарати, лічильно-клавирні машини (фактури), бухгалтерські, реєстратори інформації та лічильно-перфораторні машини. Застосування ЕОМ для Б. о. а. дає змогу розв'язувати двох осей. питання: по-перше, аналізувати осей, характеристики роботи підприємств пром-сті, транспорту, с. г. й культурно-побутового обслуговування і вибирати найраціональніші форми й способи обліку, планування та організації робіт; по-друге, автоматизувати процес одержання й оброблення інформації, і в результаті цього підвищити оперативність і точність керування. Розв'язання цих питань дає змогу підвищувати заг. ефективність суспільної праці й раціоналістично використовувати госп. ресурси. За допомогою обчисл. техніки можна краще організувати маш. обробку облікової інформації та вводити рахунки як реєстр для ведення бухгалтерського обліку на ЕОМ. Оброблюючи первинну бухгалтерську документацію на ЕОМ, керуючись ось чим, метод обробки документів повинен сприяти функціонуванню системи автомат. ведення обліку (незалежно від форм представлення даних у документах); крім того, треба, щоб документ обробляв тільки раз, щоб синтез його змісту був повним, а формальний запис у реквізитах — придатним для безпосереднього введення в машину без додаткових перетворень. Найважливіше у пам'яті ЕОМ *масиви*, що містять повну інформацію про стан госп. діяльності підприємства та її динаміку, дає змогу одержувати потрібні дані бухгалтерського обліку і звітності за встановленою формою.

Досвід застосування засобів обчисл. техніки в економіці показує, що найбільшого ефекту досягають тоді, коли задачі обліку, планування й керування розв'язують у єдиному комплексі, починаючи від первинних даних і закінчуючи побудовою синтетичних показників, необхідних для звітності й керування г-ном. Розв'язують задачі обліку за допомогою автоматизованих систем управління підприємством, можна не тільки комплексно використовувати інформацію, а й набагато спростити підготовку початкових даних (як вона буває трудомісткішою, ніж коли ті самі задачі розв'язують старими способами). При централізованому збиранні й обробці інформації, які характерні для автоматизованої системи управління, певну частину облікової інформації можна зібрати і ввести в ЕОМ для обробки без безпосередньої участі людини, тобто виникає можливість автоматично збирати частину облікової інформації, автоматично класифікувати її й контирувати (вносити до певних статей). Автомат контирування значно зменшує кількість ручних операцій щодо обробки документації бухгалтерського обліку, зменшує кількість помилок, які щемичує трапляються, коли облік провадять ручним способом.

У зв'язку з централізацією обліку й застосуванням обчисл. техніки змінюється організація обробки даних. Машинолічильні бюро й машинолічильні станції поступають-

ся місцем перед інформаційно-обчисл. центрами, оснащеними ЕОМ, тех. можливості яких дають змогу організувати обслуговування кількох підприємств. У процесі удосконалювання тех. засобів, що забезпечують механізоване й автоматизоване збирання й передавання облікових даних та обробку їх в обчислювальних системах, нар-госп. облік перетворюється на єдину, централізовану інформаційну систему, яка забезпечує органи планування та управління оперативною й вичерпною інформацією.

Останнім часом інтенсивно розвивається виробн. лічильно-обчисл. техніки, застосування якої істотно впливає на організацію обліку. Багато різноманітних лічильно-обчисл. машин — від найпростіших клавішних до ЕОМ — застосовують майже на всіх пром. підприємствах і держ. установах. Характерним є те, що лічильно-обчисл. техніка починає перетворюватися з допоміжного засобу обліку на фактор, що визначає організацію бухгалтерського обліку. Домінуючого значення набуває оперативність надання даних бухгалтерського обліку, що їх керівники підприємств використовують для прийняття певних рішень.

Лит.: Королев М. А. Вопросы применения электрониз вычислительных машин в планировании и учете. М., 1960. Исачков В. К вопросу о формах организации механизированного учета и вычислительных работ. В кн. Механизация учета, отчетности и вычислительных работ. М., 1961. Подкова А. А. Проблемы бухгалтерского учета в промышленности. СССР, М., 1964. В. Б. Сидяков.

# В

**ВАГОВА ФУНКЦІЯ** — вивід'єва функція, яку використовують, визначаючи метрику у функціональному просторі (див. *Простір абстрактний у функціональному аналізі*). Багато задач приводить до визначення простору дійсних ф-цій, заданих на відрізку  $a \leq x \leq b$

як скалярним добутком  $(f, g)_p = \int_a^b f(x)g(x) \times p(x) dx$ . Ф-ції  $f(x)$  і  $g(x)$  наз. ортогональними з вагою  $p(x)$ , якщо  $(f, g)_p = 0$ . Розв'язування методом Фур'є крайових задач рівнянь матем. фізики приводить до знаходження тих значень параметра  $\lambda$ , яким відповідають ненульові розв'язки рівняння  $A(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C(x)y =$

$= \lambda y$ , які задовольняють умови  $y(a) = y(b) = 0$ . Встановлено, що власні ф-ції цієї задачі, які відповідають різним власним значенням, ортогональні з вагою  $p(x) = \int_a^x \frac{B(t) - A'(t)}{A(t)} dt$ . Прикладами ортогональних з вагою ф-цій є різні класи спец. ф-цій (див. *Імпульсна перетворена функція*).

**ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ** — розділ математики, в якому визначають методи відшукування екстремальних значень функціоналу. Поняття функціоналу, широко застосовуване у В. ч., є узагальненням поняття ф-ції: функціонал — це ф-ція, аргумент якої також є функцією. Задавання функціоналу  $I(y(x))$  рівносильно задаванню закону, за яким кожній ф-ції  $y(x)$  з деякого класу відповідає певне число. Фіз. сутність функціоналів може бути найрізкоманітніша — довжина, час тощо. Оскільки ф-цію  $y(x)$  можна визначити, задавши її значення в нескінченному числі точок, то функціонал можна розглядати як ф-цію нескінченного числа змінних, а В. ч. — як відповідне узагальнення розділу дифер. числення, що займається відшукуванням екстремальних значень ф-цій з змінних. Важливе місце у В. ч. посідає поняття варіації (диференціала)  $\delta I$  функціоналу гол лінійної частини приросту функціоналу при переході від ф-ції  $y(x)$  до близької ф-ції

$y(x) + \delta y(x)$ . Значення  $\delta I = \frac{d}{dt} I(y + t \delta y) \Big|_{t=0}$ , де  $t$  — числовий параметр. Щоб

з-поміж усіх розглядуваних ф-цій виділити ті, на яких функціонал набуває екстрем. значення, треба знати умови (співвідношення), що характеризують шукані функції. Визначення необхідних умов екстремуму — одна з осн. задач В. ч. Необхідну умову екстремуму формулюють так: щоб функціонал  $I(y)$  досягав екстремуму при  $y = y_0$ , треба, щоб варіація  $\delta I = 0$  при  $y = y_0$ .

Розглянемо конкретні задачі В. ч. Найпростіша задача В. ч.: серед диференціальованих ф-цій  $y(x)$ , що задовольняють граничні умови  $y(x_1) = a$ ,  $y(x_2) = b$ , треба знайти функцію, на якій функціонал

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (1)$$

набуває екстрем. значення. Як у цій, так і в інших задачах В. ч., для того, щоб розв'язок існував, треба, щоб ф-ція  $f(x, y, y')$  задовольняла певні вимоги гладкості. Умова  $\delta I = 0$  для функціоналу (1) приводить до рівняння (Ейлера)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2)$$

Шуканими функціями можуть бути лише розв'язки цього рівняння. Значення сталих, що входять до загального інтеграла цього рівняння, визначають за допомогою граничних умов. Крім граничних умов, на функції у часто накладаються додаткові обмеження, напр., екстремум функціоналу (1) відшукують лише на функціях, на яких функціонал

$L(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$  набуває

заданого значення  $C$ . Це задача на умовний екстремум. У таких задачах обмеження можуть мати й характер рівнянь (у т. ч. й диференціальних), а функціонал, що його екстремум відшукують, може мати складнішу структуру (див. *Лагранжева задача*, *Майєра задача*, *Больца задача*). Для побудови необхідних умов екстремуму ці задачі за допомогою *Лагранжевої правили множників* зводять до задач без обмежень. В. ч. розглядає і задачі з рухомими кінцями, коли екстремум функціоналу (1) треба відшукати з-поміж функцій, кінці яких не закріплені й можуть переміщатися по заданих кривих. Оскільки ця задача відрізняється від найпростішої лише умовами на кінцях, то необхідна умова екстремуму — рівняння (2) — для неї зберігається, але на заданих кривих треба додатково визначити положення кінців ф-ції, на якій досягається екстремум функціоналу. Для цього користуються умовами трансверсальності. Крім необхідних умов екстремуму, побудованих із залученням першої варіації функціоналу, можна побудувати необхідні умови, що використовують другу варіацію функціоналу (див. *Лежандра — Клебша умова*).



Безпосереднє використання необхідних умов вводить задачу В. ч. до розв'язування дифер. рівнянь, а це пов'язане зі значними труднощами. Тому для одержання ф-ції, на яких досягається екстремум функціоналу, у В. ч. використовують і прямі методи. Суть цих методів полягає в побудові яким-небудь способом такої послідовності ф-цій  $y_k$ , що  $\lim_{k \rightarrow \infty} I(y_k) = m$ , де  $m$  — екстрем. значення функціоналу. Прямі методи дають змогу одержати й наближений розв'язок задачі.

Перші задачі В. ч. вивчали І. Ньютон і брати Я. та І. Бернуллі наприкінці 17 ст. Як самостійна матем. дисципліна В. ч. оформилось у 18 ст. в працях Л. Ейлера та Ж.-Л. Лагранжа. В середині 20 ст. методи В. ч. почали плідно використовувати у багатьох розділах математики й механіки. Останнім часом створено нові розділи В. ч. — теорію оптимальних процесів (див. *Потрібна принцип максимуму*) й динамічне програмування (див. *Беллмана принцип оптимальності*). Створюється й заг. теорія екстрем. задач, яка дає змогу встановити зв'язок між цими розділами.

Лит. Лаурентьєв М. А., Люстерник Л. А. Курс варіаційного исчисления. М. Л., 1950. Геліфанд Й. М., Фомін С. В. Вариаційное исчисление. М., 1961. Бутисс Г. А. Лекції по варіаційному исчисленню. Пер. с англ. М., 1950. [бібл. опр. с. 14—343]. Ю. М. Данилін

**ВАРІАЦІЙНИЙ РЯД** — упорядкована в неспадному порядку сукупність  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  членів вибірки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  з генеральної сукупності з функцією розподілу  $F(x)$ , тобто  $x_1^*$  — найменша з величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $x_2^*$  — найменша з величин послідовності  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , без  $x_1$  і т. д. *Випадкові величини*  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  називають *порядкованими статистиками*, або *членами* В. р., а величину  $x_n^* - x_1^*$  — *вибірковою розмахою*. Відомі розподіли порядкових статистик і граничні розподіли при  $n \rightarrow \infty$ . В. р. — одно з гол. понять математичної статистики, оскільки в ньому міститься вся інформація, що є у вибірці  $x_1, x_2, \dots, x_n$  про значення невідомих параметрів.

А. Я. Даровиць

**ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ** — методи наближеного розв'язування задач прикладної математики, які будуються на зведенні початкової задачі до певної варіаційної задачі, тобто до задачі визначення мінімуму певного функціоналу. Напр., розв'язування крайової задачі для звичайного диф. рівняння (див. *Рівняння класифікація*)

$$Ly = f \quad (1)$$

можна замінити задачею відшукування ф-ції  $y(x)$ , яка мінімізує такий функціонал, для якого (1) є рівнянням Ейлера (див. *Варіаційне числення*). Це не єдиний засіб одержувати функціонали, які набувають мінім. значення

в разі підстановки в них розв'язків крайових задач. Можна, напр., розв'язуючи крайову задачу для рівняння (1), розглядати функціонал

$$I(y) = \int_a^b [Ly - f]^2 dx \quad (2)$$

у класі всіх ф-цій, які задовольняють граничні умови й мають достатню кількість неперервних похідних (на  $[a, b]$  — відрізок, на якому шукають розв'язок). Можна замінити (2) й загальнішим функціоналом

$$I(y) = \int_a^b p(x) [Ly - f]^2 dx, \quad (3)$$

де  $p(x)$  — деяка додатна *вагова функція*. Функціонали (2) і (3) набувають найменшого значення, що дорівнює 0, в разі підстановки в них розв'язку крайової задачі. Такий спосіб одержання функціоналів наз. *найменшим невбратним методом*. Є й інші види функціоналів, мінімум яких досягають на розв'язку крайової задачі.

У заг. випадку, якщо операторно рівняння

$$Ay = f, \quad (4)$$

(тут  $A$  — адитивний симетричний оператор, який визначено на множині  $H_A$ , скрізь щільній у гільбертовому просторі  $H$  (див. *Простір абстрактний у функціональному аналізі*) і  $(Ay, y) > 0$  має розв'язок, то на цьому розв'язку функціонал

$$I(y) = (Ay, y) - (y, f) - (f, y) \quad (5)$$

набуває найменшого значення в  $H_A$ . Навпаки, якщо в  $H_A$  існує елемент  $y_0$ , що мінімізує функціонал (5), то  $y_0$  є розв'язком рівняння (4). Функціонали (2) і (3) можна розглядати як окремі випадки функціоналу

$$I(y) = \|Ay - f\|^2.$$

Для відшукування найменшого значення функціоналу вистосовують багато обчисл. методів (див. *Операторних рівнянь способи розв'язування*). А. І. Веревський.

**ВВЕДЕННЯ ІНФОРМАЦІЙ ПРИБОРІВ** — див. *Пристрої введення та виведення інформації*.

**ВЕДЧА ДІАГРАМА** — те саме, що й *Карнау карта*.

**ВЕКТОР УЗАГАЛЬНЕНОГО ГРАДІЄНТА** *опуклої функції*  $f$  змінних  $f(x)$  у точці  $x^*$  — вектор  $f_{x^*}$ , для якого при будь-якому  $x \in E^n$  справджується нерівність

$$f(x) - f(x^*) > (f_{x^*}, x - x^*),$$

де  $E^n$  —  $n$ -вимірний евклідов простір. Якщо в точці  $x^*$  ф-ція  $f(x)$  неперервно диференційовна, то вектор  $f_{x^*}$  визначено однозначно, і він збігається з *градієнтом* ф-ції  $f(x)$ . Якщо ж у точці  $x^*$   $f(x)$  не дифе-

ренційовна, вектор  $f_x$  визначається неозначено. За допомогою вектора  $f_x$  можна побудувати ітераційний процес, який дає змогу відшукати мінім. значення опуклої недиференційовної ф-ції. Аналогічно визначається узагальнений градієнт і в нескінченновимірних просторах.

В. М. Пшеничний

**ВЕЛИКА ІНТЕГРАЛЬНА СХЕМА (ВІС)** — інтегральна схема, що містить тисячі компонентів і виконує функції цілого вузла електронної апаратури. На ВІСах будують обчислювальні машини 4-го покоління (див. *Електронна обчислювальна машина*).

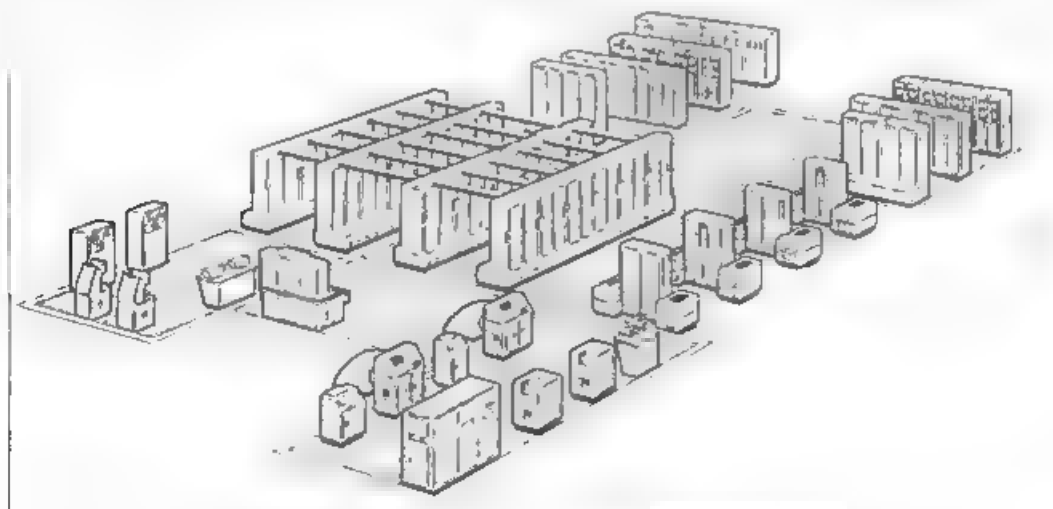
**ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ЗАКОН** — загальний принцип, за яким спільне діюння багатьох випадкових факторів приводить, за деяких досить загальних умов, до результату, що майже не залежить від випадку. Нехай  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — послідовність випадкових величин,  $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  — сума  $n$  перших з них,  $A_n = MS_n = M\xi_1 + \dots + M\xi_n$  — математичне сподівання  $S_n$ . Кажуть, що наведена послідовність підпорядковується В. ч. з., якщо при будь-яких  $\varepsilon > 0$  і  $\delta > 0$  знайдеться таке  $N$ , що для всіх  $n \geq N$  з імовірністю, не меншою як  $1 - \delta$ , середнє арифметичне  $S_n/n$  відхиляється від  $MS_n/n$  не більше як на  $\varepsilon$ . Якщо величини  $\xi_1, \xi_2, \dots$  взаємно незалежні й мають одну й ту саму ф-цію розподілу, то для застосовності В. ч. з. досить, щоб  $\xi_n$  мали скінченне матем.

сподівання В. ч. з. досить, щоб  $B_n^2/n^3 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (тут  $B_n^2 = DS_n$  — дисперсія  $S_n$ ). Див. також *Імовірностей теорія*.

М. П. Слободянюк.

**ВЕЛИКІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ** — див. *Складні системи керування*.

**«ВЕСНА»** — електронна цифрова обчислювальна машина загального призначення. Електронна схема машини побудована на напівпровідникових діодах і тріодах і конструктивно оформлено у вигляді стояків, у кожному з яких є до 600 замінних комірок (дпа. мах.). Центральний обчислювальний пристрій процесор (ЦОП) «В» працює зі швидкістю близько 250 тис. команд за 1 сек. Оброблювана інформація кодується 48 розрядними двійковими кодами. ЦОП має широкий набір операцій: над числами з плаваючою комою; операцій, що забезпечують прискорення виконання розрахунків з підвищеною точністю (з мантисою подвійної довжини); над числами з фіксованою комою; логічних шестиронних кодів і різних варіантів операцій керування. *Оперативний запам'ятовувальний пристрій* (ОЗП) машини поділяється на малий ОЗП, побудований на 32 швидкодіючих тригерних регістрах, основний ОЗП — на феритових осердях — складається з 2-х блоків ємністю по 1024 числа з циклом близько 1 мксек, і великий ОЗП з 4-х блоків, що працюють одночасно, ємністю 16 тисяч чисел кожний і з циклом звернення 10 мксек. Послідовні адреси великого ОЗП чергуються до різ-



Електронна цифрова обчислювальна машина «Весна».

них блоках, завдяки чому досягається скорочення середнього циклу звернення до великого ОЗП. Код команди ЦОП містить дві 6-розрядні адреси малого ОЗП (A1, A2), одну 16-розрядну «довгу» адресу ОЗП (A3), за якою можна звернутися до будь-якої частини

них блоках, завдяки чому досягається скорочення середнього циклу звернення до великого ОЗП. Код команди ЦОП містить дві 6-розрядні адреси малого ОЗП (A1, A2), одну 16-розрядну «довгу» адресу ОЗП (A3), за якою можна звернутися до будь-якої частини

ОЗП, і 6-розрядну адресу модифікатора «дог» адреси (В), причому для зберігання модифікатора використовується малий ОЗП. У коді команди є показник, який дає змогу використовувати «дог» адресу як адресу вихідного числа і як адресу результату операції, що виконується за цією командою. Коли дані, що найчастіше використовуються в обробці, зосереджуються в малому й основному ОЗП, досягається найвища швидкість обчислень. Для підвищення швидкості роботи в ЦОП, як правило, суміщується обробка до 4-х команд оброблюваної програми, що йдуть підряд: одночасно з вибиранням з ОЗП та модифікацією адреси якоїсь  $k$ -ї команди провадиться й вибирання чисел за  $(k-1)$ -ю командою, дія над числами за  $(k-2)$ -ю командою і відсилання результату за  $(k-3)$ -ю командою. ЦОП має систему переривань, яка дає змогу відключувати багатопрограмну роботу.

В комплекті *аналогово-цифрових пристроїв* зовнішніх машини передбачено до 8 магнітних барабанів ємністю по 65 тис. чисел кожний і до 32-х нагромаджувачів на магнітних стрічках ємністю 0,5—1 млн. чисел кожний. Передбачено введення та введення даних за допомогою шерфокарт і шерфстрічок, введення на *аналого-цифровий друкувальний пристрій* і телеайс. Обмін даними між ЦОП і зовнішніми пристроями провадиться через великий ОЗП. Для керування даним обміном з програмно керований координаційний обчислювальний пристрій (КОП) з простим набором операцій та своєю системою переривання. КОП, працюючи в багатопрограмному режимі, виконує програми керування обміном даними між великими ОЗП і конкретними зовнішніми пристроями. КОП працює здебільше в режимі частих взаємних переривань програм з урахуванням деякого заданого пріоритету в обробці програм різних пристроїв. У машині є апаратура захисту ділянок пам'яті, що забезпечує при багатопрограмній роботі автоматичне усунення взаємних перешкод під час звертання різних програм до оперативної пам'яті. Організується весь процес обробки даних стандартною програмою, яка завантажує машину потоком інформації в кількох задачах, керує суміщенням у часі процесом обчислювань у ЦОП та обміном даними кількох *зовнішніх пристроїв* з великим ОЗП (за участю КОП) і забезпечує функції контролю ходу обчислювань і оперативного керування. Наявність у машині апаратури для багатопрограмної роботи й суміщеного введення — введення даних дає змогу вести в процесі обчислювань автоматично обмін інформацією з кількома абонентами по лініях телеграфно-телефонного зв'язку «В» широко застосовують для розв'язування науково-тех. та інформаційно-логічних задач (напр., у Гідрометеорологічному центрі СРСР).

**ВЗАЄМНА КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ** *В. К. Лєтін*  
функція, що характеризує ступінь зв'язку між значеннями двох випадкових процесів  $x(t)$  і  $y(t)$  в моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ . Якщо  $x(t)$  і  $y(t)$  — випадкові процеси з комплексними значеннями, їхня В. к. ф. визначається формулою

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M \{ \dot{x}(t_1) \dot{y}(t_2) \}$$

(тут риска вгорі означає операцію комплексного спряження), де  $\dot{x}(t_1) = x(t_1) - m_x(t_1)$ ,  $\dot{y}(t_2) = y(t_2) - m_y(t_2)$ ,  $M$  — символ операції обчислювання матем. сподівання,  $m_x(t)$  і  $m_y(t)$  — матем. сподівання процесів  $x(t)$  і  $y(t)$ . В. к. ф. дійсних випадкових процесів описується виразом:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M \{ \dot{x}(t_1) \dot{y}(t_2) \}.$$

Якщо відома сумісна щільність (мовірності)  $p(\dot{x}(t_1), \dot{y}(t_2))$ , випадкових величин  $\dot{x}(t_1)$  та  $\dot{y}(t_2)$ , які відповідають значенням випадкових процесів  $\dot{x}(t)$  й  $\dot{y}(t)$  в моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ , то В. к. ф. цих процесів можна обчислити як:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t_1) \dot{y}(t_2) \times \\ \times p(\dot{x}(t_1), \dot{y}(t_2)) d\dot{x}(t_1) d\dot{y}(t_2).$$

Якщо В. к. ф. випадкових процесів  $x(t)$  й  $y(t)$  не дорівнює тотожно нулеві, то ці процеси наз. *корельованими*, в протинному разі — *некорельованими*.

В. к. ф. двох стаціонарних і стаціонарно пов'язаних випадкових процесів є  $\phi$ -цією різниці аргументів  $\tau = t_2 - t_1$ . Якщо при цьому довільний процес  $[x(t), y(t)]$  ергодичний (див. *Ергодична теорія*), В. к. ф. можна обчислити усередненням за часом однієї реалізації цих двох процесів, тобто

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \dot{x}(t) \dot{y}(t+\tau) dt.$$

Для практичних обчислень використовують оцінку В. к. ф. за реалізацією скінченної тривалості  $T$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{y}(t+\tau) dt.$$

Часто буває зручно використати т. з. *нормовану В. к. ф.*, тобто віднесену до середнього геометричного дисперсій розглядуваних процесів

$$r_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{D_x D_y}},$$

де  $D_x$  і  $D_y$  — дисперсії випадкових процесів  $x(t)$  й  $y(t)$ , які дорівнюють значенням їхніх *автокореляційних функцій* при  $\tau = 0$ .

В. м. ф. широко використовують у теорії автомат. керування: в статистичному аналізі систем автомат. керування, для визначення динамічних характеристик керування об'єктів, автомат. розпізнавання образів, вимірювання параметрів руху, в тех. діагностиці тощо. В. м. ф. обчислюють за допомогою аналогових або цифрових спеціалізованих обчисл. пристроїв — *кореляторів* або за допомогою ЕЦОМ. Див. також *Кореляційна теорія випадкових процесів*, *Кореляція в теорії ймовірностей*. Дт. Пугачев Я. С. Теорія випадкових функцій і її застосування в задачах автоматичного управління М., 1962 [616]. Стр. с. 47. Чл. Пугачев В. С. Введення в теорію вертутностей. М. 1968. С. Ф. Коробовський.

**ВЗАЄМОДІЯ ЛЮДИНИ З ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЮ МАШИНОЮ** — процес обміну повідомленнями між людиною й обчислювальною машиною, зумовлений необхідністю послідовного й (або) паралельного виконання людиною й машиною дій над сумісним розв'язуванням якоїсь задачі. Досі значну частину процесу розв'язування задачі — найчастіше розробку методу, або алгоритму розв'язування, — людина виконувала, не обмінюючись пристроєними повідомленнями з обчислювальною машиною (ОМ). Проте навіть у цьому разі умовно можна говорити про наявну форму взаємодії: людина виконує уявний обмін повідомленнями з моделлю ОМ, відображеною в її свідомості. За явної взаємодії процес розв'язування задачі включає в себе цикли обміну пристроєними повідомленнями між людиною й реальною ОМ.

Виділяють такі категорії людей, які вступають у взаємодію з ЕОМ: замовники, або постановники задачі, які формулюють її умови, беруть участь в уточненні її та визначенні форм представлення первинних даних і потрібних результатів; програмісти різної спеціалізації, які розробляють план і алгоритм розв'язування задачі, та алгоритмісти, які описують план розв'язування задачі вхідною мовою програмування; оператори, які працюють на пристроях введення — виведення й на центр або індивідуальних пультах та (п. За відношенням до замовника (постановника задачі) розрізняють приймач зв'язок людини з ЕОМ, коли між ними немає посередників (операторів, програмістів), і посилаючий зв'язок, коли такі посередники є.

Виділяють такі осн. види систем «людина — ЕОМ»: а) визначені особливостями матем. експлуатації їх: «замовник — програміст — оператор — машина», «замовник — оператор — машина — консультант», «замовник — машина» та ін. Режим прямого зв'язку для постановки задачі реалізується завдяки тому, що зв'язилися розвинені системи *автоматизації програмування* та *операційні системи*, спростилися зв'язок з машиною внаслідок введення індивідуальних зручних пультів (типу друкарських машинок, кувальців на базі електроннопроменевої трубки; див. *Екранний пульт*) і, крім того, внаслідок перетачі замовникові деяких пока що не автоматизова-

них ф-цій програміста й оператора. Такий режим реалізовано або на однопрограмих ОМ (типу «МІР» і «Hairs»), як правило, з невисокою швидкодією, або на мультипрограмих швидкодіючих машинах у режимі пакетної обробки даних і в режимі розподілу часу.

На різних етапах розв'язування задачі В. л. з о. м. має різне функціональне навантаження. На початковому етапі розв'язування завдання забезпечує реєстрацію користувача, наведення ним довідок про можливості даної машини (системи) й замовлення ресурсів, потрібних для того, щоб розв'язати цю задачу. Далі, коли людині відомо алгоритм розв'язування задачі, внаслідок взаємодії здійснюється введення повідомлення, встановлюється граматична правильність його й виконується перевірка (й вироблення) алгоритмічної правильності повідомлення, тобто налагоджується програма (див. *Наладжувальні програми*). І, нарешті, треба, щоб В. л. з о. м. забезпечила побудову невідомого раніше алгоритму, тобто методу розв'язування задачі. При цьому можна використовувати й творчі можливості людини, й відповідні евристичні алгоритми, закладені в машину. В першому випадку припускають, що основу творчу роботу по складанню алгоритму виконує людина, а машина, в крайньому разі, інформує її про свої можливості (про склад *бібліотеки стандартних підпрограм* і про адекватні мови програмування). В другому випадку людина виконує тільки ті дії, які потрібні для роботи евристичних алгоритмів, закладених у машину. За приклади таких дій можуть вважати: описування (вхідною мовою програмування) проблемних ситуацій, до яких машина не має доступу, встановлювання критеріїв оцінок для запропонованих машиною альтернатив тощо.

Приймач зв'язок людини з ОМ на всіх етапах розв'язування задачі в багатьох випадках потребує оперативної взаємодії, тобто такої взаємодії, коли обмін повідомленнями між ними проходить дуже швидко. При цьому самі повідомлення, як правило, великі й легкі для огляду. Для неоперативної взаємодії, навпаки, характерні досить великі інтервали часу між повідомленнями, причому ці повідомлення можуть становити собою досить місткі й складні тексти, графіки й зображення. Оперативна взаємодія під час прямого зв'язку людини з машиною характерна для *діалогового режиму*, коли людина одержує можливість втручатися в хід розв'язування задачі на машині та звертатися до машини за довідками й одержує повідомлення-відповідь машини через такі інтервали часу, щоб це не заважало їй думати й не обтяжувало її. Режимом діалогу при розв'язуванні задачі може керувати не тільки людина, як це є в переважній більшості систем налагоджування, систем програмування природною мовою й систем розв'язування задач у режимі запитань і відповідей, а й обчислювальна машина. Прообразом діалогу, керованого машиною, може бути навчання за допомогою ОМ (див. *Автоматизоване навчання клас*) і розробка методу розв'язуван-

ня задач за допомогою евристичних, реалізованих на машині приписів, які узагальнюють способи розв'язування задач якогось визначеного класу.

Як і тоді, коли задачу спільно розв'язують двоє людей, ефективність різних форм В. д. з о. м. з основною належить від якості, часу й вартості розв'язування задач (останні два показники визначаються не тільки якістю й кількістю машинного часу, а й часом, що його затрачує людина на розв'язування цієї задачі, й вартістю її праці). Вона залежить і від взаєморозуміння людини й ОМ, психологічної готовності людини розв'язувати свої задачі за допомогою ОМ, від доступності ОМ для людини, зручності зв'язку з ОМ і швидкості реакції ОМ на повідомлення, введені людиною. Реалізацію сукупності цих чинників забезпечують, створюючи високопродуктивні алгоритмічні структури й системи *математичного забезпечення ЦОМ* (це створює передумови для реалізації чинників взаєморозуміння, швидкості реакції, доступності тощо) та розробляючи навчальні системи підготовки до В. д. з о. м. (чим вищий рівень підготовки, тим простіше досягнути взаєморозуміння людини й ОМ, тим упевненіше почуває себе людина; тобто, реалізується чинник психологічної готовності до взаємодії цей чинник значною мірою належить від рівня розвитку систем матем. забезпечення чим воно багатше, тим упевненіше людина звертається до ОМ).

Процес досягання взаєморозуміння розглядають як процес визначення людиною можливостей машини під час розв'язування за її допомогою якоїсь задачі. В результаті цього визначення людина повинна так формулювати свої повідомлення, щоб машина могла виконувати саме ті дії, яких від неї чекають. Якщо реакція машини відповідає тому, на що сподівалася людина, то можна вважати, що машина успішно виконала припис, які є в повідомленні людини, і що в розглядуваному циклі взаємодії досягнуто взаєморозуміння. Доступність ОМ для людини передбачає створення можливості звертатися до машини з будь-який зручний для неї час, а зручність спілкування людини з ОМ — виконання деяких звичайних вимог *психологічної інженерії* щодо зручності розміщення й доступності для огляду виводжуваних і одержуваних повідомлень, щодо конструкції пристроїв введення, виведення тощо. Швидкість реакції машини визначається затримкою між моментом закінчення повідомлення людини й моментом початку виведення чергового повідомлення машини. Ефективність різних форм взаємодії залежить не тільки від комплексної реалізації зазначених вище чинників у кожному з партнерів, а й від повноти, від рівня реалізації кожного з чинників. Найбільшою мірою ця залежність проявляється для діалогових форм взаємодії. Щоб увійти у взаємодію з машиною, людина повинна вміти привабливо чітко сформулювати свою задачу і мати хоча б загальні відомості про можливості ОМ. Цього може

визначитися досить, якщо встановлено непрямої зв'язок з машиною. Коли зв'язок з машиною прямий, людина повинна вже знати хоч би одну з вихідних мов програмування, реалізованих на цій машині, вміти записати цією мовою алгоритм розв'язування своєї задачі, віставити одержаний результат в гаданим їй, коли необхідно, внести корективи в алгоритм.

Що ж до вимог до машини, то для недалекого майбутнього, здійснюваної переважно в режимі пакетної обробки, їх можна задовольнити вже при наявності *транслятора й бібліотеки стандартних підпрограм* (кількість трансляторів і повнота бібліотеки передусім визначає різноманітність класів розв'язуваних на цій машині задач). При діалоговій взаємодії, яка здійснюється або на однопрограмих ОМ, або на мультипрограмих — у режимі розподілу часу, вимоги до машини різко зростають: треба, щоб машина мала велику кількість стандартних програм розв'язування задач і засобів інтерпретації вихідних мов програмування, які зберігаються структурно, тобто так, що звернення до відповідних засобів можна виконувати автоматично за командою з індивідуального пристрою зв'язку з машиною. В разі діалога, керованого ОМ, треба, щоб у цій машині було реалізовано й спец. операційну систему, яка знає про всі можливості машини щодо розв'язування певного класу задач і «знає» (після опитування користувача) віднести його задачу до певного класу й реалізувати евристичний припис за узагальненим способом розв'язування задач цього класу. При діалоговій взаємодії різко зростають вимоги не тільки до рівня реалізації чинників взаєморозуміння, а й до чинника швидкості реакції машини: треба, щоб час затримки відповіді було мінімізовано (як у результаті розробки ефективного режиму розподілу часу, так і завдяки спец. пристроєм відображення, напр., відображення на електроннопроменеву трубку). Важливим засобом організації ефективного діалогового режиму В. д. з о. м. є й створення спец. навчальних систем, які переводять ОМ у режим *навчальної машини*, яка забезпечує підготовку користувачів ОМ до розв'язування задач за допомогою цієї самої ОМ. Для непрямого зв'язку користувача з ОМ таку навчальну систему в багатьох випадках можна реалізувати за допомогою комплексу *програмованих підручників і посібників*.

Організація ефективної В. д. з о. м. на базі перелічених чинників є комплексною проблемою, яка стоїть і перед розробниками, і перед користувачами ОМ. Ключ до розв'язання її лежить у дослідженні задач і способів розв'язування їх людиною, машиною й системою «людина — машина». В цьому дослідженні, крім кібернетиків, повинні взяти участь системотехніки, математики й психологи. Див. також *Системотехніка*.

Лит.: Якубівський Л. П. О діалоговій системі. В кн.: Русская речь. Петрозаводск, 1923; Глушкова В. М. [та ін.] Вычислительные машины с разнотипными системами интерпретации. К., 1970 [бібліогр.

с. 254—257], Глушкова В. М. [там же]. Человеческие вычислительные техники К., 1971 [библиогр. с. 284, 291]. On line computing New York, 1967. Schwartz R. M., Burger J. P., Simmons R. F. A deductive question-answer for natural language inference «Communications of the Association for Computing Machinery», 1970, v. 13, № 3. A l p e r t D., B i t t e r J. L. Advances in computer-based education «Science», 1970, v. 167, № 3925.

В. І. Брановицький, О. М. Домала, що й надалі вибірка.

**ВІВЕДЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ПРИСТРІЙ** — див. Пристрій введення та виведення інформації.

**ВІГРАШІВ МАТРИЦЯ** — матриця, рядками якої є стратегії першого гравця у симметричній грі двох осіб (див. *Гри матричні* і *Гра біматрична*), стовпцями — стратегії другого гравця, а елемент на перетині рядка і стовпця — виграш гравця в ситуації, утвореній відносно даними стратегіями. При описуванні матричної гри вказується лише В. м. першого гравця. М. М. Воробіцов.

**ВІГРАШУ ФУНКЦІЯ** — функція, що приписується у грі безпосередній кожному гравцю. Задатість за можливий усіх ситуацій і набуває дійсних значень, що чисельно виражають виграш гравця в різних ситуаціях. У грі антагоністичній В. ф. і го гравця часто називають В. ф. самої гри. Див. також *Горігорія*. М. М. Воробіцов.

**ВИДІЛЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ ЗАВАД** — операція поділення завдання дій завад і підвищення правильності передавання корисного (такого, що несе інформацію) сигналу внаслідок відновлення втраченого значення цього сигналу з заданою ймовірністю помилки. При цьому ефективність виділення корисного сигналу можна оцінювати функцією ймовірності того, що виділення в виділеного сигналу від його справжнього значення не перевищує якогось заздалегідь заданого порога  $\varepsilon_0$ .

$$p \approx p(\varepsilon < \varepsilon_0).$$

В загальному випадку В. с. на ф. з. оснований на апріорних відомостях про параметри (відмітні ознаки) сигналу і завад. Відмінність спектральних характеристик, інтенсивностей, часових властивостей і фазових співвідношень сигналу й завад дає змогу здійснювати функціональну (частотну, амплітудну, часову, фазову та ін.) вибірність у системі виділення сигналу й ослабляє певною мірою вплив завад. Найбільшого зосищення набула частотна вибірність.

Рад. вчений-радіотехнік В. О. Котельников (п. 1908) та амер. вчений Ф. Вудворд незалежно один від другого обґрунтували принципову можливість оптимального виділення (при ймання) сигналів, яка забезпечує максимальну ймовірність правильного відтворення корисного сигналу. Виділення сигналу в цьому випадку розглядається як завдання визначення на основі аналізу реалізації прийнятого сигналу умовної ймовірності  $p_x(x)$  того, що прийнятому сигналові  $y$  відповідає певний корисний сигнал  $x$ . Корисний сигнал при цьо-

му розглядають, як випадковий об'єкт з відомим законом розподілу  $p(x)$  у відповідному просторі. Визначення умовної ймовірності  $p_x(x)$  дає змогу якнайкраще аменішити апріорну невизначеність щодо прийнятого сигналу. При відомому законі розподілу ймовірностей корисного сигналу  $p(x)$  вираження  $p_x(x)$  можна звести до визначення умовної ймовірності  $p_x(y)$  того, що відомому сигналові  $x$  відповідає прийнятий сигнал  $y$ , бо  $p_x(x) = \int p(x) p_x(y)$ , де  $k$  — стала,  $p_x(y)$  звичайно наз. функцією правдоподібності й позначають  $L(x)$ . Рішення про виділення (прийняття) певного сигналу  $x$  приймають за максимумом функції правдоподібності.

Оптимальне виділення (прийняття) корисного сигналу можна здійснювати й не визначаючи умовних ймовірностей  $p_x(x)$  або  $p_x(y)$ . Достатньо, щоб результати обробки суміші корисного сигналу та завад однозначно визначалися цими розподілами. Так, для оптич. виділення сигналу  $x(t)$ , який діє на фоні білого шуму з нормальним законом розподілу амплітуд  $x(t)$  протягом часу  $T$ , досить визначити кореляційний інтеграл

$$r_{xx}(\tau) = \int_0^T y(t) x(t - \tau) dt,$$

де  $y(t) = x(t) + n(t)$  — суміш корисного сигналу і завад. Така операція дає змогу видобути найбільше інформації про сигнал, оскільки за значеннями  $r_{xx}$  однозначно визначається функція правдоподібності  $L(x)$ . Це доводить оптимальність приймача взаємнокореляційного типу.

Пристрій виділення сигналу можна розглядати як лінійний фільтр, який обробляє суміш  $y(t)$  так, що вихідний сигнал  $y_{\text{вих}}(t)$  найкраще (в рамках прийнятого критерію) відтворює корисний сигнал  $x(t)$ . Такий пристрій наз. оптич. фільтром, а сам процес виділення корисних сигналів — оптич. фільтрацією. Основи теорії оптич. фільтрації закладено в працях рад. математика А. М. Колмогорова (п. 1903) та амер. математика Н. Вінера (1894—1964).

Взаємнокореляційний приймач можна розглядати як оптимальний за критерієм максимуму інформації фільтр, а його вихідний сигнал у момент  $t$  — як реакцію фільтра з імпульсною характеристикою, тобто рівною дзеркальному зображенню сигналу

$$r_{yx}(\tau) = r_{\text{вих}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) x(t + \tau - t_0) dt.$$

Частотна характеристика такого фільтра  $K(\omega)$  з точністю до постійного множника збігається з комплексно спряженим спектром корисного сигналу  $X(\omega)$

$$K(\omega) = X^*(\omega) \exp\{-j\omega t_0\}.$$

Будучи оптимальним в інформаційному розумінні, взаємно-кореляційний приймач максимізує відношення пікового значення сигналу до ефективного значення завади. Це відношення дорівнює відношенню повної енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму  $q = \frac{E}{G_n}$  і не залежить від

форми корисного сигналу. Фільтри виділяють корисного сигналу можна оптимізувати за критерієм мінімуму середньоквадратичного відхилення

$$e^2(t) = \overline{[y_{\text{вих}}(t) - x(t)]^2}.$$

Частотна характеристика такого оптимального фільтра для статистично незалежних сигналів й завад однозначно визначається формою енергетичного спектра корисного сигналу  $G_x(\omega)$  і завад  $G_n(\omega)$ :

$$K(\omega) = \frac{G_x(\omega)}{G_x(\omega) + G_n(\omega)}.$$

У практиці для виділення сигналів широко застосовують квазіоптимальні фільтри. Форма частотної характеристики яких певною мірою довільна і не залежить від спектра сигналу й завад, а смугу пропускання узгоджено з ними. Відношення сигналу до завад на виході таких фільтрів гірше, ніж в оптимальних.

Лит. Колмогоров А. Н. Интерполірація і екстраполяція випадкових процесів. М.: Наука, 1981. 256 с. (Бібліогр. с. 155-156).  
Исханов Ш. И. Автоматическое управление с шаговыми двигателями. М., 1988 (Бібліогр. с. 132-135).  
Лит. Шегал Г. П., Коротков Г. С. Электрические исполнительные механизмы в системах управления. М., 1968 (Бібліогр. с. 155-156).  
Исханов Ш. И. Автоматическое управление с шаговыми двигателями. М., 1988 (Бібліогр. с. 132-135).

**ВИКЛЮЧЕНОГО ТРЕТЬОГО ЗАКОН** — положення, за яким з двох висловлювань, одно з яких взапереченням другого, істинним є одно і тільки одно. Тобто правильним є або те положення, що стверджує висловлювання  $p$ , або те, що стверджує  $\neg p$ . Третього немає. У класичному численні висловлювань цей закон приймається, тобто можна вивести теорему  $p \vee \neg p$ . В. т. з. не раз зазнавав критики, яка мала в осн. філос. характер. Це привело до формулювання й вивчення логік систем, у яких В. т. з. не справджується (див. *Логіки неklasичні*). М. І. Крикоров.

**ВИКОНАВЧИЙ МЕХАНІЗМ** — пристрій, що здійснює механічне переміщення регульованого органа, який змінює режим об'єкта регулювання. За видом вихідної величини В. м. бувають неперервної і дискретної дії. Вони здійснюють при обертальному русі повертання на кілька обертів, на один, на частину оберта, а при поступальному русі — переміщення на крок або кілька кроків. В. м. бувають із сталою і змінною швидкістю переміщення вихідного елемента механізму. За видом використовуваної енергії

В. м. поділяють на гідравлічні, пневматичні, електричні й комбіновані (електрогідравлічні та ін.). З електричних В. м. неперервної дії найпоширеніші електромех. В. м. Часто використовують В. м. з місцевими зворотними зв'язками (т. з. «позиціонери»).

Осн. вимоги до В. м.: швидкодія, точність, потужність на виході В. м., макс. момент або зусилля, момент інерції, частота й габарити. У більшості електр. В. м. потужність електродвигуна становить від кількох  $\text{см}$  до  $1 \text{ мвт}$ . У В. м. електр. крокові двигуни мають обертальний момент від кількох  $\text{Гсм}$  до кількох  $\text{нГм}$  і можуть робити відповідно від кількох тисяч до кількох сотень кроків за  $1 \text{ сек}$ . Пневматичні В. м. працюють здебільшого при тиску живлення кілька  $\text{ам}$ , гідравлічні — від кількох десятків до кількох сотень  $\text{ам}$ .

Лит. Шегал Г. П., Коротков Г. С. Электрические исполнительные механизмы в системах управления. М., 1968 (Бібліогр. с. 155-156).  
Исханов Ш. И. Автоматическое управление с шаговыми двигателями. М., 1988 (Бібліогр. с. 132-135).

**ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА** — величина, що залежно від випадку набуває того чи іншого значення за певним законом розподілу. Приклади В. в.: тривалість безвідмовної роботи приладу, число замовників, які чекають на обслуговування на якомусь обслуговуючому приладі, координата рухомого об'єкта в даний момент часу. Якщо В. в.  $\xi$  дискретна, тобто набуває скінченної кількості значень або всі її значення можна розмістити у вигляді нескінченної послідовності  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , то закон розподілу  $\xi$  описують задаванням усіх ймовірностей  $P\{\xi = x_i\}$ . У заг. випадку закон розподілу В. в. виражається ф-цією  $F(x) = P\{\xi \leq x\}$ , яку наз. функцією розподілу В. в.  $\xi$ . Ф-ція розподілу визначає ймовірність попадання В. в. в будь-який інтервал  $[a, b]$  за ф-лою  $P\{a \leq \xi \leq b\} = F(b) - F(a)$ . Якщо існує невід'ємна ф-ція

$p(x)$ , така, що при всіх  $x$   $F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$ , то  $p(x)$  наз. щільністю ймовірності В. в.  $\xi$ . При цьому  $P\{a \leq \xi \leq b\} = \int_a^b p(u) du$ . Ряд заг. властивостей В. в.

досить повно описують невеликим числом числових характеристик; найуживанішими з них є математичне сподівання та дисперсія. М. В. Адренко.

**ВИПАДКОВА ПОДІЯ** — подія, яка за даних умов може як відбутися, так і не відбутися, причому є певна ймовірність  $p$  ( $0 < p < 1$ ), що за даних умов вона відбудеться. Те, що В. п. має певну ймовірність, виявляється в поведінці її частоти, якщо зазначені умови повторити  $N$  разів, а подія  $A$  настане при цьому  $N(A)$  разів, то частота  $N(A) : N$  настання події  $A$  при великих  $N$  виявляється близькою до  $p$ . Див. також *Ймовірностей теорія*. М. П. Слободянюк.

**ВИПАДКОВА ФУНКЦІЯ** — функція  $\{F(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$  двох аргументів, визначена на добутку  $\Omega \times T$  множини  $\Omega$  можливих елементарних подій з множиною  $T$  значень невинядових аргументу  $t$ . Для кожного значення аргументу  $t$  функція  $F(t, \omega)$  є функцією тільки наслідків випробування  $\omega$ , і, отже, являє собою випадкову величину. Для будь-якого фіксованого значення  $\omega$  функція  $F(t, \omega)$  залежить лише від  $t$  і є функцією одного дійсного змінного. Кожну таку функцію наз. можливою реалізацією або «вибірковою функцією»  $B. ф. \{F(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ , відносно даному  $\omega$ . Т. ч., залежно від фіксованого аргументу,  $B. ф.$  можна представити або як сімейство випадкових величин, або як сукупність реалізацій, одержуваних при різних  $\omega$ -наслідках. Найчастіше  $B. ф.$  позначають функцією одного аргументу  $t$  (напр.,  $\xi(t), x(t)$ ), опускаючи символ  $\omega$ .

Якщо множина  $T$  є дослідовністю (скінченною або нескінченною) і  $B. ф.$  має вигляд  $F(t, \omega), F(t_1, \omega), \dots$  кажуть про  $B. ф.$  з дискретним аргументом або про випадкову послідовність. Якщо  $T$  — інтервал,  $B. ф.$  є сімейством випадкових величин, залежних від неперервного аргументу.  $B. ф.$  наз. *випадковим процесом*, якщо  $T$  — дійсна пряма або відрізок прямої, а аргумент  $t \in T$  інтерпретуються як час.

$B. ф.$  можна визначити задаванням імовірнісної міри  $P$  у функціональному просторі (див. *Простір абстрактний у функціональному аналізі*)  $\Pi$  реалізацій. Проте труднощі застосування цього методу задавання  $B. ф.$ , які полягають у складності конкретного описування у функціональному просторі, зумовлюють використання на практиці інших методів.  $B. ф.$  можна задавати й описуючи сімейства її частинних скінченновимірних розподілів. Так, якщо значеннями  $B. ф.$  є дійсні числа, задають

$$P_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{F(t_1, \omega) < x_1, \dots, F(t_n, \omega) < x_n\}$$

Збільшуючи  $n$ , можна одержувати дедалі вичерпнішу характеристику  $B. ф.$  Цей метод задавання  $B. ф.$  є найпоширенішим, бо для розв'язання багатьох важливих питань досить знати лише окремі розподіли, задавати які в багатьох випадках простіше, ніж відповідні міри  $P$  на всьому функціональному просторі.  $B. ф.$  можна також задавати за допомогою деяких коротких характеристик. За аналогією з характеристикою випадкових величин, які є певними сталими тислами, вводять характеристики  $B. ф.$  — невинядові функції аргументу  $x$ . До них належать *математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція*, які характеризують відносно якусь середню реалізацію  $B. ф.$  за множиною спостережень, середнє відхилення від неї, а також залежність між випадковими величинами (значеннями  $B. ф.$ ) для різних значень аргументу  $x$  (див. *Експериментальних даних способи статистичної обробки*).

На практиці іноколи застосовують непрямі методи досліджування  $B. ф.$ , а саме: методи знаходження коротких характеристик  $B. ф.$  за характеристиками інших  $B. ф.$ , пов'язаних з ними. Задача непрямого дослідження  $B. ф.$  зазначено ниммає в такій формі: на вхід динамічної системи  $A$  надходить  $B. ф. \{F(x, \omega)\}$ . Система піддає її певному перетворенню, в результаті на виході системи з'являється  $B. ф. \{G(x, \omega)\}$ . Відомі характеристики  $B. ф. \{F(x, \omega)\}$ . Треба знайти аналогічні характеристики  $B. ф. \{G(x, \omega)\}$ . Див. також *Випадкових процесів теорія*.

І. С. Сакунцова.

**ВИПАДКОВЕ ПОЛЕ** — випадкова функція кількох змінних. Кажуть, що на множині  $T$  задано скалярне  $B. п. \xi(t)$ , якщо кожному  $t$  з  $T$  поставлено у відповідність *випадкову величину*  $\xi(t)$ . Якщо  $\xi(t)$  набуває векторних значень, то  $\xi(t)$  наз. *векторним  $B. п.$*  на  $T$ . Поняття  $B. п.$  узагальнює поняття *випадкового процесу*: в тому випадку, коли  $T$  — підмножина числової осі,  $\xi(t)$  наз. *випадковим процесом*. Траєкторії в якійсь точці простору, інтенсивність космічного проміння в якійсь точці земної кулі — приклади  $B. п.$  відповідно в просторі й на сфері й описують випадкові флюктуації в різних задачах радіофізики, теорії розв'язання образів, автоматичного керування теорії й теорії турбулентності. Скалярне  $B. п. \xi(t)$  задається сукупністю всіх скінченновимірних розподілів, тобто набором усіх імовірностей виду  $P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\}$ . Важливими характеристиками  $B. п.$  є *математичне сподівання*  $m(t) = M\xi(t)$  й *кореляційна функція*  $R(t, s) = M\{\xi(t) - m(t)\} \times \{\xi(s) - m(s)\}$ . В практично важливому окремому випадку гауссівського  $B. п.$  (див. *Гауссівський випадковий процес*) ці дві характеристики повністю визначають і весь набір скінченновимірних розподілів.

Випадкові поля, що описують різні фізичні процеси, часто мають деякі властивості однорідності (інваріантності імовірнісних характеристик при перетвореннях простору  $T$ ). Припустимо, що на  $T$  задано якусь групу перетворень  $G$ . Нехай  $gt$  — точка, в яку переходить  $t$  під дією перетворення  $g$  з  $G$ . Випадкове поле  $\xi(t)$  наз. *однорідним у вузькому розумінні* відносно групи перетворень  $G$ , якщо розподіл значень поля в будь-яких  $n$  точках  $t_1, \dots, t_n$  з  $T$  співпадає з розподілом значень поля в точках  $gt_1, \dots, gt_n$  при будь-якому  $g$  з  $G$  та будь-якому  $n$ . Часто припускають менш обмежувальну умову інваріантності відносно  $G$  тільки функцій  $m(t)$  та  $R(t, s)$ , а саме:  $B. п. \xi(t)$  наз. *однорідним у широкому розумінні* відносно  $G$ , якщо для всякого  $g$  з  $G$   $m(gt) = m(t)$  (це означає, що  $m(t)$  не залежить від  $t$ ) і  $R(gt, gs) = R(t, s)$ . Для гауссівських випадкових полів поняття однорідності в вузькому й широкому розумінні співпадають. Припущення про однорідність спричинює до певних представлень для коре-



ляційної функції В. п. та вибірових функцій самого поля. Нехай, наприклад  $T$  — евклідов простір  $R^m$  м вимірювань, а  $G$  — група всіх паралельних переносів в  $R^m$ . В. п. на  $R^m$ , однорідне відносно  $G$ , наз. однорідним В. п. Кореляційна функція неперервного в середньому квадратичному однорідного В. п. залежить від різниці аргументів і має вигляд:

$$R(t, s) = \int_{R^m} e^{i(t-s, \lambda)} F(d\lambda),$$

$$\text{де } (t-s, \lambda) = \sum_{k=1}^m (t_k - s_k) \lambda_k,$$

$F(\cdot)$  — скінченна міра на  $R^m$  (так звана спектральна міра В. п.). Саме поле  $\xi(t)$  припускає представлення у вигляді стохастичного інтегралу  $\xi(t) = \int_{R^m} e^{it, \lambda} Z(d\lambda)$ , де

$Z(\cdot)$  — випадкова адаптивна функція множини на  $R^m$  така, що  $MZ(S_1) \cdot Z(S_2) = F(S_1 \cap S_2)$  (зокрема, випадкові величини  $Z(S_1)$  та  $Z(S_2)$  некорельовані, якщо множини  $S_1$  та  $S_2$  не перетинаються).

Стационарний процес — окремий випадок однорідного В. п. Якщо  $T = R^m$ , а  $G$  — група всіх рухів в  $R^m$ , то В. п.  $\xi(t)$ , однорідне відносно  $G$ , наз. однорідним та ізотропним. Кореляційна функція  $R(t, s)$  такого поля залежить лише від відстані  $r$  між точками  $t$  та  $s$ , причому  $R(t, s) =$

$$= R(r) = \int_0^\infty \frac{J_{m-2}(ur)}{u^{m-2}} d\Phi(u), \text{ де } \Phi(u) =$$

обмежена неспадна функція на  $[0, \infty)$   $J_{m-2}(ur)$  — бессельова функція. Якщо  $T =$

$S^2$  — сфера одиничного радіуса в  $R^3$ , а  $G$  — група всіх обертань сфери, то В. п.  $\xi(t)$ , однорідне відносно  $G$ , наз. ізотропним випадковим полем на сфері. Кореляційна функція  $R(t, s)$  такого поля залежить від кутової відстані  $\cos \varphi$  між точками  $t = (\theta_1, \varphi_1)$  та  $s = (\theta_2, \varphi_2)$ , причому

$$R(t, s) = R(\cos \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(\cos \varphi), \text{ де}$$

$b_k \geq 0$ ,  $\sum b_k < +\infty$ ,  $P_k(x)$  — многочлен Лежандра степеня  $k$ . В. п.  $\xi(t)$  має вигляд  $\xi(\theta - \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \xi_l^k Y_l^k(\theta, \varphi)$ , де  $Y_l^k(\theta, \varphi)$  — сферичні функції  $\xi_l^k$ . Випадкові величини такі,

що  $M\xi_l^k \xi_l^k = \delta_l^k \delta_{l+1}^k \frac{2}{2l+1}$ . В теорії векторних В. п. роль, аналогічну до ролі кореляційної функції, відіграє кореляційна матриця. Для кореляційних матриць однорідних полів відомі й спектральні представлення.

М. Я. Яценко

**ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС**, імовірнісний процес, стохастичний процес — однопараметричне сімейство випадкових величин  $\xi(t)$ , одне з основних понять теорії випадкових процесів. Якщо на якійсь множині  $T$  визначено В. п., то для всіх  $t \in T$  визначено *випадкову величину*  $\xi(t)$ , яку наз. значенням В. п. в точці  $t$ . Звичайно  $T$  є числовою множиною і  $t \in T$  інтерпретується як час. Отже, В. п. — це функція, яка набуває випадкових значень. В. п. виникає у випадкових експериментах, результати яких можна описати значеннями якоїсь випадкової величини в кожний момент деякої множини моментів часу  $T$ . Якщо припустити, що значення цієї величини неперервно змінюється протягом експерименту, то одержану функцію часу наз. *випадковою функцією* В. п. А якщо експеримент повторювати, вибіркова функція щоразу змінюється. Множина всіх вибірових функцій становить ансамбль. Як правило, ансамблі вибірових функцій В. п. містять нескінченну (навіть незліченну) множину вибірових функцій.

Важливою характеристикою В. п. є його частинні розподіли — сукупність  $k$ -вимірних розподілів процесу  $\xi(t)$ , які дають сумисний розподіл значень процесу для  $k$  різних моментів часу. Зокрема, одновимірний розподіл  $F_k(x) = P\{\xi(t) < x\}$ , що дає розподіл величин  $\xi(t)$ , є найважливішою характеристикою В. п. Класифікують В. п. залежно від властивостей частинних розподілів (див. *Випадковий процес теорія*).

**ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТЕОРІЯ** — розділ імовірностей теорії, який вивчає випадкові процеси. Кажуть, що на множині  $T$  дійсної осі задано *випадковий процес*, якщо кожному  $t \in T$  поставлено у відповідність випадкову величину  $\xi(t)$ . Ця величина набуває дійсних, комплексних чи векторних значень, і залежно від цього процес наз. дійсним, комплексним чи векторним. Змінну  $t$  звичайно інтерпретують як час. Область визначення процесу  $T$  є або послідовністю  $\{t_k\}$  ( $t_k < t_{k+1}$ ) (можливо, нескінченною в обидва боки), і тоді випадковий процес наз. процесом з дискретним часом, або  $T$  є скінченим чи нескінченим інтервалом, тоді випадковий процес наз. процесом з неперервним часом. Прикладом найпростішого випадкового процесу з дискретним часом є випадкове блукання, яке описує положення частинки, що здійснює за одиницю часу випадковий перехід (величина кожного кроку при цьому не залежить від положення частинки). Прикладом випадкового процесу з неперервним часом є процес Пуассона, який описує кількість якихось однорідних подій, що відбулися за час  $t$  (напр., кількість викликів, які надійшли на телефонну станцію). Важливу характеристику випадкового процесу становлять його частинні розподіли — сукупність  $k$ -вимірних розподілів процесу  $\xi(t)$ , які дають сумисний розподіл величин  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_k)$  для якнайрізноманітніших наборів

$t_1, \dots, t_k$  з множини  $T$ . Для дійсного процесу  $k$ -вимірний розподіл визначається функцією  $2k$  аргументів

$$F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = \\ = P(\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_k) < x_k, \\ t_i \in T, x_i \in (-\infty, \infty))$$

(праворуч зазначено ймовірність того, що одночасно виконано нерівності  $\xi(t_i) < x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ). Для практичних застосувань важливо знати одновимірні розподіли процесу

$$F_t(x) = P(\xi(t) < x).$$

У разі, коли  $\xi(t)$  має абсолютно неперервний розподіл,  $k$ -вимірні розподіли можна задавати щільностями  $P_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k)$ . Цей спосіб можна застосовувати й для векторних випадкових процесів, але в цьому разі  $x_i$  будуть векторами. Іншими важливими характеристиками процесу є його моменти  $\phi$ -цілі:  $m_k(t_1, t_2, \dots, t_k) = M\xi(t_1) \dots \xi(t_k)$ ,  $t_i \in T$ , де  $M$  — матем. сподівання (припускаємо, що випадковий процес дійсний), або центровані моменти  $\phi$ -цілі  $m_k^0(t_1, \dots, t_k) = M \prod_{j=1}^k (\xi(t_j) - M\xi(t_j))$ ,  $t_i \in T$  (останні можуть бути виражені через нецентровані  $\phi$ -цілі). Найчастіше використовують перші дві моменти  $\phi$ -цілі:  $m(t) = m_1(t)$  — середнє значення процесу, а  $R(t, s) = m_2^0(t, s) = m_2(t, s) - m_1(t)m_1(s)$  — кореляційна  $\phi$ -цілі процесу. Вивчення випадкових процесів, коли задано лише середнє значення й кореляційну  $\phi$ -цілі випадкового процесу, становить зміст *кореляційної теорії випадкових процесів*.

Залежно від властивостей частинних розподілів розрізняють випадкові процеси з незалежними значеннями; випадкові процеси з *незалежними приростами* (окремим прикладами їх є: випадкове блукання, броунівський рух, процес Пуассона); *марковські процеси* (цей клас виключає, зокрема, випадкові процеси з незалежними приростами); *стаціонарні випадкові процеси*; *застійські випадкові процеси*. До заг. питань В. ч. належить побудова матем. моделей випадкових процесів і вивчення властивостей їхніх вибірових  $\phi$ -цілі. У багатьох випадках експерименти, в яких записуються вибірові  $\phi$ -цілі випадкових процесів, повторити неможливо. Тоді виникає задача про визначення властивостей вибірових  $\phi$ -цілі за частинними розподілами випадкових процесів. За теоремою Колмогорова, якщо для випадкового процесу  $\xi(t)$ , визначеного на  $[a, b]$ , існують постійні  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  і  $K > 0$  такі, що  $M|\xi(t) - \xi(s)|^\alpha < K(t-s)^{1+\beta}$ , то вибірові  $\phi$ -цілі випадкового процесу  $\xi(t)$  з ймовірністю 1 є неперервними.

Для випадкових процесів з незалежними приростами й марковських процесів важливою задачею є знаходження всіх можливих

частинних розподілів, тобто ймовірностей переходу, які відповідають цим розподілам. Осн. задачі в теорії стаціонарних випадкових процесів у вузькому розумінні пов'язані з доведенням ергодичної теореми, яка вста-

новлює існування границі  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi(k)$  або

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ або } T \rightarrow \infty \text{ (залежно}$$

від того, дискретним чи неперервним є час). Стаціонарні випадкові процеси в широкому розумінні зв'язані з кореляційної теорії випадкових процесів. Важливий розділ цієї теорії становить спектральна теорія стаціонарних випадкових процесів, до якої відносяться, розв'язуючи задачі екстраполяції та фільтрації випадкових процесів.

Для всіх класів випадкових процесів важливою задачею є визначення різних перетворень їх. Тут осн. роль відіграє знаходження алгоритмів, які дають змогу за характеристиками первісного процесу (за його частинними розподілами чи моментними  $\phi$ -цілями) аналізувати характеристики перетвореного процесу. Як окремий випадок розглядають задачу про визначення характеристик випадкових процесів, що є розв'язками дифер. рівнянь, у правій частині яких відображено й певний випадковий процес. В. ч. т. вивчає й способи визначення розподілів різних функціоналів випадкових процесів, напр., інтегральних функціоналів виду  $\int_0^1 f(\xi(s), s) ds$ , визначення ймо-

вірності того, що процес лежатиме в смугі  $a(t) < \xi(s) < b(s)$ ,  $s \in T$ , та визначення розподілів числа перетинів цієї смуги або числа виходів за цю смугу. Розв'язуючи такі задачі в кожному класі випадкових процесів, використовують відповідний апарат. Найкраще розроблено апарат для марковських процесів — це апарат дифер. рівнянь у частинних похідних та інтегро-диференціальних рівнянь.

Лит. Гітман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов М., 1965 [библ. с. 614—634]; Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы Пер. с англ. М., 1958 [библ. с. 589—594]; Парзель М. С. Введение в теорию случайных процессов. Пер. с англ. М., 1958 [библ. с. 365—376].

А. В. Скороход  
**ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТЕОРІЯ ПЕРЕДБАЧЕННЯ** — див. *Забачення випадкових процесів теорія*.

**ВИПАДКОВІ ЧИСЛА** — штучно одержана послідовність реалізацій випадкової величини з заданим законом розподілу. В. ч. застосовують при дослідженні й оптимізації складних ймовірнісних систем методом статистичного моделювання (див. *Монте-Карло метод*) за допомогою електронних обчисл. машин. Є три осн. способи одержування В. ч.: за допомогою таблиць В. ч.; за допомогою спец. електронної приставки до обчисл. машини — генератора В. ч. (див. *Давач випадкових чисел*); заміною В. ч. послідовністю т. з. *псевдовипадкових* чисел.

надкових чисел, що їх одержують у результаті обчислень за спец. підпрограмами. В. ч., що застосовуються при моделюванні ймовірнісної системи, мають задовольняти дві основні вимоги: з достатньою точністю відтворювати поведінку моделюваної випадкової величини в заданих розподілах і потребувати мінім. числа машинних операцій, що йдуть на формування одного В. ч. Кожна послідовність В. ч. лише наближено відтворює поведінку випадкової величини, що моделюється. Протяжність такої наближення судять зазвичай за результатами статистичної оцінки послідовності В. ч. досить великого об'єму, використовуючи відомі статистичні критерії, напр., критерій  $\chi^2$ .

Н. І. Костіна.

**ВИПАДКОВОГО ПОШУКУ МЕТОДИ** — методи пошуку якоїсь характеристики випадкової величини. Див. *Програмування стохастичне, Стохастичної оптимізації метод, Стохастичних квазіградієнтів метод.*

**ВИРІШУВАЛЬНЕ ПРАВИЛО** в розпізнаванні образів — див. *Правило вирішувальне в розпізнаванні образів.*

**ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ** — залежність кінцевого виходу продукції чи її вартості від використання різних факторів виробництва, конкретних видів ресурсів і затрат, подана в математичній формі. Як правило, застосовують досить прості функції з однією або кількома змінними: лінійну, квадратичну, степенову, показникову, гіперболічну, логістичну та ін. Первісну інформацію для В. ф. одержують внаслідок збирання статистичних даних або експериментальним шляхом, коли дослідник контролює хід дослідів й визначає, які величини мають бути змінними. Прийнятний алгебр. вираз повинен відображувати суть розглядуваного явища й давати змогу досить просто визначати статистичні коефіцієнти, що входять до нього. Для цього використовують методи матем. статистики (аналіз кореляцій і регресій). В. ф. застосовують переважно в с.-г. виробництві при аналізі впливу доз і складу добрив, обробітку ґрунту і кліматичних умов на врожайність різних культур.

Літ. Хеді З., Діллон Д. Провисловствение функции в сельском хозяйстве. Пер. с англ. М., 1963. Е. А. Фік.

**ВИСЛОВЛЮВАННЯ ЕКЗИСТЕНЦІАЛЬНІ** — висловлювання, що відображають існування предметів з тими чи іншими властивостями. Напр. «Існують числа  $x$  і  $y$  такі, що  $x > y + 1$ ».

**ВИСЛОВЛЮВАННЯ ТОТОЖНО ІСТИННІ** — див. *Тотожно істинна формула.*

**ВИСЛОВЛЮВАННЯ ЧИСЛЕННЯ** — див. *Числення висловлювань.*

**ВИХІДНИЙ ПРІСТРІЙ** — див. *Пристрої введення та виведення інформації.*

**ВІДМОВА ВІД РОЗПІЗНАВАННЯ** — віднесення розпізнаваного сигналу до класу нерозбірливих сигналів. В. від р. здебільшого буває тоді, коли з якоїсь причини не можна з великою мірою достовірності віднести сигнал до одного певного класу. При В. від р. від-

повідний сигнал може розпізнати людина; це дає змогу одержати шукане рішення, але може призвести до зменшення середньої швидкості розпізнавання. Умова, за якої доцільно В. від р., часто визначають із статистичних міркувань, які ґрунтуються на тому, що «втрати» від В. від р. значно менші, ніж «втрати», пов'язані з помилками. Приклад побудови статистичного алгоритму розпізнавання, в якому передбачено В. від р., див. у ст. *Байєсівське вирішувальне правило.*

Г. Л. Гімелфарб.

**ВІДНОВЛЕННЯ ТЕОРІЯ** — розділ ймовірностей теорії, присвячений дослідженню деяких загальних характеристик випадкових процесів, пов'язаних із сумами незалежних випадкових величин. Осн. положення В. т. широко використовують у теорії надійності, масового обслуговування теорії, запасах теорії та ін. Перші результати В. т. одержано з розгляду окремих ймовірнісних задач, пов'язаних із тривалістю безвідмовної роботи деяких фіз. елементів.

Осн. моделлю В. т. є простий процес відновлення. Такий процес описується послідовністю  $\{X_i\}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ) взаємно незалежних невід'ємних, однаково розподілених випадкових величин, які слід розуміти як тривалості існування замінюваних елементів, відновлення яких відбувається миттєво. Вважають, що перший елемент включається в роботу в початковий момент часу  $t = 0$  і замінюється в момент  $t = X_1$ . Наступна заміна виконується в момент  $t = X_1 + X_2$  і т. д. Іноді процес відновлення  $\{X_i\}$  починається з другої випадкової величини  $X_0$ , що є незалежною від  $\{X_i\}$ , можливо, має ін. закон розподілу. Розширена послідовність  $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$  наз. загальним процесом відновлення. Цей процес розглядають, коли перше установлення елемента відбувається в якийсь момент  $t \neq 0$ , вибраний на додатний напівосі часу відповідно до заданого розподілу ймовірностей. Напр.,  $X_0$  може бути залишковим часом життя елемента, використаного з початковий момент  $t = 0$ . Процес відновлення наз. дискретним, якщо  $\{X_i\}$  — градації випадкової величини, такі, що з ймовірністю одиниці найбільший спільний дільник усіх  $X_i$  збігається з якимсь  $\omega > 0$ ; в протилежному разі процес відновлення наз. неперервним.

Важливими характеристиками процесів відновлення є випадкові величини:  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  — момент  $n$ -го відновлення;  $N_t$  — найбільше значення  $n$ , для якого  $S_n \leq t$ , тобто кількість відновлень, що відбулися до моменту  $t$ .

Ф. цієї відновлення  $H(t)$  наз. математичне сподівання випадкової величини  $N_t$ , тобто  $H(t) = MN_t = \sum_{i=0}^{\infty} i P\{N_t = i\}$ .

Теорема відновлення; а)  $\frac{Ht}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu_1}$

при  $t \rightarrow \infty$ , де  $\mu_1 = MX_1$ ; б) теорема Блеку-елла для неперервного процесу відновлення  $H(t + \alpha) - H(t) \rightarrow \frac{\alpha}{\mu_1}$  при  $t \rightarrow \infty$  і будь-якому фіксованому  $\alpha > 0$ ; в) за умови  $\mu_2 = MX_1^2 < \infty$  характер поведінки  $\Phi(t)$  відновлення  $H(t)$  описують співвідношеннями  $H(t) - \frac{t}{\mu_1} \rightarrow \frac{\mu_2}{2\mu_1} - 1$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Ф-ція відновлення задовольняє таке інтегр. рівняння:  $H(t) = P(t) + \int_0^t H(t-s) dP(s)$ ,

де  $P(t)$  — ф-ція розподілу випадкових величин  $X_i$ . Якщо існують густини відновлення  $h(t) = H'(t)$  і  $f(x) = P'(x)$ , то інтегр. рівняння для густини відновлення буде записано

у вигляді:  $h(t) = f(t) + \int_0^t h(t-s)f(s)ds$ .

Див. також *Випадковий процес*, *теорія*.

**ВІДНОШЕННЯ** — одне з основних понять сучасної математики. Роль В. особливо зросла у зв'язку з теоретико-множинною реконструкцією всієї математики, яку було проведено в 20 ст. Нехай  $E$  — множина. Будь-яка властивість, яку може мати елемент  $x \in E$ , задає в  $E$  підмножину  $A$  всіх елементів, які мають цю властивість, і навпаки, задання підмножини  $A \subseteq E$  визначає властивість елементів  $x$  належності  $A$ . Отже, властивість елементів  $x$  повністю задає еквівалентну деякої підмножини  $A$ . В свою чергу,  $A$  може бути задана характеристичною функцією  $P(x)$ , яка приймає на  $A$  значення 1 і на  $E \setminus A$  — значення 0 (оскільки властивість « $x \in A$ » справджується при  $P(x) = 1$  і є хибною при  $P(x) = 0$ , числа 1, 0 часто замінюють символами «істинне» і «хибне», бо область значень  $P(x)$  складається з цих двох «нечислових» символів). Таким чином, логіка властивостей збігається з логікою множин. Логіка відношень зв'язує різні елементи, встановлюючи відношення між ними. Теоретико-множинне поняття В. відповідає поняттю предиката в логіці математичній. Цю відповідність вивчають у *моделей теорії*.

Нехай задано якусь В.  $P$ , в якому можуть бути (або не бути) елементи  $x$  і  $y$  множини  $E$ , записані в визначеному порядку. Пари  $(x, y)$  вважаються упорядкованими, так що  $(x, y)$  і  $(y, x)$  при  $x \neq y$  — це різні пари. Множини всіх таких упорядкованих пар наз. добутком  $E \times E$  ( $E \times E$ ) (див. *Множина теорія*). Розглянемо підмножину  $A \subseteq (E \times E)$  таких пар  $(x, y)$ , для яких  $x$  і  $y$  зв'язані В.  $P$ . Тоді задання В.  $P$  рівнозначне заданню  $A$  або характеристичної функції  $P(x, y)$ , яка дорівнює 1, якщо  $x$  і  $y$  зв'язані В.  $P$  або 0 — в протилежному разі. В.  $P$  наз. рефлексивним, якщо  $P(x, x) = 1$  і антирефлексивним, якщо  $P(x, x) = 0$ ; симетричним, коли  $P(x, y) = P(y, x)$  і антисиметричним, коли  $P(x, y) \neq P(y, x)$  при  $x \neq y$ ; транзитивним, коли

з  $P(x, y) = 1$ ,  $P(y, z) = 1$  випливає  $P(x, z) = 1$ . Існує кілька найважливіших типів В.

Відношення рівності. У цьому разі  $P(x, x) = 1$  і  $P(x, y) = 0$  при  $x \neq y$ ; отже,  $x$  і  $y$  перебувають у В.  $P$  тоді і тільки тоді, коли вони збігаються. На кожній множині існує єдине В. рівності, яке зображують звичайно у вигляді  $x = y$  (рідше  $x \equiv y$ ).

*Еквівалентності відношення*. Так наз. рефлексивні, симетричні й транзитивні В (за гатиме позначення:  $x \sim y$ ,  $x \equiv y \pmod{P}$ ). На даній множині  $E$  таких В. може бути багато. Суть В. еквівалентності звичайно полягає в установленні деякої схожості, спорідненості між елементами за певною ознакою. Приклад В. еквівалентності: (1)  $E = Z$  — множини цілих чисел,  $x \sim y$  означає, що  $x - y$  ділиться на  $d \in E$  ( $x, y$  зрівняні за модулем  $d$ ). Це В. записують у вигляді  $x \equiv y \pmod{d}$ . (2)  $E \sim R^2$  — площина з координатами  $(\xi, \eta)$ , для точок  $x(\xi', \eta')$ ,  $y(\xi'', \eta'')$  еквівалентність  $x \sim y$  означає, що  $\xi' = \xi''$ ,  $\eta' = \eta''$  — цілі числа (3)  $E = R^3$  — тривимірний простір,  $|x|$  — відстань точки  $x$  від фіксованої точки 0;  $x \sim y$  означає  $|x| = |y|$ . (4) Нехай  $\Sigma$  — скінченна множина, яка називається «алфавітом», з елементами  $a, b, \dots$ ,  $E$  — множина слів з цього алфавіту, тобто скінчених послідовностей його «букв» ( $a, ab, abca, \dots$ ) разом з «пустим словом», у якому немає жодної букви. Виділимо в  $E$  скінченне число слів  $x_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) і вважаємо слова

$x, y \in E$  еквівалентними, якщо  $y$  одержують із  $x$  скінченим числом «елементарних операцій», які поділяють у видаленні з слова або введенні в слово суцільного куску, який збігається з одним із  $x_k$ . В. еквівалентності задає розбиття множини  $E$  на класи еквівалентності, які визначаються так. Клас  $K_x$  ( $x \in E$ ) складається з усіх  $z \in E$ , для яких  $x \sim z$ . Якщо  $K_x \neq K_y$ , то  $K_x \cap K_y = \emptyset$ , так що різні класи не перетинаються й утворюють розбиття  $E$ . Всілякі множини  $K_x$  і в класах еквівалентності для даного В. Множина всіх таких класів наз. фактор-множиною множини  $E$  по В.  $P$  (записують так:  $E/P$ ). Відображення  $\kappa_P: E \rightarrow E/P$ , яке ставить у відповідність елементові  $x \in E$  клас  $K_x \in E/P$ , називають канонічним відображенням для В.  $P$ . Фактор-множину часто можна подавати зручною моделлю — множиною, яка перебуває в бієктивній відповідності з  $E/P$ .

У прикладі (1) такою моделлю є множина вершин правильного  $d$ -кутника; в (2) — тор, одержуваний з квадрата  $0 \leq x, y \leq 1$  склеюванням протилежних сторін; у (3) — піраміда  $0 \leq t < \infty$ , де  $t = (x)$ ,  $x \in R^3$ . Смісл переходу до фактор-множини полягає в «огрубленні» досліджуваного об'єкта, коли цікавляться лише деякими властивостями елементів множини, ототожнюючи ті елементи, які цими властивостями не різняться. Так, у прикладі (1) нехтують цілими кратними  $d$ ; в (2) — ототожнюють усі точки, що

переходять одна в одну при цілочислових зміщеннях уздовж осей координат; у (3) — цікавляться лише відстанню точки від 0; в (4) — пехтують частиними слів, які входять у списки  $\{x_n\}$ . В. еквівалентності особливо важливі в алгебрі.

Відношення порядку. Так наз. антирефлексивні, транзитивні В. (загальне позначення:  $x < y$ ,  $x \prec y$ ). Якщо для будь-якої пари  $(x, y)$ ,  $(x \neq y)$  або  $x < y$ , або  $y < x$ . В. порядку наз. *лінійним*. Приклади упорядкованих множин: (5)  $E = R$ ,  $x < y$  має звичайний зміст «х менше за у»; (6)  $E$  — множина всіх неперервних дійсних ф-цій на

$0 \leq t \leq 1$ ,  $x < y$  означає  $\int_0^1 \{y(t) - x(t)\} \times$

$\times dt > 0$ ; (7)  $E = R^m$  — множина всіх кортежів (упорядкованих послідовностей з  $m$  дійсних чисел),  $x < y$  означає, що  $x = (x_1, \dots, x_m)$  передують  $y = (y_1, \dots, y_m)$  у лексикографічному розміщенні, тобто для деякого  $k < m$   $x_1 = y_1, \dots, x_k = y_k$ , але  $x_{k+1} < y_{k+1}$ . (8)  $E = R$ ,  $\phi(x)$  — дійсна ф-ція на  $R$ ;  $x < y$  означає, що  $\phi(x) < \phi(y)$ . У прикладах (5) і (7) В. порядку лінійне, а в (6) і (8) — ні (ноді незліченно упорядковані множини називають частково упорядкованими. Див. Частково упорядкована множина).

Нехай  $E$  упорядкована множина  $x \in E$ . Елемент  $y \in E$  наз. *мажорантою* (або *мінорантою*)  $X$ , якщо для всіх  $x \in E$   $x < y$ , тобто  $x < y$  або  $x = y$  (відповідно  $y < x$ ). Якщо  $X$  має мажоранту (міноранту), його наз. обмеженням згорі (знизу); якщо  $X$  обмежено і згорі і знизу, його наз. обмеженим. Якщо у множині мажорант (мінорант) є найменший (найбільший) елемент  $x$ , то він наз. верхньою (нижньою) границю  $X$  (позначення  $\sup E$   $X$  для верхньої і  $\inf E$   $X$  — для нижньої грані). Всі ці поняття стають наочними для  $X \subset R$ .

Загальне поняття відношеня. Нехай  $E^n = E \times \dots \times E$  є добутком  $n$  множин  $E$ , тобто множини всіх кортежів  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in E$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Відображення  $P: E^n \rightarrow \{0, 1\}$  наз. *n-місним відношенням* (предикатом, логічною функцією) над  $E$ . Множина  $A \subset E^n$  всіх кортежів, для яких  $P(x_1, \dots, x_n) = 1$ , означає «властивість» кортежів:  $x_1, \dots, x_n$  перебувають у відношенні  $P$  тоді і тільки тоді, коли  $(x_1, \dots, x_n) \in A$ . При  $n = 1$  приходять до «властивостей» елементів  $P(x)$ , при  $k = 2$  — до дво-місних В.  $P(x, y)$ . Якщо  $n = 2$ , В. наз. *бінарним*. Теорію бінарних В. тепер застосовують дуже широко. Досить сказати, що вся *теорія графів* є по суті теорією бінарних В.

Розглянемо тримісне В.  $P$ , яке задовольняє таку вимогу: для будь-яких  $x, y \in E$  існує один і тільки один  $z \in E$  такий, що  $P(x, y, z) = 1$ . Тоді кожній парі  $(x, y)$  ставлять у

відповідність однозначно визначений елемент  $z \in E$ , тобто на  $E$  задають бінарну операцію. Таким чином, звичайні алгебр. операції — окремий випадок тримісних В., які задовольняють, крім попередньої умови, ще й інші («аксіоми»). Поняття відображення також можна розглядати, як В.: якщо  $\phi: A \rightarrow B$ , то  $\phi$  задається своїм графіком  $K_\phi$  — множиною пар  $(x, \phi(x))$   $x \in A$ . Графік є підмножиною добутку  $A \times B$  — множини всіх пар  $(x, y)$ ,  $x \in A$  і  $y \in B$ . А тому задавання  $\phi$  рівнозначне вказівці «властивості» елементів  $A \times B$ , тобто задаванню одномісного В. на  $A \times B$ . Див. В урбани Н. Начала математики, ч. 1. Основні структури аналізу, кн. 2. Теорія множин, Перс Франк М. 1964, Ст. 3.1 Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Перс сянги М., 1964. О. В. Гладкий.

**ВІДНОШЕННЯ АНАЛІТИЧНЕ** — відношення між поняттями, що існує завдяки наявності постійного зв'язку між відповідними класами предметів (на протилежність *відношенню синтетичному*). Наявність В. а. впливає на визначення порівняльних понять (пор., «многотт» — набірна буквовідливна машина, «єднотт» — набірні рядковідливна машина). Термін «В. а.» часто застосовують в інформатиці замість терміну *відношення парадигматичне*. Е. Ф. Скоробогачко.

**ВІДНОШЕННЯ БАЗИСНЕ** — те саме, що й *відношення парадигматичне* в інформатиці.

**ВІДНОШЕННЯ ПАРАДИГМАТИЧНЕ** в інформатиці — семантичне відношення, що існує між словами природної або інформаційної мови незалежно від контексту (на протилежність *відношенню синтаксичному*). В. п. зв'язує слова, що позначають предмети, між якими існує постійний зв'язок (цим відношенням зв'язані, напр., слова «вода» і «рідина» (вода є різновидом рідини), «рідина» і «текучість» (будь-яка рідина є текучою). В. п. ділять на два види: відношення підпорядкування, що відповідає приблизно відношенню підкласу до класу, і асоціативне відношення, що відповідає решті відношень між предметами. Іноді асоціативне відношення розчленовується на кілька різновидів: суб'єктне, об'єктне, причинно-наслідкове, просторове і т. д. В. п. застосовують для зменшення *трагет інформації* під час інформаційного пошуку. Для цього треба, щоб В. п. в мові інформаційній було задано явно існують чотири осн. способи задавання В. п.: лексикографічний, табличний, графічний і аналітичний. Перший полягає в тому, що слова інформаційної мови подають у словнику з позначками, які вказують на В. п. між ними. Напр., при дескрипторі «рідина» можуть бути позначки *видові* і *терміни* (відношення підпорядкування) — «вода», «нафта»; *зв'язані* і *терміни* (асоціативне відношення) — «текучість». За табличним способом слова інформаційної мови, зв'язані В. п. з цим дескриптором, також вкладаються до словникової статті останнього, але замість вказівних позначок вид відношення вказується наперед обумовленим взаємним розміщенням дескрипторів

Графічний спосіб полягає в побудові схем, у яких В. п. між дескрипторами позначено за допомогою відповідних стрілок. Як приклад можна навести зображення ієрархічної класифікації у вигляді дерева. За аналітичним способом В. п. виражається структурою слова інформаційної мови, яке в цьому випадку являє собою похідне, складне утворення — *код семантичний*.

Е. Ф. Скорободко.

**ВІДНОШЕННЯ ПРАВДОПОДІБНОСТІ** — див. *Статистична перевірка гіпотез*.

**ВІДНОШЕННЯ СИГНАЛ ЗАВАДА** — відношення деякої основної характеристики (звичайно середньої потужності) корисного сигналу до відповідної характеристики завади. В. с./з. є одним з критеріїв, які характеризують завадостійкість пристроїв керування, зв'язку, контролю тощо. Особливо широко поняття В. с./з. використовують у радіотехніці й зв'язку.

В. Ю. Мандровський-Сечалов.

**ВІДНОШЕННЯ СИНТАГМАТИЧНЕ** з ієрархії — семантичне відношення, що виникає між словами природної чи інформаційної мови в певному контексті. В. с. (на протилежність відношенню парадигматичному) вказує на наявність деякої ситуації, яка об'єднує об'єкти, позначені в даному контексті відповідними словами В. с. за явлені, наприклад, слова «вода» і «посудина» (в ситуації «вода міститься в посудині» або «вода» і «очищення» (в ситуації «очищення води»). Серед В. с. виділяють суб'єктне, об'єктне, просторове, часове відношення тощо. Деякі В. с. за змістом збігаються з парадигматичними відношеннями відрізняючись від них лише тим, що пов'язують відповідні слова лише в деяких контекстах. Наприклад, відношення «бути частиною» є парадигматичним для слів «карбюратор» і «двигун» (будь-який карбюратор — частина двигуна), але синтагматичним для слів «генератор» і «двигун» (генератор не завжди є складовою частиною двигуна). Інші В. с. не збігаються з парадигматичними відношеннями, перебуваючи з ними у взаємно однозначній відповідності. Наприклад, парадигматичному відношенню «бути потенціальним суб'єктом» відповідає В. с. «бути суб'єктом» (між словами «літак» і «літати» існує парадигматичне відношення «бути потенціальним суб'єктом», у контексті ж «літак літатиме» між цими словами реалізується відповідне В. с. «бути суб'єктом»). В. с. використовують гол. чин. для зменшення пошукового шуму. Для цього треба, щоб В. с. в мові (інформаційній) були задані явно. Найчастіше застосовують показники зв'язку й показники ролі. Перші вказують на наявність В. с. між групою дескрипторів пошукового образу документа чи пошукового припису, другі — на різновид відношення, яке зв'язує цей дескриптор з деяким іншим.

Е. Ф. Скорободко.

**ВІДНОШЕННЯ СИНТЕТИЧНЕ** — відношення між поняттями, яке виникає, коли в певній ситуації з'являється зв'язок між відповідними класами предметів (на протилеж-

ність відношенню аналітичному). Термін «В. с.» часто використовують в інформації замість терміна *відношення синтагматичне*.

Е. Ф. Скорободко.

**ВІДНОШЕННЯ ТЕКСТУАЛЬНЕ** — те саме, що й відношення синтагматичне в інформації.

**ВІДПОВІДЬ РОЗПІЗНАВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ** — рішення, що його приймає система при поданні на її вхід об'єкта розпізнавання. Залежно від розв'язуваного завдання В. р. с. може бути пазла (номер, умовний код) класу (напр., при розпізнаванні букв або слів мовлення), опис об'єкта розпізнавання (при аналізі фотографій слідів частинок), спосіб лікування (мед. діагностика), характер посприятності (тех. діагностика) тощо. В. р. с. визначається в результаті виконання алгоритму розпізнавання, покладеного в основу даної розпізнавальної системи. Див. також *Розпізнавання образів*.

Т. К. Вичук.

**ВІНЕР — ХОПФА РІВНЯННЯ** першо-

го роду — рівняння виду 
$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t-\tau) \times$$

$\times k(\tau) d\tau = R_{xy}(t), t > 0$ , де  $R_{xx}(t)$ ,  $R_{xy}(t)$  — *кореляційні функції* стаціонарних ергодичних випадкових процесів  $x(t)$ ,  $y(t)$ , а  $k(t)$  — *імпульсна перехідна функція*. Вперше одержав його 1931 спільно амер. і нім. математики Н. Вінер і Е. Хопф. До В — Х р. зводять задачі синтезу оптич. фізично реалізованні передавальні функції (ФРПФ) або імпульсної перехідної функції за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки

$$I = M \left[ y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) x(t-\tau) d\tau \right]^2,$$

де  $y(t) = H(p)x(t)$ ,  $H(p)$  — заданий перетворювальний оператор,  $M$  — символ матем. сподівання,  $x(t)$  — вхідний сигнал системи,  $y(t)$  — бажаний вихідний сигнал системи. При цьому розрізняють задачі. 1) оптич. згладжування, або фільтрації, коли  $x(t) = m(t) + n(t)$ , де  $m(t)$  — корисний сигнал,  $n(t)$  — шум; 2) статистичного випередження, коли  $x(t) = m(t)$ ,  $y(t) = m(t + t_0)$ ,  $t_0 > 0$ ; 3) оптич. фільтрації з одночасним випередженням, коли  $x(t) = m(t) + n(t)$ ,  $y(t) = m(t + t_0)$ ,  $t_0 > 0$ . Загальна формула для визначення оптич. ФРПФ  $W(s)$  має вигляд

$$W(s) = \frac{1}{2\pi i [\Psi(s)]_+} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{xy}(s)}{[\Psi(s)]} e^{st} ds,$$

де  $S_{xy}(s)$  — взаємна спектральна щільність сигналів  $x(t)$ ,  $y(t)$ ;  $[\Psi(s)]_+$  — функція, аналітична в правій півплощині;  $[\Psi(s)]_-$  — функція, аналітична в лівій півплощині;  $S_{xx}(s) = [\Psi(s)]_+ [\Psi(s)]_-$  — спектральна щільність сигналу  $x(t)$ .

Для дробово-раціональних спектральних щільностей оптимальну ФРПР знаходять за формулою

$$W(s) = \frac{1}{[\Psi(s)]_+} \left\{ \frac{S'_{xy}(s)}{[\Psi(s)]_-} \right\}_+$$

де операція  $\{\cdot\}_+$  означає розкладання  $S'_{xy}(s)/[\Psi(s)]_-$  на суму елементарних дробів і відкидання членів, які мають полюси в правій півплощині.

Дит.: Теория автоматического регулирования, кн. 2, М., 1967 [Б.Видигер с. 853-876] Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, 1950

В. П. Яковлев

**ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ЗВЧАЙНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ.** Значення параметра  $\lambda$ , за яких існують відмінні від тотожного нуля розв'язки рівняння

$$L_1 u = \lambda L_2 u, \quad (1)$$

які відповідають у деяких точках додатковим умовам

$$L_0 u = 0, \quad (2)$$

наз. власними числами (в. ч.), а відповідні розв'язки в рівняння (1) з умовою (2) — власними ф-ціями (в. ф.). Тут  $L_\alpha u$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$  — диф. вирази. Рівняння (1) з умовами (2) становить задачу на власні значення (в. в. в.). Напр., задача

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3)$$

має власні числа й власні ф-ції відповідно

$$\lambda^{(k)} = (\pi k)^2, \quad u^{(k)}(x) = \sin \pi k x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Задачі на власні значення точно розв'язано лише для дуже небагатьох випадків. Для наближеного розв'язування їх застосовують різні чисельні методи, основні з них розглянуто нижче.

Метод скінченних різниць, або метод сіток, полягає в тому, що область неперервного змінювання змінного  $x$  замінюють на скінченну множину точок або вузлів, які наз. сіткою. Дифер. співвідношення в вузлах сітки замінюють різницевиими й замість задачі (1—2) розв'язують відповідну алгебр. задачу (див. *Власні значення й власні вектори матриць способи обчислювання*). Напр., відрізок  $[0, 1]$  поділяють на  $N$  однакових частин завдовжки  $h = \frac{1}{N}$  точками поділу  $x_i = ih$  і замість задачі (3) розв'язують алгебр. задачу

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \mu y_i, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_0 = y_N = 0,$$

розв'язки  $y^{(k)}, \mu^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N-1$  якої є наближеннями до перших  $N-1$  власних чисел і власних ф-цій задачі (3). Точність звичайного методу сіток характеризується нерівностями

$$|\lambda^{(k)} - \mu^{(k)}| \leq M_1(k) h^2, \quad |y^{(k)} - u^{(k)}(x_i)| \leq M_2(k) h^2,$$

де  $M_2(k)$  й  $M_1(k)$  — постійні. Іноді застосовують метод сіток підвищеної точності. Особливо ефективним цей метод є для рівняння

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u = \lambda r(x) u$$

з кусково-неперервними коефіцієнтами  $p, q, r$ . При цьому одержують алгебр. задачу з тридіагональною матрицею. Тоді вдається побудувати триточкові різницеві схеми будь-якого порядку точності, тобто справджуються оцінки

$$|\lambda^{(k)} - \mu^{(k)}| \leq M_1(k) h^{2m}, \quad |u^{(k)}(x_i) - y^{(k)}| \leq M_2(k) h^{2m}, \quad (5)$$

де  $m$  — будь-яке ціле число.

Якщо для заданої задачі на власні значення можна вказати близьку до неї в повному розумінні іншу задачу на власне значення, розв'язок якої відомий, то можна використати метод вбурень. Для цього вводять параметр вбурення  $\varepsilon$  й розглядають задачу

$$(L_1^* + \varepsilon L_1) u = \lambda (L_1^* + \varepsilon L_2) u, \quad \bar{L}_\alpha = L_\alpha - L_\alpha^*, \quad (6)$$

таку, що при  $\varepsilon = 0$  маємо близьку задачу

$$L_1^* u = \lambda L_2^* u, \quad (7)$$

а при  $\varepsilon = 1$  перетворюється на задачу. Власну ф-цію і власне число (6) шукають у вигляді

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \varepsilon^k, \quad \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k. \quad (8)$$

Підставивши умови (8) в задачу (6) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ , після певних перетворень одержують рекурсивні співвідношення для коефіцієнтів  $u_k(x)$  і  $\lambda_k$ . Звичайно з. ч. і в. ф.  $\lambda_0$  й  $u_0(x)$  задачі (7), знаходять  $\lambda_1$  й  $u_1(x)$ , а потім, використовуючи значення  $\lambda_0, u_0(x), \lambda_1, u_1(x)$ , одержують  $\lambda_2$  й  $u_2(x)$  і т. д. Обмежившись у рівняннях (8) скінченним числом членів, одержують наближені в. ф. і в. ч.

Методом колокацій в. ф. аналяють у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^p c_i v_i(x), \quad (9)$$

де ф-ції  $v_i(x)$  задовольняють умову (2). З умови (9), яка відповідає рівнянню (1) у  $p$  рівномірно розподілених точках, для визна-

чення параметрів  $c_i$  одержують систему однорідних рівнянь. Наближені значення власних чисел  $p$  знаходять як нулі визначника цієї системи.

Метод рядів полягає в зображенні в. ф. у вигляді

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x). \quad (10)$$

Підставляючи (10) в (1) і врахувавши розв'язання у ряд за  $\varphi_j(x)$  ф-цій  $L_{\alpha} \varphi_j(x)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , одержують нескінченну однорідну систему лінійних алгебр. рівнянь відносно  $c_j$ , яку під час розв'язування врізують. Перші  $k$  наближених власних чисел  $p$  є нулями визначника врізаної системи  $k$ -го порядку. Задачі на власні значення можна розглядати як нелінійні, тому до них можна застосовувати деякі методи розв'язування нелінійних рівнянь (див. *Операторні рівняння: методи розв'язування*). Напр., задачі на власні значення для систем звичайних дифер. рівнянь

$$\frac{dY}{ds} = A(x, \lambda) Y, \quad 0 < s < 1, \quad (11)$$

за додаткових умов

$$\sum_{i=1}^m B_i(\lambda) Y(x_i) = 0, \quad 0 < x_i < 1, \quad (12)$$

де  $A(x, \lambda)$  і  $B_i(\lambda)$  — матриці, розв'язують так. Оскільки в. ф. визначають з точністю до постійного множника, додають ще й умову, яка фіксує цей множник. Таку умову наз. нормуванням. Нехай вона має вигляд

$$y_k(x_0) = 1, \quad (13)$$

де  $y_k$  —  $k$ -а компонента вектора  $Y(x)$ . Виходячи з задачі в на одну умову більше, ніж потрібно для визначення задачі за будь-якого фіксованого  $\lambda$ . Отже, задачу (11) — (13) можна розв'язувати, не враховуючи однієї з умов (12). Одержаний розв'язок підставляють у всі умови (12) і за величиною результату роблять висновок про близькість вибраного  $\lambda$  до в. ч. Задавши наближення  $\bar{\lambda}$  до в. ч.  $\lambda$ , розв'язують крайову задачу

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = A(x, \bar{\lambda}) \bar{Y} \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^m B_i^{(h)}(\bar{\lambda}) \bar{Y}(x_i) = 0. \quad (15)$$

$$\bar{y}_k(x_0) = 1. \quad (16)$$

де (15) — умови існування рівняння (12) без  $k$ -го рівняння. Потім здійснюють ітерації за методом Ньютона у вигляді

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda} - \frac{\varphi^2(\bar{\lambda})}{\varphi(\bar{\lambda} + \varphi(\bar{\lambda})) - \varphi(\bar{\lambda})} \quad (17)$$

$$\varphi(\lambda) = \left| \sum_{i=1}^m B_i(\lambda) Y(x_i) \right|, \quad (18)$$

|| — норма в евклідовому просторі (див. *Простір абстрактний у функціональному аналізі*).

Крім зазначених методів, можна використовувати й деякі інші методи (див. *Власні значення диференціальних рівнянь у частинних похідних: способи обчислювання*).

Лит.: Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Разностная задача Штурма — Лиувилля* // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, т. 1, № 5; Шамакин В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 2 К, 1968 [обл.огр. с. 241—243]; Приказчинов В. Г. *Однородные разностные системы высокого порядка точности или задачи Штурма — Лиувилля* // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1969, т. 9, № 2; Коллятиц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. Пер. с нем. М., 1968 [обл.огр. с. 501—503].

В. Г. Приказчинов.  
ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ. Нехай  $A$  й  $B$  — лінійні дифер. оператори в частинних похідних. Нетривіальні розв'язки рівняння

$$Aw = \lambda Bw, \quad (1)$$

які задовольняють задані однорідні граничні умови

$$L_i w|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де  $L_i$  — якийсь дифер. оператор, нає. з власними функціями (в. ф.) задачі (1) — (2), а відповідні їм значення параметра  $\lambda$  — власними значеннями (в. з.) рівняння (1). Якщо  $B \equiv E$  ( $E$  — тотожний оператор), то замість (1) одержуємо рівняння

$$Aw = \lambda w, \quad (3)$$

яке часто зустрічаємо в різних розділах математики та її застосуваннях.

Напр.: а) в. з. задачі —  $\Delta w = \lambda w$ ,  $w|_{\Gamma} = 0$  для прямокутної області  $\{0 < x < a, 0 < y < b\}$ , де  $\Delta$  — оператор Лапласа, визначаються як ф-лю

$$\lambda_{ks} = \pi^2 \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right); \quad k, s = 1, 2, \dots$$

б) коли  $A \equiv \Delta$  (бігармонічний оператор), а область — круг, то за умов  $w|_{\Gamma} = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$

( $\frac{\partial w}{\partial n}$  — похідна по напрямку нормалі до кола)

тура) рівняння (3) зводиться до звичайного дифер. рівняння, і в. з. визначають через корені ф-цій Бесселя; в) коли  $A \equiv \Delta$ , а область — прямокутник, то за умов  $w = 0$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$  на двох протилежних сторонах прямокутника (умови на обох інших сторонах — будь-які), розв'язок рівняння (3) шукаємо у вигляді



$$w(x, y) = X(x) \sin \frac{\pi y}{b}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

де  $X(x)$  — невідома (шукана) функція. Підставивши (4) в (3) й відділивши змінні, одержимо звичайне дифер. рівняння 4-го порядку відносно ф-ції  $X(x)$ . Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння й підпорядкувавши його заданим крайовим умовам, одержимо трансцендентне рівняння, корені якого визначають величину параметра  $\lambda$ : г) в. з. задачі  $\Delta \Delta w = -\lambda \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ .

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (q = \text{const})$$

для прямокутника  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  обчислюють за ф-лою

$$\lambda_{kx} = \frac{k^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)}{\frac{k^2}{a^2} + q \frac{k^2}{b^2}}, \quad k, x = 1, 2, \dots$$

Якщо точного розв'язку рівнянь (1) або (3) одержати неможливо, в. з. визначають за допомогою різних наближених методів.

Метод Релея — Рітца застосовують для рівнянь (3) в додатно визначеним оператором, в. ф. якого мають зазначені екстрем. властивості, що дають змогу звести задачу відшукування в. з. до дослідження екстремуму функціоналу

$$\left( \frac{Aw, w}{w, w} \right) \quad (5)$$

Цю задачу розв'язують за методом Релея — Рітца: задають послідовність координатних ф-цій  $\varphi_n \in H_A$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), де  $H_A$  — лінійний нормований простір, у якому норму елемента  $w \in H_A$  задають рівністю  $\|w\| = \sqrt{(Aw, w)}$  (див. *Простір абстрактний у функціональному аналізі*), які за будь-якого  $n$  лінійно незалежні й утворюють повну систему в енерг. просторі  $H_A$ ; набл. розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$w_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (6)$$

з умови мінімуму функціоналу (5) при  $w = w_n$  одержуємо систему лінійних однорідних рівнянь відносно коэф.  $a_k$

$$\sum_{k=1}^n [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)] a_k = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n; \quad (7)$$

прирівнюючи визначник системи (7) до нуля, приходимо до рівняння  $n$ -го степеня відносно  $\lambda$

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Усі корені рівняння (8) — додатні. Коли їх розмістити в порядку зростання, тобто  $\lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)}$ , то кожний з цих коренів є набл. значенням відповідного в. з. початкового рівняння (3), причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = \lambda_k$ .

Метод Релея — Рітца ефективний в обчислюваннях перших в. з. і дає для цих значень наближення згори ( $\lambda_k^{(n)} > \lambda_k$ ). При обчислюванні в. з. з великими номерами виникають труднощі, пов'язані з апроксимацією в. ф. лінійною комбінацією (6): як правило, у виразі (6) доводиться брати досить велику кількість координатних ф-цій, а це дуже ускладнює процес обчислювань і може призвести до нагромадження значних *закруглень похибок*. Вдалий вибір координатних ф-цій істотно впливає на точність набл. розв'язків, одержуваних за методом Релея — Рітца. Зокрема, якщо ф-ції  $\varphi_n$  утворюють ортонормовану систему, то рівняння (8) спрощуться й наблизь вигляду

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

За методом Бубнова — Гальоркіна розв'язок рівнянь (3) має вигляд (6), де  $\{\varphi_n\}$  — послідовність ф-цій, які можна достатню кількість разів продиференціювати і які задовольняють усі крайові умови, а також умови лінійної незалежності й повноти. Проектуючи відхилення  $Aw_n - \lambda w_n$  на підпростір, утворений ф-ціями  $\varphi_n$ , і вимагаючи виконання умови ортогональності

$$\left( A \left( \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right) - \lambda \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \varphi_m \right) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

одержуємо систему рівнянь вигляду (7) відносно  $a_k$ . Прирівнюючи визначник цієї системи до нуля, знову приходимо до рівняння вигляду (8). Якщо оператор  $A$  додатно визначений, то методи Релея — Рітца й Бубнова — Гальоркіна збігаються. В загальному випадку метод Бубнова — Гальоркіна має більшу область застосовності завдяки не таким жорстким обмеженням, що їх накладають на оператор  $A$

Асимптотичний метод розроблено у зв'язку з розв'язуванням задач про вільні коливання пластин та оболонки. Нехай потрібно визначити частоти власних коливань циліндричної, прямокутної та іншої оболонки з постійними головними кривизнами. Ця задача зводиться до інтегрування дифер. рівняння 8-го порядку вигляду

$$\Delta\Delta\Delta w + a \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + c \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \lambda \Delta w = 0. \quad (10)$$

де  $a, b, c$  — конст. Згідно з цим методом розглядають т. з. «внутрішній» розв'язок, який задовольняє рівняння (10), але, взагалі кажучи, не задовольняє граничних умов, і розв'язок в околі межі, який задовольняє всі граничні умови й наближається асимптотично до «внутрішнього» розв'язку при віддаленні від межі області. Складаючи ці два розв'язки, одержують трансцендентні рівняння для обчислювання невідомих параметрів, які входять у вираз для  $\lambda$ . За «внутрішнім» розв'язком рівняння (10) можна взяти вираз

$$w = C_0 \sin k_1(x - x_0) \sin k_2(y - y_0), \quad (11)$$

де  $C_0$  — нормувальний множник,  $k_1, k_2, x_0, y_0$  — параметри, які належить визначити. В околі ліній  $x = 0$  розв'язок визначається як

$$w(x, y) = \Phi(x) \sin k_2(y - y_0) \quad (12)$$

Підставляючи (12) в (10), для дифер. рівняння 8-го порядку з постійними коэф. відносно  $\Phi(x)$

$$\Phi^{VIII} + p_1 \Phi^{VI} + p_2 \Phi^{IV} + p_3 \Phi^{II} + p_4 \Phi = 0. \quad (13)$$

Застосовувати асимптотичний метод можна, якщо серед коренів характеристичного рівняння, відповідного рівнянню (13), знайдеться не менше ніж три корені з від'ємною дійсною частиною. Напр., якщо інтеграл рівняння (13) має вигляд

$$\Phi(x) = C_1 \sin \beta_1 x + C_2 \cos \beta_1 x + C_3 e^{-\alpha_1 x} + C_4 e^{-\alpha_2 x} + C_5 e^{-\alpha_3 x} + C_6 e^{-\alpha_4 x} + C_7 e^{-\alpha_5 x} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0), \quad (14)$$

то, відкидаючи члени, які необмежено зростають зі збільшенням  $x$ , одержуємо в околі межі  $x = 0$  наблиз. розв'язок

$$w(x, y) = \Psi(x) \sin k_2(y - y_0). \quad (15)$$

де

$$\Psi(x) = C_1 \sin \beta_1 x + C_2 \cos \beta_1 x + C_3 e^{-\alpha_1 x} + C_4 e^{-\alpha_2 x} + C_5 e^{-\alpha_3 x}. \quad (16)$$

Вираз (15) дає змогу задовольнити всі крайові умови на лінії  $x = 0$  і граничне співвідношення

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = C_0 \sin k_1(x - x_0).$$

Метод скінченних різниць полягає в заміні дифер. оператора й операторів крайових умов скінченнорізничними виразами, внаслідок чого початкову задачу замінюють якоюсь її дискретною моделлю

$$A_h w_h = \lambda_h w_h, \quad (17)$$

Задача (17) рівносильна обчисленню власних векторів і в. з. матриці (див. Власних значень і власних векторів матриць способи обчислювання) порядку якої визначається кількістю внутр. вузлів сіткової області. Перехід від рівняння (3) до його дискретного аналога (17) можливий для дозволених областей і дозволених операторів, зокрема для тих, які містять змінні коэф. Це надає методу скінченних різниць достатньою універсальністю. Але, коли крайові умови містять похідні високих порядків (а це часто трапляється в практично важливих задачах), то для дозволених областей виникають труднощі, пов'язані з апроксимацією крайових умов скінченнорізничними виразами

Метод наближеного поділу змінних (метод розщеплювання) застосовують для прямокутних областей, коли оператор  $A$  має вигляд

$$Aw = \sum_{k=1}^p a_k \Delta^k w + b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad 2 \leq p \leq 4,$$

$$\Delta^k w = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^k w, \quad a_k, b, c = \text{const.}$$

а оператор  $B$  або є тотожним оператором, або містить лише похідні  $\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}, \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}, k =$

$= 1, 2, \dots$  з постійними коэф. Цей метод застосовують і для дискретних, і для неперервних задач за найзгаданих крайових умов. Якщо задачу (1)–(2) замінити дискретним аналогом, то цей метод дає змогу відшукати достатньо добре нульове наближення для повної проблеми в ф. та в. з. різничевої задачі, обминаючи обчислення коренів характеристичного визначника. Це наближення потім можна уточнити одним з відомих ітераційних методів розв'язування алгебр. проблеми в. з. і власних векторів. Метод особливо ефективний при обчислюванні в. з., відповідних вищим формам коливань. Якщо задача (1)–(2) допускає поділ змінних у звичайному розумінні, то метод наближеного поділу змінних вироджується в класичний метод Фур'є.

За методом колокації наблиз. розв'язок задачі (1)–(2) шукаємо у вигляді (6), де  $a_k$  — якісь параметри, а ф-ції  $\Phi_k$  задовольняють крайові умови (2). Ставлячи вимогу, щоб вираз (6) задовольняв рівняння (1) в заданих  $n$  точках області (точках колокації), одержуємо однорідну систему лінійних алгебр. рівнянь відносно параметрів  $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ . Прирівнявши визначник цієї системи до нуля, одержуємо рівняння для знаходження

наближених з. з. Метод колокацій відзначається простотою, але наслідки обчислювань дуже залежать від вибору точок  $k$ .

За методом мінімізації середньоквадратичної похибки наближений розв'язок задачі (1)–(2) знаходять у вигляді лінійної комбінації (2) ф-цій  $\phi_k$ , які задовольняють крайові умови (2). З умови мінімуму функціоналу

$$F(w_n) = \frac{\int_{\Omega} (Aw_n - \lambda Bw_n)^2 d\Omega}{\|w_n\|^2}$$

одержуємо рівняння для визначення наближених з. з. і постійних  $a_k$

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Метод сумарних представляють застосовують у випадку самоспряжених операторів з постійними коеф. для областей, складених з прямокутників, областей з розривами та винятками тощо. Цей метод є скінченнорізницевою аналогою методів інтегр. представлення у матич. фізиці. Розв'язування різницевої задачі в будь-якій точці сіткової області при великій кількості вузлів подається у вигляді т. з. формул сумарних представлень, що містять порівняно небагато параметрів. Відносно останніх складають системи лінійних алгебр. рівнянь, що містять параметр  $\lambda$ . Прирівнявши до 0 визначник цієї системи, одержують характеристичне рівняння для визначення з. з. різницевої задачі. В. ф. даються ф-лами сумарних представлень. Цей метод запропонував рад. математик Г. М. Положий (1914–68).

Лит.: Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек // Прикладная математика и механика, 1960, т. 24, в. 5; Положий Г. И. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента // К., 1966. [Бібліогр. с. 157–159]; Гихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1968; Балабанов И. М. Теория колебаний. М., 1968; Буледей А. В. Об одном методе исследования свободных колебаний прямоугонных пластин // Прикладная механика, 1970, т. 6, в. 3; Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1979 [Библ. гр. с. 502–510]; Коллатц Л. Задачи на собственные значения. Пер. с нем. М., 1968 [Библіогр. с. 501–513].

**ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦЬ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ.** Значення параметра  $\lambda$ , при яких існують не тотожно рівні нулеві розв'язки  $x$  системи алгебр. рівнянь

$$Ax = \lambda Bx, \quad (1)$$

назв. власними числами (в. ч.) або власними значеннями, а відповідні їм розв'язки  $x$  — власними  $n$ -вимірними векторами (в. в.) квадратної матриці  $A$  порядку  $n$  відносно квадратної матриці  $B$  того самого порядку. Якщо матриця  $B$  одинична ( $B \equiv E$ ), то кажуть про в. ч. і в. в. матриці  $A$ . В. ч. системи (1) є коренями характеристичного полінома (х. п.), тобто коренями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  рівняння  $|A - \lambda B| = 0$ . (2)

де  $| \cdot |$  — визначник матриці. В. в. системи (1), який відповідає в. ч.  $\lambda_k$ , задовольняє систему алгебр. рівнянь

$$(A - \lambda_k B)x_k = 0. \quad (3)$$

Вивчення в. в. і в. ч. необхідне, напр., при досліджуванні коливань і стійкості різних мех. систем. Знаходження всіх в. ч. і в. в. системи (1) назв. повною проблемою власних значень (п. з. в. з.) Знаходження кількох в. ч. і в. в. системи (1) назв. частковою проблемою власних значень (ч. з. в. з.)

Методи обчислювань в. ч. та в. в. ділять на прямі й непрямі. В прямих методах спочатку знаходять безпосередньо коеф. х. п. Для того, щоб знайти в. ч., треба визначити будь-яким методом його корені. Потім знаходять в. в. як розв'язки системи (3). В прямих методах використовують перетворення подібності, тобто перетворення матриці  $A$  виду

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad (4)$$

де  $T$  — якась матриця і  $T^{-1}$  — обернена їй матриця. В результаті таких перетворень х. п. не змінюється, а матриця зводиться до простішого вигляду, х. п. якого легко вписувати. Напр., щоб розв'язати задачу

$$Ax = \lambda x \quad (5)$$

з матрицею відносно невисокого порядку, слід користуватися методом Данилевського, за допомогою якого подібними перетвореннями зводять матрицю  $A$  до матриці

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & p_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & p_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

яка має в останньому стовпчику коеф. х. п.

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \left[ \lambda^n - \sum_{i=1}^n p_i \lambda^{n-i} \right]. \quad (7)$$

Оси. вадою більшості прямих методів є нестійкість щодо заокруглення похибок, немінущих при обчислюванні на ЕОМ. Така нестійкість проявляється тим більшою мірою, чим більший порядок  $n$ . Тому для систем відносно високого порядку доцільно користуватися непрямими методами, які дають змогу знаходити в. ч. і в. в. за допомогою деяких збіжних числових послідовностей, обминаючи побудову х. п. При цьому використовують подібні перетворення (4) з ортогональними матрицями  $T$

$$T^{-1} = T^*, \quad (8)$$

де  $T^*$  — транспонована до  $T$  матриця. У цьому разі ітераційні процеси стійкі щодо похибок округлення. Крім того, непрямі методи зручні в розумінні організації багаторазового обчислювання на ЕОМ за одним й тим самим простими ф-лами. Напр., для розв'язання ж. п. в. з., коли у (5) матриця симетрична

на ( $A = A^*$ ), слід користуватися методом обертання, який добре зарекомендував себе на практиці. При застосуванні цього методу утворюється послідовність матриць  $D$ , подібних до вихідної, позадіагональні елементи яких наближаються до нуля, а діагональні елементи — до в. ч. Точніше, якщо задано міру точності  $\epsilon$ , то настає момент, коли справдиться нерівність  $|d_{ii} - \lambda| < M\epsilon^2$ , де  $d_{ii}$  — діагональний елемент матриці  $D$ ,  $\lambda$  — в. ч. матриці  $A$ ,  $M$  — стала величина, незалежна від  $\epsilon$ . Матриця перетворень  $T$  в цьому методі виходить як добуток матриць обертання. Стоячи матриці  $T$  є в. в. матриці  $A$ . Метод обертань легко поширюється на систему (1), коли матрицю  $B$  додатно означено. Якщо матриця  $A$  в (5) — довільна дійсна або якщо вона має стрічкову структуру, то доцільно користуватися  $QR$ -методом, який описують такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} A &= Q_1 R_1, \\ R_1 Q_1 &= Q_1 R_1, \\ &\dots \\ R_{n-1} Q_{n-1} &= Q_n R_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут  $Q$  — ортогональні,  $R$  — праві трикутні матриці. Такий розклад на множники здійснюють за допомогою матриць обертання або відображення. Матриці  $H_i = R_i Q_i$  подібні до початкової, а в процесі ітерацій наближаються до правої квазитрикутної матриці, квадратні клітини на діагоналі якої мають в. ч., близькі до в. ч. початкової матриці. Якщо дійсно в. ч. матриці  $A$  має кратність  $k$ , йому відповідає діагональна клітина порядку  $k$  квазитрикутної матриці. Парі комплексних в. ч. матриці відповідає діагональна клітина 2-го порядку квазитрикутної матриці. Метод зберігає в процесі перетворень стрічкову структуру матриці, зокрема, майже трикутну матрицю

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Це дає змогу значно скоротити кількість арифм. операцій. Тому початкову матрицю  $A$  спочатку зводять за допомогою подібних перетворень до вигляду (10). Якщо  $A = -A^*$ , то (10) є тридіагональною матрицею. Цей метод поширюється й на систему (1) з довільними матрицями  $A$  і  $B$ : він відомий у цьому разі як  $QZ$ -метод.

Розв'язуючи п. п. в. з. для системи (1) досить високого порядку, не економно користуватися методами, описаними вище, навіть якщо їх модифіковано спеціально для цієї проблеми. Для обчислення макс. і мінім. абс. величиною в. ч. і векторів, які їм відповідають, користуються ступеневим методом. Напр., для задачі (5), коли  $A = -A^*$ , в. в., який відповідає макс. в. ч.,

знаходять як границю послідовності

$$x_{s+1} = Ax_s = A^{s+1}x_0, \quad (11)$$

починаючи з заданого вектора  $x_0$ . Відповідне наближення до в. ч. при цьому обчислюють за ф-лою

$$\lambda_{s+1} = \frac{(x_{s+1}, x_{s+1})}{(x_{s+1}, x_s)}. \quad (12)$$

Якщо відоме досить задовільне наближення  $\lambda_s$  і  $x_s$  до якогось в. ч. і в. в. (5) при  $A = -A^*$ , щоб уточнити наближення, користуються ступеневим ітерційним методом виду

$$(A - \lambda_s B) x_{s+1} = x_s. \quad (13)$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо  $x_{s+1}$  — найкраще наближення до в. в. Найкраще наближення  $\lambda_{s+1}$  до в. ч. одержимо з ф-ли

$$\lambda_{s+1} = \lambda_s + \frac{1}{\delta_s}; \quad \delta_s = \frac{(x_{s+1}, x_{s+1})}{(x_{s+1}, x_s)}. \quad (14)$$

Але, як показали практичні розрахунки, ступеневі методи не завжди надійні, тобто в процесі ітерацій можна одержати не крайні в. ч. і в. в. Тому для обчислювання крайніх в. ч. і відповідних їм в. в. слід застосовувати методи виду

$$x_{s+1} = x_s + \tau \omega_s, \quad (15)$$

де вектор  $\omega_s$  і параметр  $\tau_s$  вибирають спеціально. Напр., для системи (1), коли  $A = A^*$  і  $B = B^*$ , за  $\omega_s$  можна взяти вектор нев'язки

$$\phi_s = Ax_s - \lambda_s Bx_s, \quad (16)$$

а параметр  $\tau_s$  обчислити як корінь кв. рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & \tau & \tau^2 \\ (Ax_s, x_s) & (Ax_s, r_s) & (Ar_s, r_s) \\ (Bx_s, x_s) & (Bx_s, r_s) & (Br_r, r_s) \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Наближення до в. ч. у цьому разі знаходять за ф-лою

$$\lambda_{s+1} = \frac{(Ax_{s+1}, x_{s+1})}{(Bx_{s+1}, x_{s+1})}. \quad (18)$$

При цьому мінім. корінь рівняння (17) забезпечує збіжність до мінімального в. ч., а макс. корінь — до макс. в. ч.

Крім розглянутих методів, існує й багато інших. Для багатьох з них розроблено стандартні програми.

Лит.: Самоник В. А. Метод какскорейшего спуска в задаче о собственных элементах ограниченных операторов. «Известия высших учебных заведений. Математика», 1958, № 5. Фаддеев Д. Н., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры М.—Л., 1963 [библиогр. с. 677—734]; Воеводин В. В. Численные методы алгебры Теория и алгоритмы М., 1966 [библиогр. с. 247—248]; Уильямсон Дж. К. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. М., 1970 [библиогр. с. 559—564].

В. Г. Приказчиков.

**ВЛАСТИВІСТЬ ВІДСУТНОСТІ ПІСЛЯДІЇ** — властивість потоку випадковості, що виражається в незалежності ймовірності  $P_A(t)$  настання  $k$  подій потоку в проміжку часу  $(t, t + \tau)$  від чергування подій до моменту  $t$ . В в. з. полягає у взаємній незалежності реалізації потоку в проміжках часу, що не перетинаються один одним. Мати в. з. п. може лише потік, для якого проміжки часу між послідовними подіями взаємно незалежні. В такому разі в. з. п. стає властивістю розподілу тривалості проміжку між подіями потоку. Для того, щоб логік мав в. з. п., достатньо й необхідно, щоб розподіл залишкової тривалості випадкового проміжку  $P(x/z) = [Q(z+x) - Q(x)]/[1 - Q(x)]$ ,  $(x > 0)$  тотожно збігався з розподілом  $Q(x)$  самого цього проміжку.

В. з. п. мають, напр., випадковий Пуассона потік (показаний розподіл  $1 - e^{-\lambda x}$ ,  $(\lambda > 0)$ ) і дискретний потік *геометричний* (геометричний розподіл  $p(1-p)^n$ ,  $(0 < p < 1, n = 0, 1, 2, \dots)$ ). Це перевіряється безпосередньою підстановкою зазначених ф-цій розподілу у вираз для залишкової тривалості випадкового проміжку. Серед усіх неперервних розподілів ймовірностей, зосереджених на додатній напівосі, в. з. п. має лише показаний розподіл  $Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

М. М. Яромичев.

**«ВНИИЭМ»** — сімейство цифрових керуючих машин. Розроблені 1962—85 Всесоюзним науково-дослідним інститутом електромеханіки (Москва). Було запущено кілька таких машин, використованих для створення дослідно-пром. систем керування. Найдосконаліша з них — «ВНИИЭМ-3» має двійкову систему числення, форму подання чисел — з фіксованою комою (з плаваючою комою за підпрограмою), одноадресну структуру команд, довжину слова — 24 двійкові розряди. Особливості системи команд — робота з цілими словами, післовами й словами подвійної довжини, адресний вибір вхідних і вихідних каналів перетворення; операції з безпосередньою адресацією; операції з алфавітно-цифровою інформацією Система апаратного контролю — дублювання арифметичний пристрій, коди з автокорекцією помилок. Має 168 каналів переривання (з пріоритетом). Індивідуальна з фіксованою комою (додавання) — 40 000 операцій за 1 сек. Близькість фертового запам'ятовувального пристрою (3П) — 4096 слів (розширюється до 28 672 модулями по 8192 слів). Кількість пристроїв на магнітній стрічці, з якими може працювати машина, — 16. Може приймати інформацію від телеграфних і телефонних ліній зв'язку. Осн. вивідні пристрої алфавітно-цифровий друкувальний механізм АЦДМ, перфострічка, електр. друкувальні машини.

Літ. Маликовський Б. М. Обчислювальна техніка в народному господарстві. М., 1965. Грубова В. И., Кирдяк В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. М., 1989 [Бібліогр. с. 179—181].

Б. М. Маликовський.

**ВОЛЬТЕРРИ РІВНЯНИЙ** — один з широко вживаних видів *інтегральних рівнянь*.

**ВСЕСОЮЗНИЙ ІНСТИТУТ НАУКОВОЇ І ТЕХНІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ (ВІНІТІ)** — інформаційна й науково-дослідна установа в Москві. Організований 1952 в системі АН СРСР як Ін-т наук. інформації (з 1955 має теперішню назву й перебуває в подвійному підпорядкуванні — Держ. комітету Ради Міністрів СРСР з науки і техніки й АН СРСР). Осн. завдання: систематично й вичерпно реферувати всю світову літературу в галузі природознавства й техніки; готувати й видавати на цій основі реферативний журнал, випускати оглядово-бібліографічну й довідкову літературу та експрес-інформацію з найактуальніших питань науки і техніки; організовувати й розвивати наук. дослідження, спрямовані на вдосконалення методів і тех. засобів, використовуваних у науково-інформаційній діяльності. Структурно Ін-т складається з кількох десятків галузевих, функціональних і науково-дослідних відділів, машинолічильної станції, виробничо-видавничого комбінату й довідково-інформаційних служб. Ін-т є гол. науково-інформаційною орг-цією в СРСР (здійснює координацію досліджень і розробок у галузі науково-інформаційної діяльності в країні).

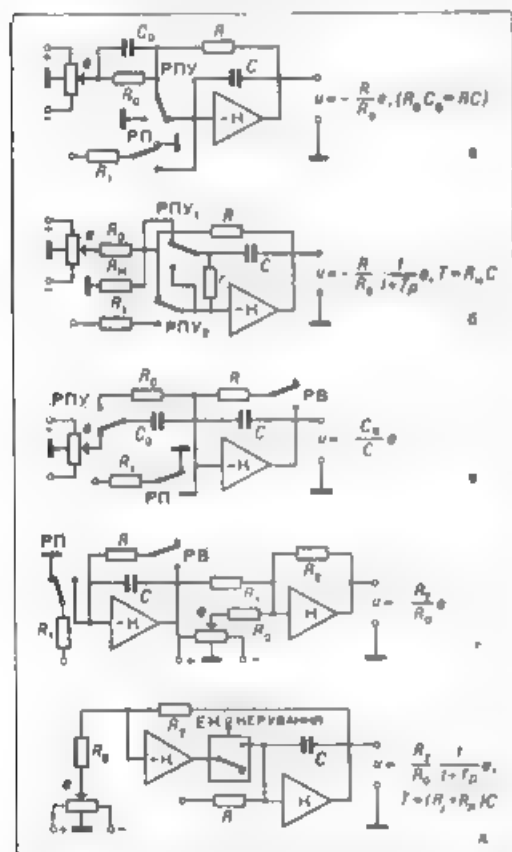
ВІНІТІ видає «Реферативний журнал» (у 172 випусках, з яких 40 виходять окремими випусками, 132 — у 25 зведених томах), випуски «Експрес-інформації» (в 78 серіях), щорічник «Ітоги науки і техніки» й збірник «Научно-техническая информация». При Ін-ті є аспірантура.

Літ. Арутюнов Н. В. Дальнейшее развитие систем научн.-технической информации в СССР «Научно-техническая информация. Серия 1», 1987, № 11, Михайлов А. И., Черныш А. И., Гиларевский Р. С. Развитие информатики в СССР «Научно-техническая информация. Серия 2», 1987, № 11, Фомин А. А. Всесоюзный институт научной и технической информации и его деятельность. М., 1988 [Бібліогр. с. 49—61].

О. І. Михайлов.

**ВСТАНОВЛЕННЯ ПОЧАТКОВИХ УМОВ** — режим розв'язувальної схеми АОМ, у якому формуються значення напруг на виходах підсилювачів операційних, що відповідають у певному масштабі початковим умовам розв'язуваного дифер. рівняння. Значення напруг початкових умов визначаються за масштабом представлення шуканої змінної з рівнянь структурної схеми моделювання. Початкові умови можуть задаватися або зарядом інтегровального конденсатора, або підмиканням до виходу інтегратора додаткового суматора, який додає напругу початкових умов. Інтегровальний конденсатор заряджається перед початком інтегрування безпосередньо від джерела напруги початкових умов або непрямою шляхом (через підсилювач постійного струму (ППС)). На схемі (мал., а) заряджання інтегровального конденсатора здійснюється введенням інтегратора в режим інерційної ланки з форсованою ємністю у вхідному колі. За рівності сталої часу  $R_0 C_0 = RC$  вихідна напруга встановлюється практично вмиг.

Важкою такої схеми є те, що потрібно точно підбирати сталу часу, бо при  $R_0 C_0 < RC$  процес досягання усталеного значення вихідної напруги сповільнюється, а при  $R_0 C_0 > RC$  відбувається стрибок напруги на виході, який може призвести до тимчасового перенапруги ППС. Швидкоплинний процес В. п. у. забезпечується переведенням інтегратора в режим масштабноі ланки (мал. б), до виходу якого підмикається інтегровальний конденсатор. Час встановлення вихідної напруги залежить у цьому разі від опору  $R_0$ , що ви-



Схеми встановлення початкових умов: РПУ — реле початкових умов, РП — реле вуску; РВ — реле відправного положення (для розряджування інтегровального конденсатора);  $R_0$  — опір симетричного ключа (ЕК) у відкритому стані;  $R_1$  — вихідний опір підсилювача  $+h$ .

значається умовами стійкості застосовуваного в схемі ППС і звичайно є достатньо малим. Опір  $r$  служить для збереження негативного зворотного зв'язку в момент комутації та обирається в межах кількох ком. Якщо процес розв'язування повторюється з частотою 10 гц і більшою, для В. п. у. застосо-

вується схема (мал. а), в якій інтегратор переводиться в режим ємнісної масштабноі ланки. Їмності  $C$  та  $C_0$  перед В. п. у. попередньо розряджаються. Якщо внутр. опір джерела малий, В. п. у. відбувається практично миттєво. В АОМ з періодизацією розв'язування часто використовуються схеми В. п. у. (мал. а і б) з добрими динамічними характеристиками. Вада цих схем — велика, порівняно з попередніми, складність, хоча в схемі (мал. а) як додатковий суматор можна використати суматори, що є в схемі набору задачі. Крім того, використовуючи цю схему для В. п. у., шкалу змінювання змінних слід обирати в два рази меншу, щоб уникнути можливого перенапруги додаткового суматора. Додатковий підсилювач у схемі (мал. б) має характеризуватися додатним коефіцієнтом підсилення і малим вихідним опором. Високий вимоги ставлять і до електронного ключа (великий опір і відсутність залишкового струму в закритому стані, малий опір — у відкритому тощо).

Лит. Коган В. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования М., 1983. Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ. т. 1. М. — Л., 1984. Ю. П. Кошач.

**ВТРАТИ ІНФОРМАЦІЇ** під час пошуку — невдавання інформаційно-пошуковою системою документів, релевантних даному запиту. Коефіцієнт В. і. під час пошуку  $Q$  пов'язаний з коефіцієнтом повноти пошуку  $R$  співвідношенням  $Q = 1 - R$ . Див. Ефективність інформаційного пошуку технічна, Релевантність документа. Н. О. Столякова.

**ВУЗЛОВИЙ СПИСОК** — спосіб асоціативної організації інформації про різні об'єкти в пам'яті ЦОМ, при якому кожний об'єкт представляється вузлом перетину кількох ланцюгових списків, що відповідають значенням його ознак. Вузол складається з заголовка вузла, в якому зберігається назва об'єкта, адреси довідкової інформації про цей об'єкт, і кількох спискових слів, які містять у собі значення ознак об'єкта й адреси в ланку, що відсилають до наступних членів ланцюгових списків з такими самими значеннями ознак. У заголовках вузлів можна визначати деякі характеристики об'єкта й самого вузла (напр., кількість спискових слів у вузлі). Спискове слово може містити в собі й додаткові відомості про ознаки об'єкта, напр., вказувати відношення між різними ознаками цього об'єкта. Використовуючи В. с., можна будувати в пам'яті ЕЦОМ асоціативні адресні структури, що відображають складні системи класифікаційних та асоціативних зв'язків між об'єктами. В с. широко застосовують при побудові асоціативно-адресних інформаційно-пошукових систем дескрипторного типу. Лит. Коган В. Я. Программирование информационно-логических задач М., 1987 (66 бл.) г. с. 327. А. І. Купцов.

**ВХІДНИЙ ПРИБІР** — див. Пристрої введення та виведення інформації.

**ГАМІЛЬТОНІВ ЛАНЦЮГ** — ланцюг графа, який містить у собі всі вершини графа (проходить через кожну з них один і тільки один раз).

**ГАМІЛЬТОНІВ ШЛЯХ** (контур) — гамільтонів ланцюг (цикл) графа, в якому всі дуги орієнтовано в напрямі обходу від початкової до кінцевої вершини (у контурі початкова і кінцева вершини співпадають). Див. також *Графія теорія*.

**ГАРМОНІЧНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ МЕТОД** — метод наближеного визначення умови існування й стійкості періодичних режимів при нелінійних систем автоматичного регулювання.

**ГАУССА МЕТОД** — один з прямих методів розв'язування алгебричних лінійних систем рівнянь. Див. *Лінійних алгебричних систем рівнянь способи розв'язування*.

**ГАУССА РОЗПОДІЛ** — те саме, що й нормальний розподіл.

**ГАУССІВСЬКИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС** — дійсний випадковий процес  $\xi(t)$ , для якого сумісний розподіл всіх компонент випадкового вектора  $\xi(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  є гауссівським. Характеристична функція Г. в. в. має вигляд

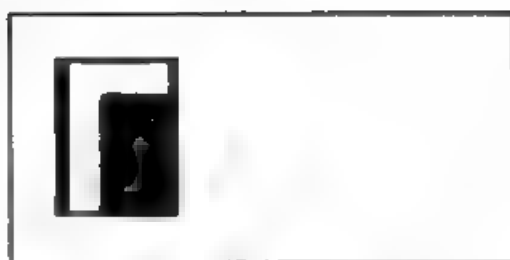
$$\varphi(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n) = \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n a(t_k) z_k - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n R(t_k, t_j) z_k z_j \right\},$$

де  $a(t) = M\xi(t)$  — математичне сподівання, а  $R(t, s) = M[\xi(t) - a(t)][\xi(s) - a(s)]$  — кореляційна функція. Процес  $\xi(t)$  можна визначити або при всіх  $-\infty < t < \infty$ , або на скінченному інтервалі  $0 < t < T$ . Якщо це в часом, а набуває значення в якійсь параметричній множині  $\Lambda$ , то  $\xi(t)$ ,  $t \in \Lambda$  наз. гауссівською випадковою ф-цією.

Розподіл імовірностей Г. в. в.  $\xi(t)$  цілком задають двома його характеристиками: матем. сподіванням  $a(t)$  та кореляційною ф-цією  $R(t, s)$ . Матрицю  $R = [R(t_k, t_j)]$ ,  $k, j = 1, \dots, n$  наз. кореляційною матрицею сумісного розподілу компонент Г. в. в. В разі, коли  $R$  — певнорядкова, сумісна щільність розподілу компонент Г. в. в. має вигляд

$$P_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\text{Det } R}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n R^{(-1)}(t_k, t_j) [x_k - a(t_k)] [x_j - a(t_j)] \right\},$$

де  $R^{(-1)}(t_k, t_j)$  — елемент матриці  $R^{(-1)}$ , оберненої до  $R$ , а  $\text{Det } R$  — визначник матриці  $R$ . Г. в. в. має низку важливих властивостей, напр., при лінійному перетворенні Г. в. в. гауссівським є і одержаний процес. Гауссівські випадкові функції є зручною моделлю мате-



матичною зображення багатьох фізичних процесів. Теплові шуми в електр. мережах, броунові рух частинок, випадкові флуктуації в лінійних системах (дробовий ефект), шуми атмосферної турбулентності тощо можуть прайти за приклади Г. в. в. Це пояснюється тим, що за досить загальних умов сума великої кількості незалежних і малих за величиною випадкових процесів наближено є Г. в. в., незалежно від того, яким сумісним розподілом підпорядковано окремі доданки. Математично це випливає з багатовимірного узагальнення центральної граничної теореми.

Важливу роль у практичних задачах відіграють гауссівські стаціонарні процеси  $\xi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , які мають властивість  $a(t) = a$ ,  $R(t, s) = R(t - s)$ . Для таких процесів правильним є спектральне зображення  $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\eta(\lambda)$ , де  $\eta(\lambda)$  — комплекснозначний

Г. в. в. з ортогональними приростами. Див. Гітман І. П., Скориход А. В. Писання з теорії випадкових процесів, М., 1968 (бібліогр. с. 648—654); Прехорова Ю. В., Рубанова Ю. А. Теорія ймовірностей. Основи й осередки. Предметні теми (випадкові процеси), М., 1987 (бібліогр. с. 481—487); Ібрагімів І. А., Розахов Ю. А. Гауссові випадкові процеси, М., 1979 (бібліогр. с. 384—386); Деч Г. Нелінійне моделювання випадкових процесів. Пер. з англ. М., 1985 (бібліогр. с. 198—201).

О. М. Демидов

**ГЕДЕЛЯ ТЕОРЕМА ПРО НЕПОВНОТУ** — теорема логіки математичної, що показує неможливість повної формалізації арифметики та сильніших математичних теорій. Довів і опублікував їх австр. математик К. Гедель 1931. Перша теорема тісно пов'язана з явищем алгоритм. невизначеності, а друга є значно тоншим твердженням про формальні системи. Зміст першої теореми про неповноту (якщо обмежитися поки що арифметикою) полягає ось у чому. Нехай  $A$  — арифм. формальна система, до якої входять аксіоми Пеано (див. *Арифметика формальна*). При цьому припускають, що  $A$  коректно описує арифметику, тобто, що всі формули, які вводять в  $A$ , є істинними твердженнями про натуральні числа. Для будь-якої такої системи  $A$  перша теорема Геделя твердить, що не всі істинні формули арифметики можна довести в  $A$ . Інакше кажучи, поняття істинності формул арифм. мови ширше, ніж поняття довідності в будь-якій формальній системі (якщо вона коректна). Нижче наведено інтуїтивну ідею доведення цієї теореми, істинності

для розуміння змісту обох теорем про неможливість.

Припустимо протилежне, тобто, що арифм. істинність збігається з довідністю в  $A$ . Оскільки доведення в системі  $A$  є скінченні послідовності ф-л, пов'язаних між собою правилами виведення, то перевірити, чи є дана послідовність ф-л доведенням, можна за допомогою досить простого алгоритму. При належному кодуванні цей алгоритм можна описати арифм. мовою (див. *Арифметизація метаматематики*). Тому можна побудувати арифм. ф-лу  $Pr_A(x)$ , яка означає, що  $x$  є кодом ф-ли, довідної в  $A$ . Тепер неважко написати ф-лу — назовемо її  $\forall_A$ , яка виражає свою власну недовідність. Точніше, для цієї ф-ли в системі  $A$  довідною є еквівалентність:

$$\forall_A \leftrightarrow \neg Pr_A(\bar{\forall}_A). \quad (1)$$

де  $\bar{\forall}_A$  — код ф-ли  $\forall_A$ . Внаслідок припущення про те, що довідність збігається з істинністю, виходить, що  $\forall_A$  виражає й свою власну хибність. Але тоді ця ф-ла не може бути ні істинною, ні хибною, так що ми приходимо до відомого «парадокса брехуна». Отже, істинність і довідність не збігаються. Прикладом істинної, але недовідної в  $A$  ф-ли саме й є ф-ла  $\forall_A$ ; вона істинна, бо стверджує свою недовідність і справді недовідна.

Наведені вище евристичні міркування значною мірою використовують припущення про те, що в  $A$  довідними є лише істинні ф-ли. Строгіше дослідження показує, проте, що недовідність  $\forall_A$  можна знайти з слабшого припущення про несуперечливість системи  $A$ . Це уточнення має принциповий характер. Справа в тому, що поняття арифм. істинності не можна передати мовою арифметики, тоді як твердження про несуперечливість  $A$  можна записати у вигляді досить простої арифм. ф-ли  $con_A$ . Через це першу теорему про неможливість можна передати мовою арифметики за допомогою ф-ли

$$con_A \rightarrow \neg Pr_A(\bar{\forall}_A). \quad (2)$$

Можна показати, що ця ф-ла сама є вивідною з аксіом Пеано. Звідси легко одержати другу теорему Геделя про неможливість, яка нестрого твердить, що несуперечливість формальної системи  $A$  не можна довести засобами цієї системи. І строгоше, якщо формальна система  $A$  несуперечлива й містить аксіоми Пеано, то ф-ла  $con_A$  є недовідною в  $A$ . Справді, з довідності ф-л (1) і (2) випливає, що ф-ли  $\forall_A$  і  $con_A$  еквівалентні в системі  $A$ . Але  $\forall_A$  є недовідною в  $A$  згідно з першою теоремою Геделя, отже,  $con_A$  також недовідна.

Досі йшлося тільки про арифметику. Але всі попередні судження можна застосувати й до досить довільних формальних систем. Зокрема, зовсім не обов'язково, щоб мовою системи  $A$  була мова елементарної арифметики. Бдине, що тут потрібно, — це, щоб осн. поняття арифметики можна було передати

мовою розглядуваної формальної системи, в аксіомі Пеано, щоб були довідними в цій системі. Тому теорема Геделя можна застосувати до будь-яких розумних аксіоматизацій арифметики, аналізу чи множин теорії.

Теорема про неможливість виявляє одну специфічну трудність, пов'язану з доведенням несуперечливості. Суть її найяскравіше проявляється на прикладі теорії множин. Нехай  $ZF$  є формальна система теорії множин, яка ґрунтується на аксіомах Цермело—Френкеля. Досі не існує доведення несуперечливості для  $ZF$ . Проте можна наперед сказати, що таке доведення має задовольняти такі дві умови (з яких першу обумовлено самою постановкою питання, а друга випливає з теорема Геделя): а) це доведення має спиратися лише на концепції, інтуїтивно простіші за ті, що їх використовують у самій теорії множин; б) його не можна здійснити в межах системи  $ZF$ . Але система  $ZF$  дуже широка: в ній формалізуються практично вся сучасна математика. Тому важко уявити собі, як виглядало б матем. доведення, що задовольняло б зазначеній умови. Отже, тут зачеплено складні проблеми основ математики, через це теорема Геделя становить певний філософський інтерес. Існує думка, що теорії про неможливість показують неможливість машинного моделювання нетривіальних форм розумової діяльності. Така думка, очевидно, не має достатніх підстав; Г. т. про н. мають до питання про маш. творчість таке саме відношення, як, напр., логічні парадокси до творчих здібностей розуму людини. Питання про можливість машинного розуму дискусійне (див. *Штучний розум*).

Лит.: Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1952. Feferman S. B. Arithmetization of metamathematics in a general setting. «Fundamenta mathematicae», 1960, v. 49; Лямб. Д. и Р. Заметки по логике Пер с англ. М., 1968 (библиогр. с. 123) Арбін Г. М. Машини и математика Пер с англ. М., 1968 (библиогр. с. 217, 224); Насель З., Ньюмен Д. Р. Теорема Геделя. Пер с англ. М., 1970.

М. В. Воложін.

**ГЕНЕРАТОР ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ** — те саме, що й *датчик випадкових чисел*.

**ГЕНЕРАТОР ПРОГРАМ** — програмний комплекс, призначений для формування потрібної користувачеві модифікації програми певного класу. Поняття «Г. п.» близьке до поняття «пакет програм». Г. п. складається адекватного з кількох підпрограм, що реалізують близькі за змістом методи обчисл. математики або методи обробки великих масивів даних. Підпрограмами керує спец. організуюча програма (*монітор*), яка, приймаючи від споживача інформацію про потрібну модифікацію методу, формує з стандартних підпрограм завершені змістовні програми.

А. І. Хитинін.

**ГЕНЦЕНА ФОРМАЛЬНІ СИСТЕМИ** — *ко-ко-математичні* числення для формалізації та досліджування змістових доведень, які оперують з припущеннями. Г. ф. с. поділяють на системи природного виведення (натуральні), які імітують форму звичайних матем. умови-



водів і через те особливо придатні для формалізованого записування їх і секвенціальні (за термінологією Генцена — логістичні), спрямовані на аналіз можливих доведень даної формули (див. *Секвенція*), на одержання результатів про нормальну форму доведень та використання їх у *Доведенні теорії* та в теорії доведення теорем на ЕОМ. Іноді Г. ф. с. ототожнюють із системами секвенціального типу; проте натуральні Г. ф. с. можуть використовувати секвенції, а секвенціальні Г. ф. с. мають вигляд числення ф-л, а не секвенцій. Іноді всі Г. ф. с. вважають натуральними, бо всі вони більш-менш відображають звичайні способи оперування з логічними зв'язками та припущеннями.

Натуральні Г. ф. с. містять правила введення логіч. символів і правила виключення символів. Логічних аксіом небагато (звичайно одна-дві). Розглянемо, напр., задавання класичного числення предикатів у вигляді натуральної Г. ф. с. Формули будуть звичайним способом за допомогою зв'язок  $\neg$ ,  $\exists$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ ,  $\&$ . Вигляді об'єктів — односумісентні секвенції. Аксіоми  $A \rightarrow A$ ,  $\rightarrow (A \vee \neg A)$ .

Правила введення:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} (\vee^+);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} (\vee^+);$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} (\supset^+);$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B, A, \Sigma \rightarrow \neg B}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \neg A} (\neg^+);$$

$$(*) \frac{\Gamma \rightarrow A(b)}{\Gamma \rightarrow \forall x A(x)} (\forall^+);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A(i)}{\Gamma \rightarrow \exists x A(x)} (\exists^+).$$

Правила виключення:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \& B}{\Gamma \rightarrow A} (\&^-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \& B}{\Gamma \rightarrow B} (\&^-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \vee B, A, \Sigma \rightarrow C, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Sigma, \Delta \rightarrow C} (\vee^-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Sigma \rightarrow (A \supset B)}{\Gamma, \Sigma \rightarrow B} (\supset^-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow B, \Sigma \rightarrow \neg B}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta} (\neg^-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \forall x A(x)}{\Gamma \rightarrow A(i)} (\forall^-);$$

$$(*) \frac{\Gamma \rightarrow \exists x A(x), A(b), \Sigma \rightarrow C}{\Gamma, \Sigma \rightarrow C} (\exists^-).$$

Структурні правила:  $\frac{\Gamma \rightarrow C}{A, \Gamma \rightarrow C}$  (тождество),

$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Sigma \rightarrow C}$  (переставлення),  $\frac{A, A, \Gamma \rightarrow C}{A, \Gamma \rightarrow C}$

(скорочення повторень);  $\varepsilon$  — довільний терм;  $(*)$  означає, що змінна  $b$  не входить до  $\Gamma, \Sigma, \exists x A(x), C$ .

Секвенцію під рискою наз. висновком з правила, а секвенції над рискою — засновками. Аксіома  $A \rightarrow A$  показує, що вводять припущення  $A$ ; правило  $\supset^+$  ілюструє звільнення від припущення, формула  $B$  верхньої секвенції залежить від припущення  $A$ , формула  $A \supset B$  нижньої секвенції — вже не залежить. Звільнення від припущень відбувається і в правилах  $\neg^+$ ,  $\forall^-$ ,  $\exists^-$ . Г. ф. с. натурального типу іноді задають у вигляді числення формул (а не секвенцій) з деяким звинсом залежності від припущень виведення в такому численні — це деревоподібна фігура, у вершинах якої можуть бути довільні формули (це обов'язково аксіоми), а не переходили здійснюються за правилами виведення. Ці правила знаходять, викреслюючи антецеденти з відповідних правил натуральної системи, описаної за допомогою секвенцій, якщо при цьому відбувається звільнення від припущень, додаються відповідні умови, напр.:

$[A]$

$$\frac{AB}{A \& B} (\&^+), \quad \frac{B}{A \supset B} (\supset^+).$$

Вважається, що входження формули  $V$  в таке виведення залежить від припущення  $D$ , якщо  $D$  знаходиться на верхній виведення над  $V$ , не є аксіомою, і в гілці, що веде від розглядуваного входження  $D$  до  $V$ , не відбувається звільнення від припущення  $D$ . Коли тлумачать такого роду виведення, кожному входженню ф-ли  $C$  ставлять у відповідність секвенцію  $\Gamma \rightarrow C$ , де  $\Gamma$  — повний список припущень, від яких залежить розглядуване входження ф-ли  $C$ . Зв'язок натуральних Г. ф. с. із звичайними (гілбертівськими) варіантами відповідних систем встановлюють за допомогою твердження:  $\Gamma \rightarrow C$  у натуральній системі виводиться тоді і тільки тоді, коли  $C$  виводиться із  $\Gamma$  в фіксованих змінних в гілбертівській системі.

Натуральні Г. ф. с. у їхньому початковому вигляді погано пристосовані для пошуку виведення через аналіз: спроба з'ясувати, за яким правилом, з яких засновків можна одержати певну ф-лу (секвенцію), приводить до неоднозначності: в принципі для цього придатне і правило введення відповідного логічного зв'язку, і будь-яке з правил виключення. При цьому кількість можливих засновків у правилах виключення потенційно необмежена (за рахунок варіювання ф-ли  $A$  у правилах  $\supset^-$ ,  $\forall^-$ ,  $\exists^-$  та ін.). Тому для застосування до теорії логічного

виведення корисно мати правила, яким властива підформульність: у засновки входять лише підформули висновку, а нескінченність виявляється лише за рахунок варіювання виду термів у правилах типу  $\exists^+$ . У секвенціальних Г. ф. с. або всім правилам властива підформульність, або ця властивість порушується лише для одного правила — правила розрізу

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad A, \Sigma \rightarrow \Delta, Q}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, Q}$$

або іншого правила близького вигляду, напр.  $\neg$ . Тому системи, що мають властивість підформульності, наз. ще й системами, в яких немає розрізу. Так, напр., розрізу немає в варіанті ЛК класичного числення предикатів (вивідні об'єкти — довільні секвенції), складені із  $(\supset, \neg, \vee)$ -ф-л. Аксиоми  $A \rightarrow A$ .

Сукцедентні правила

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow (A \supset B)} (\supset \rightarrow); \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A} (\rightarrow \neg);$$

$$(*) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Sigma, A(b)}{\Gamma \rightarrow \Sigma, \forall x A(x)} (\forall \rightarrow).$$

Антецедентні правила:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Delta} (\& \rightarrow); \quad \frac{B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Delta} (\& \rightarrow);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta} (\neg \rightarrow); \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta} (\vee \rightarrow);$$

$$\frac{A(t), \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \rightarrow \Delta} (\forall \rightarrow);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Delta} (\supset \rightarrow);$$

$$(*) \quad \frac{A(b), \Gamma \rightarrow \Sigma}{\exists x A(x), \Gamma \rightarrow \Sigma} (\exists \rightarrow).$$

Структурні правила: переставлення, тождества і скорочення повторень в антецеденті й сукцеденті та розріз. Знак  $(\cdot)$  в  $(\rightarrow \vee)$ ,  $(\exists \rightarrow)$  має те саме значення, що й у  $(\vee^+)$ ,  $(\exists^+)$ .

Коли зіставляють секвенціальні й натуральні Г. ф. с., правилам введення відповідають сукцедентні правила, а правилам виведення — антецедентні правила. При моделюванні в секвенціальних Г. ф. с. правила виключення використовують розріз. Властивість підформульності для ЛК забезпечує осн. теорема Генцена (теорема про усунівність розрізу): за будь-яким виведенням у ЛК можна побудувати виведення тієї самої секвенції без розрізу.

Теорема про усунівність розрізу дає змогу встановлювати розв'язність безкванторних систем. з підформул даної безкванторної ф-л

можна скласти лише скінченне число песхожих секвенцій (секвенції схожі, якщо вони відрізняються лише порядком і повтореними членами в антецеденті й сукцеденті), в яких у свою чергу можна скласти тільки скінченне число «кандидатів» у виведення; дана ф-ла дозидна, якщо серед цих кандидатів буде виведення. А насправді в процесі пошуку виведення застосовують ефективніший алгоритм пошуку знизу вгору: шляхом аналізу досліджуваної на вивідність секвенції  $S$  проводять «контрзастосування» правил: над  $S$  надписують секвенції (чи пари секвенцій), з яких  $S$  можна було б одержати, застосовуючи один раз правило виведення (через властивість підформульності й відсутність кванторів виходить скінченний список), до кожної з породжених таким способом секвенцій знову застосовують той самий спосіб і т. д. Після скінченного числа кроків буде одержано виведення (на вершинних усіх «гілках» будуть аксіоми) або станеться обрив процесу (заключення) — тоді формула невивідна.

Для кванторних систем цю схему модифікують: на кожному етапі «аналізу» при контрзастосуваннях кванторних правил перебирають лише скінченний список можливих термів; процес загалом організують так, що кожний з можливих термів кінець-кінцем включається в перебір. Через те, що можливі терми нескінченно багато, одержують лише алгоритми встановлення вивідності: для деяких невивідних секвенцій процес аналізу може тривати необмежено без закінчення, для вивідних секвенцій він обов'язково обривається, тобто дає вивід. Особливо зручно ця схема пошуку виведення реалізується для Г. ф. с., що не містять структурних правил. При побудові таких систем користуються оборотними правилами, тобто такими, коли з вивідності висновку випливає вивідність засновків.

Г. ф. с. широко використовують у теорії доведень. Вони дають можливість відображувати особливості змісту теорії за допомогою суто структурних міркувань. Так, Г. ф. с. конструктивної математики часто відрізняються від відповідних класичних систем тільки тим, що в них замість довільних використовують односукцедентні секвенції. Результати типу неуперечливості (невивідність пустої секвенції) або диз'юнктивності часто є тривіальними для систем, у яких немає розрізу: відповідний об'єкт або завжди не може бути висновком ні з якого правила (пуста секвенція), або його можна одержати лише відповідним способом (тобто з будь-якого диз'юнктивного члена за правилом  $\rightarrow \vee$  при доведенні диз'юнктивності).

Важливим узагальненням Г. ф. с. є напівформальні системи, що містять правило «нескінченної індукції»

Jim. Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1962; Математическая теория логического вывода М., 1967. Карри X. Б. Основания математической логики. Пер с англ. М., 1969 [Общая логика, с. 318—347].

Г. Б. Мич.

**ГІБРИДНА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА** — обчислювальна машина, в якій поєднано ряд особливостей цифрових і аналогових обчислювальних пристроїв. Ідею створення Г. о. м. пов'язана з прагненням усунути вади, властиві аналоговим і цифровим обчислювальним машинам (ЦОМ), і об'єднати їхні переваги: швидкодію паралельно працюючих пристроїв аналогових обчислювальних машин (АОМ) та їхню здатність розв'язувати цілі класи задач неалгоритмічним шляхом з високою точністю ЦОМ та їхніми можливостями виконувати різні функціональні операції, до яких належать обчислювання від повідно до заданої послідовності виконання операцій, логічні розв'язування та ітераційні обчислювання.

Перші спроби поєднати властивості АОМ і ЦОМ були зумовлені надзвичайною складністю проблем, що виникали при моделюванні в реальному масштабі часу таких задач, як політ космічних апаратів та керування виробничими процесами. Можливості чисто аналогових і чисто цифрових машин для розв'язування таких задач виявилися недостатніми. Це привело до об'єднання їх в один обчислювальний комплекс за допомогою *аналого-цифрового перетворювача* та *цифро-аналогового перетворювача* інформації ЦОМ у таких комплексах виконують ту частину обчислювань, виконувати які за її допомогою найдоцільніше: точне перетворення координат, обчислювання параметрів траєкторії, моделювання цифрової апаратури керування. АОМ використовують для моделювання динаміки об'єкта й керуючих діянь, де потрібна велика швидкодія і де допустима менша точність. Питання оптимального розподілу обчисл. робіт між аналоговою й цифровою частинами Г. о. м. є дуже важливим, бо при невірному розв'язанні його у великій гібридній моделі виявляються й ігнорують властивості обчисл. машин обох типів. Помилки й труднощі, пов'язані з набором задач, доповнюють ускладнення, пов'язані зі скінченністю темпу вибирання в пристрої аналого-цифрового перетворення чи з апроксимаціями, що визначаються часом виконання обчислювань на ЦОМ. Тому з Г. о. м. основними є машини спроектовані саме у вигляді єдиної гібридної системи. Якщо в таких системах є досить потужні аналогові й цифрові частини, доцільно, щоб заг. програма спільної роботи цих частин передбачала ось витрати часу на перезавантаження й підготовку їх до роботи окремо одна від одної. Крім того, треба щоб у цих системах було передбачено можливість незалежного використання аналогової й цифрової частин. Так, при підготовці аналогової частини системи цифрова частина цієї системи повинна бути зайнята розв'язуванням інших задач до того часу, коли потрібно буде, щоб вона взяла участь у розв'язуванні спільної задачі. Для ефективного використання таких машин треба, щоб обслуговуючий персонал мав високу кваліфікацію і щоб було добре розроблено систему матем. забезпечення. При розв'язуван-

ні задач оптимізації, статистичної обробки та ін. необхідні відладкові стандартні програми керування комплексом.

Досвід, нагромаджений у галузі гібридного аналого-цифрового моделювання, дав змогу визначити шлях створення іншого типу Г. о. м. Для задач, при розв'язуванні яких можна обмежитися невисокою точністю обчислювань, використання аналогових підпрограм у складі *програми*, що її виконує цифровий автомат, веде до значної економії машинного часу і зменшення вимог до обсягу оперативної пам'яті. До такого самого результату веде й заміна в деяких спеціалізованих ЦОМ повільно виконуваної суто цифрової програми множення зворотним до гібридного цифро-аналого-цифрового пристроєм, що реалізує операцію множення. Набагато більшу економію часу дає застосування аналогових арифметичних блоків, керування цифровим способом, у яких виконуються аналогові операції множення й додавання. Аналоговий пристрій, реалізований у вигляді підпрограми, який або обчислює значення ф-ції або розв'язує алгебр. чи дифер. рівняння, дає змогу відмовитися від використання багатьох команд і від додаткового цифрового запам'ятовувального пристрою з малим циклом обігу.

Дуже ефективним є застосування аналогових підпрограм при ітеративному розв'язуванні рівнянь у частинних похідних. Схему можливої гібридної системи для розв'язування двовимірних рівнянь у частинних похідних з невідомим членом наведено на мал. 1, де ПФП — перекладальний функціональний перетворювач, АЦП та ЦАП — аналого-цифровий і цифро-аналоговий перетворювачі. У схемі за аналогову частину взято реакторну сітку Гершторна, що є моделлю рівнянь Лапласа й Пуассона. Введення струмів у вузли сітки цілком автоматизовано приєднанням її через запам'ятовувальні джерела до керуючого цифрового автомата (ЦА).

Досить перспективним є побудова Г. о. м. для розв'язування звичайних дифер. рівнянь з крайовими умовами за схемою, наведеною на мал. 2. Використання в ній аналогової частини, побудованої на базі оборотних точкових інтеграторів, дає можливість реалізувати крайові умови безпосередньо в самих інтеграторах. Точковим інтегратором  $k$ -го порядку одновимірної ф-ції  $U = U(t)$  на від-

різку  $(0, t)$  наз. модель рівняння 
$$\lambda^k \frac{d^k X}{dt^k} +$$

$+ U = 0$ , в якому  $U(t)$  — задана,  $X(t)$  — одержувана ф-ція, а  $\lambda$  — крок дискретизації. Одну з можливих схем оборотного точкового інтегратора 1-го порядку зображено на мал. 3. Оборотним він є тому, що всі його полюси є рівноправними в тому розумінні, що на кожному з них величини у вигляді напруг можна й задавати й одержувати. В Г. о. м., зображений на мал. 2, всі нелінійні залежності реалізуються в керуючому ЦА. Точкові інтегратори (ТІ) відіграють у ній роль дискретного квазіаналога системи

рівнянь  $\tau \frac{dX}{dt} + \varphi(X, t) = 0$  на заданому відрізку  $(0, T)$ . Крайові умови вводяться в схеми інтеграторів безпосередньо. Роль ЦА зводиться до утворення за допомогою кодів  $Q$  потрібної схеми з інтеграторів і до зрівноважування обчисл. системи так, щоб точкове зображення вектора  $\varphi(X, t)$  відповідало розв'язуваній системі дифер. рівнянь (див. *Зрівноважування методу*).

Г. о. м. можна класифікувати за схемою, наведеною на мал. 4. Існує декілька основних типів таких машин. Аналогові машини з

цифровим керуванням і цифровою логікою здатні відтворювати найскладніші моделі порівняно зі стандартними АОМ, зберігаючи їхні позитивні якості, зокрема, можливість для досліджувача активно втручатися у процес пошуку розв'язку. На цих машинах можуть автоматично виконуватися послідовні розв'язування, а результати, одержані в попередніх розв'язаннях, можуть запам'ятовуватися і використовуватися при виконанні наступних розв'язувань. Це дає змогу реалізувати ітеративний процес розв'язування, що збігається до шуканого результату, ітеративний процес оптимізації параметрів тощо. Першим здаленним прикладом цього типу гібридизації є система «HYDAC» фірми Electronic Associates (США). До машин такого типу належать і вітчизняні Г. о. м. «Аркус» і «Екстремал».

У системах АОМ з ЦОМ для спеціальних задач невелику цифрову машину використовують разом з невеликою аналоговою системою для розв'язування задач, розв'язати які було б важко або й зовсім неможливо за допомогою чисто аналогового апаратури.

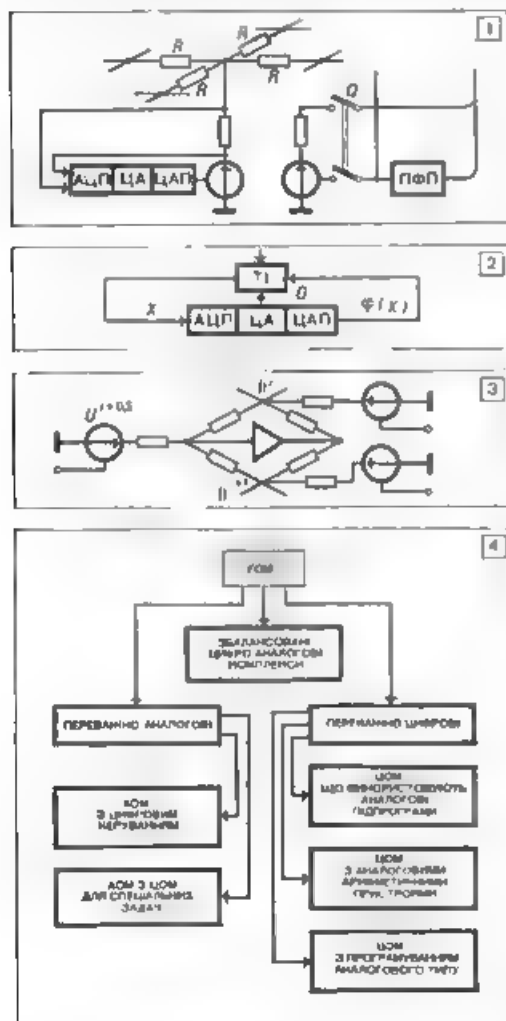
Найпотужнішими з існуючих гібридних обчисл. систем є збалансовані цифро-аналогові комплекси, до складу яких входять універсальні цифрові та універсальні аналогові обчисл. машини. Обидва осн. компоненти таких гібридних систем можна використовувати й окремо для розв'язування широкого класу важливих задач. Але при об'єднанні їх виникає ще потужніша обчисл. система. Цифрову обчисл. машину, яка використовує аналогову підпрограму, с, напр., система «CLADSDT» (США) для розв'язування рівнянь у частинних похідних, у якій аналогова апаратура використовується лише для обернення матриць, якого потребує програма ЦОМ.

У цифрових обчисл. машин з аналоговою ариф. пристроями швидкість обчислювання більша, ніж у суто цифровій машині. Цього домагаються, виконуючи деякі операції паралельно за допомогою аналогової апаратури. Такою машиною є, напр., система, розроблена 1982 в Массачусетському технологічному ін-ті.

До цифрових обчисл. машин з програмуванням аналогового типу належать цифрові диференціальні аналізатори, які за методом підготовки й розв'язування задач можна віднести до АОМ, за формою представлення інформації і за тех. виконанням — до цифрових електронних машин (див. *Цифрова інтегрована машина*).

Г. В. Пузов, Г. П. Галузинський.  
ГІДРОБІОНІКА — розділ біоніки, який для створення нових і вдосконалення існуючих технічних пристроїв, призначених для роботи у водному середовищі, вивчає особливості тварин, що живуть у воді.

ГІЛОК І ГРАНІЦЬ МЕТОД — метод часткового перебору під час розв'язування задач оптимізації з обмеженнями, в якому здійснюється спрямований пошук оптималь-



1. Схема гібридної системи для розв'язування зовнішніх рівнянь у частинних похідних з нелінійним членом.
2. Схема гібридної обчислювальної машини для розв'язування випадкових диференціальних рівнянь.
3. Схема оборотного точкового інтегратора першого порядку.
4. Схема класифікації гібридних обчислювальних машин.

ного розв'язку серед можливих розв'язків. Г. і г. м. — один з найзагальніших підходів до розв'язування задач, для яких не вироблено ефективних регулярних методів. До таких задач належать задачі комбінаторного типу, нелінійного програмування (наприклад, задачі мінімізації неопуклої функції), програмування цілочисельного тощо. В основі Г. і г. м. лежать побудова, які адекватно дають змогу істотно зменшити обсяг перебору а) обчислення нижньої межі (для задачі мінімізації); в такому разі вихідну задачу замінюють іншою, для розв'язування якої є ефективні методи і значення мінімізованої ф-ції в ній не перевищує відповідного значення вихідної задачі; б) розбивання на підмножини (галуження); реалізація методу пов'язана з поступовим розбиванням множини розв'язків вихідної задачі на дерево підмножин і послідовним уточненням значення нижньої межі на кожній з цих підмножин. Способи обчислення нижньої межі й галузювання залежать від виду конкретної задачі й її специфічних особливостей, облік яких приводить до різних реалізацій схеми Г. і г. м. Літ. див. до ст. *Програмування цілочисельне*.

**ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** Для описування поведінки суцільного середовища використовують різні моделі математичні, які в багатьох випадках приводять до великої кількості дифер. рівнянь гіперболічного типу (див. *Диференціальні лінійні рівняння в частинних похідних класифікація*). Такі рівняння лише зрідка мають точні аналітичні розв'язки. До появи ЕОМ можливості чисельного дослідження суцільного середовища були обмежені, в основному, випадком однієї просторової змінної (нестационарні задачі), двох просторових змінних (стационарні задачі), лінійними моделями та найпростішими наближ. методами. Створення ЕОМ дало змогу проводити чисельне дослідження ближчих до природних, а, отже, й складніших матем. моделей суцільного середовища. Тепер розрізняють такі середовища, матем. описування яких приводить до гіперболічних рівнянь: а) ідеальні стисливі рідини; б) стисливі рідини (рівняння, які їх описують, враховують процеси в'язкості й теплопровідності); в) друшні, пружно-пластичні й пружно-в'язкі середовища; г) плазма.

Рівняння, які описують стан суцільного середовища, є матем. виразами законів збереження (маси, імпульсу, енергії тощо), які є правильними для довільного елемента середовища. Як правило, перейшовши до ейлєрових прямокутних координат (а це відповідає законам збереження для довільного паралелепіпеда з ребрами, паралельними осям координат), одержують квазілінійні рівняння в дивергентному вигляді:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = F_i(x, t_k)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \left( u_k, \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (i, j, k, l = 1, \dots, n),$$

які є основою для складання різницевої схеми (див. *Скінченнорізницеві методи*). Характерною особливістю розглянутих моделей суцільного середовища є наявність у них ф-цій і параметрів, які в багатьох випадках можна розглядати як малі. Такими є, наприклад, коэф. в'язкості, теплопровідності й стисливості. Врахування їх приводить до дисипативної моделі середовища, стан якого описують параболічними рівняннями. А в протилежному разі приходять до недисипативної моделі середовища, стан якого описують гіперболічними рівняннями. Характерною рисою квазілінійних гіперболічних рівнянь є те, що в розв'язках можуть виникнути розриви (напр., ударні хвилі, контактні розриви) навіть у тому разі, коли початкові ф-ції є гладкими. Тому вводять поняття узагальненого розв'язку, ґрунтованого на використанні законів збереження в інтегр. формі й умов динамічної сумісності на виниклих розривах — умов, що випливають із цих законів. Виконання цих умов на розривах приводить до необоротності процесу. При цьому розрив треба розуміти як нескінченно тонкий зоно переходу, де відбуваються швидкоперехідні необоротні термодинамічні процеси. Недисипативні моделі можна розглядати як граничні випадки дисипативних моделей, коли параметри дисипативності прямують до нуля. Це зауваження є одним із способів одержування узагальнених розв'язків рівнянь гіперболічного типу як границь розв'язків дисипативних (параболічних) рівнянь, коли параметри дисипативності прямують до нуля; цей спосіб широко застосовують у різницевих методах.

Чисельні методи розв'язування рівнянь гіперболічного типу можна поділити на дві великі групи: 1) методи з явним виділенням особливостей розв'язків; 2) т. з. методи наскрісної лічби, в яких особливостей розв'язків явно не виділяють.

До першої групи методів треба передусім віднести метод характеристик, який з'явився в газовій динаміці порівняно давно, і його успішно застосовували для розрахування однозмірних нестационарних течій з небагатьма особливостями, а також для розрахування двовимірних стационарних течій в області гіперболічності. Метод характеристик використовують лише для розв'язування гіперболічних рівнянь. Він ґрунтується на тому, що гіперболічна система рівнянь з двома невідомими має дві сім'ї дійсних характеристик, які становлять координатну сітку. В цьому разі можна цілком уникнути інтерполяцій, а тим самим — і ефектів згладжування та апроксимаційної в'язкості. А якщо невідомі і незалежних змінних більше, починають виявлятися вади цього методу: виникає апроксимаційна в'язкість, при наявності багатьох особливостей алгоритм стає логічно складним. Тому методом характеристик доцільно розв'язувати задачі,

в яких кількості розривів невелика. Наприклад, у 60-х роках 20 ст. досягнуто певного прогресу в використанні методу характеристик для розрахування просторових задач. Доведено, що розв'язок, одержаний методом характеристик, збігається до розв'язку початкової дифер. задачі в разі досить гладеньких розв'язків.

У зв'язку з необхідністю розв'язувати складні задачі газової динаміки, в яких є багато особливостей (ударних хвиль, контактних границь і центрованих хвиль розриву) виникли нові чисельні методи т. з. методи наскрісної лічби. В основі цих методів лежить єдине тлумачення всіх ділянок потоку. Єдності схеми розрахування досягають завдяки наявності дисипативних членів схеми, які згладжують розриви, перетворюючи їх на воли переходу шириною в кілька інтервалів. Відомі схеми наскрісної лічби мають на гладеньких розв'язках доволі високу точність не вище як 3-го порядку і глобальну точність — не вище як 1-го порядку (якщо враховувати високу точність схеми поблизу особливостей). У разі газової динаміки схеми наскрісної лічби досить добре передають інтегр. характеристики потоку й досить точно відтворюють положення й швидкість сильних ударних хвиль. Водночас границі хвиль розриву спотворюються, контактні границі ерозуюються апроксимаційною властивістю схеми, так що ширина їх із часом збільшується.

Схеми наскрісної лічби за властивостями розв'язності та стійкості рівнянь, які виникають внаслідок скінченнорізницевої апроксимації, можна, в свою чергу, поділити на дві великі групи: а) явні схеми, б) неявні схеми. В явних схемах область залежності різницевого розв'язку є скінченною множиною точок, розміщених на площині початкових даних (якщо обмежитися розглядом задач Коші), так що кількості точок в області залежності на попередньому часовому рівні не збільшується зі зменшення кроку сітки  $\tau$ ,  $h$ . Отже, двохарову явну схему зображують у вигляді:

$$u_i^{n+1} = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} C_{\alpha}^n u_{i+\alpha}^n + f_i^n,$$

де  $C_{\alpha}^n = C_{\alpha}^n(u_i, \tau, h, \lambda\tau, h\lambda)$ ,  $i = \pi\tau$ ,  $\tau = \pi h$ , числа  $q_1$  і  $q_2$  не залежать від  $\tau$ ,  $h$ .

У неявних схемах значення  $u_i^{n+1}$  виражається через усі значення  $u_{i+\alpha}^n$  ( $\alpha = -N_1, \dots, N_2$ ), де числа  $N_1, N_2$  зростають зі зменшенням  $\tau, h$ . Неявну схему можна записати у вигляді  $Au_i^{n+1} = Bu_i^n + F_i$ , де оператори  $A$  й  $B$  є фінітними, тобто їх зображують у вигляді

$$A = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} C_{\alpha}^{\lambda\tau} T_{\alpha}, \quad B = \sum_{\alpha=-q_2}^{q_1} C_{\alpha}^{\lambda\tau} T_{\alpha}$$

де  $T_{\alpha}$  — оператор зсуву.

Явні схеми прості в реалізації, але умова їхньої стійкості (див. *Стійкість різницевих схем*), як правило, дає на величину кроку сильне обмеження вигляду  $\tau \leq \text{const} \cdot h^m$ , а це приводить до надто малого кроку й неоправданого збільшення обсягу обчислювань. Неявні схеми складніші в реалізації при переході в одного часового шару на інший, зате крок  $\tau$  можна вибирати як завгодно великим, і тим самим його можна визначити, враховуючи тільки потрібну точність.

Явні й неявні схеми є необхідними елементами різницевих методів розв'язування систем гіперболічних рівнянь. Крім поділу схем за властивістю розв'язності (за структурою розв'язувального оператора), існує й класифікація схем за структурою сітки. Сучасна теорія розглядає сітку як скінченну множину точок — носія інформації, які будуються за лежко від розв'язку, і еволюціонує разом з ним.

Згладжування розривів у розв'язках, яке дає змогу вести наскрісну лічбу, відбувається в схемах наскрісної лічби і внаслідок введення дисипативних членів у дифер. рівняння і внаслідок дисипативних властивостей самої схеми. Об'єднаних обидва механізми дисипативності, можна говорити про апроксимаційну властивість різницевих схем. Структуру апроксимаційної властивості схеми описують першим дифер. наближенням (ш. д. н.) схеми, яке відрізняється від початкової дифер. системи рівнянь членами, що містять старші похідні. Від структури матриць при цих членах залежать не тільки властивості стійкості схеми, а й її дисипативні властивості. У багатьох випадках дуже важливо визначити, наскільки різницева схема або її ш. д. н. зберігають групові властивості початкової системи дифер. рівнянь. Зберігання схемою цих властивостей має велике значення в практичній лічбі, особливо для задач газової динаміки, де, напр., неінваріантність ш. д. н. відносно перетворення Галілея призводить до несприятливих лінійних ефектів (нестійкість, немонотонність профілів тощо).

При чисельному інтегруванні гіперболічних рівнянь похідні замінюють скінченими різницями, а потім на кожному кроці доводиться розв'язувати систему алгебр. рівнянь. Різницеві схеми повинні задовольняти дві незалежні умови — апроксимації та стійкості. Ці вимоги певною мірою суперечать одна одній. Крім того, різницеві схеми повинні задовольняти ще чимало практично необхідних вимог — дивергентності, економічності тощо. Теорія різницевих схем почала розвиватися в середині 40-х років 20 ст. До цього спричинялася необхідність розв'язувати задачі ядерної енергетики й ракетобудування, а також поява ЕОМ. У 50-х роках 20 ст. було сформульовано й доведено теореми збіжності для різницевих схем, які апроксимують лінійні дифер. рівняння. Ці теореми дають змогу зводити дослідження збіжності різницевої схеми до дослідження її стійкості.

В той час, як досліджування апроксимації різницевої схеми відповідного гіперболічного рівняння є порівняно простим, має локальний характер іноді зводиться до розкладу в ряд Тейлора, досліджування стійкості — завдання набагато складніше. Незважаючи на чимало досліджень, що їх здійснили різні автори, ще й досі не одержано досить загальних і ефективних критеріїв стійкості й збіжності схем для гіперболічних рівнянь зі змінними коеф. (а тим більше — для нелінійних рівнянь).

Для різницевої схеми, яка апроксимує гіперболічні рівняння з постійними коеф., стійкість досліджують методом Фур'є. Для цього оцінюють норму образу Фур'є оператора кроку. Відомо, що спектральний радіус матриці образу Фур'є оператора кроку не перебільшує норми матриці. Звідси випливає необхідний критерій стійкості: для стійкості різничевої схеми необхідно, щоб спектральний радіус образу Фур'є оператора кроку не перебільшував величини  $1 + O(\tau)$ , де  $\tau$  — крок різничевої схеми за часом. Ця умова необхідна й для різницевої схеми зі змінними коеф. Якщо зробити кілька додаткових обмежень, вона буде і достатньою для стійкості різницевої схеми.

Для досліджування стійкості різницевої схеми в коеф., які залежать від просторових змінних, застосовують такі методи: а) метод мажорантних, або апіорних, оцінок; б) локально-алгебр. метод. Метод апіорних оцінок найбільше розвинув в своїх працях рад. і амер. математики. Цей метод аналогічний відповідному методу для дифер. рівнянь, але в разі різницевої схеми його дуже важко реалізувати; це зумовлено специфікою різницевого аналізу, в якому, на відміну від апіорних оцінок у теорії дифер. рівнянь, багато співвідношень набувають громіздкого вигляду. В основі локально-алгебр. методу лежить вивчення властивостей локального різницевого оператора, який одержують з відповідного різницевого оператора зі змінними коеф. фіксацією, «заморожуванням» коеф. Тим самим аналіз стійкості різницевого оператора зі змінними коеф. замінюють аналізом цілої сім'ї операторів з постійними коеф. Локальний критерій стійкості є узагальненням методу «заморожування» коеф., використовованого в теорії дифер. рівнянь. До локального критерію стійкості прилягає дисипативний критерій стійкості, а саме: з дисипативності й апроксимації різничевої схеми випливає стійкість схеми для гіперболічних систем дифер. рівнянь 1-го порядку з ермитовими матрицями. Практичні розрахунки показали, що ці критерії можна використовувати, досліджуючи стійкість різницевої схеми для нелінійних рівнянь, хоча це твердження воки що не обґрунтовано.

Наприкінці 60-х років 20 ст., досліджуючи стійкість різницевої схеми для нелінійних рівнянь (зокрема, для рівнянь газової динаміки), почали широко застосовувати метод п. д. в. який замінює аналіз різничевої схеми аналі-

зом її дифер. наближення. В разі, коли коеф. початкового дифер. рівняння є постійними або ф-ціями незалежних змінних, для ряду різницевої схеми доведено, що з коректності п. д. в. випливає стійкість відповідної різничевої схеми. В протилежному випадку обґрунтування цього методу немає. Проте метод дифер. наближення може пояснити нестійкість різницевої схеми, яка буває в розрахунках і яку не вловлює локальний метод Фур'є, бо він не враховує градієнтів.

Наприкінці 60-х років 20 ст. великого розвитку набула різничева схема збільшеною точністю. Досліджуванню схем підвищеного порядку точності присвячено ряд праць, а вже приклади використання в газодинамічних розрахунках схем 3-го й 4-го порядків точності — використання, яке подає надії.

Зі збільшенням розмірності задачі кількість операцій на точку зростає. Збільшуються довіч трудощі складання програми розрахунку. Схеми простої апроксимації стають неекономічними. Для одержування економічних різницевої схем запропоновано методи, основані на ідеях розщеплювання різницевої схеми, факторизації та розщеплювання (слабкої апроксимації) дифер. рівнянь. До однієї з модифікацій методу розщеплювання можна віднести й метод частинок у комп'юрах, який тепер широко використовують, розв'язуючи задачі механіки суцільного середовища, в якому розщеплювання не пов'язана з зменшенням розмірності операторів. В основі методу розщеплювання лежить подання складних операторів тероз найпростіші, тому інтегрування початкового рівняння зводиться до інтегрування рівнянь простішої структури. Методом розщеплювання розв'язують багато складних задач матем. фізики.

Лит.: Яценко Н. Н. Введение в равностойные методы математической физики, т. 1—2. Новосибирск, 1965 (библиогр. с. 2, с. 379—385). Рождественский В. Л., Яценко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М., 1964 (библиогр. с. 583—592). Аладин Г. Б. (та ін.) Решения одностеренных задач газовой динамики в подвычислительных сетях. М., 1970. Самарский А. А. Введение в теорию равностойных схем. М., 1971 (библиогр. с. 434—450). Риктмайер Р., Мортон К. Равностойные методы решения краевых задач. Пер. с англ. М., 1972 (библиогр. с. 481—413). Вычислительные методы в газодинамике. Пер. с англ. М. 1967. М. М. Яценко, Ю. Г. Шокин

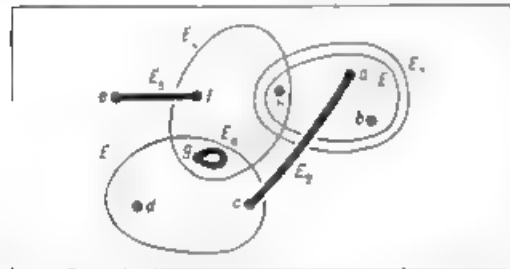
**ГІПЕРГРАФ** — пара  $H = (X, E)$ , утворена скінченною множиною  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  вершин та певною сім'єю  $E = \{E_i \mid i \in I\}$  ребер — непустих частин  $X$ , що задовольняють умову  $\bigcup_{i \in I} E_i = X$ . Напр., для  $G, H$  на мал.

$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$ ,  $F_1 = E_7 = \{a, b, h\}$ ,  $E_2 = \{c, d, e, f, g, h\}$ ,  $E_3 = \{c, f, g, h\}$ ,  $E_4 = \{e, f, g\}$ . Якщо всі  $E_i$  — двоелементи, то  $G, H = (X, E)$  — це звичайний граф без голих вершин. Теорія  $G, H$ , використуючи осн. ідей графової теорії, дає змогу одержати багато результатів коротшим шляхом і в загальнішому вигляді; вона допускає й численні застосування до інших проблем

комбінаторного характеру. До Г., зокрема, відносять матроїди, введені для побудови єдиної алгебр. теорії дерев, циклів та ін частин у графі.

Лит. Зыков А. А. Теория конечных графов, у і Новосибирск 1989 (бібліотр с 315-52) Fulle W. P. Lectures on matroids. «Journal of research National Bureau of Standards» 1965, v 69B3, №1 2; Berge C. Graphes et hypergraphes. Paris, 1971.

О. О. Зыков.



**ГІПЕРПЛОЩИННИ ВІДТИНАЛЬНИЙ МЕТОД** — один з методів розв'язування задачі програмування опуклого. Нехай задачу опуклого програмування сформульовано так: мінімізувати  $(p, x)$  при обмеженнях

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$  —  $n$ -вимірні вектори,  $g_i(x)$  — опуклі ф-ції,  $(p, x)$  — скалярний добуток вектора  $p$  і  $x$ .

Метод складається з попереднього й загального кроків.

На попередньому кроці вибирають точки  $x^1, \dots, x^k$  такі, що область, визначена нерівностями  $g_i(x^j) + (\nabla g_i(x^j), x - x^j) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k$ , обмежена. Тут  $\nabla g_i(x)$  — градієнт ф-ції  $g_i(x)$ .

Загальний крок полягає ось у чому. Нехай множина  $I(x^j) = \{1, 2, \dots, m\}, \quad j = 1, \dots, k$  і точки  $x^1, \dots, x^k, \quad k \geq 1$  уже побудовано і побудовано відповідні їм множина індексів  $I(x^j), \quad j = 1, \dots, k$ . Розв'язуємо задачу мінімізації  $(p, x)$  при обмеженнях

$$(\nabla g_i(x^j), x - x^j) + g_i(x^j) \leq 0, \quad i \in I(x^j), \quad j = 1, \dots, k \quad (2)$$

Точку мінімуму цієї задачі позначимо через  $x^{k+1}$ . За  $I(x^{k+1})$  беремо множину тих індексів  $i$ , для яких  $g_i(x^{k+1}) > 0$ . Якщо при якомусь  $k$  множина  $I(x^k)$  — пуста, то  $x^k$  — розв'язок задачі. У заг. випадку побудована послідовність  $x^k$  така, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_i(x^k) \leq 0$ , а значення

$(p, x)$  прямує до значення мінімуму  $(p, x)$  в області (1).

Б. М. Поненчиков.

**ГІПОТЕЗА КОМПАКТНОСТІ** — припущення про те, що підмножина розпізнаваних зображень одного класу є в певному розумін-

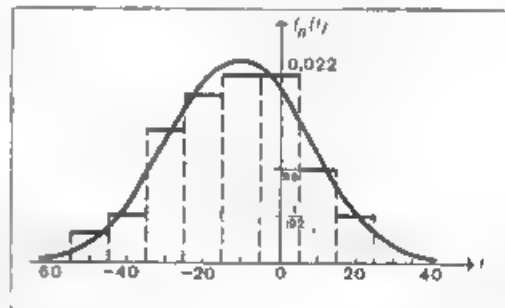
ні простою. Поняття простоти можна конкретизувати по-різному. Напр., класи зображень наз. компактними, якщо їх можна відокремити один від одного за допомогою гіперплощин (див. *Роздільна поверхня в розпізнаванні образів*) або коли кожний клас зображень можна подати у вигляді об'єднання якогось числа опуклих множин. У ряді досліджень критерій компактності відображує уявлення про те, що схожість зображень одного класу має бути більшою за схожість зображень різних класів.

М. І. Шлегельгер.

**ГІСТОГРАМА** — графічне наближення зображення щільності розподілу  $n$ -вимірностей випадкової величини, побудоване за вибіркою скінченного обсягу. Г. є східчаста ф-ція  $f_n(t)$ , побудована за вибіркою незалежних спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  випадкової величини з щільністю  $f(t)$  таким чином. Інтервал, у якому лежать спостереження  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , поділяють на  $m$  ( $m < n$ ) підінтервалів  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{m-1}, t_m]$ , які називаються інтервалами групування,  $n_i$  — кількість спостережень вибірки, що потрапили до інтервалу  $[t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, m-1$ . Г. вибірки  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що відповідає інтервалам групування  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{m-1}, t_m]$  є східчаста ф-ція  $f_n(t)$ :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \cdot \frac{n_i}{n} & \text{при } t_i < t < t_{i+1}, \\ 0 & \text{при } t > t_m. \end{cases}$$

Згідно з великих чисел законом значення  $f_n(t)$  для  $t$  з інтервалу  $[t_i, t_{i+1}]$  при великих  $n$



близько до величини  $\theta_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i}$

$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt$  — середнього значення щільності  $t_i$  розподілу на інтервалі  $[t_i, t_{i+1}]$ . Для того, щоб Г. давала добре уявлення про розподіл, треба обирати кількість спостережень та інтервал групування так, щоб у кожному інтервалі



(за винятком, можливо, крайніх інтервалів), було хоч би по п'ять спостережень. Порівнюючи  $\Gamma$  та графіки гадаючої щільності  $f(x)$ , на практиці звичайно роблять перший висновок про відповідність між даними спостереженнями й теоретичними припущенням. При цьому всякий досить великий незбіг легко виявити. Через те, що велике розходження в деякому ймовірності може виникати внаслідок випадкових коливань, то для краєвої об'єктивності висновків треба будувати довірчі границі (див. *Довірчий інтервал* для параметра  $\theta$ , що відповідає довірчому рівненню  $\delta$ ) для величини  $\delta$ . При великих значеннях  $n$  наближений довірчий інтервал для величини  $\delta$ , що відповідає довірчому рівненню 0,05, має вигляд

$$\left( \frac{1}{t_{1+1} - t_1} \cdot \frac{n - 2\sqrt{n_1}}{n}, \frac{1}{t_{1+1} - t_1} \times \right. \\ \left. \times \frac{n_1 + 2\sqrt{n_1}}{n} \right)$$

Розглянемо, наприклад, результати вимірювань якості *випадкової величини* (в таблиці дано кількості спостережень, що потрапили у відповідні інтервали).

| Інтервали, $t_2 - t_1$        | $-5,1, 1,2$ | $1,2, 3,5$ | $3,5, 2,5$ | $-2,5, -1,5$ | $-1,5, 1$ | $-0,5, 0,15$ | $0,15, 1,2$ |
|-------------------------------|-------------|------------|------------|--------------|-----------|--------------|-------------|
| Кількість спостережень, $n_i$ | 3           | 5          | 13         | 19           | 21        | 21           | 10          |

Тут  $n = 96$ , усі інтервали групування мають однакову довжину 10 см.  $\Gamma$  вибірки дано на мал.: для порівняння зображено щільність нормального розподілу, що добре узгоджується з даними.

А. Я. Доромітченко.

**ГЛОБАЛЬНІ ЗМІННІ** — змінні в *моделях програмування* з блоковою структурою, не описані (не локалізовані) в даному блоці, але використовувані в ньому. Такі змінні описуються в блоці, всередині якого міститься даний блок як *оператор*. Поняття  $\Gamma$  з тісно пов'язане з поняттями сфери дій *ідентифікації*. Див. також *Локалізовані змінні*.

А. І. Халилов

**ГЛОБАЛЬНОГО ПОШУКУ МЕТОДИ** — методи анаходження *екстремуму глобального* для функцій, що мають велику кількість *екстремумів локальних*. Ці методи поки що розроблено слабо; про деякі результати див. *Мінімізації функцій методами. Оптимізації методи чисельні*.

**ГНІЗДОВИЙ СПИСОК** — один з програмних способів організації асоціативної (спискової) інформації в пам'яті машини, при якому всі члени списку розміщуються в кількох полях машинної пам'яті (гніздах). Всередині гнізда окремі члени розміщуються послідовно, а зв'язок між гніздами здійснюється за допомогою адрес зв'язку. При цьому в останньому слові попереднього гнізда за-

значається адреса першого слова наступного гнізда.  $\Gamma$  є економічний щодо затрат пам'яті, але складний щодо коректування списками і поновлювання поля пам'яті, що звільнилися.  $\Gamma$  є зручно застосовувати при побудові великих сталих спискових масивів. Див. *Монітінг списків*.

А. І. Халилов

**ГНОСЕОЛОГІЧНІ ОСНОВИ КІБЕРНЕТИКИ** — див. *Філософські питання кібернетики*. **ГОМЕОСТАЗИС** (від грец. *homo* — однаковий, сталий і *stasis* — стан) — підтримування сталості суттєвих змінних організму (температури, тиску та складу крові тощо) для забезпечення оптимального режиму внутрішнього середовища. Поняття  $\Gamma$  розвинули фізіологи К. Бернар і В. Кеннон, його широко вивчав І. М. Сеченов та І. П. Павлов. Уявлення про  $\Gamma$  тісно пов'язані з поняттями про ультростійкість і адаптивність. Прагнення організму утримувати суттєві змінні у фізіологічній межі пов'язані з процесами саморегуляції, спрямованими на ліквідацію наслідків збурення в тих чи ін. підсистемах організму. Загально визнано, що акт саморегуляції відбувається за допомогою зворотного зв'язку. Тепер вважають не тільки гомеостатичні системи, що забезпечують сталість обміну речовини й енергії, а й запроваджують поняття про нервово-психічний  $\Gamma$  як основу рівно-

важування організму в зовнішньому середовищі за допомогою нервової системи та як базу створення опт. умов для діяльності мозку.  $\Gamma$  вищого рівня має ймовірнісний характер і пов'язаний з пошуком адекватності плану і структури фізіологічної активності організму умовам зовн. середовища.  $\Gamma$ , пов'язаний в внутрішніх системах чи локальними ділянками нервової системи, має детермінований характер (див. *Біологічних систем організація*).

К. О. Іванов-Мироцький.

**ГОМЕОСТАТИЧНА СИСТЕМА** — технічний пристрій, що моделює особливу властивість живих організмів — *гомеостазис*, тобто властивість організму удержувати свої характеристики в допустимих для його існування межах (напр., підтримування рівноваги тиску, сталості т-ри тіла, стабілізація виступу в крові ксисну, а також цукру й гормонів та ін.). Англ. нейрофізіолог У. Ешбі (в 1903) побудував аналогову модель багатоз'явних процесів керування, що розв'язують завдання гомеостазису, і назвав її *гомеостатом*.  $\Gamma$  о м.  $\Gamma$  омеостат Ешбі складається з чотирьох обертових магнітів, що змінюють опори чотирьох рідких потенціометрів. Напроту, що їх змінюють з потенціометрів, після підсилення подаються через перемикачі на котушки, які притягують або відштовхують обертові магніти. При деяких поєднаннях по-



...,  $A_m$ ) — базис оптим. плану  $X^1$  задачі лінійного програмування (1—3),  $A_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})^T$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $T$  — знак транспонування. Помноживши рівняння (2) на  $(A^1)^{-1}$ , переписемо їх у вигляді:

$$x_{i1} + \sum_{j \in N} x_{ij} x_j = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

або

$$x_{i1} = x_{i0} - \sum_{j \in N} x_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

де  $N$  — множина індексів  $j$  векторів  $A_j$ , що не належать базисові, всі  $x_{ij}$ ,  $x_{i0}$  — перетворені значення відповідних коефіцієнтів  $a_{ij}$ ,  $b_i$ . Підставляючи рівність (5) у ф-лу (1), виразимо форму  $x_0$  через небазисні змінні  $x_j$  ( $j \in N$ ).

$$x_0 = x_{00} = \sum_{j \in N} x_{0j} x_j, \quad (6)$$

де  $x_{00}$  — значення лінійної форми,  $x_{0j} > 0$  — оцінки небазисних векторів (див. Симплекс-метод) на оптим. плані. Коли всі  $x_{0j}$ , що відповідають даному планові  $X^1$ , цілі числа, то  $X^1$  — розв'язок задачі (1—4). Якщо деякі з  $x_{0j}$  дробові, виберемо одне з них, напр.,  $x_{0i}$ , і, відправляючись від  $i$ -го рядка системи (5), побудуємо додаткове обмеження, якого не задовольняє одержаний нецілочисловий розв'язок  $x_{i1} = x_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $x_j = 0$ ,  $j \in N$ , але задовольняють усі цілочислові плани (1—4). Позначимо через  $\{x_{ij}\}$  найбільше ціле число, що не перевищує  $x_{ij}$ , тоді  $\{x_{ij}\} = x_{ij} - [x_{ij}] > 0$  — дробова частина  $x_{ij}$ . Шукане обмеження можна записати у вигляді.

$$\sum_{j \in N} \{x_{ij}\} x_j \geq [x_{i0}]. \quad (7)$$

План  $X^1$  його не задовольняє, бо для нього ліва частина нерівності (7) дорівнює нулеві, а права — дробова частина нецілої величини  $x_{i0}$  — більша за нуль. Як і можна вибрати і 0, тобто будувати додаткове обмеження за рівнянням (6). Справді, цілочисловість усіх  $x_j$  гарантує цілочисловість  $x_0$  на всіх цілочислових планах. Обмеження (7) переписують у вигляді

$$x_{n+1} = -\{x_{i0}\} + \sum_{j \in N} \{x_{ij}\} x_j, \quad x_{n+1} > 0 \quad (8)$$

і додають до умов (2).

Матриця

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

яку одержують, розширюючи  $A^1$  при додаванні до ф-ли (2) рядка (8) і змінної  $x_{n+1}$ , є

псевдобазисом для розширеного завдання. Для розв'язування цієї задачі користуються двоїстим симплекс-методом, починаючи розв'язувати з псевдобазису  $A$ . Процес додавання нових обмежень триває доти, поки на одному з кроків не буде одержано оптим. цілочислового плану або не виявиться, що задача нерозв'язна. В першому випадку одержаний план є розв'язком для задачі (1—4), у другому — задача (1—4) не має цілочислових планів. Г-м зводиться до розв'язування за скінченну кількість кроків, коли виконано хоч одну з умов існує розв'язок задачі (1—4) або вначення лінійної форми (1) обмежене знизу. Якщо обмеження цілочисловості (4) накладено лише на частину змінних, описане правило побудови додаткового обмеження (8) не застосовне. Але відомо відомі ця правила (розробив її також Р. Гонорі) і для такої задачі. Г. м. узагальнено на задачі опуклого цілочислового програмування, дискретного програмування і в деяких інших напрямках. Літ. див. до ст. Програмування цілочислове.

В. О. Трибін.

**ГОНОК ПРОБЛЕМА** — проблема усунення можливості неправильного функціонування схеми автомата, який містить елементи пам'яті, внаслідок явища гонок. Явище гонки виникає, якщо за умовами спрацювання автомата одночасно повинні змінювати свій стан кілька елементів пам'яті; при цьому елемент, який змінить стан раніше за інші (тобто елемент, який виграв гонки), може змінити сигнали на входах елементів пам'яті, які беруть участь у гонках, що може призвести до установлення автомата в неправильний стан.

Розроблено методи виявлення гонки та усунення їх, а також способи усунення небезпечних гонки, коли їх допущено. Актуально в розробку оптим. методів (для різних умов та обмежень) протигонкового кодування, витягів автоматизації протигонкового кодування тощо (див. Елементарний синтез ЦОМ).

Літ. Глушников В. М. Синтез цифрових автоматів. М., 1962 (бібліогр. с. 484, 489). Миллер Р. Теория переключаемых схем. Пер с англ. т. 2. М., 1971. Б. Г. Кошаров.

**ГОРНЕРА СХЕМА** — одна з найпоширеніших обчислювальних схем. Г. с. застосовують, напр., для знаходження коэф. розкладу многочлена  $f(x)$  за степенями  $x - \alpha$  або для обчислень значень многочленів.

**ГРА АЗАРТНА** — багатокрокова гра одного гравця. На  $t$ -му кроці гри ( $t = 1, 2, \dots$ ) гравець, маючи капітал  $f_{t-1}$ , вибирає одну з альтернатив, які він має, що залежать від величини  $f_{t-1}$ . Після цього відбувається розиграння гри (див. Гра динамічна), який є реалізацією якоїсь випадкової величини, що залежить від ходу гравця. Число, одержуване під час реалізації, є капіталом гравця  $f_t$  після  $t$ -го кроку. Якщо гравець закінчує гру в момент  $t$ , то його виграш визначають як  $\pi(f_t)$ , де  $\pi$  — ф-ція корисності гравця, яку задано на множині капіталів. Мета гравця — максимізувати ф-цію корисності.

Г. а. є, напр. червоне й чорне, коли в кожній партії гравець може зробити ставку на одну з двох альтернатив, що з'являються з заданими ймовірностями. В такій грі стратегією оптимальною є ставка в кожній партії всієї наявної у гравця суми, або суми, достатньої для того, щоб зрівнати банк.

**ГРА БЕЗ ПОБІЧНИХ ПЛАТЕЖІВ** — гра кооперативна, в якій можливості поділу корисності й перерозподілу її між гравцями обмежені. За значення характеристичної функції  $v(K)$  Г. б. в. п. для коаліції  $K$  (див. *Ігрові теорії*) беруть множину таких векторів, що  $K$  може забезпечити своїм членам вигоди, не менші за відповідні компоненти цих векторів. Множини векторів вигравішів, які фактично можуть одержати всі учасники гри, позначають через  $H$ . Отже, формально Г. б. п. п. описують трійкою  $\langle I, v, H \rangle$ , де  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — множина гравців.

У множині  $H$  виокремлюють (як і в класичних кооперативних іграх) відношення *домінування* й на основі цього відношення формують різні принципи оптимальності, зокрема, *ядро*, за теоремою Неймана—Моргенштерна і т. д. Доведено, що кожна Г. б. в. п. трьох осіб має розв'язок; відомий приклад Г. б. п. п. семи осіб, що не має розв'язку.

**ГРА БЕЗКОАЛІЦІЙНА** — гра, в якій учасники, діючи ізольовано один від одного, добиваються індивідуальної мети. Формально Г. б. можна задавати системою:

$$\Gamma = \langle I, \{s_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$

де  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — множина гравців,  $s_i$  — множина стратегій гравця  $i$ , а  $H_i$  — його *оплатна функція*, яку визначено на декартовій добутку  $S = s_1 \times \dots \times s_n$  і яка набуває дійсних значень.

Прикладом може бути гра Морра з трьома гравцями. Кожен із трьох гравців показує двома іншими одна або два пальці. Якщо всі гравці показали однакову кількість пальців, то виграв кожний гравець дорівнює 0. А коли один із гравців показав кількість пальців, відмінну від показаної його партнерами,

то він одержує 1, а два інші — по  $-\frac{1}{2}$ . Однак з стратегій, які приводять до ситуацій рівноваги, є така стратегія *лінива*: кожен з гравців з ймовірністю  $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$  показує

один палець і з ймовірністю  $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$  — два.

Важливим принципом опт. поведінки гравців є *здійсненість мети принцип*, який приводить до ситуацій рівноваги. Ці ситуації й ще деякі множини їх прийнято адекватно розв'язки Г. б. Ситуації рівноваги  $S$  і  $t$  наз. взаємозамінними, коли будь-яка ситуація  $r = (r_1, \dots, r_n)$ , де  $r_i = s_i$  або  $r_i = t_i$  так

само рівноважна. Вони наз. еквівалентними, коли  $H_i(s) = H_i(t)$  для всіх  $i \in N$ . Нехай  $Q$  — множина всіх ситуацій рівноваги, а  $Q^1$  — множина ситуацій рівноваги, опт. за Парето (див. *Парето оптимум*). Гру наз. розв'язком за Нешом, коли всі  $s \in Q$  є еквівалентні й взаємозамінні. Гру наз. дуже розв'язком, коли  $Q^1$  непусте й усі  $s \in Q^1$  — еквівалентні й взаємозамінні. Доведено, що Г. б. не обов'язково має розв'язок за Нешом, але коли вона його має, то цей розв'язок — єдиний. С і інші підходи до визначення опт. поведінки в Г. б.

До Г. б. належать *ігри антагоністичні*, в т. ч. *ігри на винищення*, *ігри на обичайному квадраті*, *ігри динамічні*, *ігри матричні*, *ігри стохастичні* й деякі інші. Див. Вороб'єв Н. Н. Конечные бескоалиционные игры «Успехи математических наук», 1959, т. 14, в. 4. Вороб'єв Н. Н. Временные составные теории игр «Успехи математических наук», 1970, т. 25, в. 2. Нейм Дж. Бескоалиционные игры. Матричные игры. М., 1961.

**ГРА БІМАТРИЧНА** — гра безкоаліційна двох осіб, що мають скінченне число стратегій. Г. б. задають парою матриць вигравішів  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $B = \|b_{ij}\|$  однакових розмірів. Якщо 1-й гравець обирає рядок  $i$ , а 2-й — стовпчик  $j$ , то виграв 1-го гравця —  $a_{ij}$ , а 2-го —  $b_{ij}$ . Якщо  $a_{ij} + b_{ij} = 0$  для всіх  $i$  та  $j$ , то Г. б. виваляється *грою матричною*. Теорія біматричних ігор є найпростішим розділом заг. теорії безкоаліційних ігор. Але вичерпної теорії опт. поводження гравців у Г. б. ще немає.

Прикладом Г. б. може бути гра з матрицями вигравішів.

$$\begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$$

Цю гру здебільшого інтерпретують як конфлікт двох бандітів, затриманих з підозри в спільному тяжкому злочині, причому кожний має дві стратегії: «відмагатися» і «зізнатися». Якщо обидва не будуть зізнаватися, то через відсутність прямих доказів їх буде засуджено до помірної покарання (напр., за бродяжництво строк ув'язнення — 1 рік). Якщо обидва зізнаються, то їх буде засуджено до суворого покарання з урахуванням зізнання як пом'якшуючої обставини (напр., 8 років ув'язнення). Якщо один зізнається, а другий — ні, то той, хто зізнався, одержує прощення, а другий — макс. покарання (напр., 10 років ув'язнення). *Рівноваги ситуацією* буде тут спільне зізнання, яке приводить до великих втрат (8 років ув'язнення), а *Парето оптимальною* — спільне замовчування, яке, проте, нестійке.

**ГРА ВИРОДЖЕНА** — гра антагоністична, в якій *оплатна функція* вироджена, тобто має вигляд:

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_i(x) g_j(y),$$

де  $f_1(x)$  та  $g_2(y)$  — ф-ції, задані відповідно на множинах стратегій чистих гравців  $A$  та  $B$ .

Вивчали вироджені ігри на одиничному квадраті. Вони зводяться до скінченних антагоністичних ігор опуклих. Якщо  $f_1(x)$  та  $g_2(y)$  — неперервні ф-ції, то гравці  $A$  та  $B$  мають стратегії оптимальні, які є відповідно суміщенням не більше як  $m$  і  $n$  чистих стратегій. Якщо  $f_1(x) = x^2$ , а  $g_2(y) = y^2$ , то Г. в. наз. поліноміальною. Поняття Г. в. можна визначити і для заг. безкоаліційних ігор  $n$  осіб. Г. М. Дубин.

**ГРА ДИНАМІЧНА** — гра  $n$  осіб у вигляді процесу, що розвивається у часі, протягом якого гравці приймають послідовно часткові рішення, переходячи від одного стану гри до іншого. І д., в яких гравці приймають рішення в дискретні моменти часу, описують такою схемою. Здають множину станів  $X$ , для кожного  $x \in X$  множини  $S_i(x)$  елементарних стратегій гравців  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (множина  $S(x) = \prod_{i=1}^n S_i(x)$ )

визначається як простір елементарних ситуацій  $z(x_1) \in S(x_1)$ , початковий стан гри  $z_1 \in X$  та ф-ції  $P_k(x_1, z(x_1), \dots, x_{k-1}, z(x_{k-1}), x_k)$ , які при фіксованому  $x_k$  змінюють за останніми своїми аргументами, а при фіксованих  $x_1, z(x_1), \dots, x_{k-1}, z(x_{k-1})$  є ймовірнісними розподілами на  $X$ . Партію гри  $P = (x_1, z(x_1), x_2, z(x_2), \dots)$  визначають індуктивно. В початковому стані  $x_1$  кожний гравець  $i$  вибирає елементарну стратегію  $z_i(x_1) \in S_i(x_1)$ , в результаті чого складається елементарна ситуація  $z(x_1) \in S(x_1)$ . Стан  $x_2 \in X$  вибирають згідно з розподілом  $P_2(x_1, z(x_1), x_2)$ . Якщо визначено відрізок партії  $P_k(x_1, z(x_1), \dots, x_{k-1}, z(x_{k-1}), x_k)$ , то аналогічно утворюється елементарна ситуація  $z(x_k) \in S(x_k)$ , після чого наступний стан  $x_{k+1} \in X$  вибирають згідно з розподілом  $P_{k+1}(x_1, z(x_1), \dots, x_k, z(x_k), x_{k+1})$ . На кожній партії  $P$  визначено виграш  $h_i(P)$  гравця  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Стратегія  $f_i$  гравця  $i$  є набір ф-цій  $\{f_i^k\}$ , де ф-ція  $f_i^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) кожному відрізку партії  $P_k$  докинувши  $z(x_k)$  у відповідність елементарну ситуацію  $z_i(x_k) \in S_i(x_k)$ . Г. д. визначено, якщо кожна ситуація індукуює ймовірнісну міру  $\mu_i$  на множині всіх партій. У цьому разі виграш гравця  $i$  в ситуації  $f$  визначається як математичне сподівання  $h_i(P)$  за мірою  $\mu_i$ :  $H_i(f) = \int h_i(P) d\mu_i(P)$ . Прикладом Г. д. є така гра. Кожному з двох гравців здають певну масть карт. Третю масть тасують, а потім карти цієї масті відкривають одну за одною. Щоразу, коли карту відкрито, обидва гравці одночасно відкривають якусь із своїх карт за своїм бажанням. Той, хто відкрив старшу

карту, виграє третю карту (якщо обидва відкривають карти однакової вартості, то не виграє ніхто). Так триває доки всі три масті не буде відкрито. Після цього кожний гравець підраховує кількість очок на картах, які він виграє; рахунок ведуть за різницею виграшів гравців.

Окремими класами Г. д. є ігри рекурсивні, ігри стохастичні та ігри на виживання. І. д., в яких прийняття рішень неперервне у часі, є, напр., ігри диференціальні. А. М. Ляцков.

**ГРА З ВИБОРОМ МОМЕНТУ ЧАСУ** — гра на одиничному квадраті, в якій стратегіями чистими гравців є вибирання моментів часу для виконання певної дії. Іноді розглядають ігри з вибиранням кількох моментів часу (див. Дугал у теорії ігор). Виграшу функція Г. з м. ч. монотонна за кожною із змінних (затримка дії збільшує шанси успіху) і розривна на діагоналі одиничного квадрата (випередження противника бажане).

А. С. Михайлова

**ГРА З НУЛЬОВОЮ СУМОЮ** — те саме, що й гра антагоністична.

**ГРА КООПЕРАТИВНА** — нестратегічна гра багатьох гравців з утворенням коаліцій, у якій припускається необмежений перерозподіл виграшів у вигляді т. з. побічних платежів. Основи теорії Г. к. розробили амер. математики Дж. фон Нейман та О. Моргенштерн. Спершу Г. к. конструювали на основі ігор безкоаліційних. Саме у грі з багатьма гравцями  $I$  для кожної коаліції  $K \subset I$  розглядали антагоністичну гру  $K$  проти допоможної до неї коаліції  $I \setminus K$ . Значення цієї гри, яке позначається через  $v(K)$ , є ф-цією від  $K$ , що називається характеристичною функцією. Денкі І. к. можна задати їхніми характеристичними ф-ціями безпосередньо. Прикладами таких ігор є схеми голосування та моделі ринків. Г. к. визначають формально як пару  $(I, v)$ , де  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — множина гравців, а  $v$  — характеристична ф-ція, задана на підмножині  $I$ . Вектор виграшів гравців є поділом гри. Як множину всіх поділів звичайно беруть

$$A = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n : x_i \geq v(i), \sum_{i=1}^n x_i = v(I) \right\}.$$

На цій множині визначають співвідношення домінування: поділ  $x = (x_1, \dots, x_n)$  домінує над поділом  $y = (y_1, \dots, y_n)$  (позначений  $x \succ y$ ), якщо знайдеться така коаліція  $K$ , що  $\sum_{i \in K} x_i < v(K)$  та  $x_i > y_i$  для всіх  $i \in K$ . Перша умова наз. ефективною і стосується коаліції  $K$  для поділу  $x$ . Ця умова показує, що коаліція може порівнювати лише такі поділи, в яких вона може забезпечити частини всіх своїх учасників. Множину елементів, максимальних відносно домінування, наз.  $C$  — ядром. Для співвідношення домінування поділів важливу роль грає розв'язок Нейма-

на — Моргенштерна. Однак, нормативна суть розв'язку має кілька зад: розв'язок може складатися більше як з одного поділу, він може не бути єдиним, відомий приклад гри (десять осіб), що не має розв'язку. Окрім класичної кооперативної теорії, розвиваються і нові теорії, також ґрунтовані на характеристичній функції

О. М. Гондарев

**ГРА НА ГРАФІ** — гра, подана в такому вигляді. Дано *Верхня гра*  $L = (X, \Gamma)$  з виділеною підмножиною  $X_0 \subset X$  початкових вершин. Один з гравців (який саме зазвичайно визначають жеребкуванням) як свій хід вибирає якусь вершину  $x_1 \in X_0$ ; потім робить хід 2-й гравець, вибираючи вершину  $y_1 \in \Gamma x_1$ ; після цього 1-й гравець вибирає вершину  $x_2 \in \Gamma y_1$  і т. д. У багатьох іграх переможцем вважається той, хто перший вибере тупикову вершину — таку  $x$ , що  $\Gamma x = \emptyset$  (тобто, що супротивника позбавлено змоги зробити черговий хід). Гравець, який вибрав у якийсь момент гри вершину в  $\text{адри}$ , — такому  $S \subseteq X$  для якого  $\forall x \in S, \Gamma x \cap S = \emptyset$  ( $\forall x \in X \setminus S, \Gamma x \cap S \neq \emptyset$ ), має змогу, незалежно від відповіді супротивника, наступним своїм ходом знову вибрати вершину в  $S$  і т. д., тобто застрахувати себе від програшу. Можуть існувати й інші стратегії безпрограшної гри (навіть на графі, який не має жодного  $\text{адри}$ ). В складніших іграх елементи графа  $L$  забезпечують ватами, і тоді після припинення гри переможця визначають, напри., за сумою ваг вибраних ним вершин Див. також *Теорія теорії*.

О. О. Зисков

**ГРА НА ОДИНІЙНОМУ КВАДРАТІ** — гра антагоністична, в якій множинами чистих стратегій 1-го та 2-го гравців є сегменти  $[0, 1]$ . Ф-цією виграшу в цій грі є ф-ція двох змінних  $K(x, y)$ , що  $\Pi$  наз. часто *адри* гри й повн. задана на одиничному квадраті  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Стратегіями гравців є ймовірнісні міри, які задають за допомогою ф-цій розподілу  $F(x)$  та  $G(y)$  на  $[0, 1]$ . Ф-ція розподілу на відрізку  $[0, 1]$  це монотонно неспадна ф-ція, що набуває на лівому й правому кінцях інтервалу відповідно значень «0» та «1». Умову існування розв'язку гри записують у вигляді  $\Pi$  на о. н. у вигляді

$$\max_{F(x)} \min_{G(y)} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) dF(x) dG(y) = \\ = \min_{G(y)} \max_{F(x)} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) dF(x) dG(y).$$

де інтеграли розуміють у значенні Стільтьєса. Для неперервної ф-ції  $K(x, y)$  ця умова виконується.

Приклад  $\Pi$  на о. н. — гра, в якій гравці вибирають місце перебування на відрізку  $[0, 1]$ , причому 1-й гравець намагається максимізувати, а 2-й — мінімізувати відстань між ними. Ядром у цій грі є ф-ція  $|x - y|$ . 2-й гравець має оптим. чисту стратегію  $y = 1/2$ , а 1-й повинен з однаковими ймовірностями вибирати стратегії  $x = 0$  та  $x = 1$ . Значення гри дорівнює  $1/2$ . Див. також *Стратегія чиста*.

А. І. Соболев

**ГРА ОПУКЛА** — гра безкоаліційна в осіб, у якій хоча б у одного гравця множина стратегій чистих є опуклою підмножиною лінійного простору, а його виграш функція за будь-яких фіксованих стратегій решти гравців — опуклою на цій підмножині. Якщо множина чистих стратегій кожного гравця  $\Pi$  о. є компактною, а ф-ції виграшу неперервні, то існує *рівновага ситуація*, в якій гравці, що мають опуклі ф-ції виграшу, використовують чисті стратегії.

$\Pi$  о. наз. скінченною, якщо для кожного гравця множина його чистих стратегій є компактною підмножиною якогось скінченновимірного лінійного простору, а ф-ції виграшу всіх гравців — полілінійні. Зокрема, скінченна антагоністична  $\Pi$  о. задється трійкою  $(A, B, H)$ , де  $A \subseteq E^m$ ,  $B \subseteq E^n$ , а ф-ція  $H$  має вигляд

$$H(r, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}(r, z), \quad r \in A, \quad z \in B.$$

Якщо  $\mu$  та  $\nu$  — розмірності множин оптим. стратегій гравців  $A$  і  $B$ , а  $\rho$  — ранг матриці  $\{a_{ij}\}$ , то

$$\mu + \nu \leq m + n - \rho.$$

$\Pi$  о. є, напри., антагоністична гра на одиничному квадраті, в якій за будь-яких стратегій 1-го гравця ф-ція виграшу є опуклою на множині чистих стратегій 2-го гравця. В цьому випадку 2-й гравець має чисту оптим. стратегію, а 1-й — оптим. стратегію, що є сумішшю не більше як двох чистих.

Г. М. Дюбін

**ГРА ПОЗИЦІЙНА** — гра, що має вигляд багатокрокового процесу і розгортається в дискретному часі. Цей процес відбувається як випадкове блукання по деревоподібно впорядкованій множині позицій (від початкової позиції до якоїсь остаточної) і в якому гравці приймають послідовно часткові рішення в умовах змінних інформаційних станів. Прикладами  $\Pi$  п. є шахи, салонні картярські ігри, від्सюво операції та дії автоматів. Точне формальне визначення остаточної  $\Pi$  п. вперше дав амер. математик Г. Кун.

Деревоподібно впорядкована множина визначає для кожної позиції єдиний шлях, що веде до неї з початкової позиції, а також множину можливих з цієї позиції ходів безпосередньо в наступні позиції, тобто множину альтернатив. Число альтернатив може бути або скінченним, або нескінченним. Позиції, що не мають альтернатив, наз. остаточною, а шляхи, що ведуть до них, — партіями. Партії можуть тривати й нескінченно. Позиція, в якій перебуває гравець у будь-який момент, здебільшого відома йому не повністю, а лише як якийсь невідомий елемент відомої множини, яку наз. інформаційною. Стратегією чистого гравця в  $\Pi$  п. є ф-ція, визначена на сім'ї його інформаційних множин, значеннями якої є альтернативи. Структура  $\Pi$  п. в основному характеризується сім'ями інформаційних множин

гравців та взаємним розміщенням цих множин. Виділяють класи ігор з повною інформацією (коли кожна інформаційна множина складається з однієї позиції), з майже повною інформацією (коли кожен гравець знає про інших гравців усе), з повною пам'яттю (коли гравець знає про себе все) і т. д. Характерними для теорії Г. м. є проблеми про можливість гравців обмежуватися більш-менш вузькими класами стратегій лінійних (напр., стратегіями поведінки) залежно від взаємного розміщення інформаційних множин грі.

І. М. Врублевська.

**ГРА ПРОСТА** — гра кооперативна, в якій характеристична функція  $v$  може набувати лише двох значень: 0 — на програючих коаліціях та 1 — на вииграючих.

Прикладом може бути зважена мажоритарна гра. Нехай кожному гравцеві  $i \in I$   $I = \{1, 2, \dots, n\}$  приписано вагу  $w_i$ . При цьому ні для якого  $k \subset I$  не має місця рівність  $\sum_{i \in k} w_i = \sum_{i \in A} w_i$ , а коаліція  $k$  — вииграюча,  $v(k) = 1$ . Коаліція  $I \setminus k$  — програюча,  $v(I \setminus k) = 0$ , якщо  $k$  становить переважну більшість, тобто якщо  $\sum_{i \in k} w_i > \sum_{i \in I \setminus k} w_i$ .

М. М. Воробієв.

**ГРА РЕКУРСИВНА** — різновид гри динамічної. В Г. р. вибір гравцями стратегій на кожному кроці визначає розподіл (ймовірностей) підігор, які розігруються на наступному кроці, або закінчення партії. Виграші учасників залежать лише від останньої розіграної підігри. Оскільки ймовірність того, що партія ніколи не скінчиться, відрізняється від нуля, повинно бути визначено виграші гравців у разі нескінченної партії.

Скінченні антагоністичні Г. р. розглянув уперше амер. математик Х. Еверет (1954), грація якого тісно пов'язана з працею амер. математика Л.-С. Шеплі про ігри стохастичні. Аналіз будь-якої стохастичної гри можна звести до аналізу якоїсь Г. р. Але через можливість нескінченних партій досліджувати Г. р. у загальному випадку складніше, ніж стохастичні ігри. Проте, як довів Еверет, будь-яка така гра має значення й обидва гравці мають  $\epsilon$ -оптимальні стратегії. Він показав і метод знаходження гри значення. Див. також ігри антагоністичні. В. Н. Домошній.

**ГРА СТОХАСТИЧНА** — різновид гри динамічної. В Г. с. вибір гравцями альтернатив на кожному кроці визначає виграш на цьому кроці, і розподіл (ймовірностей) підігор, які доведеться розігравати на наступному кроці. При цьому на кожному кроці при будь-якому виборі гравцями альтернатив є ненульова ймовірність закінчення партії. Внаслідок цього партія з ймовірністю, що дорівнює одиниці, закінчується за скінченну кількість кроків.

Скінченні антагоністичні стохастичні ігри вперше (1953) визначив і розглянув амер. матем. Л. Шеплі. Він довів, що будь-яка така

гра має значення, і обидва гравці мають оптимальні стратегії. Він показав і на процедуру, що дає змогу знайти як гри значення, так і стратегії оптимальні.

В. Н. Домошній.

**ГРАДІЄНТ**  $\Phi$  у н  $\nabla f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$

у точці  $x \in E^n$  — вектор, координати якого в просторі  $E^n$  дорівнюють частинним похідним цієї функції в точці  $X$ . Позначають Г. як  $\text{grad } f(x)$ ,  $\nabla f(x)$  або  $f'(x)$ . Г. визначає напрям, для якого похідна за напрямом  $\Phi$ -ції  $f(x)$  є максимальною. Ця властивість зумовила широке використання Г. в різних оптимізаційних методах.

Для функціоналу  $f(x)$ , визначеного в лінійному нормованому просторі  $E$ , роль Г. відіграє сильна похідна. Оператор  $f'(x)$ , який діє з  $E$  в  $E^*$ , наз. сильною похідною (похідною Фреше) функціоналу  $f(x)$  в точці  $x$ , якщо для довільного елемента  $h \in E$  має місце рівність  $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(|h|)$ . Перший доданок у правій частині рівності, що апроксимує  $f(x+h) - f(x)$  з точністю до величини порядку малості вищого за  $|h|$ , наз. диференціалом Фреше, або сильним диференціалом. Слабким диференціалом (диференціалом Гато) функціоналу  $f(x)$  у точці  $x$  називають вираз  $Df(x, h) = \frac{d}{dt} f(x+th)|_{t=0}$ .

Існування сильного диференціалу  $df(x, h)$  забезпечує існування слабого диференціалу, причому  $Df(x, h) = df(x, h)$ , але не завжди буває навпаки. Із-якості слабого диференціалу забезпечує існування сильного диференціалу тоді, коли слабкий диференціал  $Df(x, h)$  існує, коли він рівномірно неперервний по  $x$  у якійсь кулі  $E$  і неперервний по  $h$ . У цьому разі існує і сильний диференціал, і  $df(x, h) = Df(x, h)$ . Якщо слабкий диференціал  $Df(x, h)$  є лінійним відносно  $h$ , тобто  $Df(x, h) = Lh$ , то  $L = f'(x)$  — оператор, який діє з  $E$  в  $E^*$ , — наз. слабою похідною (похідною Гато) функціоналу  $f(x)$  у точці  $x$ .

Р. А. Полж, М. Б. Примак.

**ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД** — метод мінімізації функції багатьох змінних. Г. м. полягає в побудові послідовності векторів  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , пов'язаних між собою співвідношенням  $x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)$ , де  $\nabla f(x_k)$  — градієнт мінімізуваної в точці  $x$   $\Phi$ -ції  $f(x)$ . Числовий параметр  $\lambda_k$  вибирають з умови мінімуму за  $\lambda$   $\Phi$ -ції  $f(x_k - \lambda \nabla f(x_k))$ ,  $\lambda \geq 0$ . Див. також Оптимізаційні методи чисельні.

**ГРАМАТИКА АВТОМАТНА**, грамати-ка зі скінченим числом ста-нів — різновид граматики породжувальної.

**ГРАМАТИКА БЕЗКОНТЕКСТНА**, гра-матика контекстно вільна — різновид граматики породжувальної.

**ГРАМАТИКА ЗАЛЕЖНОСТЕЙ**, гра-матика керувань — різновид граматики породжувальної.

**ГРАМАТИКА КАТЕГОРІАЛЬНА** — різновид *граматики формальної*. Г. к. використовує конструйовані спец. способом імена — категорії для позначення типів слів і словосполучень описуваної мови. Зіставлення категорій із синтаксичними типами, що їх виділяють із смислових міркувань для конкретних природних чи штучних мов, провадиться так. певні типи виражають елементарними (вихідними) і позначають символами (буквами), які наз. елементарними категоріями. Якщо в синтаксичний тип, усі словосполучення якого приналежні до словосполучення типу, позначеного  $L$ , дають словосполучення типу, позначеного  $K$ , то перший атрох названих типів матиме позначення  $[K/L]$ . Аналогічно, синтаксичний тип, який, приєднуючись справа до  $L$ , дає  $K$ , матиме позначення  $[L \setminus A]$ . Т. ч., синтаксичні типи позначають ниразам, утвореними в елементарних категоріях послідовним застосуванням двох операцій  $[ ]$  і  $\setminus$ , такі вирази наз. категоріями. Таким чином, сама будова категорій означає синтаксичну роль відповідного типу. Зокрема, для опису укр. мови можна запровадити елементарні категорії  $Реч$  (речення) та  $I$  (іменник або група іменника). Неперехідні дієслова чи дієслівні групи позначатимуться тоді категорією  $[I \setminus Реч]$ , прикметники —  $[I / I]$ , прислівники, що відносяться до дієслів, —  $[[I \setminus Реч] / [I \setminus Реч]]$ . Ці позначення показують, що дієслово, приєднане до  $I$  справа, утворює  $Реч$ ; прикметник, приєднуючись до  $I$  зліва, —  $I$ ; прислівник, приєднуючись до дієслова зліва, — дієслівну групу (приклад наземно спрощено; справді ж опис природної мови набагато складніший).

Формально Г. к. та описувану нею мову задаються так. Г. к. визначається як четверка компонентів: 1) словник (скінченна множина) основних символів, 2) словник елементарних категорій; 3) виділена елементарна категорія, яка наз. головною; 4) приписувальна функція, яка ставить у відповідність кожному основному символу скінченне число категорій, утворених з елементарних. Основні символи інтерпретуються як слова мови; елементарні категорії — як назви синтаксичних типів слів і словосполучень, які вважають за вихідні. Головна категорія інтерпретується як символ речення, приписувальна функція — як задання для кожного слова всіх його синтаксичних типів. Наявність у одного слова або словосполучення мількох синтаксичних типів відповідає синтаксичній омонімії. Приписувальна функція ставить у відповідність кожному ланцюжкові  $a_1, \dots, a_n$  основних символів скінченну множину ланцюжків категорій, що складається з найрізноманітніших ланцюжків виду  $K_1 \dots K_n$ , де  $K_i$  — одна з категорій, що відповідають  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Безпосереднім скороченням ланцюжка категорій називають замінування в ньому сусідньої пари категорій, яка має вид  $L[L \setminus K]$  або  $[K / L]L$ , категорією  $K$  (безпосереднє скорочення категорій анало-

гічне скороченню дробу, але для категорій розрізняють ліві й праві «знаки дробу» й відповідно скорочення). Ланцюжок категорій  $\Phi$  скорочується до ланцюжка категорій  $\psi$ , якщо в послідовність ланцюжків, що починається ланцюжком  $\Phi$  і кінчається ланцюжком  $\psi$ . В цій послідовності кожний наступний ланцюжок утворюється безпосереднім скороченням попереднього. Ланцюжок основних символів наз. реченням, якщо принаймні один із ланцюжків категорій, поставлених йому у відповідність, скорочується до головної категорії. Множина речень наз. мовою, допущеною (або описуваною) цією Г. к. Так, при задаванні описання мови способом фрагмента укр. мови за допомогою Г. к. в ланцюжком слів «зелений гай шумить» зіставлється ланцюжок категорій  $[I / I]$  і  $[I \setminus Реч]$ ; він безпосередньо скорочується до ланцюжка  $I [I \setminus Реч]$ , а той — до головної категорії  $Реч$ ; тому зазначений ланцюжок слів є реченням. Наведена система понять наляє собою задавання Г. к. як різновиду *граматики розпізнавальної*. Алгоритм, що дає змогу розпізнати, чи є довідний ланцюжок основних символів таким реченням мови, яке допускає ця Г. к., полягає у виписуванні всіх ланцюжків категорій, що відповідають цьому ланцюжкові, і повному скороченні кожного з них усіма можливими способами. Незавжди запровадити еквівалентну систему понять, яка описує процес будови речення розгортаєнням ланцюжків категорій, — тоді Г. к. стане заданою як різновид *граматики породжувальної*.

Клас мов, що їх допускають Г. к., збігається з класом мов, породжувальних граматиками безконтекстними.

Поняття «Г. к.» було запроваджено у 50-х роках 20 ст. для побудови алгоритму синтаксичного аналізу природних мов. Проте апарат Г. к. малопридатний для практичного моделювання природних мов і тепер використовується майже виключно в теоретичних дослідженнях.

**ГРАМАТИКА ЛІНІЙНА** — безконтекстна граматика, в кожному правилі якої, в правій частині, є не більше як по одному входженню допоміжного символу. Особливим випадком Г. л. є автоматна граматика. Див. *Граматика породжувальна*.

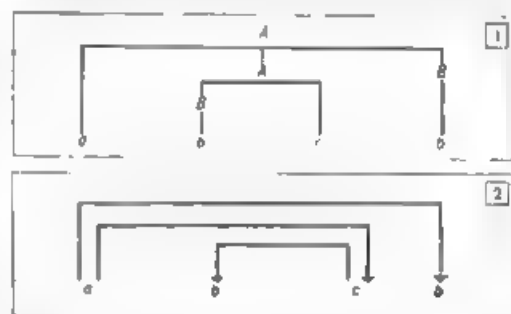
**ГРАМАТИКА ПОРОДЖУВАЛЬНА** — система правил, яка дає змогу будувати скінченні послідовності символів; є різновидом *граматики формальної*. Поняття Г. п., використовуване в матем. лінгвістиці, по суті, є окремим випадком поняття *числення*, що його використовують у ін. розділах матем. логіки. Термін «Г. п.» використовують звичайно як назву певного класу числень (що також наз. граматиками Хомського). Кожне числення цього класу задається такими чотирма компонентами: 1) словником (скінченною множиною) основних, або термінових, символів; 2) словником допоміжних, або нетермінальних символів, 3) виділеним допоміжним символом, який наз. *початковим*



ви м; 4) набором правил введення, або набором синтаксичних правил, кожне з яких має вигляд  $\varphi \rightarrow \psi$ , де  $\varphi$  і  $\psi$  — ланцюжки, що складаються з осн. і допоміжних символів. Осн. символи інтерпретуються як слова мови, допоміжні — як назви класів слів і словосполучень, початковий символ — як символ речення. Синтаксичні правила описують зв'язки між частинами речення. Застосування правила  $\varphi \rightarrow \psi$  до ланцюжка, що має вигляд  $\alpha\varphi\beta$ , означає перетворення його на ланцюжок  $\alpha\psi\beta$ , де  $\alpha$  і  $\beta$  — ланцюжки, один з яких (або й обидва) можуть бути пустими. Вивід у цій Г. п. є послідовністю ланцюжків, у якій будь-який ланцюжок, крім першого, одержують з попереднього, застосувавши певне правило введення. Ланцюжком осн. символів, виведений з початкового символу, наз. реченням, а множиною всіх речень — мовою, яку породжує ця граматики. Так, у Г. п. з осн. символами  $\{a, b, c\}$ , допоміжними  $\{A, B\}$ , початковим символом  $A$  й набором правил  $\{A \rightarrow aAB, A \rightarrow Bc, B \rightarrow b\}$  однією із виводів є послідовність  $A, aAB, aBcB, abcB$ . Ланцюжком  $abcB$  — речення.

Осн. класи Г. п. виділяють залежно від обмежень, які накладають на синтаксичні правила. У граматиці безпосередніх складників синтаксичні правила мають вигляд  $X\varphi \rightarrow X\psi$ ; у безконтекстній  $A \rightarrow \varphi$ ; в автоматичній граматиці (або граматиці зі скінченим числом стацій)  $A \rightarrow aB$  або  $A \rightarrow a$ . Тут  $a$  позначає осн. символ,  $A$  і  $B$  — допоміжні,  $X, \varphi$  і  $\psi$  — ланцюжки осн. і допоміжних символів, причому  $\varphi$  — не пустий. Очевидно, що в зазначеній послідовності класів Г. п. кожний клас є частинкою попереднього. Мови, породжувані Г. п. перелічених класів, наз. відповідно мови безпосередніх складників, безконтекстними чи автоматичними. В граматиках складників на кожному кроці введення замінюється лише один символ, тому з них з кожним введенням речення асоціюється т. з. дерево виведення. Воно будується так. Корінь дерева відповідає початковому символу. Кожному символу ланцюжка, на який замінюється початковий символ на першому кроці введення, ставиться у відповідність вузол дерева й до нього проводиться гілка від кореня. Для тих з одержаних вузлів, які позначено допоміжними символами, будується аналогічна конструкція і т. д. Кожне дерево виведення, що розглядається як дерево складників речення при описуванні структури речення, задає на якому системі складників (для наведеного прикладу дерево виведення подано на мал. 1; відповідна система складників складається з ланцюжків  $abcB, bc, a, b, c, b$ ). Ця особливість граматики складників робить їх важливим засобом для описування природних і штучних мов. Саме граматики складників та їхні окремі випадки є одним з осн. об'єктів вивчення матем. лінгвістики. Для одного окремого випадку безконтекстних граматики — граматики залеж-

ності й, або керувань, з кожним реченням породжуваної мови (точніше — з кожним виведенням речення) можна встановити певне відношення керування. Граматикою залежностей наз. граматики, всі правила якої мають вигляд  $A \rightarrow B_1 \dots B_m \alpha B_{m+1} \dots B_n$ , де  $0 \leq m \leq n$ ,  $\alpha$  — основний, а  $A, B_1, \dots, B_n$  — допоміжні символи. Якщо при побудові певного речення використовується правило зазначеного виду, то в дереві виведення від вузла, позначеного символом  $A$ , йдуть гілки до



вузлів, позначених символами  $B_1, \dots, B_m, \alpha, B_{m+1}, \dots, B_n$ ; символ  $\alpha$  наз. гол. у складнику  $A$ , тобто складнику, що відповідає вузлові з позначкою  $A$ , й за визначенням вважають, що він керує головними символами складників  $B_1, \dots, B_n$ . Граматика наведеного прикладу — граматики залежностей, і зазначений вивід задає відношення керування (мал. 2). Її різновиди Г. з., у яких для породжуваних речень задаються й системи складників і відношення керування.

Еквівалентність Г. п. Дві Г. п. наз. слабо еквівалентними, якщо вони породжують ту саму мову; сильно еквівалентними — якщо, крім того, для будь-якого речення породжуваної мови збігаються описи структури, зроблені за цими граматиками. Розрізняють принаймні три типи сильної еквівалентності, однаковість описування системи складників, описування відношення керування або одночасно описування складників і керування.

Основи теорії Г. п. розроблено в 1950—60-х роках (переважно в працях амер. лінгвіста Н. Хомського) як формальний апарат для опису природних і штучних мов, у зв'язку з внутрішніми потребами лінгвістики й з розв'язуванням мовних задач на ЕОМ.

Серед напрямів математичного дослідження Г. п. варто виділити два: порівняння різних класів Г. п. та дослідження розв'язності алгоритмічних проблем. Серед перелічених класів мов (мови, породжувані Г. п. заг. виду; мови безпосередніх складників; безконтекстні, автоматні) кожний наступний істотно ширший за попередній. Класи мов, породжуваних граматиками залежностей і категоріальними, збігаються з класом безконтекстних мов. Клас безконтекстних

граматик має більші можливості для побудови опису структури: для безконтекстної граматики, взагалі кажучи, може не існувати сильно еквівалентної їй граматики залежностей чи категоризації.

Один з найважливіших класів алгоритмічних проблем для Г. п. — проблеми розпізнавання властивостей мов, тобто потрібно знайти алгоритми, який дає змогу за будь-якою граматикою заданого (фіксованого) для цієї проблеми) класу  $K$  дізнатися, чи має породжувана цією граматикою мова деяку певну властивість. Якщо такий алгоритм існує, то кажуть, що властивість розпізнається в класі  $K$ , якщо ж не існує, то вона не розпізнається. Найважливішими властивостями мов, що їх досліджували на розпізнаваність, є: пуста (властивість бути пустою множиною); повнота (властивість збігатися з множиною будь-яких ланцюжків основних символів); істотна невизначеність (властивість, яка полягає в тому, що будь-яка граMATИКА в класі  $K$ , яка породжує цю мову, зіставляє в деяких ланцюжком більш як один структурний опис).

Зведення результатів перелічених проблем подано в таблиці ( $P$  — розпізнаваність відповідної властивості в цьому класі граматики,  $N$  — нерозпізнаваність)

| Проблема               | Класи породжувальної граматики |           |                |            |
|------------------------|--------------------------------|-----------|----------------|------------|
|                        | Вс. породжувальні              | Граматики |                |            |
|                        |                                | складних  | безконтекстних | регулярних |
| Пустота                | $P$                            | $N$       | $P$            | $P$        |
| Повнота                | $N$                            | $N$       | $N$            | $P$        |
| Істотна невизначеність | $N$                            | $N$       | $N$            | $P$        |

Крім перелічених напрямів матем. досліджень Г. п., можна зазначити такі питання розпізнавання породжуваних мов за допомогою автоматів з магазинною пам'яттю, виявлення складності виведення в Г. п.; пошук класів Г. п., яким за «породжувальною силою» належать проміжні місця в описаній ієрархії Г. п., зв'язок Г. п. з граматиками розпізнавальними, керування виведенням в Г. п. тощо (див. також *Лінгвістика математична*).

Практичного застосування апарат Г. п. набуває гол. чиним при створенні *мов штучних* і в працях, що стосуються *машинного перекладу*. Більшість із створюваних тепер штучних мов задають саме за допомогою Г. п., причому найчастіше — безконтекстних граматики. Так, стандартні описи *ALGOL-60* та ін. *мов програмування* по суті є Г. п. Використовувати Г. п. в автоматичному перекладі почали внаслідок великих труднощів синтаксичного аналізу речення. Алгоритми синтак-

сичного аналізу для мови, породжуваної Г. п., частіше виявляється простим і доступним для огляду. Більшість груп, які працюють над автомат. перекладом і суміжними проблемами, певною мірою використовують моделювання природної мови за допомогою Г. п. В роботах, які провадяться в СРСР, використовують Г. п., близькі до граматики залежностей; у США — близькі до граматики складників. Див. також *Інше зпознава.*

Лит.: Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической лингвистики. М., 1989 [bibliogr. с. 188—192]; Хомский А. Н. Формальные свойства грамматик. В кн. Кибернетический сборник. Новая серия, в. 2. М., 1966; Гладкий А. В. Формальные грамматические языки. М., 1973 [bibliogr. с. 3-9, 101]. Фитиналова С. Я. Об универсальности грамматик НС и грамматик зависимости. В кн.: Проблемы структурной лингвистики. 1967. М., 1968; Гинзбург Г. С. Математическая теория контекстно-свободных языков. Пер. с англ. М., 1970 [bibliogr. с. 310—319].

**ГРАМАТИКА РОЗПІЗНАВАЛЬНА** — система правил, що для будь-якого ланцюжка (последовательности символів) визначає, чи входить він у фіксовану множину ланцюжків (мову). Див. *ГраMATИКА формальна*, *ГраMATИКА породжувальна*.

**ГРАМАТИКА СКЛАДНИКІВ**, *граMATИКА безпосередніх складників* — різновид *граMATИКИ породжувальної*.

**ГРАМАТИКА ТРАНСФОРМАЦІЙНА** — система правил, що дає змогу будувати речення природної мови з порівняно невеликої кількості найпростіших, так званих *ядерних* речень за допомогою спец. перетворень, або *трансформацій* (див. *Мова моделі математичної*). Дослідження Г. т. провадять гол. чин. на рівні неформалізованих міркувань і розгляду окремих прикладів. Г. т. оскільки що не можна тлумачити її як різновид формальних граматики, оскільки що не існує її задовільного загального математичного визначення. Поняття Г. т. введено для узагальнення і формалізації прийнятого в англо-амер. лінгвістиці методу трансформаційного аналізу речення. Апарат Г. т. застосовують для деяких досліджень з автоматичної обробки тексту.

Г. т. можна розглядати як один з рівнів *граMATИКИ породжувальної*.

Для уникнення труднощів на шляху застосування методу безпосередніх складників Н. Хомський запропонував доповнити цей метод рядом трансформаційних правил, що утворюють трансформаційний рівень граматики. Ці правила анімують обмеження з методу безпосередніх складників, наприклад, дають змогу переставляти символи в ланцюжках, робити одночасно перекладування кількох символів (а правилами безпосередніх складників це забороняється) тощо.

Кожна мова, якщо виходить з правил Г. т., може бути представлена набором ядерних речень і набором трансформацій, яким піддають ці ядерні речення, щоб утворювати різноманітні типи речень даної мови. Аналіз українського речення «Велике дерево скидає

листя» в застосуванням символів Пр, І, Д (Пр — прикметник, І — іменник, Д — дієслово) на схемою безпосередніх складників:



зводиться до конструкції ІД («Дерево скидає»), яка є кінцевою конструкцією, або ядерним реченням. Застосовуючи різні трансформації до ядерного речення, можна одержати різноманітні речення української мови. Проте на трансформаційному рівні в більшості випадків (особливо для флексійних мов, якими є російська та українська) одержуємо не непокриті слова синтезованого речення, а певні одиниці з індексами, наприклад, «іти<sub>мн</sub>», «скидати<sub>мн</sub>», що означає дієслово «іти», «скидати» в минулому часі. Для того, щоб утворення речень відбувалося цілком автоматично, виникла потреба запровадити третій рівень — морфологічний (на цьому рівні відбувається перетворення названих вище одиниць з індексами на реальні слова синтезованих речень, наприклад, «іти<sub>мн</sub>» перетворюється на «йшов» (т. ін.).

Лит.: Хоменко Н. Синтаксические структуры. Периодическое издание в 2 т. М., 1962. Хоменко Н. Синтаксика, логика, семантика и вычислительные устройства. В кн. Математическая лингвистика М., 1964. Хоменко Н. Матер. для исследования и формальный анализ естественных языков. В кн. Информатический сборник. Новая серия, т. 1 М., 1965.

**ГРАМАТИКА ФОРМАЛЬНА** — система правил для опису множин скінченних послідовностей символів. Скінченні послідовності символів (ланцюжки), що входять до складу цієї множини, наз. реченнями, а сама множина — мовою, описуваною цією Г. ф.

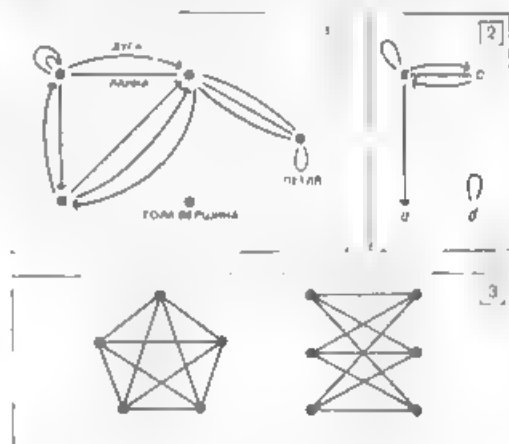
Існують два типи Г. ф. *граматики породжувальні* — системи правил, що дають змогу будувати речення мови, і *граматики розпізнавальні* — алгоритми, що розпізнають, чи є певний ланцюжок реченням. Цей поділ є дещо умовним, бо будь-яка розпізнавальна граматики по суті задає спосіб побудови всіх речень. Крім того, для найістотніших класів породжувальних грамастик (зокрема, для грамастик складників, безконтекстних і автоматичних), існують алгоритми, які дають змогу для будь-якого ланцюжка символів визначити, чи є він реченням. Розрізняють, крім того, такі класи Г. ф. (напр., *граматики категоріальні*, які можна розглядати і як породжувальні, і як розпізнавальні). Г. ф. застосовують найчастіше для описування природних і штучних мов у *лінгвістичній математиці*. Тепер породжувальні граматики застосовуються більше, ніж розпізнавальні.

Лит.: Гладкий А. В. Формальні граматики і мови. М., 1973 (Бібліогр. с. 349—356).

**ГРАНИЧНА ЗАДАЧА** — те саме, що й *крайова задача*.

**ГРАФ** — система об'єктів довільної природи (вершин) і зв'язок (ребер), що сполучають

якісь пара цих об'єктів. Ребра можуть бути орієнтованими чи неорієнтованими, одна й та сама пара вершин може сполучатися будь-якою кількістю ребер, вершина може бути сполучена сама з собою (мал. 1). Строго означення Г. (за Зиковим) таке: Г.  $L = (X, U; P)$  дано, якщо дано множину  $X \neq \emptyset$  (вершин), множину  $U$  (ребер) і інцидентор — тримісний предикат  $P$ , причому  $P(x, u, y)$  означає висловлення: ребро  $u$  сполучає вершину  $x$  із вершиною  $y$  і задовольняє дві умови: а)  $P$  визначено на всіх таких упорядкованих трійках



елемента  $x, u, y$ , для яких  $x, y \in X$  та  $u \in U$ ; б)  $\forall u \in U \exists x, y \in X [P(x, u, y) \wedge \forall x', y' \in X [P(x', u, y') \Rightarrow (x = x' \wedge y = y')]]$ , тобто кожне ребро сполучає якусь пару (упорядковану) вершин  $x, y$ , але крім неї може сполучати ще тільки обернену пару  $y, x$ . Ребро, що сполучає  $x$  в  $y$ , але не  $y$  в  $x$ , наз. *дугою* (яка виходить з  $x$  і заходить в  $y$ ); ребро, що сполучає  $x$  в  $x$ , наз. *петлею* (при вершині  $x$ ); ребро, що сполучає  $x$  в  $y$ , і  $y$  в  $x$  ( $x \neq y$ ), наз. *ланкою* (між  $x$  та  $y$ ). Деорієнтація дуги  $u_0$ , яка йде з  $x_0$  в  $y_0$ , тобто перетворення цієї дуги на ланку, означає перехід від Г.  $L = (X, U, P)$  до Г.  $L' = (X, U; P')$  з тим самим  $X, U$  і новим предикатом, який відрізняється від попереднього лише тим, що обидва вирази  $P'(x_0, u_0, x_0)$  та  $P'(y_0, u_0, x_0)$  справжні, тим часом як з двох виразів  $P(x_0, u_0, y_0)$  та  $P(y_0, u_0, x_0)$  справжнім є лише перший, деорієнтація всіх

дуг перетворює  $L$  на Г.  $\bar{L} = (X, U; P)$ , де предикат  $\bar{P}(x, u, y) = \text{дис'юнкція } P(x, u, y) \vee P(y, u, x)$ .

Інше означення Г. (за К. Берксом): Г. є пара  $G = (X, U)$ , утворена множиною  $X$  (вершин) та сімейством  $U$  (дуг), що складається з упорядкованих пар вершин, причому одна й та сама пара може фігурувати в  $U$  скільки завгодно разів. Усі ребра (в тому числі й петлі) є дугами, тобто їх орієнтовано, проте якщо в конкретному випадку не має значення, йде

дуга  $u_0$  з  $x_0$  з  $y_0$  чи з  $y_0$  з  $x_0$ , цю дугу розглядають як сферізовану і креслять без стрілки (або з двома протилежними стрілками), при такому означенні  $\Gamma$ , в якому з дуг є сферізованими, фактично являє собою клас із  $2^k$  різних  $\Gamma$ . Надалі при викладі всієї графічної теорії дотримуватимемося означень та позначень Зикова.

$\Gamma, L' = (X', U', P')$  наз. частиною (за К. Бергом — частинним підграфом)  $\Gamma, L = (X, U, P)$ , якщо  $\emptyset \neq X' \subseteq X, U' \subseteq U$  і на підмножинях  $X', U'$  предикат  $P'$  збігається з  $P$ . Частина  $L'$  є підграфом  $\Gamma, L$ , якщо всією ребро з  $U$ , що сполучає вершини множини  $X'$ , належить  $U'$ . Частина  $L'$  є суграфом (за К. Бергом — частинним  $\Gamma$ ),  $\Gamma, L$ , якщо  $X' = X$ . Два  $\Gamma, L_1 = (X_1, U_1, P_1)$  та  $L_2 = (X_2, U_2, P_2)$  ізоморфні, коли можна встановити взаємно однозначну відповідність  $X_1 \leftrightarrow X_2, U_1 \leftrightarrow U_2$  так, щоб для відповідних вершин  $i$  ребер висловлення  $P_1(x_1, u_1, y_1)$  і  $P_2(x_2, u_2, y_2)$  були рівносильними. Для кожного абстрактного (тобто без вказівки на конкретну природу вершин і ребер)  $\Gamma, L = (X, U, P)$ , в якому множини  $X$  та  $U$  не більш як лічбові, напевно можна побудувати його топологічне зображення — ізоморфний  $\Gamma, L$ , що його вершинами є якісь точки евклідового тривимірного простору, а ребрами — прості жорданові дуги (з позначенням чи без позначень напрямку), які сполучають ці точки й не мають між собою спільних точок, відмінних від вершин.  $\Gamma, L$  наз. плоским, якщо він допускає таке топологічне зображення, всі вершини й дуги якого розміщені в одній площині (чи на одній сфері, а це рівносильно, оскільки стереографічним проектуванням завжди можна перетворити плоске зображення в сферичне і навпаки).  $\Gamma$ , без дуг (тобто сферізований), без петель і кратних ребер наз. звичайним; його можна задавати парою  $(X, U)$ , де  $U$  — якийсь множина (не сімейство!) неупорядкованих пар різних вершин з  $X$ .  $\Gamma$ , без ланок (орієнтований), без кратних петель і кратних дуг одного напрямку наз. Бергом графом  $(X, U)$ , де  $U$  — якийсь множина впорядкованих пар вершин; такий  $\Gamma$  записують і з вигляду  $(X, \Gamma)$ , де  $\Gamma$  — зображення, що кожному  $x \in X$  відносить підмножину  $\Gamma_x \subseteq X$  тих вершин, у які з  $x$  іде дуга чи петля. Напр., для  $\Gamma$ , Берга на мал. 2 маємо  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\Gamma_a = \emptyset$ ,  $\Gamma_b = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma_c = \{b\}$ ,  $\Gamma_d = \{d\}$ .  $\Gamma$  наз. дводольним (або біхроматичним), якщо множини  $X$  його вершин можна розбити на дві підмножини:  $X = X_1 \cup X_2$ , де  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  так, щоб ніяке ребро не сполучало вершин однієї й тієї самої підмножини; зокрема, дводольний звичайний  $\Gamma$  наз. графом Кеніга і при заданому розбитті множини вершин його записують у вигляді  $(X_1, X_2; U)$ .  $\Gamma$ , заданого типу наз. повним, якщо в ньому є всі можливі для цього типу ребра (при незмінній множині вершин). Так, у повному звичайному  $\Gamma$ , кожному парі різних вершин сполучено рівно

однією ланкою; у повному  $\Gamma$ , Берга з кожної вершини з кожною іншою йде одна дуга і при кожній вершині є одна петля; повний  $\Gamma$ , Кеніга складається з двох множин вершин і найрізноманітніших ланок, які сполучають вершини однієї множини з вершинами іншої (по одній ланці для кожної такої пари вершин). На мал. 3 показано повний звичайний п'ятивершинний  $\Gamma$ , і повний  $\Gamma$ , Кеніга з двома тривершинними множинами (три будинки і три криниці); обидва вони — неплоскі.  $\Gamma$ , без ребер ( $U = \emptyset$ ) наз. порожнім. З поняттям  $\Gamma$ , пов'язана ціла система конкретних проблем і методів переважно практичних або викликаних теор. проблемами з інших галузей математики. Літ. зм. до ст. Теорія нескінченних графів, т. 1. Новосибірськ, 1989 (bibliogr. с. 315-322). König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936. Яблonsкий Н. Graphentransformationen. Monatshefte für Mathematik, 1980, Bd. 64, № 2. Ерм К. Теория графов и ее приложения. Пер с франц. М., 1982. Bibliogr. с. 293-322. Орел О. Теория графов. Пер с англ. М., 1988 (bibliogr. с. 323-334). Berge C. Graphes et hypergraphes. Paris, 1971.

**ГРАФ ЗВ'ЯЗНЕНІЙ** — граф, у якому кожній дузі  $u$  поставлено у відповідність явесь число  $c(u)$ , яке називається її вагою. Вага дуги може мати різні фіз. чи економ. інтерпретації: довжина дуги, вартість або час переміщення по ній, пропускна здатність — в економічних застосуваннях, імовірність безвідмовної роботи — в теорії надійності, напруга або струм — в електр. колах, передача ланки — у системах автоматичного керування. У різних застосуваннях  $c(u)$  може набувати додатних і від'ємних, цілих і дробових значень. До найвідоміших задач на  $\Gamma$ , з належать задача про найкоротший шлях, задачі про максимальний потік, про найкоротшу зв'язуючу мережу, задача про комівождера та ін. У деяких застосуваннях розглядаються графи з кількома вагами кожної дуги. Так, напр., у сітковій транспортній задачі кожній дузі можуть відповідати дві ваги — довжина дуги та її пропускна здатність.

Літ. зм. до ст. Графічна теорія.

В. О. Трубин.

**ГРАФ РОЗФАРБОВАНИЙ** — неорієнтований граф без петель, множини вершин (або ребер) якого розбиті на  $k$  неперетинних груп так, що кожна вершина (ребро) належить точно одній групі й суміжні вершини (ребра) належать різним групам. Мінім. кількість таких груп вершин (ребер) наз. хроматичним числом (класом) графа. Якщо кожній групі поставити у відповідність свій колір, то у  $\Gamma$ , р. суміжні елементи будуть забарвлені в різні кольори. Задачі, пов'язані з розфарбовуванням графів, крім теоретичного, мають і велике практичне значення. Вони виникають під час монтажу й перевірки складних електр. схем, складання графічних турнірів, у соціології тощо.

Літ. зм. до ст. Графічна теорія.

В. О. Трубин.

**ГРАФІВ ЗВ'ЯЗНІСТЬ** — одна з основних властивостей графів, яка виявляється ось у чому. На множині вершин графа  $L$  відношення «вершини  $x$  та  $y$  з'єднані хоча б одним лан-

чужою є еквівалентність; класи цієї еквівалентності породжують підграфи, що їх називають компонентами (зв'язності) графа  $L$ . Якщо кількість компонент  $k(L) \neq 1$ , то граф  $L$  наз. зв'язним. У графі теорії фундаментальної ролі відіграє теорема Менгера для існування в графі  $L$  системи з  $k$  ланцюгів ( $k \geq 1$ ), які в'єднують дві задані вершини  $x$  та  $y$  і попарно не мають інших спільних елементів, необхідно й достатньо, щоб ніяке видалення  $k$  (чи менше) елементів, які становлять відмінні від  $x$  та  $y$  вершини чи ребра, які з'єднують  $x$  з  $y$ , не перетворювало  $L$  на такий граф, де  $x$  та  $y$  належать різним компонентам. Ребровий варіант цієї теореми (теорема Коцка) характеризується тим, що видаленням  $k$  елементів з тільки ребра, а  $k$  ланцюгів, що з'єднують  $x$  з  $y$ , не можуть мати спільних ребер (але можуть мати спільні вершини, які відрізняються від  $x$  та  $y$ ). Граф  $L$  наз.  $k$ -зв'язним вершинно (відносно ребер), якщо будь-які дві його вершини  $x$  та  $y$  з'єднані принаймні  $k$  ланцюгами попарно без спільних елементів, крім  $x$  та  $y$  (відповідно повністю без спільних ребер). Максимальний 2-зв'язний (вершинно) підграф графа  $L$  наз. його блоком, а вершину, що належить більш як одному блоку, — точкою зчленування, ця точка характеризується тим, що її видалення веде до збільшення кількості компонент графа.

Враховуючи орієнтацію ребер, одержують поняття досяжності. Так, у Берж графі  $L = (X, \Gamma)$  вершина  $y$  є досяжною з  $x$ , якщо існує орієнтований ланцюг з початком  $x$  і кінцем  $y$ . Граф, у якому будь-які дві вершини є досяжними одна з одною, наз. бізв'язним (або дуже зв'язним). Бікомпоненти графа — це його макс. бізв'язні підграфи, база вершин — така підмножина  $Z \subseteq X$ , що ніякі дві різні вершини з  $Z$  не досяжні одна з одною, а будь-яка вершина  $x \in X \setminus Z$  є досяжною хоча б з однією вершиною, що входить у  $Z$ . Проблема повного огляду баз вершин графа розв'яжуть так виявляють усі ті бікомпоненти, в які не заходить ззовні жодна з дуг, тоді за всіма базами вершин правлять множини, що їх одержують, вибравши по одній вершині з усіх виявлених бікомпонент. Проблема огляду і знаходження баз дуг — таких мінім сугравів, які забезпечують ту саму досяжність вершин, що й у початковому графі, — набагато складніша, але й її в певному розумінні розв'язано.

Літ. Змков А. Теорія нескінченних графів, т. 1. Новосибірськ. 1969 (бібліогр. с. 515—542).

О. О. Зинкова

**ГРАФІВ ТЕОРІЯ** — розділ математики, який вивчає графи й ті узагальнення їх (маршрути мережі, зіткнення тощо), на які поширюються деякі основні поняття й методи, що стосуються графів.

До виникнення заг. теорії графів траплялися (шд різними назвами) в матем. задачах розв'язального характеру, в теорії електр. кіл, у хімії, фізиці, біології, соціології, а також у деяких розділах математики, передусім в алгебрі й топології. Оскільки існує широке коло

об'єктів та явищ реального світу, які можна вимірювати в термінах Г. т., викликання теорії абстрактних графів було природним явищем. Інтенсивний розвиток Г. т. зумовлений, в основному, задачами практики; важливу роль у становленні Г. т. відіграли численні дослідження, пов'язані з проблемою чотирьох фарб, в також ідея методу переміжних ланцюгів.

Однією з перших праць, що стосуються Г. т., є праця Л. Ейлера (1736), але основоположником цієї теорії вважають угорського математика Д. Кейна, автора першої монографії (1936), де графи розглянуто як абстрактні матем. об'єкти і де закладено основи загальної Г. т. Найбільший внесок у дальший розвиток Г. т. зробили угор., амер., канадські, нім., франц., чехословацькі, а також радянські математики, з яких слід відзначити Л. М. Піхтенбазу (1900—58), О. О. Зинкову (п. 1922) та В. Г. Віайна (п. 1937).

Грунтуючись на систематизації та узагальненні ряду ідей і прийомів комбінаторно-логіч. характеру, що значною мірою стосуються пошуків оптим. розв'язків різних дискретних задач, Г. т. разом з комбінаторним аналізом становить специфічний розділ сучас. математики, який інтенсивно розвивається; він тісно пов'язаний з такими її розділами, як алгебра, топологія, теорія чисел, імовірніст. теорія, логіка математична, програмування математичне та ін.

Відповідно до найзагальнішого визначення графа  $L = (X, U; P)$  для задавання графа достатньо знати множину його вершин  $X = \{x_\alpha / \alpha \in I\}$ , множину ребер  $U = \{u_\beta / \beta \in J\}$  і множину тих упорядкованих трійок  $x_\alpha u_\beta x_{\alpha'}$  ( $\alpha, \alpha' \in I, \beta \in J$ ), на яких є істинним висловлювання  $P(x_\alpha, u_\beta, x_{\alpha'})$ . Для випадку значущих графів чи Берж графів достатньо знати множини  $X$  і множини тих неупорядкованих (відповідно упорядкованих) пар  $x_\alpha x_{\alpha'}$ , для яких є істинним  $\exists u \in UP(x_\alpha, u, x_{\alpha'})$ . Граф, у якого обидві множини  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  і  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  скінченні (скінченний граф) і  $U \neq \emptyset$ , можна задати матрицею інцидентів  $(a_{ij})$ , рядки якої відповідають вершинам графа ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), стовпчики — ребрам ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), а елемент  $a_{ij}$  містить інформацію про тип ребра  $u_j$  (дуга, петля чи ланка) і про відношення цього ребра до вершини  $x_i$  (вихідна дуга, вхідна дуга, інцидентна петля, інцидентна ланка чи неінцидентне ребро). Для задавання графа часто користуються квадратною матрицею суміжності  $(r_{ij})$ , у якій і рядки, і стовпчики відповідають вершинам графа ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), а елемент  $r_{ij}$  містить інформацію про кількість ребер кожного типу, які з'єднують вершини  $x_i$  і  $x_j$ ; в разі звичайного графа  $L = (X, U)$  достатньо знати  $r_{ij} = 1$  при  $x_i x_j \in U$  і  $r_{ij} = 0$  при  $x_i x_j \notin U$ , а в разі графа Берж  $L = (X, \Gamma)$  взяти  $r_{ij} = 1$  при  $x_i \in \Gamma x_j$ .

$i_{ij} = 0$  при  $x_j \in G_1$ . Для графів заг. виду як  $G_1$  використовують складніші елементи (або заповнюється неповною інформацією про граф). До інших способів задавання графів вдаються рідше, а візуальне задавання (графічне) практично ефективно тільки при дуже малій кількості ребер (або в деяких нагто спец. випадках).

Встановити тотожність двох скінченних графів  $L = (X, U; P)$  і  $L' = (X', U'; P')$  з одними й тими самими множинами  $X$  і  $U$  неважко за будь-якого з перелічених вище способів задавання. Навпаки, проблема ізоморфізму (задача в'ясування того, чи існує взаємно однозначна відповідність множин  $X$  і  $X'$  вершин звичайних графів  $L = (X, U)$  і  $L' = (X', U')$ , при якій кожному ребру графа  $L$  відповідає ребро графа  $L'$  і навпаки) навіть у випадку звичайних графів проста і дуже теоретично. Напр., для в'ясування ізоморфізму двох звичайних графів  $L = (X, U)$  і  $L' = (X', U')$  у разі  $X = \{X'\}$ ,  $U = \{U'\}$  потрібні, загалом кажучи, всі порівнювані матриці суміжності одного з них з усіма матрицями суміжності другого, що їх одержують одне від одного різнотрансформованими перестановками рядів (одночасними однаковими перестановками рядків і стовпчиків). Ще важчою є проблема ізоморфізму вхождення, коли для двох графів  $L$  і  $L'$  необхідно встановити, чи ізоморфний  $L'$  якійсь частині графа  $L$ . Практично ефективного розв'язання цих двох проблем у заг. вигляді не знайдено, але воно здійсненне для багатьох спец. класів графів або при тих чи інших ослаблених постановках — напр., коли йдеться не про ізоморфізм цих графів, а тільки про те, чи збігаються ті чи інші характеристики, або, скажімо, про оцінку імовірності того, що граф містить частину даного виду.

Характеристики графів — це ф-ції, які відносять до кожного графа елемент якоїсь фіксованої множини (чисел, векторів, многочленів, матриць, розбиттів, класу тих чи інших алгебр. систем тощо) і, як правило, є ізоморфною, тобто на ізоморфних графах вона набуває однакових значень. До найважливіших числових характеристик звичайного графа  $L = (X, U)$  належать: кількість вершин  $n(L) = |X|$ ; кількість ребер  $m(L) = |U|$ ; кількість компонент (див. *Графі зв'язності*)  $k(L)$ ; цикломатичне число  $\lambda(L) = m(L) - n(L) + k(L)$ ; кількості  $f_i(L)$  довгих та  $e_i(L)$  пустих  $i$ -вершинних підграфів ( $i = 0, 1, 2, \dots, n(L)$ );  $f_0(L) = e_0(L) = 1$ ; щільність  $\varphi(L) = \max \{i/f_i(L) \neq 0\}$ ; щільність (число внутрішньої стійкості)  $\epsilon(L) = \max \{i/e_i(L) \neq 0\}$ ; кількості  $\alpha_i(L)$  вершин ступеня  $i$  (тобто інцидентних рівно  $i$  ребрам); ступінь  $\sigma(L) = \max \{i/\alpha_i(L) \neq 0\}$ ; кількості  $p_{ji}(L)$  суграфів із  $j$  ребрами і цикломатичним числом  $i$ ; кількості  $r_i(L)$  таких розфарбувань вершин рівно  $i$  кольорами, при яких ніякі дві суміжні (з'єднані ребром)

вершини не пофарбовані однаково; хроматичне число  $\gamma(L) = \min \{i/r_i(L) \neq 0\}$ ; число Хадвігера (ступінь гомоморфізму)  $\eta(L)$  — найбільша кількість вершин повного графа, на який можна перетворити граф  $L$  (або якийсь його підграф) за допомогою стягування ребер; хроматичний клас (хроматичний індекс)  $\chi(L)$  — найменша кількість кольорів, в які можна пофарбувати ребра графа так, щоб ніякі два суміжні (тобто такі, що мають спільну інцидентну вершину) ребра не вийшлися того самого кольору; всесуміжність (число зв'яз. стійкості)  $\beta(L)$  — найменша кількість вершин такого підграфу  $L'$ , що будь-яка вершина  $L$ , яка не належить йому, в суміжності хоч би з однією вершиною з  $L'$ . Деякі характеристики (радіус, діаметр тощо) пов'язані з метрикою графа, тобто з ф-цією, яка відносить кожній парі вершин  $x$  та  $y$  віддалі між ними — якесь число  $\rho(x, y) > 0$ , напр., довжину найкоротшого з ланцюгів, що з'єднують  $x$  з  $y$ , а інші — з різними представленнями графів, із числових характеристиками можна складати різні многочленні характеристики, напр., вимірний многочлен  $\sum_{i \geq 0} f_i(L) z^i$ , розподільний (хроматичний) многочлен  $\sum_{i \geq 1} r_i(L) z^i$ , та ін., де  $z$  — формальна змінна.

Для орієнтованих графів характеристиками є кількість простих орциклів заданої довжини (див. *Цикли графа*), кількість ядер (див. *Гра на графі*), кількість баз і компонент, а також багато чисел, пов'язаних з орметрикою (уточненим поняття віддалі від однієї вершини до другої, яке враховує напрям дуг). Деякі характеристики неорієнтованого графа зумовлені можливістю орієнтувати його ребра так, як задано. Характеристикою графа може бути й якась алгебр. система — група автоморфізмів, мішура ендоморфізмів тощо. Неізоморфними характеристиками є, напр., кількість простих ланцюгів заданої довжини між даною парою вершин графа і матриця таких кількостей для всіх пар його вершин. Багато які з перелічених характеристик переносяться на графи загального виду.

Практично ефективно обчислювану систему ізоморфних характеристик, яка визначала б граф з точністю до ізоморфізму, вивести не вдається. Осн. завданнями щодо характеристик одного й того самого графа є вираження й оцінювання одних характеристик через інші (особливо важливо знаходити точні оцінки згорн. й знову для таких трудно обчислюваних характеристик, як  $\varphi, \epsilon, \gamma, \eta, \chi, \beta$  через легко обчислювані  $n, m, k, \lambda, \alpha, \sigma$  тощо). Так, для звичайних графів: якщо  $\sigma(L) > 3$  і граф  $L$  не містить повних  $\sigma(L)$  — вершинних підграфів, то  $\gamma(L) \leq \sigma(L)$ , верхня оцінка для  $\gamma(L)$  ще може бути ф-цією самої тільки  $\varphi(L)$  (нижня оцінка  $\gamma(L) \leq \varphi(L)$  тривіальна);  $\chi(L) \leq \sigma(L) + 1$  (нижня оцінка  $\chi(L) > \sigma(L)$  тривіальна); було знайдено точні

верхні й нижні оцінки для  $\varphi(L)$ ,  $\psi(L)$ ,  $\gamma(L)$ , точну верхню для  $\eta(L)$  і точну верхню для  $\beta(L)$  через  $\pi(L)$  і  $m(L)$ ; точної нижньої оцінки для  $\eta(L)$  через  $\pi(L)$  і  $m(L)$  поки що не знайдено, а гіпотезу про те, що завжди  $\eta(L) > \gamma(L)$ , підтверджено лише для тих графів з  $\gamma(L) \leq 4$ . Одним із способів одержування точних оцінок є повне описування відповідних оптимальних графів, а багато які з рішень вдається вивести за допомогою тієї чи іншої операції розбирання.

Оптимальні (екстремальні) та критичні графи й різницю між ними розглянемо на конкретному прикладі. Нехай  $L^K(n, \varphi)$  — клас звичайних  $n$ -вершинних графів зі щільністю  $\varphi$ , таких, що додавання будь-якого ребра (без додавання вершин і зміни положення попередніх ребер) збільшує щільність, а  $L^M(n, \varphi)$  — підклас таких із цих графів, які при заданих  $n$  і  $\varphi$  мають найбільшу можливу кількість ребер. Тоді графи з  $L^K(n, \varphi)$  є критичними відносно ребра, а графи з  $L^M(n, \varphi)$  — оптимальними (в цьому випадку максимальними) за кількістю ребер (на мал. 1 наведено відповідні приклади для  $n = 5$ ,  $\varphi = 2$ ). При фіксованих  $n$  і  $\varphi \leq n$  клас  $L^M(n, \varphi)$  складається з єдиного (з точністю до ізоморфізму) графа і до того самого графа приводить і заміна щільності  $\varphi$  хроматичним числом  $\gamma$ : наприклад, класи  $L^K(n, \varphi)$  і  $L^K(n, \gamma)$  з однаковими числовими значеннями  $\varphi$  і  $\gamma$  є рівними. Вважаючи оптимальний граф характеризується тим, що числове значення однієї з його характеристик є найбільшим (чи найменшим) з можливих при фіксованих значеннях заданої системи рошті характеристик, а критичний граф — тим, що застосування до нього будь-якої операції певного типу неодмінно збільшує (чи неодмінно зменшує) задану характеристику.

Операції розбирання відносять графові  $L$  один чи кілька графів  $L_1, L_2, \dots, L_q$ , кожен з яких у якому-сь розумінні простіший за початковий (напр., містить менше вершин чи менше ребер). З кожною такою операцією  $L \rightarrow \dots$  і  $\{L_1, L_2, \dots, L_q\}$  можна пов'язати клас характеристик  $\Phi$ , які задовольняють рекурентне співвідношення

$$\Phi(L) = f(\Phi(L_1), \Phi(L_2), \dots, \Phi(L_q)).$$

де  $f$  — задана  $\Phi$ -ція, і початкові умови: для «найпростіших» графів  $L^a$ , до яких для операції розбирання незастосовна, значення  $\Phi(L^a)$  відомі. В багатьох випадках можна без істотної втрати інформації про граф вважати, що  $\Phi$ -ція  $f$  є лінійною, тобто

$$\Phi(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i \Phi(L_i).$$

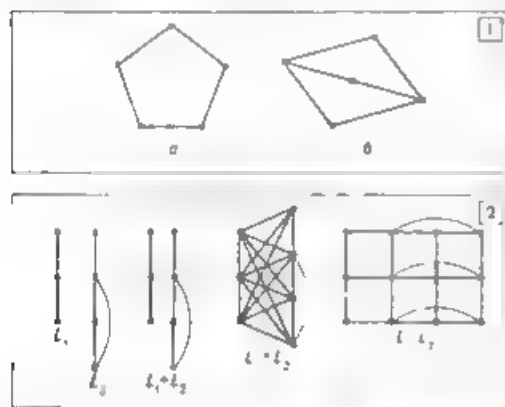
де числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  і значення  $\Phi(L^a)$  є твірними елементами якогось кільця  $K$ . Осн. завдання для даного класу  $L$  графів і заданої операції розбирання: а) знайти умову  $\Omega$  (у як-

гляді системи співвідношень між твірними кільця  $K$ ), яка є необхідною й достатньою для того, щоб характеристика  $\Phi$  була ізоморфною; б) встановити канонічний вигляд, до якого за допомогою співвідношень  $\Omega$  приводиться заг. вираз  $\Phi(L)$ ; в) з'ясувати зміст (відносячись до термінів структура графа  $L$ ) коэф. канонічного представлення  $\Phi(L)$ . Напр., якщо  $L$  — клас звичайних графів із лінійно впорядкованою множиною вершин,  $L_p$  — підграф графа  $L \in L$ , породжений усіма вершинами  $L$ , суміжними з першою,  $L_r$  — підграф, який одержали з  $L$ , видаливши першу вершину, то, очевидно, нямірний многочлен  $F(L) = \sum_{i=0}^n f_i(L) z^i$  задовольняє рекурентне співвідношення  $F(L) = F(L_p) + F(L_r)$  з й початковою умовою  $F(\cdot) = 1 + z$ . Встановлено, що будь-яка ізоморфна характеристика  $\Phi(L)$ , для якої  $\Phi(L) = \alpha_1 \Phi(L_p) + \alpha_2 \Phi(L_r)$  і  $\Phi(\cdot) = 1$  (єдиний кільця  $K$  з твірними  $1, \alpha_1, \alpha_2$ ), цілком визначається числами  $f_i(L)$ .

Для практичного обчислювання характеристик графа описаний рекурентний метод, як правило, неефективний (бо кожен з тих графів  $L_1, L_2, \dots, L_q$ , які виникають після одного кроку розбирання, звичайно буває не набагато простішим за початковий граф  $L$ , а кількість таких графів з кількістю кроків зростає за експоненціальним законом), але він відіграє важливу роль при знаходженні співвідношень між різними характеристиками (напр., вираження чисел  $r_i(L)$  через  $p_H(L)$ ).

До операції композиції відносять тоді, коли утворюють новий граф з кількох простіших графів. Напр., з двох звичайних графів  $L_1 = (X_1, U_1)$  і  $L_2 = (X_2, U_2)$  з  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  можна утворити (мал. 2) суму  $L_1 + L_2 = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2)$ , добуток  $L_1 \times L_2 = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2 \cup \{x_1x_2/x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\})$  і декартів добуток  $L_1 \cdot L_2 = ((x_1x_2/x_1 \in X_1, x_2 \in X_2), \{x_1x_2, y_1x_2/x_1y_1 \in X_1 \& x_2y_2 \in X_2\} \cup \{x_1x_2, x_1y_1/x_1 \in X_1, y_1 \in X_2 \& x_2y_2 \in U_2\})$ , де стрілки над парою вершин означає її впорядкованість. Ці три операції мають властивість ізоморфізму (коли початкові графи замінити ізоморфними їм, то й вислідний граф переходить в ізоморфний), а також деякі алгебр. властивості, напр., комутативність і асоціативність. Важливим прикладом операції композиції, якій не властивий ізоморфізм, є зшивання звичайних графів по повному підграфу (мал. 3). Усі відомі досі композиції є такими, що множина графів, нерозкладних лі на яку з цих операцій (тобто таких, що їх не можна представити як результат застосування операції до певної сукупності графів), так само неосянжна, як і множина всіх графів загалом. Через це повний розклад графів не розв'язує в заг. вигляді

проблеми ізоморфізму (навіть у випадках, коли розклад є єдиним, як, напр., за сукупністю операцій додавання й множення або, для зв'язаних графів, за операцією декартового множення) і не призводить до повного опису всіх графів (або хоч би тільки всіх звичайних). Проте нерідко ті чи інші операції композиції виявляються корисними для описування класів спец. графів, напр., оптимальних (так, граф Турана  $L^M(n, \varphi)$  є добуток  $r$  пустих  $(p+1)$ -вершинних і  $\varphi - r$  пустих  $p$ -вершинних звичайних графів, де  $n = r\varphi + r$ ,



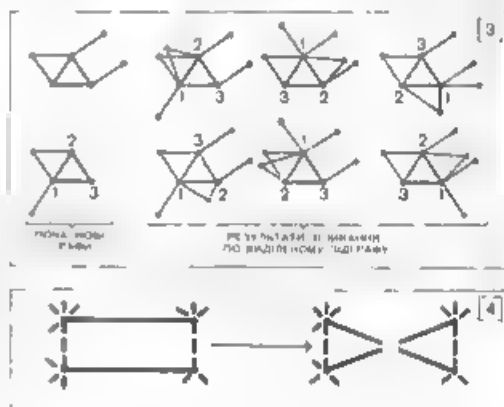
1. Графи а — критичний, б — оптимальний.  
2. Операції композиції двох звичайних графів.  
3. Іншиання тих звичайних графів по відношенню до віддаленості.  
4. Переміщення ребер звичайного графа

$0 \leq r < \varphi$ ), чи для побудови графів з наперед заданими властивостями. У всіх цих випадках важливо знати, як ведуть себе характеристики при щодо цих операцій. Напр., вимірний і розподільний многочлени мають властивість мультиплікативності щодо множення графів.

Операція перетворювання переводить граф у інший граф, як правило, без спрощування чи ускладнювання. Щодо операції цього типу постають питання знаходження інваріантних характеристик графа і питання про повноту систем таких характеристик (тобто про можливість перетворювати один в одного два графи з однакою й тією самою системою, послідовно застосовуючи операції). Напр., система ступенів вершин звичайного графа є повною відносно операції переміщення ребер, що і подано на мал. 4.

Локальні властивості графів. Нехай  $L = (X, U; P)$  — граф заг. виду, зіркою його вершини  $x$  наз. частину, утворену самою вершиною  $x$  та всіма інцидентними їй ребрами (разом з їхніми другими кінцевими вершинами). Здаючи всі  $i$  зірки окремо, не вказуючи, які вершини різних зірок є однакою й тією самою вершиною графа  $L$ , одержимо локальну інформацію про  $L$ ; усі властивості графа, які ґрунтуються на цій інформації, наз. локальними. Для звичайного графа вся локальна інформація про нього вичерпується системою чисел  $\{n_i(L)\}$ , тому й характери-

сти  $n_i(L) \equiv n_i(L)$ , що їх виражають за допомогою цих чисел, належать до локальних, характеристики  $\chi(L)$ ,  $\lambda(L)$ ,  $\varphi(L)$ ,  $\epsilon(L)$  і  $\eta(L)$  — не локальні. Багато які з узагальнень локальних властивостей можна назвати к в а з і л о ж а л ь н и м и, напр., узагальнення, які характеризуються сукупністю оточень усіх вершин звичайного графа (оточення  $O(L; x)$  вершини  $x$  звичайного графа  $L$  — це його підграф, породжений усіма суміжними з  $x$  вершинами  $L$ ) або сукупністю усіх  $n_i(L)$  його  $(n(L) - 1)$ -вершинних підграфів



підграфу.

(заданих з точністю до ізоморфізму). Щодо другої сукупності й досі не відомо, чи завжди вона визначає початковий граф  $L$  однозначно з точністю до ізоморфізму (проблема Улама — Келлі).

Єдиного алгоритму для розв'язування всіх питань Г. т. бути не може, але конкретне питання для конкретного скінченного графа завжди можна розв'язати за скінченну кількість кроків. Проте розв'язок може виявитися занадто громіздким, тому й щодо скінчених алгоритмів виникає проблема їхньої практичної ефективності, тобто можливості істотною мірою уникнути повного перебирання усіх можливих випадків. Практично ефективним є, напр., метод переміжних ланцюгів і метод Форда — Фалкерсона в теорії транспортних мереж. Навпаки, деякі задачі (напр., поміж задачами, пов'язаними з розфарбовуванням вершин) не допускають у заг. випадку практично ефективних алгоритмів, і тоді часто вдаються до таких прийомів, які для переважної більшості графів дають результат за прийнятний час. З цим пов'язане широке застосування в Г. т. ймовірнісних та асимптотичних методів, яке спирається на різні за дачі підрахування графів (напр., знайти кількість неізоморфних звичайних графів із заданою кількістю вершин і ребер, заданими ступенями вершин тощо, а також аналогічні їм кількості за додатковою умови зв'язності



графів та ін), що їх розв'язують методами комбінаторного аналізу.

Графи використовують у сіткових методах планування й управління, під час побудови граф-схем автоматів (див. *Абстрактні моделі автоматів графів*), у теорії алгоритмів (див. *Алгоритми графової схеми*) та в ін розділах кібернетики.

Лит.: Зыков А. А. Реберно-вершинные функции и распределительные функции графов. Доклады АН СССР, 1961, т. 139, № 4, Ершова А. П. Нонукхун Г. И. Об оценках хроматического числа связанных графов. Доклады АН СССР, 1962, т. 142, № 2. Визинг В. Р. Оценка числа внешней устойчивости графов. Доклады АН СССР, 1965, т. 164, № 4. Зыков А. А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [бібліогр. с. 515—547]. König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936. Берг К. Теория графов и ее приложения. Пер. с франц. М., 1962 [бібліогр. с. 293—302]. Ore O. The four-color problem. New York, 1967 [бібліогр. с. 249—253]. Ore O. Теория графов. Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 325—338]. Натанс В. Graph theory. Heading, 1969. Мак-Байн П. Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Bd 1. Leipzig 1970. О. О. Зыков.

**ГРАФІЧНИЙ РЕСТРУКТУЮЧИЙ ПРІСТРІЙ** — див. *Пристрій відображення інформації*.

**ГРАФОНОВУДОВНИК** — див. *Пристрій відображення інформації*.

**ГРИ ЗНАЧЕННЯ** — загально значення обох частин рівності

$$u \text{ чир } \inf H(x, y) = \inf_{x \in X, y \in Y}$$

$= \inf_{x \in X, y \in Y} \text{чир } H(x, y)$  в антагоністичній грі  $\Gamma = (X, Y, H)$ . Якщо гравці мають оптим. (або  $\epsilon$ -оптим. для будь-якого  $\epsilon > 0$ ) стратегії, то  $\Gamma$  з. існує. Застосовують свою стратегію оптимально, і-й гравець забезпечує собі одержання виграву, не меншого за  $v$ , а 2-й гравець гарантує, що його програш не перевищить  $v$  (див. *Максиміну принцип*).  $\Gamma$  з. існує для широких класів антагоністичних ігор, зокрема для матричних ігор і для деяких класів нескінченних ігор (див. *Гра на одиничному квадраті*). Приклад гри, що не має значення, див. у ст. *Гри антагоністичні*.

**ГРУП ТЕОРІЯ** — розділ алгебри, який вивчає властивості груп. Поняття групи складалося як одне з осн. понять математики і, в першу чергу, алгебри та геометрії. В 20 ст.  $\Gamma$  т. твердо увійшла у фізику (квантова механіка, кристалогRAFія) і в кібернетику (*абстрактна теорія автоматів*, коди лінійні). На першому етапі  $\Gamma$  т. розвивалася в межах теорії груп підстановок (або груп перетворень), яка становить і зараз один з центр. розділів  $\Gamma$  т. Нехай  $M$  — множина. Бієкція  $\sigma$  множини  $M$  на себе наз. підстановкою множини  $M$ . Якщо на множині підстановок множини  $M$  розглядати операцію послідовного застосування підстановок (їхню суперпозицію), то сукупність усіх підстановок утворять групу  $S(M)$ , яка наз. симетричною групою множини  $M$ . Підгрупи групи  $S(M)$  наз. групами підстановок множини  $M$ . Якщо на множині  $M$  визначено яку-небудь структуру так, що  $M$  є носієм алгебри універсальної або алгебр. системи,

то сукупність усіх підстановок множини  $M$ , які зберігають усі відношення структури, утворюють групу автоморфізмів цієї структури. Напр., нехай  $V$  — векторний простір над полем  $K$ . Операції в  $V$  — це додавання й множення векторів на  $\alpha \in K$ . Автоморфізмами простору є невіддільні лінійні перетворення (див. *Оператори лінійні*): їхня сукупність — повна лінійна група простору  $V$  — і є групою автоморфізмів простору. Ця група ізоморфна групі невіддільних квадратних матриць порядку розмірності простору з коеф. із поля  $K$ . Нехай  $E$  — евклідів векторний простір, і окрім векторних операцій на ньому визначено ще й операцію скалярного добутку. Автоморфізмами простору  $E$  є т. в. ортогональні лінійні перетворення, яким в ортонормованому базисі відповідають ортогональні матриці: їхня сукупність утворює ортогональну групу, яка є групою автоморфізмів простору.

Історично першими поняттями групи було поняття групи Галуа многочлена. Нехай  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  — многочлен з коеф.  $a_i$  з поля  $K$  і нехай  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — корені цього многочлена. Тоді сукупність усіх підстановок множини  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  усіх коренів, що зберігають усі відношення виду  $\sum_{i=1, 2, \dots, n} c_i \xi_i^{k_1} \xi_i^{k_2} \dots \xi_i^{k_n} = 0$  з коефіцієнтами  $c_i, k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ , наз. групою Галуа многочлена  $f(x)$ . Фрэнк. матом. Е. Галуа ввів умову, необхідну і достатню для розв'язності рівняння  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  в радикалах. Зокрема, звідси виходила нерозв'язність заг. рівняння 5-го й вищих степенів. Т. в. теорія Галуа, що виникла в зв'язку з розв'язуванням цих задач, стала відправним пунктом для розвитку  $\Gamma$  т. Осн. причиною успіху поняття групи й поняття групи автоморфізмів виявився той визначний факт, що будова групи автоморфізмів якої-небудь структури несе велику інформацію про властивості цієї структури: будова групи автоморфізмів характеризує в якомусь розумінні властивості симетрії відповідної структури. В 20 ст. розвивається теорія абстрактних груп, яка вивчає властивості груп і класів груп, визначених аж до ізоморфізму й незалежно від конкретного задавання їх перетвореннями й автоморфізмами структур. Теорія абстрактних груп з'ясовує, які підгрупи виникають певна група і як вони в ній розміщені, вивчає наявність або відсутності епіморфізмів одних груп на інші; інтерес являв собою задавання груп твірними та визначальними відношеннями й, навпаки, систематично досліджує різні процедури, що дають змогу будувати нові групи з заданих, — прямі, підпрямі, вільні добутки груп, розширення груп, силетення та ін. Лит.: Мал'цев А. И. Группы и другие алгебраические системы. В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. М., 1958. Курош А. Г. Теория групп. М., 1967 [бібліогр. с. 581—636]. Вейль Г. Классические группы. Пер. с англ. М., 1947 [бібліогр. с. 389—398]. Холл М. Теория групп. Пер. с англ. М., 1962 [бібліогр. с. 452—459]. Л. А. Калужніч.

**ГРУПА** в алгебрі — множина, в якій визначено одну бінарну, асоціативну та зворотну операцію. Докладніше:  $G$  — це клас множини  $G$ , з якою парою елементів  $a, b \in G$  якій зіставлено якийсь однозначно визначений елемент  $c \in G$ , що його наз. добутком елементів  $a$  та  $b$ :  $c = ab$ .

Операція множення елементів  $G$  повинна задовольняти такі аксіоми: 1)  $(ab)c = a(bc)$  (аксіома асоціативності); 2) існує однозначно визначений елемент  $e$ , що його наз. одиницею, або нейтральним елементом  $G$ , для якого має місце рівність  $ae = ea = a$  для всіх  $a \in G$  (аксіома існування нейтрального елемента); 3) для кожного  $a \in G$  існує й якийсь однозначно визначений елемент  $a^{-1} \in G$ , що його наз. оберненим елементом елементові  $a$ , такий, що  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$  (аксіома оберненості операції множення). Якщо для всіх  $a, b \in G$  має місце ще й  $ab = ba$ , то  $G$  наз. комутативною, або абелевою (див. Групи теорії).

Л. А. Наумович

**ГРУПИ НЕПЕРЕРВНІ.** Неперервною (топологічною) наз. групу, що в ній є топологія, відносно якої групова операція неперервна. Точніше, групу  $G$  наз. неперервною, якщо в множині  $G$  введено топологію, відносно якій множина  $G$  утворює топологічний простір, і якщо ф-ції  $g^{-1} = \Phi(g)$  — обернений елемент групи та  $gg' = F(g, g')$  — добуток елементів групи є неперервними. Якщо  $G_1$  та  $G_2$  —  $G$  н., то гомоморфізм  $G_1 \rightarrow G_2$  наз. гомоморфізм груп, який є неперервним відображенням відповідних топологічних просторів. Зокрема, ізоморфізм наз. ізоморфізм груп, що є гомоморфізмом топологічних просторів. Аналогічно цьому в теорії  $G$  н. з урахуванням топології визначаються й інші поняття груп теорії (підгрупа, факторгрупа тощо).

Приклади  $G$  н. групи дійсних чисел. Групову операцію є додавання чисел. Топологія вводится шляхом природного отождествлення дійсних чисел з точками числової лінії  $\Phi(t) = -t$ ,  $F(t, t') = t + t'$  ( $t, t' \in R$ ).  $T$  — група поворотів навколо осі. Груповою операцією є додавання кутів повороту (за модулем  $2\pi$ ). В цьому разі топологія вводится шляхом природного отождествлення кута повороту в точкою кола.  $GL(n, R)$  — група всіх невідокремлених квадратних дійсних матриць порядку  $n$ . Груповою операцією є множення матриць. Топологія вводится шляхом отождествлення матриць з точкою  $n^2$ -вимірного евклідового простору, координатами якої є матричні елементи.

У застосуваннях найчастіше доводиться мати справу з групами перетворень  $G$  н. перетворень наз. трику  $(G, X, \Psi)$ , де  $G \sim G$  н.,  $X$  — топологічний простір і  $\Psi(g, x) = T_g x$  ( $g \in G, x \in X$ ) — неперервна ф-ція із значеннями в  $X$ . Припускають, що при кожному  $g \in G$   $T_g$  є гомоморфізмом  $X$  на себе і що має місце співвідношення  $T_g T_{g'} = T_{gg'}$ . Група перетворень наз. транзитивною, якщо для кожної пари точок  $x, x' \in X$  знайдеться перетворення  $T_g$ , яке переводить точку  $x$  в  $x'$ :  $T_g x = x'$ . Група  $GL(n, R)$  природно визначає групу лінійних перетворень векторного простору  $R^n$ :  $G = GL(n, R)$ ,  $X = R^n$ , якщо  $g = (g_{ij}) \in GL(n, R)$  і  $x = (x_i)$  — вектор в  $R^n$ , то  $\Psi(g, x) = T_g x = (g_{ij})(x_j)$ .

$G$  н., які трапляються в застосуваннях, здебільшого в групах  $GL(n, R)$  н.  $G$  наз.  $r$ -параметричною групою Лі, коли якийсь окіл одиниці в групі гомеоморфний  $r$ -вимірному евклідовому просторові. В цьому разі в  $G$  (локально) можна ввести координати та визначити елемент  $g$  за допомогою координат  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Ф-ції  $\Phi(g)$  та  $F(g, g')$  вводяться до набору з  $r$  ф-цій від  $r$  (відповідно  $2r$ ) змінних  $\Phi_i(g) = \Phi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ,  $F_i(g, g') = F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha'_1, \dots, \alpha'_r)$  ( $1 \leq i \leq r$ ).

З теорії груп відомо, що при належному виборі координат ф-ції  $\Phi_i, F_i$  є аналітичними. Це дає змогу широко застосовувати матем. аналіз при вивченні груп Лі. Розглянуті вище групи  $R, T, GL(n, R)$  є групами Лі (перші дві — однопараметричні, а остання —  $n^2$ -параметрична).

Алгеброю Лі  $L$  наз. векторний простір (здебільшого над полем дійсних чисел), у якому є бінарна операція  $[a, b]$  ( $a, b \in L$ ), що задовольняє такі умови: є лінійною за обома аргументами,  $[a, b] = -[b, a]$ ,  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$  (тождество Якобі). Алгебри Лі є об'єктами, простішими за групи Лі. Виявляється, що між алгебрами Лі та групами Лі, якщо розглядати їх локально (тобто в якійсь околі  $e$ ), існує взаємнооднозначна відповідність, яка дає змогу вивести багато питань, які стосуються груп Лі, до відповідних алгебр.

Пояснимо цей зв'язок точніше. Розглянемо  $G$  н. перетворень  $(G, X, \Psi)$ , де  $G$  —  $r$ -вимірна група Лі,  $X$  —  $n$ -вимірний диференціальний різноманітність і  $\Psi$  — нескінченно диференціальна ф-ція.  $X^*$  — простір нескінченно диференціальних ф-цій на  $X$ . Для кожного  $g \in G, f(x) \in f(T_g x)$  ( $f \in X^*$ ) є оператором лінійним в  $X^*$ . Нехай  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  — координати елементів  $g$ . Частинні похідні

$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(T_g x)|_{g=e} = X_i f(x)$  ( $1 \leq i \leq r$ ) — лінійними дифер. операторами  $i$ -го порядку. Їх наз. операторами Лі групи перетворень (інфінітезимальними операторами).  $X_i f(x) dx_i$  — зміна ф-ції  $f(x)$  від лінійної «нескінченно малого» перетворення, що відповідає елементові групи,  $i$ -а координата якого відрізняється від  $i$ -ї координати  $e$  на  $dx_i$ . Якщо група перетворень ефективна (при  $g = e, T_g x \neq x$ ), то лінійні комбінації операторів  $X_i$  утворюють  $r$ -вимірний векторний простір  $L$ . Візьмемо  $\{X_1, X_2\} = X_1 X_2 - X_2 X_1$ . Виявляється, що  $\{X_1, X_2\} \in L$  і щодо введеної так операції  $\{, \}$   $L$  утворює алгебру Лі (що не залежить від

$X$  та  $\Psi$ . Це й є алгебра Лі групи  $G$ . Нехай тепер  $X_1, \dots, X_r$  — лінійні дифер. оператори  $i$ -го порядку в  $X^*$ . Припустимо, що їхня лінійна оболонка  $L$  є  $r$ -вимірний векторний простором і  $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i \in L$ . Тоді  $L$  утворює алгебру Лі. Тепер можна побудувати (локально) групу перетворень  $(G, X, \Psi)$ , зокрема, відкрити групу  $G$ , для якої  $L$  є алгеброю Лі.

$$f(\Psi(g, x)) = f(T_g x) = \exp \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i X_i \right) f(x) \\ (f(x) \in X^*)$$

Перелічимо деякі групи Лі, що особливо часто трапляються в застосуваннях. Поряд із зазначеними вище групами  $R, T, G, GL(n, R)$  це група  $GL(n, C)$  всіх невідіржених квадратних матриць порядку  $n$  з комплексними елементами та ряд її підгруп і підгруп групи  $GL(n, R)$ .  $O(p, q)$ : підгрупа  $GL(p+q, R)$ , що складається з матриць, які залишають інваріантною форму  $-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2$ . Зокрема,  $O(n) = O(n, n)$  — група обертань  $n$ -вимірного евклідового простору.  $SL(n, R)$  ( $SL(n, C)$ ), підгрупа  $GL(n, R)$  ( $GL(n, C)$ ), яка складається з матриць з визначником 1.  $U(p, q)$ : підгрупа  $GL(p+q, C)$ , яка складається з матриць, що залишають інваріантною ермітову форму  $-x_1 y_1 - \dots - x_p y_p + x_{p+1} y_{p+1} + \dots + x_{p+q} y_{p+q}$ . Зокрема,  $U(n) = U(n, n)$  — група унітарних матриць.  $Sp(n, R)$ : підгрупа  $GL(2n, R)$ , яка складається з матриць, що залишають інваріантною форму  $x_1 y_{n+1} - x_{n+1} y_1 + x_2 y_{n+2} - x_{n+2} y_2 + \dots + x_n y_{2n} - x_{2n} y_n$ .

$G, n$  застосовують у теорії представлень (див. *Представлення груп теорія*) Нехай  $G = (G, X, \Psi)$  —  $G, n$  перетворень. Гомоморфізм  $G \rightarrow K$  наз. представленням групи  $G$  в групі перетворень  $(K, X, \Psi)$ . Під представленням здебільшого розуміють лінійне представлення. В цьому разі роль  $(K, X, \Psi)$  відіграє група  $GL(n, R)$ , що її розглядають як групу перетворень  $n$ -вимірного векторного простору  $R^n$ . Представлення групи ставить у відповідність кожному елементу групи  $g$  матрицю  $T_g$ , яка визначає лінійне перетворення в  $R^n$  так, що  $T_g T_h = T_{gh}$ . Центр задаючи теорії представлень є відшукування мінім. підпросторів, інваріантних відносно перетворень  $T_g$  (незвідні підпростори (представлення)), і розклад довільних векторів з  $R^n$  за цими підпросторами. Тепер інтенсивно розробляють і теорію нескінченновимірних представлень, у якій роль  $R^n$  відіграє нескінченновимірний векторний простір. Розглянемо неперервну транзитивну групу перетворень  $(G, X, \Psi)$ .  $X^*$  — якийсь нескінченновимірний векторний простір  $\phi$ -цій на  $X$  (простір усіх неперервних  $\phi$ -цій, усіх нескінченно диференційовних

$\phi$ -цій, усіх  $\phi$ -цій, які підсумовують в квадратом за якоюсь мірою, тощо). Перетворення  $T_g$  визначають лінійні оператори  $f(x) \rightarrow f(T_g x)$  ( $f(x) \in X^*$ ) простору  $X^*$ , які утворюють нескінченновимірне представлення групи  $G$ . Вивчення цього представлення, зокрема, одержання розв'язання  $\phi$ -цій в  $X^*$  за  $\phi$ -ціями з незвідних підпросторів, є предметом гармонічного аналізу. Класичний гармонічний аналіз розглядає випадок, коли  $G = T, X = S^1$  є коло або  $G = R, X$  — числова вісь. Такими розв'язаннями є відповідно ряд і інтеграл Фур'є. Ще один приклад: нехай  $G = O(3)$  — група обертань тривимірного евклідового простору,  $X = S^2$  — сфера у тривимірному просторі з центром у початку координат. Відповідні розв'язання — розв'язання  $\phi$ -цій на сфері в ряд за сферичними  $\phi$ -ціями.

Теорія динамічних систем вивчає нетранзитивні групи перетворень. Найкраще вивчено системи з групою  $G = R$ . В цьому разі елемент групи  $t \in R$  інтерпретують як час, в  $T_x = x(t)$  — як закон руху точки  $x \in X$ . Проблематика таких систем бере початок у заг. механіці і має в ній важливі застосування. Теорію груп застосовують у багатьох розділах сучасної математики.

Лит. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М. 1973 [Бібліогр. с. 515—516]. Либарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М. 1958 [Бібліогр. с. 343—346]. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовой механике. Пер. с англ. М., 1961. Хакерман М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. Пер. с англ. М., 1966 [Бібліогр. с. 379—382].

**ГРУПОВЕ ДЖЕРЕЛО НАПРУГИ** — джерело струму, в якому величини напруг між вихідними полюсами встановлюються відповідно до заданої програми. Програма вводиться з керуючий пристрій КП Г. д. н. (має) і замикається в ньому у вигляді кодів. У ній зазначаються величини та знаки напруг між відповідними вихідними полюсами, в

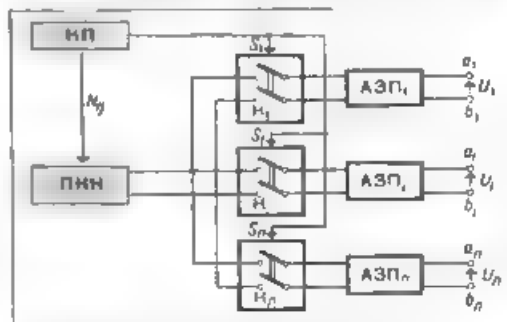


Схема групового джерела напруги.

також порядком видавання кодів і сигналів, що керують роботою пар ключів. Коли керуючі сигнали немає, всі ключі перебувають у розімкненому стані. В процесі роботи з КП на вхід перетворювача код — напруга ПКН надходять коди, синхронно з якими подаються

керуючі сигнали на ключі  $K_1, \dots, K_i, \dots, K_n$ . При появі в момент  $t_j$  сигналу  $S_i$  відповідний ключ  $K_i$  замикається і код  $N_{i,j}$ , перетворений на напругу  $U_i(t_j)$ , надходить на вхід аналогового запам'ятовувального пристрою (АЗП) і фіксується в ньому. При цьому на вихідних полюсах  $a_1, b_1$  з'являється напруга  $U_i(t_j)$ , яка лишається сталою доти, доки КП знову не подасть керуючий сигнал  $S_i$  й нове значення коду  $N_{i,j+1}$ . Отже, на кожній парі вхідних полюсів може бути встановлена напруга, яка ступінчасто апроксимує задаву функціональну залежність від незалежної змінної  $t$ . До важливих параметрів Г. д. н. належать кількість пар вхідних полюсів, точність встановлення вихідних напруг і допустимий частотний діапазон їхньої зміни. Г. д. н. застосовують в електр. моделюючих сітках для задавання граничних умов, в аналогових, коалієнцелогових і динамічних моделях. При використанні Г. д. н. у гібридних системах функції КП може виконувати цифровий автомат гібридної системи.

**ГУРВИЦА КРИТЕРІЙ** — один із стійкості критеріїв.

**ГУРВИЦА ТЕОРЕМА** — теорема, що визначає умови, за яких усі корені (нулі) дійсного многочлена

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_n > 0, a_n \neq 0, n > 1) \quad (1)$$

розміщені строго в лівій комплексній півплощині, тобто мають від'ємні дійсні частини.

Вперше задачу було розв'язано в праці Ш. Ерміта (1856), що залишилася невідомою

для широкого кола спеціалістів. Удруге її сформулював Дж. Максвелл (1868) і розв'язав Е. Раус (1877). Вдаліший розв'язок цієї задачі незалежно від Е. Рауса знайшов А. Гурвіц (1895). У матем. і тех. літературі цей розв'язок наз. теоремою (критерієм) Гурвіца.

**Т е о р е м а.** Щоб усі корені дійсного многочлена (1) мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (2)$$

$$\text{Тут } \Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \dots,$$

послідовні головні мінори матриці Гурвіца

$$H_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (a_i = 0 \text{ при } i < 0 \\ \text{та } i > n), \end{matrix} \quad (3)$$

складеної з коефіцієнтів многочлена (1). Многочлен, що задовольняє означену теорему, звичайно наз. Гурвіцовим, а мінори  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  — Гурвіцовими визначниками. Г. т. застосовують у матем. теорії стійкості й теорії автомат. регулювання як стійкості критерій лінійних (лінеаризованих) систем.

Див. далі до ст. Стійкості критерії

Ю. М. Чекохін.

**ДАВАЧ ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ** — пристрій для одержування послідовностей незалежних випадкових чисел з квазірівномірним законом розподілу. Цей закон зумовлений тим, що в електронній цифровій обчислювальній машині (ЕЦОМ) замість неперервної сукупності рівномірно розподілених випадкових чисел використовують дискретну сукупність  $2^k$  чисел з однаковою ймовірністю появи будь-якого з них ( $k$  — кількість розрядів машинного числа в двійковому коді). При досить великих  $k$  різниця між квазірівномірним і рівномірним розподілом зникає. Звичайно для побудови послідовності випадкових чисел в будь-яким потрібним законом розподілу використовують одне або кілька значень випадкових чисел, квазірівномірно розподілених в інтервалі  $(0, 1)$ .

Щоб одержати  $k$ -розрядне випадкове число, використовують послідовність  $k$  незалежних випадкових величин  $z_i (i = 1, 2, \dots, k)$ , що рівномірно набувають одне з двох можливих значень 0 та 1. Одержана послідовність нулів та одиниць являє собою послідовність двійкових анаків деякого дробу, який і є шуканим випадковим числом. Отже, для формування випадкових чисел досить побудувати випадкову послідовність нулів та одиниць так, щоб ймовірності появи 0 та 1 були строго рівні.

Д. в. ч. можна поділити на дві групи. До першої належать Д. в. ч., які використовують джерела фізичних випадкових процесів (напр., шуми електронних ламп). Шумовий ерс джерела після підсилення дає якусь випадкову напругу  $U(t)$ , яка є випадковою функцією часу. Якщо фіксувати значення цієї напруги в досить віддалені один від одного моменти часу  $t_i$ , то одержимо дискретну послідовність незалежних випадкових величин  $U_i$ . Вибираючи якийсь сталий рівень напруги  $U_0$ , визначимо випадкову величину  $z_i$  уковою

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{при } U_i < U_0 \\ 1, & \text{при } U_i > U_0 \end{cases}$$

Величину напруги  $U_0$  вибирають такою, щоб ймовірність появи  $z_i = 1$  дорівнювала ймовірності появи  $z_i = 0$ . Одержувані в такий спосіб послідовності є випадковими. До над цього способу одержування випадкових послідовностей можна віднести певну нестійкість роботи проміжних ланок між джерелом шуму й коміркою пам'яті машини, в якій утворюється нове випадкове число, та нестаціонарність фіз. випадкового процесу. Крім того, цьому способowi властива й одна незручність: не можна застосувати повторний підрахунок для підвищення вірогідності результатів та усунення похибок через випадкові збої або при розв'язуванні задач на ЕЦОМ.

До 2-ї групи належать Д. в. ч., що дають псевдовипадкові послідовності, які можна одержувати або за допомогою спец. програм на ЕЦОМ, або за допомогою спеціалізованих пристроїв — генераторів псевдовипадкових



послідовностей. Таким способом можна одержувати дуже довгі послідовності випадкових чисел, проте вони будуть періодичними.

Д. в. ч. застосовують при моделюванні систем автомат. керування, при розв'язуванні задач ідентифікації об'єктів керування та в інших випадках.

Л.м. Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ неслучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., 1986 (Библиогр. с. 215-227). Иваненко П. И., Хасельб. А. Задачи стабилизации параметров искусственно генерируемых случайных процессов «Автоматика и телемеханика», 1969 № 6; Корн Г. А. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. Пер. с англ. М., 1988.

О. А. Хасельб.

**ДАВАЧ ПООДННОКИХ ІМПУЛЬСІВ** — неавтономна кодуюча ланка (електронний пристрій), яка формує імпульси певної амплитуди й тривалості, або стандартні імпульси, в результаті дії випадкового стрибкоподібного пускового сигналу. Таким пристроєм насамперед є загальнозаний релаксаційний генератор імпульсів або імпульсатор, блок-генератор та ін., в найпростішому випадку — диференціююче коло. Їхня особливість — негайне спрацювання після запуску. Часова затримка визначається лише характеристиками схеми та приладів, що її реалізують. В обчисл. техніці Д. в. ч. наз. і цифровий автомат, який після сигналу «пуск» формує імпульс, синхронний з сигналами генератора тактових імпульсів.

М. А. Лещенко.

**ДАВАЧ РОБОЧОГО ЦИКЛУ** — сукупність програмних і апаратних засобів для керування та узгодження в часі дії окремих пристроїв чм елементів цифрових обчислювальних машин відповідно до заданої послідовності їхньої роботи. Залежно від виконуваних функцій розрізняють: 1) давачі керування й синхронізації, що забезпечують потрібний порядок роботи пристроїв і блоків; 2) давачі керування й синхронізації, які забезпечують виконання елементарних операцій окремими вузлами машини; 3) давачі синхронізації елементів, що видають послідовності імпульсів, які визначаються типом елементів і характером схемних розв'язків.

В. П. Бонч.

**ДАВАЧ ЧАСУ**, електронний годинник — пристрій, призначений для вимірювання інтервалів часу, видавання часових керуючих сигналів при виконанні робочих програм у ЦОМ, а також для видавання відміток справжнього часу в різних системах керування. Як Д. ч. використовують спец.

лічильники, програмно-апаратні або апаратні (схеми) блоки, які ведуть облік та видавання часових відміток за спец. програмою. Для утворення часових відміток, як правило, використовують кварцові генератори певної частоти (кратної часткам секунди) або звичайну електромережу з частотою 50 м. Знаючи частоту надходження імпульсів генератора (півхвилі мережі) та кількість їх, а також початковий час у Д. ч., визначають справжній час.

У ЦОМ Д. ч. являє собою або повнорозрядне слово, що зберігається у фіксованій комірці *оперативної* запам'ятовувального пристрою, або спец. *регистр*, сигнали на зміну поточного значення яких надходять зі схеми утворення часових відміток (дні, години, секунди, частки секунд тощо) через систему переривання. В разі використання комірки 311 або регістра їхній вміст розглядають як ціле число зі знаком, його можна обробляти за правилами операцій з фіксованою комою. Викання й виконання Д. ч. провадиться за командами машини Використовуючи Д. ч. як окремий регістр, його попереднє встановлення можна здійснювати вручну з пульта керування ЦОМ або командою за програмою. Часові відмітки підраховують, як правило, незалежно від виконання осн. програми, і машина в будь-який момент часу звертається до Д. ч. як до одного із своїх зовнішніх пристроїв. Застосування Д. ч. для змусу значно розширити можливості мультипрограмних систем (врахування часу роботи машини по кожній задачі, роботи окремих пристроїв та їх.) і систем, які працюють у *реальному масштабі часу* (опитування стану об'єктів у певні моменти часу, видавання часових відміток і керуючих сигналів тощо).

Ч. Н. Зубатенко

ДАНІ — факти та ідеї, подані у формалізованому вигляді, завдяки чому їх можна передавати чи обробляти за допомогою певного процесу (й відповідних технічних засобів). Д. здебільшого бувають записані на якійсь носіїв носіях — *перфорційних картках*, *списках*, *бланках*, *стрічках магнітних барабанів* магнітних тощо (див. *Носії запису інформації*). Автоматична обробка даних є однією з осн. прикладних задач кібернетики. Див. також *Обробка даних система*.

ДВИГУН ПОЛІМЕРНИЙ — двигун, робочим тілом у якому є сукупність шкортних полімерних волокон або плівки (див. *Штучний м'яз*). Характерною рисою Д. п. є перетворення енергії, що виділяється від час хімічної реакції в робочому середовищі, безпосередньо на мех. енергію, без перетворення на теплову. ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. — див. *Двоїстості теорія* в програмуванні лінійному.

ДВОЇСТА ЗАДАЧА ОПУКЛОГО ПРОГРАМУВАННЯ. Загальна задача програмування математичного полягає у відшукуванні

$$v = \sup_{g(x) \geq 0, x \in R} f(x) \quad (1)$$

де  $g(x) = \{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$  — якась вектор.

функція,  $R$  — мн-на в  $n$ -вимірному просторі (див. *Простір абстрактний* у функціональному аналізі). Вводячи ф-цію Лагранжа  $F(x, \lambda) = f(x) + (\lambda, g(x))$  цієї задачі, розглянемо задачу, яка полягає у відшукуванні

$$v' = \sup_{x \in R, \lambda \geq 0} \inf F(x, \lambda). \quad (2)$$

Задачі (1) і (2) еквівалентні  $\lambda v = v'$ , якщо тільки початкова задача має розв'язок. У протилежному разі  $v' = -\infty$ . Двоїстою до задачі (1) є задача відшукування

$$\bar{v} = \inf_{\lambda \geq 0} \sup_{x \in R} F(x, \lambda) = \inf_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda). \quad (3)$$

Для формулювання теореми двоїстості необхідно ввести таке узагальнення задачі (1)

$$v' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in R, \lambda \geq 0, \epsilon \leq f(x)} f(x). \quad (4)$$

Якщо множина планів (розв'язків) задачі пуста, то величини  $v$  або  $v'$  відповідно слід узяти рівними  $-\infty$ . При цьому завжди  $\bar{v} \geq v' \geq v = v'$ . Якщо  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  — опуклі функції (догори),  $R$  — опукла множина, тобто задачі (1) є задачею програмування

опуклого, то справджується рівність  $v' = v$ . Т. ч., для задачі опуклого програмування справджується така теорема. Задача (1) й задача (3) зв'язані співвідношенням двоїстості  $v = \bar{v}$  у тому й тільки в тому разі, якщо перехід від початкової задачі (1) до узагальненої початкової задачі (4) не веде до зростання верхньої грані (1), тобто  $v = v'$ . Цю теорему наз. *теоремою двоїстості*.

Відомо кілька умов, достатніх, щоб здійснювалося співвідношення двоїстості  $v = \bar{v}$ : 1) Ф-ції  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  — опуклі догори й неперервні на замкненій опуклій множині  $R$ , множина  $G$  планів задачі (1) непуста й обмежена. При цьому верхня грань у прямій задачі досягається при  $v < \infty$ , хоч нижня грань у двоїстій задачі (3) може і не досягатися. 2) Ф-ції  $f(x)$ ,  $g_i(x)$  — опуклі (догори), множина  $R$  — опукла і здійснюється умова Слейтера: є план  $x^{(0)}$  задачі (1) такий, що  $g_i(x^{(0)}) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Ця умова виключає наявність у задачі умов у вигляді рівностей. Однак для задачі  $g_i(x) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $h_i(x) = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, s$ ;  $m_1 + 2s = m$ , де  $h_i(x)$  — лінійні ф-ції, має місце узагальнена умова Слейтера, яке полягає в тому, що є такий план  $x^{(0)}$ , що  $g_i(x^{(0)}) > 0$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ , де  $x^{(0)}$  — внутр. точка множини  $R$ . При цьому нижня грань у двоїстій задачі при

$v = \bar{v} < \infty$  досягається для деякого  $\lambda^*$ . Однак верхня грань у початковій задачі може й не досягатися. 3) Ф-ція  $f(x)$  — опукла (догори) кусково-гладка, ф-ції  $g_i(x)$  — опуклі догори кусково-лінійні,  $R$  — опукла багатогранна множина і множина планів задачі (1) непуста. При цьому в разі  $v = \bar{v} < \infty$  пра

якихось  $x^* \in G$  і  $\lambda^* \geq 0$   $v = \bar{v} = f(x^*) = \psi(\lambda^*)$ .

Пара двоїстих задач (1) і (3) тісно пов'язана з задачею відшукування *сідлової точки*  $\phi$ -цілі Лагранжа  $F(x, \lambda)$ . Цей зв'язок наведено такої теореми. Для існування сідлової точки  $\phi$ -цілі Лагранжа  $F(x, \lambda)$  при  $x \in R$ ,  $\lambda \geq 0$  необхідно й достатньо, щоб задачі (1) і (3) були зв'язані співвідношенням двоїстості й мали як розв'язки якісь точки  $x^* \in G$ ,  $\lambda^* \geq 0$ . При цьому будь-яка пара  $x^* \in G$ ,  $\lambda^* \geq 0$  розв'язків двоїстих задач становить сідлову точку  $\phi$ -цілі  $F(x, \lambda)$  і навпаки, сідлова точка  $(x^*, \lambda^*)$   $\phi$ -цілі  $F(x, \lambda)$  визначає розв'язок  $x^* \in G$ ,  $\lambda^* \geq 0$  задач (1) і (3) відповідно. Т. ч., ця теорема дає змогу зводити розв'язування задачі (1) до знаходження сідлової точки  $\phi$ -цілі Лагранжа  $F(x, \lambda)$  в області  $x \in R$ ,  $\lambda \geq 0$ , якщо ця точка існує.

Щоб скласти двоїсту задачу, необхідно знайти  $\phi$ -цію  $\psi(\lambda) = \sup_{x \in R} f(x, \lambda)$ . Ця  $\phi$ -ція

опукла донизу. Справді, якщо  $\lambda^{(1)}$  і  $\lambda^{(2)}$  — будь-яка пара точок  $m$ -вимірного простору, то при  $0 < d < 1$

$$\begin{aligned} \psi(d\lambda^{(1)} + (1-d)\lambda^{(2)}) &= \sup_{x \in R} \{dF(x, \lambda^{(1)}) + \\ &+ (1-d)F(x, \lambda^{(2)})\} < d \sup_{x \in R} F(x, \lambda^{(1)}) + \\ &+ (1-d) \sup_{x \in R} F(x, \lambda^{(2)}) = d\psi(\lambda^{(1)}) + \\ &+ (1-d)\psi(\lambda^{(2)}) \end{aligned}$$

Отже, двоїста задача  $\inf_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda)$  є задачею опуклого програмування для загальної задачі матем. програмування. Оскільки завжди  $v \leq \bar{v}$ , то розв'язок двоїстої задачі дає оцінку зверху глобального максимуму (длн. *Екстремум глобальний*) багатоекстремальної задачі (1).

Проілюструємо на конкретному прикладі складання двоїстої задачі. Нехай початковою є така задача:  $\max_{b - Ax \geq 0, x \geq 0(R)}$   $c \cdot x$ , де

$c = (c_1, \dots, c_n)$ ,  $b$  — постійні вектори, а  $A = \|a_{ij}\|$  — матриця розміру  $m \times n$ . Знайдемо  $\phi$ -цію  $\psi(\lambda)$ , де  $\lambda \geq 0$  вектор  $m$ -вимірності:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \max_{x \geq 0} \{c \cdot x + (\lambda, b - Ax)\} = \\ &= (b, \lambda) + \max_{x \geq 0} (c - A' \lambda, x) = \\ &= \begin{cases} (b, \lambda), & \text{якщо } c - A' \lambda \leq 0; \\ \infty, & \text{в протилежному разі.} \end{cases} \end{aligned}$$

Т. ч., двоїстою задачею до початкової є задача  $\min_{\lambda \geq 0} (b, \lambda)$ . Тут  $A'$  — матриця, трансп.  $c - A' \lambda \leq 0$ ,  $\lambda \geq 0$  понована  $A$ .

В. П. Гуляєво.

**ДВОЇСТИЙ ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД** — модифікація *градієнтного методу* Ерроу—Гурвіца. Д. г. м. розв'язує таку задачу програмування опуклого: знайти вектор  $x$ , що максимізує  $\phi$ -цію  $f(x)$  за умови  $g(x) \geq 0$ . Нехай виконано такі умови: а)  $f(x)$ ,  $g_1(x)$ , ...,  $g_n(x)$  — опуклі  $\phi$ -ції (догори); б) існує вектор  $x^*$  такий, що  $g(x^*) > 0$ ; в)  $f(x)$  — строго опукла  $\phi$ -ція (догори); тоді оптим. розв'язок  $x$  цієї задачі єдиний: г) для будь-якого  $\epsilon > 0$  функція Лагранжа  $\phi(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^n u_i g_i(x)$  має скінченний максимум по  $x$ . Тоді неперервний двоїстий градієнтний процес

$$u_j(t) =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{якщо } u_j(t) = 0, g_j(x(t)) > 0, u_j(0) > 0, \\ 1 - g_j(x(t)), & \text{інакше,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m, \quad g_j(x(t)) \text{ в решті випадків,}$$

де  $x(t) = x(u(t))$ , а  $x(u)$  знаходять з умови  $\phi(x(u), u) = \max_x \phi(x, u)$ , збігається до якоїсь сідлової точки  $(\bar{x}, \bar{u})$   $\phi$ -цілі Лагранжа  $\phi$ .

Реалізуючи цей процес на ЕЦОМ, необхідно перейти до його скінченнорізницевого аналога. Скінченнорізницевий двоїстий градієнтний процес виду  $u(t+1) = \max\{0, u(t) - \rho g(x(t))\}$ ,  $(t = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $u(0) \geq 0$  із заданою швидкістю зміни  $\rho > 0$  є стійким щодо  $u(t)$ . Ця стійкість означає, що для будь-якої початкової точки  $u(0) \geq 0$  і будь-якого числа  $\epsilon > 0$  існує число  $\rho_0 > 0$  тако, що для розв'язку  $u(t)$  процесу при  $\rho \leq \rho_0$  існує ціле число  $t_0$  з властивостями  $V(u(t+1)) < V(u(t))$  для  $0 < t < t_0$ ,  $V(u(t)) < \epsilon$  для  $t > t_0$ , де  $V(u) = \min_{x \in R} (u - u^1, U - \text{мно-}$

жина векторів  $u$  таких, що  $(x, u)$  є сідловою точкою  $\phi$ -цілі Лагранжа  $\phi(x, u)$ . Т. ч. має місце монотонна збіжність вектора  $u(t)$  до  $\bar{u}$  околу точки  $\bar{u}$ . При виконанні умов а) — г) та умови неперервності дохідних  $f_{xx}$  в разі лінійності  $\phi$ -цілі  $g(x)$  можна обрати такий крок  $\rho \leq \rho_0$ , що матиме місце монотонна збіжність вектора  $u(t)$  до якогось  $\bar{u} \in \bar{U}$ , а отже, й вектора  $x(t)$  до оптим. розв'язку задачі  $x$ . Цим самим методом можна розв'язати задачу програмування лінійного.

Оск. практичною наскою означеної методики є труднощі у визначенні заздалегідь кроку  $\rho_0$ . Проте ці труднощі можна подолати, якщо розглянути процес  $u(t+1) = \max\{0, u(t) - \rho(t) \gamma(t) g(x(t))\}$ ,  $(t = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $u(0) \geq 0$ , де  $\sum_{t=0}^{\infty} \rho(t) = \infty$ ,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \rho^2(t) = S < \infty, \quad \gamma(t) |g(x(t))| \leq k < \infty.$$

За цих умов має місце, загалом кажучи, немонотонна збіжність вектора  $u(t)$  до вектора  $\bar{u} \in \bar{U}$ , а тому й вектора  $x(t)$  до  $x$ .

В. П. Гуляєво.

**ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД**, метод послідовного уточнювання оцінок — метод, призначений для розв'язування задачі лінійного програмування, в якому здійснюється спрямований рух по опорних планах двоїстої задачі до знаходження оптимального розв'язку вихідної задачі; формулюється в термінах первісної

задачі. Д. с.-м. в *симплекс-метод* для задачі, двоїстої до першої (див. *Двоїстості теорія* в програмуванні лінійному).

В. О. Гурбін  
ДВОЇСТИХ НАПРЯМІВ МЕТОД — один з оптимізацій методів.

ДВОЇСТІ ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ — такі функції алгебри логіки  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  та  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ . Ф-ція  $f_2$  наз двоїстою до функції  $f_1$ . Тоді очевидно, що й  $f_1$  буде двоїстою ф-цією до ф-ції  $f_2$  і взагалі двоїста ф-ція до двоїстої ф-ції в перенесеному ф-цією. В алгебрі логіки виконується такий принцип двоїстості: якщо

$$\Phi(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p_1}) = f_1(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), \\ f_2(x_{21}, \dots, x_{2p_2}), \dots, f_n(x_{n1}, \dots, x_{np_n}),$$

то

$$\Phi^*(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p_1}) = f^*(\bigvee_1(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), \\ f_2^*(x_{21}, \dots, x_{2p_2}), \dots, f_n^*(x_{n1}, \dots, x_{np_n})),$$

де  $\Phi^*, f^*, f_1^*, \dots, f_n^*$  — ф-ції двоїсті відповідно до  $\Phi, f_1, f_2, \dots, f_n$ . Звідси випливає, що коли  $f$  виражено через  $\&, \bigvee, \sim$ , то, щоб одержати вираз двоїстої до неї ф-ції  $f^*$ , треба скрізь замінити  $\&$  на  $\bigvee$  і  $\bigvee$  на  $\&$ . Якщо у виразі для  $f$  були константи 0 та 1, то треба замінити 0 на 1, а 1 на 0. Напр., двоїстою до ф-ції  $x \bigvee y$  є ф-ція  $\bar{x} \& \bar{y}$ , а двоїстою до ф-ції  $\bar{x}$  є сама  $x$  і т.д.

ДВОЇСТОСТІ ЗАКОН, принцип двоїстості — твердження щодо формул алгебри логіки, яке стверджує, що коли дві формули  $\Phi$  та  $\Psi$  еквівалентні, то й двоїсті їм формули  $\Phi^*$  та  $\Psi^*$  також еквівалентні. Поняття двоїстості стосується формул, у яких з логічних операцій трапляються лише операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення. Ф-лу  $\Phi^*$  наз двоїстою ф-лою  $\Phi$ , якщо її одержують з  $\Phi$ , замінюючи в ній скрізь операції кон'юнкції на операції диз'юнкції, а диз'юнкції — на кон'юнкції.

ДВОЇСТОСТІ ТЕОРІЯ в програмуванні лінійному — теорія, яка вивчає загальні властивості пари тісно пов'язаних між собою двоїстих задач лінійного програмування; використовується для побудови чисельних методів розв'язання задач. Дві задачі програмування лінійного

$$1. \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \max \sum_{i=1}^m a_{ij} x_j < b_i,$$

$$i = 1, \dots, m; \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, n;$$

$$2. \sum_{i=1}^m b_i u_i \geq \min \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq c_j,$$

$$j = 1, \dots, n; \quad u_i \geq 0, i = 1, \dots, m.$$

де всі  $a_{ij}, b_i, c_j$  — задані числа, а всі  $x_j, u_i$  — змінні цих задач, наз двоїстою (спряженою) парою; можна із задач наз двоїстою у відношенні до другої. Властивість двоїстої пари задач виражено в теоремах двоїстості.

Перша теорема. Якщо оптим. план 1-ї (2-ї) задачі існує, то існує оптим. план другої з цих задач, при цьому для довільної пари допустимих планів  $X = (x_1, \dots, x_n)$  та  $U = (u_1, \dots, u_m)$  цих задач виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i u_i,$$

яка переходить у рівність, коли  $X$  та  $U$  є оптим. планами відповідних задач. Якщо 1-а (2-а) задача не має допустимих планів і існують допустимі плани задачі 2-ї (1-ї), то лінійна форма 2-ї (1-ї) задачі набуває як завгодно великих за абсолютною величиною від'ємних (додатних) значень. Якщо існують допустимі плани 1-ї (2-ї) задачі, що набувають як завгодно великих за абсолютною величиною додатних (від'ємних) значень, то 2-а (1-а) задача не має допустимих планів.

Друга теорема. Якщо  $X^*$  — оптим. план 1-ї задачі, а  $U^*$  — оптим. план 2-ї задачі, то компоненти цих планів зв'язані співвідношеннями

$$(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*) u_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad (1)$$

$$(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^*) x_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Навпаки, якщо співвідношення (1) і (2) виконуються для пари опорних планів  $X^*, U^*$ , то ці плани оптимальні. Співвідношення (1) та (2) служать критерієм оптимальності поточного плану в більшості методів розв'язання задачі лінійного програмування. Нехай  $X^*$  — опорний план 1-ї задачі. Підставивши його компоненти у ф-лу (1) і (2), обчислимо вектор  $U^*$ . Якщо  $U^*$  — план 2-ї задачі, з'яклого випливає оптимальність пари  $X^*, U^*$ .

Змінні 2-ї (1-ї) задачі можна розглядати як Лагранжові множники для 1-ї (2-ї) задачі.

Нехай  $L(X, U)$  — функція Лагранжа:

$$L(X, U) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m u_i \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = \\ = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m u_i b_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i a_{ij} x_j.$$

Тоді плани  $X^*$  та  $U^*$  є відповідно оптим. планами 1-ї та 2-ї задачі в тому й лише в тому разі, якщо  $X^*, U^*$  є сідовою точкою функції  $L(X, U)$  при обмеженнях  $X \geq 0, U \geq 0$ . Якщо одну з задач двоїстої пари подано в заг.



вигляді, то пару двоїстих задач запишуть так.

$$3. \sum_{j=1}^n c_j x_j = > \max;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m_1 < m;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_1 \leq n;$$

$$4. \sum_{j=1}^m b_j u_j = > \min;$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} u_j > c_j, \quad i = 1, \dots, n_1 \leq n,$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} u_j = c_j, \quad i = n_1 + 1, \dots, n;$$

$$u_j > 0, \quad j = 1, \dots, m_1 \leq m$$

Всі перелічені вище властивості 1-ї та 2-ї задач зберігаються і для 3-ї та 4-ї задач. Співвідношення (1) та (2) для задач (3-4) та (4-ї) переписуються у вигляді

$$\left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) u_i = 0, \quad (3')$$

$$i = 1, \dots, m_1 < m,$$

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i\right) x_j = 0 \quad (4')$$

$$j = 1, \dots, n_1 \leq n.$$

Теорема двоїстості лежить в основі побудови й обґрунтування осн. чисельних побудов методів лінійного програмування. Вони великою мірою узагальнені на випадок програмування опуклого й на нескінченновимірний випадок. Д. т. в лінійному програмуванні тісно пов'язана з теорією. Розгляд пари двоїстих задач лінійного програмування особливо характерний для економ. досліджень. Зокрема, якщо 1-а задача є задачею максимізації виробництва однорідного продукту при обмеженнях на кількість ресурсів, то оптим. план 2-ї задачі дає оцінку вартості одиниць ресурсів. Ці оцінки відіграють велику роль у теорії ціноутворення.

Див. п. до ст. *Програмування лінійне*  
Н. З. Шар, В. О. Трубин.  
**ДВОПОЛЮСНИК КОНТАКТНИЙ** - схема контактна з одним вхідним і одним вихідним полюсами

**ДВОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА** - крайова задача, в якій обмеження (крайові умови) задано у двох точках.

**ДЕКОДУЮЧИЙ ПРІСТРІЙ** - див. *Дешифратор*.

**ДЕКОМПОЗИЦІЙ МЕТОД**, блоковий метод - метод розв'язування задачі лінійного програмування, що зводить її до роз-

в'язування послідовності задач меншої розмірності. Д. м. розроблено гол. чин. для зменшення кількості звертань до зовн. пам'яті ЦОМ при розв'язуванні задач програмування лінійного з великою кількістю змінних і обмежень. Інша область застосування Д. м. - задачі, в яких частину обмежень і змінних наділено будь-якими специфічними властивостями, які дають змогу застосовувати для розв'язування таких часткових задач методи, що є найефективніші в кожному окремому випадку. При цьому вихідна задача за допомогою Д. м. зводиться до розв'язування послідовності задач меншої розмірності, кожну з яких розв'язують, ураховуючи її специфічні властивості. Вперше Д. м. розробили амер. вчені Дж. Данціг та Ф. Вулф 1960. В їхньому підході просування в послідовності розв'язування задачі здійснюється за опорними планами первонісної задачі, при цьому лінійна форма змінюється монотонно. В Д. м. Данціг та Вулфа розглядається задача лінійного програмування, обмеження якої поділено на два блоки: необхідно знайти максимум ф-ції

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = > \max \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n A_j^0 x_j = B^0, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j^1 x_j = B^1, \quad (3)$$

$$X \geq 0 \quad (4)$$

де  $C = (c_1, \dots, c_n)$  - вектор-рядок,  $B = (B^0, B^1)^T = (b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_{m+m_1})^T = (m + m_1)$ -вимірний вектор обмеження задачі,  $A_j = (A_j^0, A_j^1)^T = (a_{1j}, \dots, a_{mj}, a_{m+1j}, \dots, a_{m+m_1j})^T = (m + m_1)$ -вимірний  $j$ -й вектор умов,  $j = 1, \dots, n$ ,  $T$  - знак транспонування,  $X = (x_1, \dots, x_n)$  - вектор змінних. Нехай множину планів  $X$  системи (3-4) обмежено й  $X^1, \dots, X^N$  - всі її опорні плани. В разі необмеженості множини (3-4) принципових труднощів не виникає. Довільний план  $X$  із (3-4) можна представити лінійною комбінацією опорних планів

$$X = \sum_{v=1}^N \lambda_v X^v; \quad (5)$$

$$\sum_{v=1}^N \lambda_v = 1; \quad (6)$$

$$\lambda_v \geq 0; \quad v = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Підставляючи рівня (5) у рівня (1-2), задачу (1-4) зводять до вигляду:

$$\sum_{v=1}^N c_v \lambda_v = > \max \quad (8)$$

за обмежень (6—7) і

$$\sum_{v=1}^N P^v \lambda_v = B^v, \quad (9)$$

де

$$P_v = (C, X_v), \quad P_v = (A_1^0, \dots, A_n^0) X_v, \\ v = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Задача (6—9) містить  $(m+1)$  обмеження замість  $m+m_1$  у першій задачі, зате кількість змінних  $N$  набагато більша за  $m$ . Проте для розв'язування задачі (6—9) Д. м. не потрібно знати всі вектори  $P^v$ . На кожному кроці досить мати тільки  $m+1$  вектори  $P^v$ , які входять у поточний базис задачі. Перевірка базису на оптимальність і визначення вектора, що має включатися в базис, здійснюється розв'язуванням допоміжної задачі лінійного програмування з умовами (3—4). Якщо матриця обмежень (3) має блоково-діагональну форму

$$A' = (A_1', \dots, A_n') = \begin{bmatrix} A^{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{12} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A^{1r} \end{bmatrix},$$

то допоміжна задача розпадається на  $r$  задач меншого обсягу, й це спрощує процедуру і скорочує час розв'язування задачі. Таку особливість мають, напр., матриці транспортної задачі та її узагальнення, розподільної задачі тощо.

Літ. див. до ст. Програмований лінійне.

В. О. Трубин.

**ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЯ**, **ф у н к ц і я** Д і р а к а,  $\delta(t)$  — функція, за допомогою якої описують імпульс нескінченно малої тривалості (миттєвий імпульс) і нескінченно великої амплітуди. Вважається, що цей імпульс існує лише при значенні аргументу, який дорівнює нулеві. Інтеграл ф-ції в будь-яких скінченних межах, що включають початок координат, тобто площа імпульсу, обмеженого Д.-ф.,

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ . Як виходить із самого визначення Д.-ф.,

$$\int_{t-\tau}^{t+\tau} \delta(t-\tau) f(t) dt = f(\tau), \quad \tau > 0, \\ t-\tau < t$$

де  $\tau$  — величина зсуву в часі,  $\tau$  — інтервал часу, якщо  $f(t)$  — неперервна в околі  $\tau$ . В окре-

мому випадку  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$ . Функ-

ції, що мають таку властивість, називають *узагальненими функціями*. Існує кілька ф-цій,

напр.  $\frac{1}{k\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{k^2}}$  або  $\frac{k}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{t}{k}}{t^2}$ , границі значення яких при  $k \rightarrow 0$  дають Д.-ф.

З Д.-ф. можна проводити ті самі операції, що й із звичайними ф-ціями. Інтеграл від

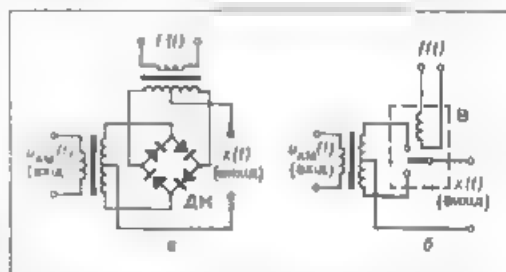
Д.-ф. за часом нах. одичиною ф-цією або одичиною стрибкоподібною ф-цією.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t -$

$-\tau) dt = 1$  ( $t-\tau$ ). Д.-ф. широко використовують у різних розділах *автоматичного керування теорії*. Імпульсна перехідна ф-ція, дискретизація неперервної ф-ції в часі, *автоморелакційна функція* сигналу типу білого шуму, спектральна густина гармонічного коливання та ін. — пов'язані з використанням поняття Д. ф.

Літ. Харкевич А. А. Спектральний аналіз. М., 1962 (бібліогр. с. 235—236).

Б. Ю. Мандруський, Соколов.

**ДЕМОДУЛЯТОР**, **детектор** — пристрій, що здійснює демодуляцію (детектування), тобто операцію виділення корисного (модульованого) сигналу з модульованих кодів. При гармонічній несучій залежно від виду *модуляції* розрізняють амплітудні, частотні й фазові. Аналогічно при імпульсній несучій (див. *Модуляція імпульсна*) розрізняють амплітудно-широтну, частотно-фазово-імпульсну Д. Як і в *модуляторі*, в Д. обов'язково є елементи нелінійної чи лінійної, але з параметрами, що змінюються в часі. На мал. зображено принципові схеми двох найпростіших амплітудних Д. — діодного кільцевого (а) і вібраційного (б); ці схеми Д. (синхронних детекторів) часто використовуються в *радіоприймачах екстремальних*, вимірювальних приладах та ін. пристроях. Тут  $u_{\text{ДМ}}(t)$  — амплітудно-модульовані коливання (вхідний сигнал Д.);  $f(t)$  — опорний гармонічний сигнал, синхронний з несучими коливаннями;  $x(t)$  — корисний сигнал, виділений за допомогою Д. (вихідний сигнал Д.). Діодний кільцевий Д. містить істотно нелінійну ланку — діодну кільцеву схему (ДК), а вібраційний — лінійну ланку з параметрами, що періодично змінюються в часі, — вібратор В. Обидві схеми оборотні й допускають включення їх як модуляторів. Д. широко застосовують у різних галузях техніки, пов'язаних з



Принципові схеми амплітудних демодуляторів: а — діодного кільцевого, б — вібраційного.

передзванням або перетворенням сигналів (повідомлень), у т. ч. в техніці зв'язку та автомат. регулювання, у вимірювальній техніці, у цифровій та аналого-цифровій обчисл. техніці тощо.

Ю. М. Чеховий

**ДЕМПФУВАННЯ** — гасіння коливань у динамічній системі внаслідок розсіювання (дисипації) їхньої енергії. У мех. коливальних системах потенціальна енергія акумулюється в пружних елементах (пружини), а кінетична — в масах інерційних елементів, в електр. системах — у конденсаторах і котушках індуктивності відповідно. В мех. системах енергія розсіюється внаслідок в'язкого чи сухого тертя, а в електр. — внаслідок наявності в коливальному контурі активного (омічного) опору. Диференціальне рівняння найпростішої коливної системи записують у заг. вигляді:  $t^2x + 2\delta tx + x = 0$ , де  $\delta$  — відносний коэф. гасіння,  $t$  — величина, обернена до вільної частоти власних коливань системи,  $x$  — відхилення від положення рівноваги.

Д. коливань кількісно характеризується величиною  $\delta$ . Коли  $\delta = 0$ , в системі відбуваються незгасаючі коливання (консервативна система). Якщо  $\delta < 1$ , коливання мають згасаючий характер (дисипативна система). Критичним значенням є  $\delta = 1$ , що відповідає зрівнолікованим, тобто режимові переходу від коливань рухів до аперіодичних. Якщо ж  $\delta > 1$ , процеси в системі мають аперіодич. характер. Характер рухів у системі, яку описують диф. рівняннями 2-го порядку, залежно від величини  $\delta$  якісно характеризується таблицею

| Значення $\delta$ | Характер рухів                              |
|-------------------|---|
| $\delta < -1$     | Аперіодичне зростання відхилення $x$        |
| $-1 < \delta < 0$ | Коливання зі зростаючою амплітудою          |
| $\delta = 0$      | Незгасаючі коливання з постійною амплітудою |
| $0 < \delta < 1$  | Згасаючі коливання                          |
| $\delta > 1$      | Аперіодичний спад відхилення $x$            |

Зусилля, що його розвиває демпфер (гашник), напр., у мех. системах, діє в напрямі, протилежному напрямові вектора миттєвої швидкості маси, що коливається, а величиною, пропорційною цій швидкості (перший похідний зміщення) з матом. точки зору це призводить до збільшення коефіцієнта при першій похідній у наведеному рівнянні, тобто до збільшення  $\delta$ , а в фазичній — до збільшення розсіювання енергії коливань. Для Д. коливань у замкнених системах автомат регулювання застосовують введення першої похідної помилки до регулювання закону.

**«ДЕРЕВО»** в теорії графів — зв'язаний граф без циклів (див. *Графія теорія*). Найважливіші характеристичні властивості «Д.» виражено такими шістьма рівносильними одне одному висловлюваннями:  $x(L) = 1$   $\lambda(L) = 0$  (означення «Д.»);  $\lambda(L) = 0$   $m(L) = n(L) - 1$ ;  $x(L) = 1$   $m(L) = n(L) - 1$ ; для будь-якої пари вершин  $x, y$  в  $L$  існує один (і тільки один) *ланцюг*, що з'єднує  $x$  з  $y$ ;  $x(L) = 1$ , але якщо з  $L$  видалити будь-яке ребро, то для одержаного графа  $L^-$   $x(L^-) = 2$ ;  $\lambda(L) = 0$ , але, якщо до

$L$  додати будь-яке ребро (не додаючи вершин), то з одержаного графа  $L^+$   $\lambda(L^+) = 1$ , де  $L$  — довільний граф,  $n(L)$  — кількість його вершин,  $m(L)$  — кількість ребер,  $x(L)$  — кількість компонент,  $\lambda(L)$  — цикломатичне число.

Довільний граф без циклів часто наз. лісом (бо кожна його компонента — «Д.»). Ордерево, що росте з  $x_0$ , це «Д.», в якому виділено одну вершину  $x_0$  («корінь»), а ребра орієнтовано так, що всі ланцюги, які починаються в  $x_0$ , є шляхами (тобто їхні дуги орієнтовано в напрямі обходу).

О. О. Зимова.

**«ДЕРЕВО» КОНТАКТНЕ** в л. реле — схема контактного з одним вхідним полюсом,  $2^n$  вихідними полюсами та  $2^{n+1} - 2$  перемикальними контактами. Призначене для реалізації всіх  $n$ -членних кон'юнкцій в булевих змінних. Кожна кон'юнкція реалізується між входом і одним виходом. По замкненому шляху, що встановлюється між входом і одним з виходів, можна з'ясувати, яку з  $2^n$  комбінацій сигналів подано на реле схеми. «Д.»  $n$  з л. реле складається з л. ярусів (мал.). В  $i$ -му ярусі ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), починаючи нумерацію ярусів від входу, міститься  $2^i$  контактів. «Д.»  $n$  наз. стандартним, якщо кожне реле керує контактами одного (і тільки одного) ярусу. «Д.»  $n$  має таку властивість роздільності: будь-який шлях, що з'єднує два вихідні полюси, містить замикальний і розмикальний контакти того самого реле і тому має нульову провідність. Якщо з «Д.»  $n$  об'єднати деякі множини виходів, то одержаний багатополосник реалізує для кон'юнкції відповідних кон'юнкцій. «Д.»  $n$  використовують, синтезуючи різні схеми *релейно-контактних*; його можна

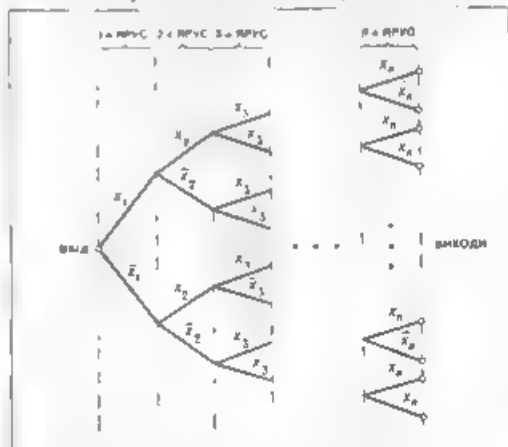


Схема контактного «дерева», складеного з л. реле.

використовувати і як дешифратор. Див. також *Релейно-контактних схем теорія*. Див. Коршунов А. Д. Оцінки оцінок складності контактних схем, реалізуючих логічно ортогональні функції алгебри логіки. В кн.: Дискретний аналіз, в. 2. Новосибірськ, 1964. Мур З. Ф. Минимальные полностью декодирующие контактные схемы. В кн.: Кибернетический сборник, № 6 М., 1963.

О. Д. Коршунов.

ДЕРЖАВНИЙ ФОНД АЛГОРИТМІВ І ПРОГРАМ (ДФАП) — частина Генерального довідково-інформаційного фонду СРСР. Почали його створювати в Рад. Союзі 1966 для розв'язування науково-тех. і економ. задач. ДФАП складається із матеріалів з матем. забезпечення ЕОМ ОЦ АН СРСР, фондів держ. публічної науково-тех. бібліотеки СРСР (ДПНТБ СРСР) і Всесоюзного науково-тех. інформаційного центру (ВІНТІЦентр) Держ. Комітету Ради Міністрів СРСР по науці й техніці, галузевих, відомчих фондів провідних орг-цій та фондів орг-цій і підприємств, які використовують ЕОМ. В УРСР, БРСР та в ряді ін. союзних республік створено респ. фонди алгоритмів і програм, які є складовою частиною ДФАП.

До ДФАП включають лише повсім закінчені й перевірені за практиці різні елементи матем. забезпечення, що їх, крім того, оформлено за відповідними методиками. Сюди включають такі матеріали: системи матем. забезпечення окремих процесів, ЕОМ та їхніх комплексів (напр., автоматизовані системи процесу обробки даних на ЕОМ методами математичної статистики та імовірностей теорії); алгоритми й програми для розв'язування физ., інженерно-тех. і економ.-економ. завдань, а також інструкції щодо застосування й використання їх; програми, що входять до складу систем матем. забезпечення конкретних типів ЕОМ; методичні та інструктивні матеріали в програмування, алгоритмічних мов та обчислювальних робіт методами організації; транслятори в різних мовах програмування разом з інструкціями щодо застосування й використання їх; системи орг-ції бібліотек стандартних підпрограм; програмистські для перевірки правильності роботи окремих пристроїв ЕОМ і діагностичні пошкоджень у них; інформаційні та довідково-бібліографічні матеріали з алгоритмів і програм, які входять у системи матем. забезпечення ЕОМ.

Галузеві й відомчі фонди алгоритмів і програм створюють у провідних орг-ціях, що їх визначають м-ва і відомства. Вони складаються з матеріалів, розроблених і використовуваних в орг-ціях (підприємствах) м-ва (відомства).

Осн. завдання мережі ДФАП: розробка методів апробації та оформлення систем матем. забезпечення ЕОМ; поліпшення орг-ції обчисл. робіт, збільшення ефективності використання ЕОМ у країні й зменшення трудомісткості підготовки алгоритмів і стандартних програм для розв'язування задач різних класів на ЕОМ; проведення консультативної роботи щодо розробки і впровадження елементів матем. забезпечення ЕОМ; збирання, класифікація, апробація, зберігання та розповсюдження розроблених алгоритмів і стандартних програм зацікавленими орг-ціями у країні; видавання алгоритмів, програм, систем матем. забезпечення та інструктивно-методичних матеріалів, що є в б-ці фонду; організація обміну науково-тех. інформацією з матем. забезпечення ЕОМ між ДФАП і орг-ціями, що вико-

ристовують у своїй діяльності обчисл. техніку.

Щоб виконувати завдання, ДФАП підтримує контакти з багатьма в.-д., проектними і навч. орг-ціями, що використовують і розробляють обчисл. техніку. Провідні орг-ції здійснюють методичне керівництво роботами щодо створення та функціонування фондів орг-цій галузі (відомства). Вони відповідають за подання до ДПНТБ СРСР опублікованих у друкованих виданнях орг-ціями міністерства (відомства) відповідних матеріалів з матем. забезпечення, за підготовку, апробацію, повноту й наукову вірогідність, оформлення та надходження неопублікованих матеріалів галузі (відомства) до ВІНТІЦентру; дають рекомендації щодо розробки, дослідження та впровадження алгоритмів і програм, необхідних для галузі, забезпечують організацію перекладу вітчизн. і зарубіжних друкованих видань із спеціальності, складають інформаційні картки на алгоритми, програми та ін. матеріали з матем. забезпечення ЕОМ, опубліковані в цих виданнях. Філіялі ДФАП, як правило, оснащено тех. засобами, щоб вони могли забезпечити видання своїх матеріалів і задовольнити запити споживачів.

І. Н. Серетський.

**ДЕСКРИПТОР** — одиниця інформаційно-пошукової мови, що відповідає певному поняттю. Д. використовують у складі пошукових образів для описування частини основного смислового змісту документа або запиту. Д. ставиться в однозначну відповідність із групою ключових слів природної мови, відібраних з тексту певної галузі знань для побудови дескрипторної мови та еквівалентних за змістом у межах сфери дії певної інформаційно-пошукової системи. Таку групу слів наз. класом умовної еквівалентності. Умови еквівалентності вибирають залежно від практичних вимог до даної інформаційно-пошукової системи. Д. у мові інформаційно-пошуковій є перекладом будь-якого ключового слова з відповідного класу умовної еквівалентності, тому в дескрипторному словнику як ім'я Д. можна взяти будь-яке (краще найчастіше вживане або коротке) ключове слово або словосполучення з цього класу чи цифровий код. Багатозначному слову природної мови відповідає кілька Д., а кільком синонімічним словам і виразам — один Д. Омонімічність ключових слів у дескрипторних словниках усувають за допомогою позначок-відсилань до відповідних Д. Між Д. відповідно до об'єктів існуючих відношень між поняттями встановлюються відношення парадигматичні (зокрема, родо-видові й асоціативні). Це зазначають у дескрипторних словниках (інформаційно-пошукових тезаурусах) і використовують у дескрипторних мовах, щоб збільшити семантичні можливості інформаційно-пошукової мови й зменшити втрати в процесі інформаційного пошуку. Термін «Д.» запропонував і вперше використав 1948—50 амер. математик Кельвін Н. Мюерс.

Н. О. Кузнецов.

**ДЕТЕРМІНОВАНІ СИСТЕМИ** — системи, процес в яких пов'язаний між собою так, що можна простежити ланцюг причин і наслідків. Детермінізм тісно пов'язаний із ступенем організації системи. До Д. с. належать, напр., системи автомат. керування, що складаються з елементів, у яких кожному значенню вхідних даних відповідають цілком певні значення вихідних змінних, швидкості й прискорення їхньої зміни. Такі елементи описують у статичному режимі азгербричними, а в динамічних режимах — диференціальними чи інтегральними рівняннями. Протилежними до Д. с. є статистичні (ймовірнісні) системи, в яких визначеного співвідношення між входами і виходами немає, а можна встановити лише деякі ймовірнісні співвідношення між ними. Проте багато «складних» систем, що складаються з великої кількості детермінованих підсистем з випадковими зв'язками між ними, належать до класу йндетермінованих.

О. І. Іоанніс

**ДЕШИФРАТОР**, вибіркова схема — логічний пристрій, який перетворює (розшифровує) код числа, що надійшов на його входи, у сигнал на одному з його виходів. Якщо число подає у вигляді  $n$  двійкових розрядів, то в Д. має бути  $m = 2^n$  виходів. Д. використовують у цифрових обчислювальних машинах (ЦОМ) та в пристроях для видавання сигналів у різні коди керування залежно від комбінацій вхідних сигналів (напр., для перетворення коду операції на керувачий сигнал). За допомогою Д. провадиться розшифровування адрес комірок запам'ятовувальних пристроїв, вхідних та вихідних каналів пристроїв зв'язку з об'єктами цифрових керуючих машин, каналів зв'язку в автоматизованих системах передавання інформації тощо.

Д. прийнято характеризувати економічністю, яка визначається методом побудови його схеми й типами складових елементів, часом, що витрачається на розшифровування коду числа, та надійністю роботи. Для побудови Д. використовують напівпровідникові діоди (див. *Діоди логічні елементи*), тріоди, феритові осердя з прямокутним петлею гістерезису, а також логічні елементи різних систем (феритно-трансistorні, діодно-трансформаторні, потенціальні та ін.). Залежно від типу використаних елементів, розрізняють Д. потенціальні (статичні) та імпульсні (динамічні).

Д. будь-якої складності можна побудувати з логічних елементів трьох основних типів — «І», «АБО» і «НЕ». При побудові схем Д. слід прагнути до мінімізації кількості логічних елементів і підключачів, а також до забезпечення потрібної швидкодії електронного блока даного функціонального призначення. За принципом дії Д. можуть бути паралельними, послідовними або паралельно-послідовними. Така класифікація враховує спосіб подавання на входи Д. кодів чисел. Д., які розшифровують паралельний код, будуються за «прямокутною», «шпиральною» або «де-

реповодібною» схемою. Зазначені типи схем відрізняються кількістю використовуваних елементів і навантаженням на різних входах. Два останні різновиди схем є дво- або багатоступінчастими, вони економічніші, й їх доцільно використовувати при великій кількості вхідних змінних. Послідовні Д. застосовують здебільшого при обмеженій кількості комбінацій вхідних змінних, бо при великій кількості змінних їхні схеми дуже складні й громіздкі. Паралельно-послідовні Д. будують тоді, коли одна частина вхідних змінних

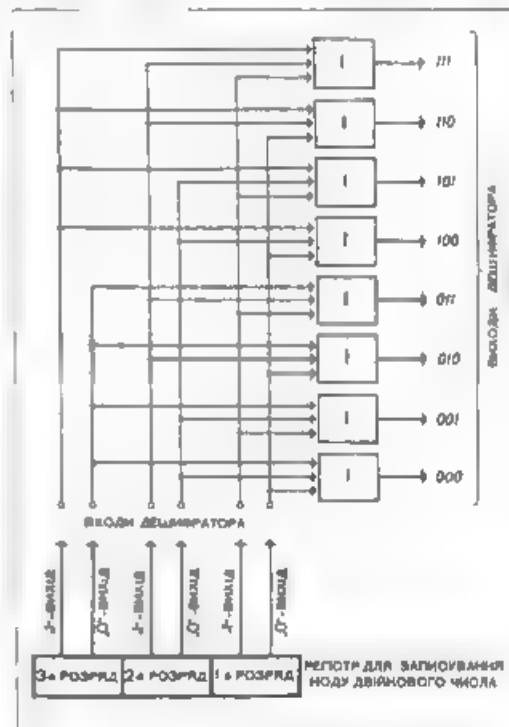


Схема дешифратора для розшифрування кодів трирозрядних двійкових чисел.

запам'ятовується на тригерах, а друга надходить безпосередньо на входи схем збіжностей (елемент «І» на малюнку). Див. також *Блоки ЦОМ машин*.

Лит.: Дроздов Б. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации. М., 1964 [бібліогр. с. 539—541]. Авионов Б. В., Четвериков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 [бібліогр. с. 480]. В. М. Билин.

**ДЕШИФРУВАННЯ ТЕКСТІВ** — визначення невідомої системи письма й змісту представлених цією мовою текстів. Розрізняють Д. т., записаних відомою мовою, коли тексти спеціально зашифровано, й дешифрування історичних писемностей невідомими мовами. У першому випадку пошук ключа до коду ґрунтується на порівнянні статистики знаків у тексті й у відомій мові; у другому — використовують принципово інші методи, які

спираються на загально-лінгвістичні принципи й порівняння з гаданими спорідненими мовами.

Д. т. історичних писемностей — це відновлення розуміння забутих писемностей: мови. Воно полягає у визначенні спочатку системи письма, фонетики й граматичної структури, а потім змісту історичних текстів. При цьому виникають ситуації, коли письмо не відоме, але відомий паливініший стан мови дешифрованого тексту (давньоперський клинопис, давньогрицьке ієрогліфічне письмо, майяєське ієрогліфічне письмо). В інших випадках тексти відомого письма складені невідомою мовою (етруські тексти, хеттські клинописні тексти, клинописні написи Урарту). Відомі Д. т. 19 ст. ґрунтуються на використанні білінгви — двоинового тексту. Найвідоміші Д. т. 20 ст.: хеттський клинопис (Б. Грозний, 1915), крето-мікенське лінійне складове письмо класу В (М. Вентріс, Дж. Чедвік, 1952) ієрогліфічне письмо майя (Ю. В. Кнорозов, 1955 здійснено без білінгви). В останніх двох випадках для аналізу невідомої писемності було розроблено й застосовано статистико-позиційні методи, які дають змогу розділити службові й киренські морфемні за їхньою взаємною послідовністю й одержати істотну інформацію про граматичний лад мови та про можливі мови-аналоги, які можуть допомогти визначити зміст текстів. Статистико-позиційний метод, як основу машинного дешифрування, систематично викладено в монографії Ю. В. Кнорозова *Здійснено машинний аналіз і хитанської писемності та протоіндійських написів* (М.-А. Прост). Для першої одержано важливі граматичні характеристики і встановлено аналогію з ура-ло-алтайськими мовами. Для другої — машина обробка текстів допомогла діягністи встановити аналогію з дравідійськими мовами. Д. т. Кнорозов К. В. Письменность майя. М.-Л., 1967 (бібл. гр. с. 614, 617) Прост Ю. А. Значение метода формального исследования исторических письменностей. Приближенное представление информации, 1967, т. 3, в. 4, Прост М. А. О точных методах исследования конструкций текста. «Кибернетика», 1968, № 1 Шеврошвили В. В. Зауковие дея в языках мира. М. 1969

**ДЖЕРЕЛО ОПОРНОЇ НАПРУГИ** — джерело фіксованої напруги, яка використовується в аналогових обчислювальних пристроях і машинах неперервної дії для одержування за допомогою реалізованих подільників якоїсь постійної напруги в певних блоках, у блоках множення та при моделюванні постійної величини. Крім того, як еталонна напруга Д. о. н. застосовується при точному вимірюванні потенціалів в окремих точках схеми матем. моделювання, в схемах аналого-цифрових перетворювачів і цифро-аналогових перетворювачів, у схемах стабілізаторів напруги та ін. У схемах обчисл. техніки неперервної дії напруга Д. о. н. зчитується дорівнює за величиною найбільш допустимій напрузі на виході підсилювача операційного (для лампових підсилювачів  $\pm 100$  в). Для одержання прецизійної еталонної напруги як Д. о. н. вико-

ристовують нормальні елементи, подоліком яких є зовсім незначний струм навантаження (1—10 мка). В схемах електронних стабілізаторів напруги за Д. о. н. правлять газонаповнені стабілітрони або кремнієві опорні діоди. Кремнієві опорні діоди за багатьма показниками перевершують газові стабілітрони (ост. джерело нестабільності напруги опорних діодів — коливання т-ри діоду). Застосуванням термокомпенсації температурний дрейф опорної напруги можна звести до  $10^{-4}$  в/°С.

Ю. П. Космач, А. І. Тимашенко

**ДЖЕРЕЛО ПОВІДОМЛЕНЬ** — матеріальний об'єкт, основною особливістю якого є те, що він створює сукупність відомостей про свій стан. Ця сукупність відомостей, що створюється Д. п. і підлягає передаванню, наз. повідомленням. Д. п. класифікують за властивостями випадкових процесів, які описують повідомлення, за характером зміни повідомлень і характером роботи.

Випадковий процес, що описує повідомлення, є функцією часу  $t \in T$ , яка набуває випадкових значень  $\xi_t \in N$ , де  $N$  — множина можливих значень повідомлень у кожний фіксований момент часу. Сукупність повідомлень (що їх виробляє Д. п.) з заданими статистичними властивостями наз. ансамблем повідомлень.

Залежно від властивостей спільних розподілів випадкових величин, які становлять процес, Д. п. поділяють на Д. п. з незалежними компонентами (компоненти повідомлення  $\xi_k$  в них є незалежними випадковими величинами), на гаусівські, марковські та стационарні Д. п. За характером множини  $N$  і за зміною повідомлень у часі  $T$  розрізняють Д. п. дискретні й неперервні. Д. п. наз. дискретними за множиною у тому разі, якщо  $N$  — скінченна або лічбова множина (повідомлення зі скінченним або лічбовим числом значень). Таким Д. п. є, напр., ЕЦОМ, яка виробляє послідовність двійкових символів, або пристрій, який передає скінченне число рівнів вимірного параметра якого-небудь фіз. процесу. Д. п. наз. неперервними за множиною тоді, коли  $N$  — неперервна множина. Неперервним за множиною Д. п. є, напр., пристрій, який передає неперервну множину значень температури якогось об'єкта.

Якщо ділянка визначення повідомлень  $T$  є монотонно зростаючою послідовністю моментів часу — моментів виникнення компонент повідомлень  $\{t_k\}$  ( $t_k < t_{k+1}$ ), то Д. п. наз. джерелом з дискретним часом. Отже, Д. п. з дискретним часом характеризується повідомленнями, які змінюються в певні наперед задані моменти часу. Прикладом Д. п. з дискретним часом є ЦОМ, що виробляє послідовність двійкових символів. Якщо  $T$  — скінченний чи нескінченний інтервал часу, то має місце Д. п. з неперервним часом. Отже, джерела з неперервним часом характеризуються повідомленнями, які неперервно змінюються в часі. Д. п. з неперервним часом, є напр., радіо-

й теленередавачі. За характером роботи Д. п. бувають з фіксованою і змінною швидкістю формування повідомлень. Д. п. з фіксованою швидкістю наз. Д. п. без пам'яті, а Д. п. з змінною швидкістю — Д. п. з пам'яттю. В джерелах без пам'яті повідомлення видаються в моменти часу, що не залежать від роботи наступних пристроїв. Такими Д. п. є, наприклад, пристрої магнітного записування, передатвальні телевізійні трубки. Д. п. з пам'яттю зберігають повідомлення в записаному вигляді й видають їх за вимогою інших пристроїв. До таких Д. п. відносять різні запам'ятовувальні пристрої, які видають повідомлення за зап.

Літ. Фінні Д. М. Теорія передачі дискретних повідомлень. М., 1970 (Бібліот. «Тех. Тіст»). Фа-но. М. Передача інформації. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965.

Р. Л. Добрушин, О. Я. Митин, В. В. Прудко.

**ДИЗ'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА** (ДНФ) — форма висловлювання, яка має вигляд диз'юнкції кон'юнкцій, при цьому кожний член кон'юнкції являє собою елементарне висловлювання або заперечення його. ДНФ двоїста щодо кон'юнктивної нормальної форми. Ту чи іншу форму алгебри логіки зводять до ДНФ на основі перетворень, визначуваних рівносильностями алгебри логіки. За допомогою ДНФ можна встановити, чи завжди хибна та або інша ф-ла. Якщо кожний член диз'юнкції завжди хибний, то й уся диз'юнкція хибна. А щоб з'ясувати, чи кожний член диз'юнкції завжди хибний чи ні, досить з'ясувати, чи трапляється в кожній кон'юнкції елементарне висловлювання і його заперечення. Коли так, то кон'юнкція завжди хибна.

**ДИЗ'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА МІНІМАЛЬНА** — диз'юнктивна нормальна форма тупикова, яка має найменшу складність. Задачу про пошук Д. н. ф. м. наз. задачею мінімізації диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ). Ця задача завжди має тривіальний розв'язок, який полягає в побудові всіх тупикових ДНФ, у порівнюванні їхньої складності й виборі тупикової ДНФ, яка має найменшу складність. Однак на практиці цей метод не застосовують. Пошук практичних методів мінімізації привів до створення складного матем. апарату, значення якого виходить за межі мінімізації ДНФ.

Вивчені *логічні властивості диз'юнктивних нормальних форм* дають уявлення про труднощі побудови звичайних алгоритмів мінімізації ДНФ (див. *Алгоритм локальний*). Процес мінімізації складається з кількох послідовних етапів. На першому етапі за допомогою ДНФ булевої функції або за її таблицею істинності будують скорочену ДНФ  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_n$ .

Застосовувавши локальні алгоритми, з  $\mathfrak{A}_1$  можна виключити деякі елементарні кон'юнкції і таким чином перейти до якоїсь простішої ДНФ  $\mathfrak{A}_2$ . За  $\mathfrak{A}_2$  можна побудувати Д. н. ф. м. шляхом перебору певної множини тупикових ДНФ. Цей перебір можна спрямо-

увати так, щоб зменшувати загальне число шуканих тупикових ДНФ. Проте існують булеві ф-ції, для яких скорочену ДНФ не можна спростити ніяким локальним алгоритмом з досить загального класу. Більше того, жоден локальний алгоритм для цієї ф-ції не може дати корисної інформації про Д. н. ф. м. Це означає, що Д. н. ф. м. для цих булевих ф-цій можна знайти лише шляхом перебору в певній множині тупикових ДНФ. Щоб зменшити перебір під час пошуку Д. н. ф. м., у цьому разі можна використати методику послідовного аналізу варіантів.

Літ. Буравлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. Проблемы кибернетики, 1962, в. 4, кн. 4. Ф. И. Алгоритм упрощения д. н. ф. булевых функций. Кибернетика, 1968, в. 6, кн. 6. Ф. И. Минимизация д. н. ф. функций алгебры логики. Методы исследования операций. Теория автоматов и методы формализации их синтеза. Вычислительные машины и системы, 1964, в. 3, кн. 1. Гриня.

**ДИЗ'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА ТУПИКОВА.** Нехай  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_n$  — скорочена диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) булевої функції  $f$ . Елементарна кон'юнкція  $\mathfrak{A}_i$  вибирається диз'юнкцією  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_{i-1}$ , якщо  $(\mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}_1) = 1$ .

Якщо з  $\mathfrak{A}_1$  послідовно видлучати по одній елементарній кон'юнкції  $\mathfrak{A}_i$ , що вибирається таким, які залишилися, доти, доки це можливо, то в результаті одержимо Д. н. ф. т. з  $\mathfrak{A}_1$  можна побудувати кілька Д. н. ф. т. Ту з Д. н. ф. т., яка містить мінімальне число елементарних кон'юнкцій, наз. найкоротшою Д. н. ф. т., що має найменшу складність, наз. мінімальною. Якщо жодну Д. н. ф. т. можна знайти порівняно простим методом, вказаним в означенні Д. н. ф. т., то диз'юнктивну нормальну форму мінімальну можна знайти лише в результаті порівняння Д. н. ф. т.

Серед методів пошуку Д. н. ф. т. можна виділити два осн. напрямки. Перший — методи пошуку індивідуальних Д. н. ф. т., які мають певні властивості (напр., близьких у тому чи іншому розумінні до мінімальних, достатньо простих тощо). Другий — цілеспрямоване спрощення скороченої ДНФ з тим, щоб у результаті спрощення не втратити Д. н. ф. т., що має цікаві для нас властивості. Першим методом такого роду був *Кейна метод мінімізації*, за яким у скороченій ДНФ відмічають елементарні кон'юнкції, що входять до всіх Д. н. ф. т. Множину їх позначають  $\mathfrak{A}_{\text{Я}}$  і наз. ядром.

З  $\mathfrak{A}_{\text{Я}}$  виключають елементарні кон'юнкції, які вбирає ядро. В результаті скорочення ДНФ перетворюється на простішу, але з тими ж властивостями, що й скорочена ДНФ. Доведено необхідну й достатню умову не входження елементарної кон'юнкції до множини  $\mathfrak{A}_{\text{Я}}$ , яка містить усі елементарні кон'юнкції, що входять хоча б до однієї Д. н. ф. т., і запропоновано алгоритм локальний одержання дуже скороченої ДНФ, простішої за скорочену, але такої, яка містить інформацію

про всі Д. в. ф. т. Досліджено обчисленість предикатів, які дають інформацію про деякі інші властивості Д. в. ф. т. (Див також Метричні властивості диз'юнкційних нормальних форм).

Лит. Яблоцкий С. В. Функциональные построения в  $n$ -значной логике. Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1959, т. 51, Ж у р а в л е н Ю. И. Теретико-математические методы в алгебре логики. Проблемы кибернетики, 1982, в. 8, Ж у р а в л е в Ю. И. Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. Дискретный анализ, 1984, в. 3.

Я. І. Брока.

**ДИЗ'ЮНКЦІЯ** — спільна назва для операцій *диз'юнкція слабка* та *диз'юнкція строга*. Часто термін «Д.» аживають замість терміна «диз'юнкція слабка».

**ДИЗ'ЮНКЦІЯ СЛАБКА** — булева функція двох аргументів. Позначають її знаком  $\vee$  і задають такою таблицею істинності

| x | y | $x \vee y$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0          |
| 0 | 1 | 1          |
| 1 | 0 | 1          |
| 1 | 1 | 1          |

Д. с. відповідає в розмовній мові розділовому сполучникові *або*. Вона комутативна, асоціативна, дистрибутивна щодо кон'юнкції, Д. с., як і кон'юнкція та заперечення, використовують у нормальних формах представлення булевих ф-цій. Д. с. й заперечення становлять функціонально повну систему булевих ф-цій. **ДИЗ'ЮНКЦІЯ СТРОГА**, *ексклюзивна* логічність, додавання за модулем 2 — булева функція двох аргументів.

Позначають її знаком  $\vee\vee$ ,  $\dot{\vee}$  або  $\oplus$  і задають такою таблицею істинності:

| x | y | $x \vee\vee y$ |
|---|---|----------------|
| 0 | 0 | 0              |
| 0 | 1 | 1              |
| 1 | 0 | 1              |
| 1 | 1 | 0              |

Д. с. відповідає в розмовній мові розділовому сполучникові *або*. Вона комутативна, асоціативна й дистрибутивна щодо кон'юнкції. Д. с. разом з кон'юнкцією та ф-цією-константою є операціями Жегалкіна алгебри й становлять функціонально повну систему булевих ф-цій.

**ДИНАМІЧНИЙ РОЗПОДІЛ ПАМ'ЯТІ** — див. *Пам'ять розподіл*.

**ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТЕОРІЯ ЧУТЛИВОСТІ** — розділ теорії автоматичного керування, що вивчає вплив варіацій параметрів на динамічні властивості систем. Під варіацією параметрів розуміють будь-які відхилення їх від значень, прийнятих за перахисні. Ці відхилення можуть бути відомі цілком і описані

деякими ф-ціями часу чи відомі лише з точністю до належності до певного класу (напр., обмежені за модулем чи іншою нормою, або ж відомі деякі статистичні характеристики їх). Варіації параметрів можуть бути скінченними або ж нескінченно малими, причому порядок дифер. рівняння, яке їх описує, може лишатися незмінним чи змінюватися. В теорії чутливості пернісною динамічною системою прийнято називати таку динамічну систему, параметри якої дорівнюють заданим і не зазнають змін; рух у ній прийнято називати осн. рухом. Ту саму систему при змінених значеннях параметрів наз. варіюваною, а рух у ній — варіюваним. Різницю між варіюваним та осн. рухом наз. додатковим рухом.

Осн. завданням теорії чутливості — аналіз додаткового руху, спричиненого варіацією параметрів. Він включає кількісні оцінки, дослідження стійкості, моделювання, синтез систем з урахуванням заданих вимог до якості додаткового руху, розробку методів активного впливу на параметри системи керування з метою досягнення заданої якості додаткового руху. Осн. положення теорії розробили М. Л. Биховський, Р. Томович, П. В. Кокотевич та ін. Г. Боде запровадив поняття чутливості як відношення відносної варіації параметра  $q_i$  до викликаної ним відносної варіації передавальної ф-ції  $W(s)$ :

$$S_{q_i}^W = \frac{\partial q_i / q_i}{\partial W / W} = \frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln W}.$$

Частіше застосовують обернену величину

$$S_{q_i}^W = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln q_i}.$$

Як прямі оцінки чутливості прийнято використовувати т. з. ф-ції чутливості  $u_i(t; q_i)$ , що відіграють велику роль у кількісній оцінці ступеня впливу варіацій параметрів  $q_i$  на динамічні властивості системи. Ф-ції чутливості у випадку нескінченно малих варіацій параметрів визначають таким способом. Нехай первісну динамічну систему описує дифер. рівняння

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0) = 0, \quad (1)$$

де ф-ція  $x = x(t; q_0)$  — розв'язок рівняння,  $q_0$  — параметр. При зміні  $q_0$  на величину  $\Delta q$  зміниться відповідно й рівняння

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0 + \Delta q) = 0$$

та його розв'язок,  $x = x(t; q_0 + \Delta q)$ , що описує варіюваний рух. Різниця  $x(t; q_0 + \Delta q) - x(t; q_0)$  описує додатковий рух. Графічно відношення цієї різниці

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{x(t; q_0 + \Delta q) - x(t; q_0)}{\Delta q} &= \\ &= \frac{\partial x(t; q_0)}{\partial q_0} = u_i(t; q_0) \end{aligned}$$



наз. функцією чутливості  $\mu(t; q_0)$ . Якщо у первісній динамічній системі, а, отже, й у дифер. рівнянні, що її описує, змінюються кілька параметрів, то ф-цію чутливості визначають так само, як і ф-цію кількох параметрів:  $\mu(t; q_0, q_1, \dots, q_k)$ . Ф-ції чутливості можна визначити, розв'язавши дифер. рівняння, які наз. рівняннями чутливості й які легко одержати з первісних рівнянь (1), якщо розв'язки їх є неперервними ф-ціями параметрів. Справді, коли визначити окремі похідні ф-ції  $F(x, z, t, q_0)$  за  $q_0$ , то на основі рівняння (1)

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \times \\ \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_0} = 0, \quad (2)$$

де

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dq_0} \cdot \frac{dq_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

А якщо тепер врахувати, що згідно з визначенням коеф. чутливості

$$\frac{dx}{dq_0} = \mu(t, q_0), \quad \frac{d\mu(t, q_0)}{dt} = \dot{\mu}(t, q_0), \\ \frac{d^2\mu(t, q_0)}{dt^2} = \ddot{\mu}(t, q_0).$$

то з виразу (2) одержимо рівняння чутливості:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \ddot{\mu} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{\mu} + \frac{\partial F}{\partial x} \mu = - \frac{\partial F}{\partial q_0}. \quad (3)$$

Особливістю цих рівнянь є те, що вони завжди лінійні, навіть коли первісне рівняння (1) є нелінійним, тому що похідні  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$

не залежать від  $\mu(t, q_0)$ . Якщо первісне рівняння (1) лінійне відносно  $x$ ,  $z$ ,  $t$ , то ліва частина рівняння чутливості має таку саму структуру й такі самі коефіцієнти, як і первісне рівняння. Справді, в цьому разі  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$  дорівнюють коефіцієнтам при змінних  $x$ ,  $z$  та  $t$  у первісному рівнянні. Якщо первісне рівняння (1) залежить від двох і більше параметрів  $q_0, q_1, \dots, q_k$ , то рівняння чутливості визначають так само.

Методи розв'язування рівняння чутливості засобами обчисл. техніки для малих збурень параметрів достатньою мірою розвинули Г. Майсінгер та ін. Їх широко застосовують для визначення ф-цій чутливості. Часто для визначення цих ф-цій, особливо лінійних систем, використовують структурні методи. Метод варійованої ланки, що його розробив М. Л. Виховський, зручний тим, що для одержання ф-ції чутливості досить мати вхідні та вихідні величини первісної системи й варійованої ланки і модель залежності характерис-

тик якої цієї ланки від варіації параметрів. П. В. Кокотович поширив цей метод на ширший клас систем, у т. ч. й на нелінійні та нестационарні.

Для визначення ф-ції чутливості потрібні дві моделі первісної системи й моделі, подібної до неї, об'єднаних зв'язною ланкою з передаточною функцією  $\partial W / \partial q$ . Якщо в системі змінюються  $k$  параметрів, то для визначення ф-ції чутливості потрібно мати  $k$  моделей, подібних до первісної. Це незручно, тому на практиці до пера визначають ф-ції чутливості за допомогою однієї моделі, комутуючи зв'язні ланочки для кожної варіації  $\Delta q_k$ . П. В. Кокотович, використавши поняття логарифмічної чутливості

$$S_{W_q}^W = \frac{\partial \ln W(s)}{\partial \ln W_q(s)}$$

і теорію графів, розробив метод визначення ф-цій чутливості на одній моделі, виділивши в ній т. в. точки чутливості. Але цей метод загалом можна застосовувати й до всіх систем. Для аналізу чутливості, крім безпосереднього визначення ф-цій чутливості, застосовують різні непрямі оцінки, напр. частотні оцінки.

$$S_W^K(\omega) = \frac{\partial \ln K(\omega)}{\partial \ln W(\omega)}; \quad S_q^K(\omega) = \frac{\partial \ln K(\omega)}{\partial \ln q}$$

де  $K(\omega)$  — амплітудно-фазова характеристика всієї системи,  $W(\omega)$  — амплітудно-фазова характеристика варійованої ланки. Проте безпосередньо обчислити додатковий рух за ними важко. Часто застосовують квадратичні показники (напр., дисперсію  $\sigma_{\Delta x}^2$ ) додаткового руху, викликаного варіацією параметрів. Досить повно розроблено й інші іспрямі оцінки — кореневі чи алгебричні, напр., коефіцієнти чутливості нулів та полюсів передаточної ф-ції системи до варіації параметрів  $q_i$ . Осн. положення теорії чутливості неперервних систем поширено й на розривні системи.

Теорію чутливості дедалі ширше застосовують у системах автомат. керування. Ф-ції чутливості містять надзвичайно цінну інформацію для розв'язування завдань синтезу динамічних систем. Одним з найважливіших завдань є синтез систем, що мають мінім. чутливість до варіації параметрів. Такий синтез можна здійснити на основі певних умов, що їх накладають на якийсь функціонал  $I\{\Delta x(t)\}$ , що характеризує додатковий рух. На основі вимоги, щоб цей функціонал дорівнював нулеві, синтезують системи, що мають властивість параметричної інваріантності, тобто нечутливі до варіації параметрів. Розроблено методи синтезу оптим. за нечутливістю систем на основі мінімізації функціоналу  $I\{\Delta x(t)\}$ . У працях деяких авторів, напр., пропонується розглядати задачу чутливості як теоретико-ігрову задачу автомат. керування, припускаючи, що збурення, викликане зміною параметрів, є антагоністичним щодо динамічних властивостей об'єкта й керую-

чого діяння. Таке застосування методів *теорії* в теорії чутливості є перспективним, особливо для синтезу оптич. систем керування, які вчутливі до варіації параметрів об'єкта і, крім того, мають мінімальні властивості. Оскільки теор. фундамент теорії чутливості становлять класичні методи теорії малих збурень, існує певний зв'язок між чутливістю й теорією стійкості в малому за Ляпуновим. Показано, що рівняння, які визначають ф-ції чутливості стосовно до малих змін первісних умов дифер. рівнянь, збігаються в рівняннях першого наближення з теорії стійкості О. М. Ляпунова. Цей зв'язок має не лише теоретичне, а й важливе практичне значення.

Теорію чутливості застосовують при побудові безпощукових самонастроюваних систем. Використовують певну аналітичну залежність між сигналами осн. системи й моделі чутливості, обчислюють ф-ції чутливості, на основі яких визначають якийсь функціонал

$$I = \int_0^T F(u_1, u_2, \dots, u_n, t) dt, \text{ що залежить від}$$

змінних параметрів. Процес самонастроювання проводять так, щоб цей функціонал наближався до нуля. Осн. труднощі під час побудови таких систем полягають в обчислюванні ф-ції чутливості, пов'язаному з необхідністю розв'язувати інтегральні рівняння типу зворотки. Ряд авторів пропонують у своїх працях методи наближеного визначення зворотки з певною спробою обчислення ф-ції чутливості.

Велике практичне значення має і з об'єктами задачі чутливості, яка полягає в оцінці варіації параметрів за спостереженнями викликаного ними збудження первісного сигналу. Обчислені варіації параметрів за відхиленням первісного сигналу можна використати для активного впливу на параметри системи керування, щоб поліпшити якість роботи всієї системи. Хоч матем. фундамент для розв'язування оберненої задачі існує, але питання практичного застосування її розроблено ще недостатньо.

Лит. Быховский М. Д. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., 1958 [Бібліогр. с. 153—156]. Чувствительность автоматических систем М. 1988. Розенwasser Е. Н. Юсупов Р. М. Чувствительность систем автоматического управления. Л., 1969 [Бібліогр. с. 205—207]. Tomovic R. Sensitivity analysis of dynamic systems. Belgrade, 1963.

А. Г. Шевченко

**ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ УМОВИ ГРУБОСТІ** — умови, при виконанні яких динамічна система є грубою, тобто досить малі зміни її параметрів не порушують топологічну структуру фазового простору її (див. *Якісний аналіз систем автоматичного керування*). Або строгіше: систему наз. грубою оскільки границі областей її фазового простору, всередині яких фазові траєкторії мають однаковий якісний характер, неперервно залежать від параметрів системи. Оскільки параметри реальних систем можна визначити лише наближено, то лише грубі системи можуть бути матем. моделями, в яких тополо-

гічна структура фазового простору перебуває у відповідності з фіз. явищами. Розглянемо систему двох рівнянь з аналітичними правими частинами

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (1)$$

в області  $G$  площини  $x, y$ , обмеженої циклом без контакту  $g$  ( $g$  — проста замкнена крива, що має неперервно обертову дотичну й перетинає всі траєкторії, що проходять через неї, не дотикаючись ні до якої з них). Розглянемо й систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y). \quad (2)$$

Систему (1) наз. грубою в області  $G$ , якщо для всякого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що при аналітичних  $p(x, y), q(x, y)$ , які задовольняють у  $G$  умови

$$|p(x, y)| < \delta, |q(x, y)| < \delta, |p'_x(x, y)| < \delta,$$

$$|p'_y(x, y)| < \delta, |q'_x(x, y)| < \delta, |q'_y(x, y)| < \delta,$$

існує взаємно однозначне й взаємно неперервне відображення області  $G$  в саму себе, при якому кожна траєкторія системи (1) переходить у траєкторію системи (2) й назад, при цьому точки, що відповідають одна одній, містяться на відстані, меншій як  $\varepsilon$ . Для того, щоб система (1) була грубою в ділянці  $G$ , необхідно й достатньо, щоб у цій ділянці стинам різновалу відповідали корені характеристичного рівняння системи першого наближення з відмінним від нуля дійсним частинами; для кожного періодичного розв'язку періоду  $T$   $x = \Phi(t), y = \Psi(t)$  виконувалась нерівність

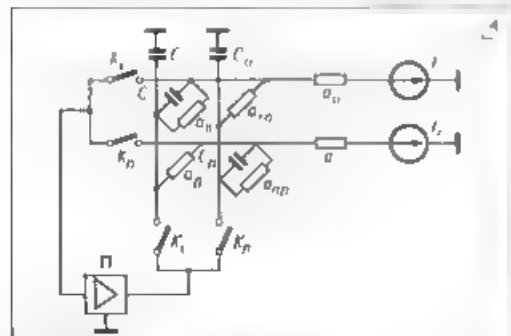
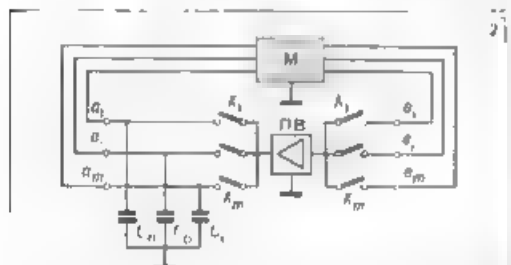
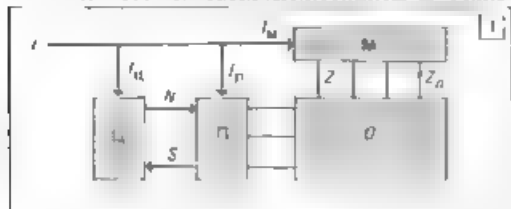
$$\frac{1}{T} \int_0^T [P'_x(\Phi, \Psi) + Q'_y(\Phi, \Psi)] dt \neq 0;$$

станів рівновалів, що відповідають з різними знаками дійсним кореням характеристичного рівняння системи першого наближення, не були з'єднані інтегр. кривими. Простір параметрів (коефіцієнтів) динамічної системи розбивають на області, в кожній точці яких система є грубою; межами між цими областями є біфуркаційні поверхні, на яких система — не груба.

Лит. Андронова А. А. [та ін.] Теория бифуркаций динамических систем на плоскости М., 1967 [Бібліогр. с. 484—485]. Р. А. Хеллс.

**ДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОД** — метод моделювання алгебричних і диференціальних об'єктів, при якому бажаний розподіл струмів і напруг у моделюваному багатополовковому постійної структури одержують циклічними підсилюваннями до нього за допомогою ключової матричної схеми іншого багатополовковика (в заг. випадку — нелінійного й змінної структури) та запам'ятовуванням зрівноважувальних напруг на конденсаторах досить великої ємності. Модел,

побудовані відповідно до Д. м. м., наз. динамічними моделями. Підсилювач багатополосника змінної структури  $\Pi$  до багатополосника постійної структури  $M$  за допомогою ключової матричної схеми  $Q$  і керування його параметрами й структурою здійснюється за програмою, яку заносить у цифрову частину  $\Pi$  динамічної моделі (мал. 1). Під час роботи цифрова частина служить для запам'ятовування  $\Pi$  — цифрової частини повної первісної інформації  $I$ , керування за допомогою кодія  $N$  багатополосником  $\Pi$  і каю-



1. Блок-схема динамічної моделі.  
2. Схема групового підсилювача.  
3. Схема динамічного операційного елемента.  
4. Схема динамічної моделі системи алгебраїчних диференціальних рівнянь.

чани матричної схеми  $Q$  та для виведення одержаних при цьому результатів у вигляді кодія  $S$ . Частини  $I_M$  та  $I_\Pi$  первісної інформації  $I$  зводяться відповідно в багатополосники  $M$  і

$\Pi$  безпосередньо, минаючи цифровий блок  $\Pi$ . У динамічних моделях процес зрівноважування не можна припинити, бо при припиненні досягнутий розподіл струмів і напруг у моделювальному колі почне змінюватися через розрядження конденсаторів. Структура динамічної моделі на будь-якому кроці перемикається визначається ключовою матрицею  $Q$ , кожна з компонент якої може набувати тільки двох значень «0» та «1» ( $q_{ij} = 0$  відповідає розімкненому положенню ключа між  $i$ -ю горизонтальною та  $j$ -ю вертикальною шинами, а  $q_{ij} = 1$  — замкненому). В заг. випадку матриця  $Q$  може бути функцією часу у одержуваних величин  $Z$ , тобто  $Q = Q(t, Z)$ , де  $Z$  — вектор з компонентами  $Z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Деякі окремі випадки цієї заг. схеми динамічної моделі приводять до т. з. групових елементів електр. кола. На мал. 2 наведено схему групового підсилювача (ГП) з присланим до нього багатополосником  $M$ . Схема ГП складається з підсилювача відпрацьовуючого (ПВ), запам'ятовувальних конденсаторів  $C_0$  та пар ключів  $K_1, \dots, K_m$ . Якщо по черзі замикають їх відбувається з відносно великою частотою і якщо виконуються деякі інші умови, пристрій буде еквівалентним звичайним підсилювачем, увімкненим між точками  $a_1 - b_1, \dots, a_m - b_m$ . Схему динамічного операційного елемента, який є, по суті, динамічним аналогом звичайного підсилювача операційного, наведено на мал. 3. У заг. випадку багатополосники  $Y_0$  та  $Y_1$  мають будь-яку складність.

Якщо виконати певні умови, відносно наближки  $v$ -ї гармоніки можна визначити за формулою

$$\delta_v = \frac{U_{0v} - (U_{0v})_{\text{точн}}}{(\dot{U}_{0v})_{\text{точн}}},$$

де  $(U_{0v})_{\text{точн}}$  і  $\dot{U}_{0v}$  — точні й реальні комплексні амплітуди  $v$ -х гармонік вихідної напруги. Відносна похибка

$$\delta_v = 1 - \frac{NY_{0v}}{1 - \frac{KC_0}{T}}$$

$$1 + \frac{1}{K} \left[ \frac{NY_{1v}}{G_0} + \left( 1 + \frac{Y_{1v}}{Y_{0v}} \right) \left( 1 + j \frac{2\pi v \Delta C_0}{T} \right) \right]$$

залежить від параметрів підсилювача, параметрів операційного елемента ( $G_0$  — вихідна провідність,  $N$  — число точок, відпрацьовуваних груповим підсилювачем,  $T$  — інтервал часу). Цей вираз наведено в припущенні, що хід елемента холостий. При збільшенні коефіцієнта  $K$  методична похибка наближається до 0. З аналізу відносної похибки випливає, що наближений розрахунок динамічних електричних кіл з груповим підсилювачем можна провадити, як і для звичайних кіл, а одночасно ввімкненими підсилювачами, але з збільшеними провідностями, відповідно до

виразу  $Y_v \approx G_v \frac{h}{T_v} = \frac{G_v}{N_v}$ . Застосовуючи динамічні операційні елементи, можна побудувати динамічні моделі систем алгебр і диференціальних. На мал. 4 показано принципову схему моделі з груповим підсилювачем для розв'язування систем рівнянь виду  $Ax = F$  (при цьому треба, щоб  $C_1, \dots, C_n$  дорівнювали

0) і рівнянь виду  $\frac{dx}{dt} + Ax = F$ . У цьому випадку початкові умови треба задавати не тільки на конденсаторах  $C_1, \dots, C_n$ , а й на конденсаторах  $C_0$ . Оригінальні динамічні моделі можна побудувати, застосовуючи групові опори. Принципову схему групового опору оперують із схемою *групового джерела напруги*, ламінувши перетворювач коду на запуску перетворювачем коду на опір. Як такі перетворювачі можна застосовувати відомі *опори цифрові нерівності* й провідності. Робота схеми групового опору ґрунтується на можливості відімкнути на короткий час опір, якщо паралельно приєднати якийсь смієць і, анаслідок цього, — на можливості використовувати один змінний опір, що переміщується, в різних розгалуженнях кола. У динамічних колах перемикати можна не лише джерела напруги, підсилювачі й омичні опори, а й *перетворювачі функціональні*, множильні пристрої та інші складні кола.

У динамічних моделях порівняно зі звичайними значно зменшено кількість діючих елементів логічного обладнання. У деяких випадках вони поступаються перед звичайними моделями щодо швидкості й точності одержуваних розв'язків, але їхня надійність значно вища. Це зумовлено тим, що в динамічних моделях зменшено кількість підсилювачів постійного струму, функціональних перетворювачів тощо. Замість них введено елементи дискретної дії — ключові елементи й пристрій керування, надійність яких висока, а кількість елементів у них менша. Д. м. м. дає змогу побудувати легко веровні, економічні, надійні й малогабаритні *квазіаналогові моделі* для розв'язування систем звичайних диференціальних, рівнянь у частинних похідних у скінченно-різницевої постановці, задач проєктування *лінійного та програмувального лінійного*, задач *теорії*; машини для розрахунку сіткових графіків, машини для розрахунку статично невизначуваних систем. Цей метод можна застосовувати, моделюючи об'єкти, стан і роботу яких можна описувати звичайними дифер. або алгебр. рівняннями й нерівностями. Звичайно, динамічні моделі можна застосовувати не завжди. Найкраще застосовувати їх тоді, коли зменшення кількості обладнання, мала вага, малі габарити, мала споживана потужність і висока надійність мають більше значення, ніж висока точність і швидкість.

Літ. Пухов Г. Е. Методи аналізу в синтезі квазіаналогових електронних мереж. К., 1967 [бібл.ogr. с. 560—564]. Моделирующие математические машины с переменной структурой. 1970 [бібл.ogr. с. 243—246]. Г. С. Царев, О. Ф. Катков.

**ДИСК МАГНІТНИЙ** — пристрій для реєстрації, зберігання й використання інформації, яка записується на магнітний носій, що викриває поверхню диска. Розвиток цифрових обчислювальних машин (ЦОМ) зумовив потребу створити *запам'ятовувальні пристрої* (ЗП) великої ємності з порівняно невеликим часом вибирання інформації. Як такі ЗП використовують *нагромаджувачі* на Д. м. (НМД), основні елементи яких — обертові диски ( $D = 300 + 1000$  мм), вкриті з обох боків феромагнітним шаром, над яким розміщено магнітні головки (МГ), що записують інформацію у вигляді концентричних доріжок на робочій поверхні диска й аналогічно зчитують її. НМД звичайно складається з кількох (до 50) жорстких дисків, насаджених на спільний вал, що обертається зі сталою швидкістю ( $n = 900 + 3000$  об/хв). У проміжки між дисками на спец. рухомих шажках введено МГ. Важливо, що рухається вздовж радіуса диска, здійснює вибір заданої доріжки. В іншому типі НМД важелі можуть переміщуватися й вздовж осі обертання дисків (вибір диска), через свою складність така конструкція не набула широкого застосування. Переміщення важелів здійснюється за допомогою пневматичних, гідравлічних або електр. приводів. Крім НМД з рухомими МГ, поширені й конструкції з фіксованими, нерухомими МГ. У цьому випадку можна магнітна доріжка обслуговується своєю МГ, вибір доріжки здійснюється за допомогою електронного комутатора.

Тепер в НМД, як правило, застосовуються *плаваючі* магнітні головки, які автоматично підтримують величину зазору між МГ та робочою поверхнею диска (порядку 5—10 мк), при цьому здовж шпильки щільність запису досягає порядку 80—130 біт/мм. Їмність Д. м. в одному пристрої досягає 12 500 млн двійкових знаків (тип 2600—6М фірми Bryant Computer Products). Останнім часом широко застосовуються НМД зі змінним носієм — змінними дисковими пакетами. В системах, де вимагається підвищена надійність і стійкість роботи, застосовують гнучкі диски. В них гнучкий Д. м. (напр., з магнітної плівки), що її застосовують для виготовлення *стрічок магнітних* обертається над рівною надіровоною плитою з змонтованими в неї МГ. Під дією повітря, що захоплюється при швидкому обертанні диска, між його робочою поверхнею і МГ утворюється потрібний повітряний зазор.

Р. Я. Черняк.  
**ДИСКРЕТИЗАЦІЯ** — перетворення неперервної величини на дискретну. Застосовується в системах передавання, зберігання та обробки інформації й є невід'ємною операцією при використанні цифрових обчисл. пристроїв для обробки інформації, що надходить у вигляді неперервних сигналів. Так, передавання фототелеграфних (функція двох аргументів) і телевізійних (функція трьох аргументів) зображень здійснюється розбиранням їх на дискретні рядки й відповідно дискретні кадри. Передавання мовлення

(функція однієї змінної) за допомогою імпульсно-кодкової модуляції пов'язане з дискретизацією неперервного сигналу й наступним кодуванням. Див. також *Квантування*.

**ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ** *М. Ф. Вейт* — наближене представлення неперервної функції, що описує яскравість зображення, її значеннями в окремих точках. Д. з. здійснюють для зручності введення інформації про зображення в спеціалізований розпізнавальний пристрій або в ЦОМ. У розпізнавальних пристроях зображення звичайно сприймається певною множиною світлочутливих елементів, які наз. рецепторами. Сигнал на виході кожного рецептора характеризує яскравість зображення в одній його точці. За аналогією з механізмом сприймання зорових зображень оком людини, множини рецепторів наз. сітківкою або рецепторним полем. Див. також *Квантування зображень*.

*В. І. Василюк*

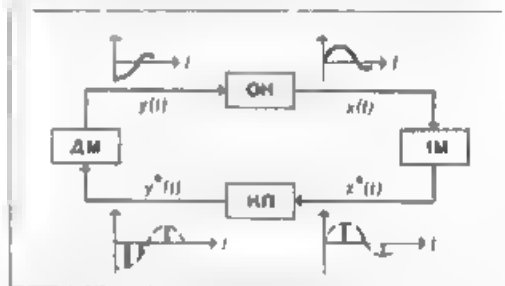
**ДИСКРЕТНА СИСТЕМА** — система, що функціонує в дискретному часовому просторі й визначається дискретними станами. Дискретність часового простору означає, що явища, які супроводять зміни стану системи, можуть відбуватися тільки в моменти часу, що становлять якусь дискретну множину. Зокрема, переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися в цілочислові моменти часу. Зог. випадок зводять до цього часового, вводять цілочислову нумерацію моментів можливої зміни стану системи. Умова дискретності стану вказує на дискретність множин допустимих значень усіх часових характеристик системи, тобто всіх компонент марковського елемента, який у кожний момент часу цілком визначає стан системи. Найпростіший приклад Д. с. — послідовність випробувань з кількома можливими наслідками. При цьому роль часу відіграє номер випробування, роль стану — номер наслідку цього випробування. Неперервну систему в деяких випадках можна розглядати як дискретну. Це буває, коли враховують її стан тільки в окремі моменти часу й заокругляють їхні значення до цілих одиноків.

Описують і досліджують Д. с. за допомогою дискретних *Марковських ланцюгів*, різницьових рівнянь, стохастичних матриць, ланцамарковських процесів і дискретним перебуванням у кожному з можливих станів та за допомогою *автоматів Імпортних*. На практиці досить поширені системи, для яких дискретним є або тільки час, або тільки стан. Важливим класом систем є т. з. системи з дискретним втручанням випадку, які майже завжди поводять себе як неперервні й тільки в дискретні моменти зазнають випадкових змін.

*М. В. Ярошківський*

**ДИСКРЕТНА СИСТЕМА КЕРУВАННЯ**, імпульсна система керування — динамічна система, в якій між двома чи більше її елементами інформація передається за допомогою часової послідовності імпульсів. Така послідовність несе корисну інформацію тільки в тому разі, коли її про-

модульовано входним сигналом. Цю функцію модуляції в імпульсних системах (див. *Модуляція імпульсна*) виконують імпульсні модулятори або перетворювачі аналог — код. Найпростішу типову структурну схему Д. с. к. наведено на мал., де ОК — об'єкт керування, КП — керуючий (імпульсний або цифровий) пристрій, ІМ — імпульсний модулятор (перетворювач «аналог — код»). У тих випадках, коли об'єкт керування не має властивостей, необхідних, щоб виконувати функції імпульсного демодулятора (ДМ), на виході його



Структурна схема дискретної системи керування

як проміжну ланку встановлюють спец. ДМ (перетворювач «код — напруга»).

Найхарактерніша особливість (із погляду дослідження динаміки Д. с. к.) цифрових систем керування полягає в тому, що цифрові системи керування, строго кажучи, завжди є *нелінійними системами керування*, в яких треба враховувати ефекти *квантування* і за часом, і за рівнем. Поводіння Д. с. к. в дискретні моменти часу описують різницевими рівняннями, причому для цифрових систем ці рівняння завжди нелінійні.

У зв'язку з розширенням сфери застосування ЦОМ, які виконують у багатьох випадках функції КП, зростає вага Д. с. к. в техніці збільшується, а сфера застосування їх безперервно розширюється. Див. також *Автоматичного керування теорія*, *Дискретних систем автоматичного керування аналіз*, *Дискретних систем автоматичного керування синтез*, *Стійкості дискретних систем теорія*.

*В. М. Кричевий*

**ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮЮЧЕ СЕРЕДОВИЩЕ** — див. *Квазіаналогове моделююче середовище*.

**ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ** — розділ математики, в якому вивчають властивості структур фінітного (скінченного) характеру, що виникають як у середині самої математики, так і в її застосуваннях. До таких скінченних структур можна віднести, наприклад, скінченні *групи*, скінченні *графи* та деякі математичні моделі перетворювачів інформації, такі як *автомати скінченні*, *Тьюрінга машини* тощо. Іноді допускають розширення предмету Д. а. до довідних дискретних структур і приходять до дискретної математики, ототожнюючи її з Д. а. До таких структур можна віднести деякі алгебр. системи, нескінченні гра-

фи та деякі види обчисл. середовищ, такі, як кліткові автомати тощо. Як синонім поняття Д. а. й дискретної математики іноді вживають термін «скінченна математика». Нижче термін Д. а. вживається в широкому розумінні, включаючи дискретну математику.

На відміну від Д. а. класична математика в основному вивчає властивості об'єктів неперервного характеру. Використання класичної або дискретної математики як апаратів дослідження пов'язано з задачами, які ставити перед собою дослідники, і з тим, яку модель досліджуваного явища він розглядає — дискретну чи неперервну. Так, напр., знаходячи масу радіоактивного речовини в даний момент, з певною точністю можна вважати, що процес зміни маси при радіоактивному розпаді має неперервний характер, і разом з тим ясно, що насправді цей процес дискретний. Самий поділ математики на класичну й дискретну значною мірою умовний, оскільки, напр., з одного боку відбувається активна циркуляція ідей і методів між ними, а з другого — часто виникає необхідність досліджувати моделі, які мають і дискретні й неперервні властивості одночасно. Слід відзначити також, що в математиці існують напрями, які використовують засоби дискретної математики для вивчення неперервних моделей і, навпаки, часто засоби і постановки задач класичного аналізу використовують, досліджуючи дискретні структури. Це вказує на певне злиття розглянутих областей.

Специфіка методів і задач Д. а. зумовлена необхідністю відмовлятися від основоположних понять класичної математики — границі й неперервності, а через це й тим, що для багатьох задач Д. а. сильні засоби класичної математики виявляються, як правило, мало придатними. До підрозділів Д. а. відносять комбінаторний аналіз, графічну теорію, теорію функціональних систем і деякі інші. Часто під терміном Д. а., вважаючи, що його предмет вичерпується скінченними структурами, розуміють саме сукупність перелічених дисциплін. З погляду розширеного розуміння цього предмета до Д. а. можна віднести й цілі розділи математики, напр. логіку математичну, й частини таких розділів, як теорія чисел, алгебра, обчислювальна математика, імовірностей теорія й деякі інші, в яких досліджуваний об'єкт має дискретний характер.

Елементи Д. а. виникли в глибокій давнині й, розвиваючись паралельно з іншими розділами математики, значною мірою були їхньою складовою частиною. Типовими для того періоду були задачі, пов'язані з властивостями цілих чисел, потім вони привели до створення теорії чисел. До них можна віднести й задачі відшукування алгоритмів, додавання і множення натуральних чисел у стародавніх єгиптян (2 тисячоліття до н. е.), задачі про підсумовування та про подільність натуральних чисел у піфагорійській школі (5-4 ст. до н. е.) тощо. Пізніше, в основному в зв'язку з ігровими задачами, з'явилися елементи комбіна-

торного аналізу й дискретної теорії ймовірностей, а в зв'язку з заг. проблемами теорії чисел, алгебри й геометрії (18-19 ст.) виникли важливі поняття алгебри, такі, як група, поле, кільце та ін., які означили розвиток і зміст алгебри на багато років наперед і які мали, по суті, дискретну природу. Прагнення до строгості матем. міркувань та аналіз робочого інструменту математики — логіки — привели до виділення ще одного важливого розділу математики — математичної логіки (19 ст.). Проте найбільшого розвитку Д. а. досяг у зв'язку з запитами практики, які привели до появи нової науки — кібернетики та її теор. частини — теор. кібернетики (20 ст.). Теор. кібернетики, яка безпосередньо вивчає з позицій математики найрізноманітніші проблеми, що їх ставить перед кібернетикою практична діяльність людини, є потужним постачальником ідей і завдань для Д. а. Так, прикладні питання, потребуючи великої числової обробки, стимулювали появу сильних числових методів розв'язування задач. Ці методи оформилися потім в обчисл. математику, а аналіз поняття «обчислюваності» і алгоритмів привели до появи важливого розділу матем. логіки — *алгоритмічної теорії*. Зростаючий потік інформації й пов'язані з ним завдання зберігання, обробки й передавання її привели до виникнення теорії кодування; для економ. задач, задач електротехніки, так само, як і для внутр. задач математики, постала потреба розробити теорії графів; задачі конструювання й оптимізації роботи складних керуючих систем привели до теорії функціональних систем і т. д. Разом з тим теор. кібернетики широко використовує результати Д. а., розв'язуючи свої задачі.

Окрім уже відзначених, Д. а. має ще ряд особливостей. Так, разом з задачами типу існування, які мають загальною матем. характер, важливе місце в Д. а. займають і задачі типу алгоритмічності розв'язності й побудови конкретних розв'язувальних алгоритмів. Другою особливістю Д. а. є те, що він, по суті, вперше зіткнувся з необхідністю глибокого дослідження т. а. дискретних багатоекстремальних задач, які особливо часто виникають у теор. кібернетиці. Відповідні методи класичної математики для пошуку *екстремумів*, які істотно використовують певну гладкість ф-цій, у цих випадках виявляються мало ефективними. Типовими задачами такого роду в Д. а. є, напр., задачі про відшукування в певному розумінні *стратегій оптимальних* у шаховій партії при обмеженій кількості ходів, а також важливе питання теор. кібернетики про побудову *дис'юнктивних нормальних форм мінімальних* для *булевих функцій*, тобто т. а. проблема мінімізації булевих функцій (див. *Алгебра логіки*). Особливістю Д. а., пов'язаною вже з задачами для скінченних структур, є й те, що для багатьох із цих задач, як правило, існує алгоритм розв'язку, тоді як у класичній математиці повний розв'язок задач часто можливий лише за досвіть

жорстких обмежень. Прикладом такого алгоритму може бути алгоритм перегляду всіх можливих варіантів, тобто алгоритм типу «повного перебору». До задачі цього виду можна віднести, наприклад, задачі про стратегії в шаховій грі, про мінімізацію булевих функцій та ін. Однак методи розв'язування типу «повного перебору» дуже трудомісткі й практично мало прийнятні, в зв'язку з чим виникає ряд нових задач, пов'язаних з умовами, які обмежують перебір і призводять до введення індивідуальних задач, які характеризуються конкретними значеннями параметрів, до масової проблеми, що характеризується нескінченною множиною значень параметрів, виникають задачі накладання обмежень, природних для цього класу задач, на засоби розв'язування і т. д. Постановка такого роду питань і розробка методів здійснюється на конкретних моделях, що їх постають різні розділи математики. До них належать, наприклад, моделі мінімізації булевих функцій і синтезу керуючих систем з теор. кібернетики та ряд інших.

Лит. Яблоков С. В. Обзор некоторых результатов в области дискретной математики. «Информационные материалы Научного совета по математической проблеме „Кибернетика“ АН СССР, 1970, № 3. Дискретный анализ, № 1, 19. Новосибирск, 1963 — 71. Проблемы кибернетики, № 1, 25 М., 1954 — 72; Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. Пер. с англ. М., 1965.

В. Б. Митрашова.

**ДИСКРЕТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМА** — набір логічних елементів, який забезпечує побудову найскладніших логічних пристроїв ЦОМ. Цю побудову здійснюють на основі підстановки ф-ції будь-якого логічного елемента ЦОМ як аргументу ф-ції ін. елемента й відновлення заданої якості інформаційних сигналів. Щоб було дотримано умов функціональної повноти, Д. е. с. повинна реалізувати функціонально повну систему *перемінливих функцій*. Для виконання умов тох. повноти Д. е. с. досить мати один елемент, що відновлює величини інформаційних сигналів у межах їхніх діапазонів відображення. Для елементів окремих Д. е. с. характерні узагальненість параметрів та багато заг. особливостей щодо швидкості, надійності, конструкції й технології виробництва.

Найпростішим типом Д. е. с. є *універсальний логіч. елемент*, що реалізує ф-цію  $x \vee y$  чи  $x \wedge y$ , виконаний, наприклад, у вигляді сукупності діодної схеми ввігу або поділу та транзисторного інвертора, який, крім інвертування, виконує ф-ції відновлення рівнів інформаційних сигналів. Є багато різновидів універсальних елементів. Їх розрізняють залежно від типу компонентів (напр., діодна логіка, резисторно-транзисторна логіка, транзисторна логіка тощо), зв'язків між компонентами, що виконують логічні операції (безпосередні, резисторні, транзисторні зв'язки та ін.), від режиму роботи активних елементів (наситені, ненаситені) тощо.

Практично Д. е. с. виконують здебільшого надмірним за функціональним складом, щоб

забезпечити простоту й гнучкість при синтезі логіч. схем. Прикладом такої надмірної Д. е. с. є набір, до складу якого входить елемент з підвищеною навантажувальною здатністю, кілька різновидів *тригерів*, універсальні елементи з різною кількістю логіч. входів. Крім універсальних елементів з одним ступенем комбінаційної логіки, до Д. е. с. часто входять і елементи з двома ступенями логіки. В наборі є й елемент для розширення кількості входів 1-го або 2-го ступеня деяких універсальних елементів.

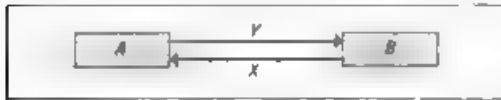
Коли Д. е. с. розширюють за рахунок спеціалізованих елементів для виконання різних логіч. ф-цій, цю систему важко уніфікувати й стандартизувати (а це має особливо важливе значення, якщо елементи виготовляють у вигляді *інтегральних схем*). Оптим. розв'язання суперечливих вимог спеціалізації та універсальності до набору Д. е. с. домагаються в багатофункціональних великих інтегр. схемах, які при нескладному попередньому настроюванні без зміни структури й топології схеми можуть реалізувати будь-яку потрібну логічну ф-цію. В Д. е. с. з інтегр. схем стираються межі між логіч., запам'ятовувальними й відновлювальними елементами, а великого значення набуває спрощення й однорідність міжелементних зв'язків. Для такої *інтегральної елементної структури*, *Потенціальної елементної структури ЦОМ*, *Потенціально-інтегральної елементної структури*, *Елементної структури ЦОМ*.

Лит. Гляушков В. М. Синтез цифрових автоматов. М., 1962 (бібліогр. с. 484—489); Рабинович І. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. М., 1966 (бібліогр. с. 299—301); Минорекстрикциа в больших системах. Пер. с англ. М., 1967. З. Г. Козмичев.

**ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ТЕОРІЯ** — розділ теоретичної кібернетики, в якому методами *автоматів теорії* досліджують функціонування пристроїв, які виконують перетворення інформації відповідно до заданих алгоритмів. Осн. галузями застосування Д. п. т. є теоретичні питання програмування та алгоритмізації й логічне проектування структур обчисл. машин.

Нехай  $A$  — ініціальний  $X$ - $Y$ -Мат автомат, у якому визначено заключний стан  $a^*$ . На відміну від абстрактної теорії автоматів, де алфавіти  $X$  і  $Y$  розглядають як абстрактні множини, в Д. п. т. елементам цих алфавітів приписують певний зміст (інтерпретація). Для цього зафіксуємо нескінченну множину  $B$ . Елементи цієї множини наз. *інформаційними об'єктами*, а сама множина — *інформаційною множиною*. Припустимо, що у  $B$  виділено якусь підмножину  $B_0$  початкових інформаційних об'єктів. Кожному вихідному сигналу  $y \in Y$  автомата  $A$  поставимо у відповідність (часткове) перетворення  $f_y$  множини  $B$  на себе, а певним елементам  $b$  множини  $B$  поставимо у відповідність вихідний сигнал  $x = \mu(b)$  автомата  $A$ . Якщо задано таку відповідність між вхідними сигналами автома-

та  $A$  й перетвореннями множини  $B$  та між елементами множини  $B$  і вхідними сигналами автомата  $A$ , то кажуть, що задаю інтерпретацію вхідних і вихідних сигналів автомата  $A$ . Ініціальний автомат Мілі з заключним станом наз. дискретним перетворювачем, якщо для його вхідних і вихідних сигналів задано інтерпретацію. При цьому кажуть, що дискретний перетворювач діє на множині  $B$ , а перетворення  $f_y$  наз. елементарними операторами дискретного перетворювача. Інформаційну множину розглядають як *Мура авто-*



Абстрактна схема керуючого й операційного автомата

мат з виділеною множиною  $B_0$  початкових станів, якщо ф-цію переходів визначити рівністю  $b_{y'} = f_y(b)$  й узяти  $\mu$  як ф-цію виходів. Такий автомат  $B$  наз. *автоматом операційним*, а дискретний перетворювач, при такому розгляді — *автоматом керуючим*. Кожен дискретний перетворювач  $A$  визначає якийсь частковий перетворення  $f_A$  множини  $B$  станів операційного автомата (інформаційної множини). Це перетворення наз. оператором, представленим дискретним перетворювачем  $A$ . Щоб обчислити  $f_A(b)$ , операційний автомат треба установити в стан  $b$  і з'ясувати його з дискретним перетворювачем  $A$ , установленим у початковий стан. Одержимо систему з двох автоматів (мал.), яка починає функціонувати. Якщо через скінченну кількість тактів автомат  $A$  перейде в заключний стан  $a^*$ , то вважають, що  $f_A(b)$  визначена й дорівнює стану  $b$  автомата  $B$ , в який він перейде в цей момент часу. А якщо ні —  $f_A(b)$  вважають невизначеним. Кажуть також, що  $A$  застосовний (не застосовний) до стану  $b$  автомата  $B$ . Очевидно,  $f_A(b)$  визначена тоді й тільки тоді, коли існують слова  $p \in F(X)$  і  $q \in F(Y)$ , такі, що

$$\varphi_A^*(p) = a^*, \quad \varphi_B(q) = b. \quad (1)$$

де  $\varphi_A^*$  — обмеження автоматного відображення  $\varphi_A$ , представленого автоматом  $A$  на множини таких слів  $p$ , що  $a_p = a^*$ . Якщо слова, які задовольняють систему рівнянь (1) існують, то вони визначені лише однозначно і  $f_A(b) = bq$ .

Як приклад дискретних перетворювачів розглядають головки *Тьюрінга* машин, інтерпретовані алгоритми графові схеми, логічні операторні схеми алгоритмів, схеми алгоритмів над пам'яттю, програми, мікропрограми та пристрої керування ЦОМ. Досліджено структуру операційних автоматів, які найчастіше трапляються в сучасних обчисл. машинах (див. *Автомат реєстровий*). Одним з

осн. завдань Д. п. т. є вивчення структури перетворень, які вони представляють. З цією метою було побудовано клас спец. алгебр (див. *Алгебра алгоритмів*). Дослідження співвідношень у конкретних алгебрах цього класу й перетворення виразів, які відповідають операторам, що їх представляють дискретні перетворювачі, дають змогу розв'язувати задачу синтезу дискретних перетворювачів, які задовольняють ті чи ін. критерії оптимальності. Велике значення має й вивчення різних видів еквівалентності дискретних перетворювачів.

Лит.: Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин. «Кибернетика», 1965, № 1. Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5.

О. А. Лещинський.

**ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ АНАЛІЗ** — розділ автоматичного керування теорії, що вивчає процеси в дискретних (імпульсних) системах (ДС) автоматичного керування та різні якісні й кількісні характеристики їх (стійкості, точності, якості перехідних процесів тощо).

Процес керування в ДС супроводжується квантуванням за часом, тому рух таких систем описують адекватні різницеви рівняннями.

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n), \quad \sigma_n = \varphi(x_n). \quad (1)$$

де  $x_n = x(t_n) = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)})$  — вектор фазових координат  $x_n^{(i)}$ , які однозначно визначають динамічний стан ДС у момент часу  $t = t_n$ , що відповідає появі  $n$ -го імпульсу;  $n$  — порядок ДС;  $u_n = u(t_n)$  — зовнішнє діяння (вхід ДС);  $f(x, u) = (f^{(1)}(x, u), f^{(2)}(x, u), \dots, f^{(m)}(x, u))$  — вектор-функція  $x$  та  $u$ , що дорівнює нулеві при  $x = 0$  та  $u = 0$ ;  $\sigma_n = \sigma(t_n)$  — вихід ДС (регульована величина, помилка регулювання і т. ін.);  $\varphi(x)$  — скалярна ф-ція фазових координат ДС;  $n = 0, 1, 2, \dots$  — номер імпульсу (незалежна змінна системи різницевих рівнянь (1)).

Аналіз ДС полягає в дослідженні властивостей розв'язків різницевих рівнянь (1). При  $u_n \equiv 0$  розв'язки системи (1) описують вільні рухи ДС, а при  $u_n \neq 0$  — вимушені. Відповідно до цієї класифікації задачі аналізу ДС поділяють на задачі аналізу вільних та вимушених рухів. Залежно від характеру правої частини системи рівнянь (1) розрізняють лінійні та нелінійні ДС. Нелінійні ДС відрізняються від лінійних значно більшою різноманітністю й складністю форм можливих рухів, тому осн. задачі й особливо методи аналізу лінійних і нелінійних ДС виявляються істотно відмінними.

Аналіз стійкості ДС полягає у визначенні таких співвідношень між параметрами системи, при яких досліджуваній ДС властива та чи інша форма стійкості.



Для лінійних стаціонарних ДС цю задачу розв'язано до кінця, бо для них одержано *стійкості критерії*, що встановлюють необхідні й достатні умови стійкості. Для нелінійних і лінійних нестаціонарних ДС такого достаточного розв'язку не існує; для них відомі лише заг. методи розв'язування задачі (див. напр., *Ляпунові методи*), які, як правило, дають лише достатні умови стійкості. Для деяких найпростіших класів нелінійних ДС (напр., ДС, що складаються із з'єднаних між собою лінійних і нелінійних блоків) одержано критерії стійкості, що в явному вигляді накладають обмеження на параметри системи; але ці критерії в заг. випадку також визначають лише достатні умови стійкості. Нелінійні ДС (на відміну від лінійних) можуть бути стійкими не при всіх початкових станах. У зв'язку з цим постає задача про стійкість в області, яка полягає в тому, щоб у просторі фазових координат  $x$  відшукати область таких початкових станів, в яких ДС приходить у заданий рівноважний (стаціонарний) стан (див. *Стойкості дискретних систем теорія*).

Аналіз якості процесу регулювання являє собою дослідження реакції ДС автомат. керування на різного роду типові діяння. Як такі діяння застосовують: 1) ступінчасті функції

$$u_n = \begin{cases} \text{const} & \text{при } n > 0 \\ 0 & \text{при } n < 0 \end{cases} \quad (2)$$

2) гармонічні  $\phi$ -ції

$$u_n = A_0 \sin(\omega n + \alpha_0), \quad (3)$$

де  $A_0$  й  $\alpha_0$  — амплітуда і початкова фаза гармонічної дії,  $\omega = \omega T$  — відносна частота (в радіанах),  $T$  — крок квантування за часом,  $\omega$  — частота; і 3) стаціонарні випадкові  $\phi$ -ції, задані їхньою спектральною щільністю або кореляційною функцією тощо.

Для лінійних ДС задачі аналізу якості процесу регулювання (див. *Критерії якості систем автоматичного керування*), як правило, можна розв'язати точно, бо в цьому разі при детермінованих пробних діях розв'язки системи рівнянь (1) можна знайти аналітично у вигляді явних  $\phi$ -цій незалежної змінної  $n$ , а при стаціонарних випадкових діях можна визначити статистичні характеристики (спектральну щільність і кореляційну  $\phi$ -цію) реакції ДС. Для нелінійних ДС ці задачі вдається розв'язати лише в найпростіших випадках і лише наближено (на рівні оцінок). Найзручнішим матем. апаратом, що його застосовують для розв'язування подібних задач, є *Ляпуна дискретні перетворювання* (або перетворювання Фур'є). Для наближеного аналізу якості процесів у нелінійних ДС широко застосовують і апарат гармонічної або статистичної лінеаризації.

Аналіз періодичних процесів (автоколивань). Система різнищевих рівнянь (1) може мати незгасаючі коливання

(періодичні) розв'язки, що задовольняють співвідношення

$$x_n = x_{n+N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

де  $N > 2$  — період коливань. У лінійних ДС таким розв'язкам відповідають коливальні процеси, що перебувають на грані стійкості (консервативні системи). У нелінійних ДС процеси виду (4) можуть бути стійкими; в цьому разі їх наз. *автоколиваннями*. Задача аналізу автоколивань полягає у визначенні параметрів (амплітуди, періоду і т. ін.) періодичних процесів та у відшукуванні умов, за яких ці процеси мають ту чи іншу форму стійкості. Параметри періодичних процесів можна визначати і точними (метод прирівнювання), і наближеними (метод гармонічної лінеаризації) методами. Точні методи, хоч і дають можливість відшукати справжні значення параметрів процесу, потребують виконання громіздких і трудомістких обчислень. Питання про стійкість знайдених періодичних процесів у цьому разі можна розв'язати строго, на основі 1-го методу Ляпунова. Для наближених методів необхідні, як правило, багато менш громіздкі обчислення, але одержані при цьому оцінки параметрів періодичних процесів і особливо оцінки їхньої стійкості не мають достатньої строгості. І точні й наближені методи визнають здебільшого апріорної інформації про можливі форми періодичних процесів (кількість імпульсів за період —  $N$ , кількість змін знака імпульсів за період тощо), а це значно утруднює практичне застосування їх і знижує цінність результатів дослідження.

Аналіз дисипативності нелінійних ДС. Нелінійну ДС наз. *дисипативною* (інколи — *гранично обмеженою*), якщо існує таке число  $\mu > 0$  і для будь-якого початкового стану  $x_0$  — таке досить велике число  $N(x_0)$ , що для всіх  $x_0$  (або для всіх  $x_0$  в певній обмеженій області)

$$|x_n| \leq \mu \quad \text{при всіх } n \geq N(x_0). \quad (5)$$

де символ  $|x|$  означає норму вектора  $x$ . Практично це означає, що з будь-яких початкових станів (або в якійсь обмеженій області) ДС наближається до якогось околу (5) початку координат (точка  $x_n = 0$ ) фазового простору і при всіх  $n \geq N$  не виходить за межі цього околу. Задача аналізу дисипативності нелінійних ДС полягає у визначенні умов (обмежень на параметри ДС), при яких ДС прямує до зазначеного околу, а також у визначенні його розмірів (числа  $\mu$ ). ДС може мати стійкі або нестійкі точки рівноваги й стійкі або нестійкі граничні цикли, що відповідають різним періодичним процесам; але якщо ця система дисипативна, то всі зазначені точки й цикли належать околові (5). Отже, аналіз дисипативності дає змогу одержати оцінку точності ДС в установлених режимах, але не дає змоги дити якихось висновків щодо тривалості та якості *перехідного процесу*. Аналіз дисип-

пативності доцільно проводити тоді, коли в ДС можуть існувати багато різних форм періодичних процесів, але апріорної інформації про їхнє число та форми немає. В цих випадках аналіз дисипативності дає змогу одержати деякі оцінки точності процесу регулювання, не вдаючись до трудомістких обчислень, пов'язаних з докладним аналізом усіх можливих форм періодичних процесів. Для аналізу дисипативності застосовують матем. апарат ф-цій Ляпунова, а в тих випадках, коли система рівнянь (1) містить лінійну частину, застосовують і частотні методи. Конкретний вид системи різницевого рівняння (1), а отже, й конкретні методи розв'язування різних задач аналізу ДС істотно залежать від виду модуляції імпульсної (способу квантування) — АІМ, ШІМ чи ЧІМ, — застосованого в системі.

Лит.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем М., 1983 [Бібліогр. с. 926—963], Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки М., 1986 [Бібліогр. с. 173—174], Кунцелич В. М., Чеховой Ю. Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широкополосной модуляцией К., 1970 [Бібліогр. с. 330—336].

В. М. Курчатов, Ю. М. Чеховий.

**ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ СИНТЕЗ** — визначення структури й значень параметрів дискретної системи керування (ДСАК), за яких система відповідає вимогам, що ставляться до неї. Звичайно при Д. с. а. к. с. об'єкт керування задано. В цьому разі задача синтезу зводиться

до параметричного синтезу) структура керуючої частини ДСАК тож буває заданою заздалегідь, і необхідно знайти лише значення її параметрів (див. *Оптимальний параметричний синтез систем збір*). В загальному випадку ДСАК має задану (незмінну) частину, і треба визначити структуру та значення параметрів змінюваної частини.

Конкретна постановка задачі синтезу й методи її розв'язування істотно залежать від характеру вимог, що ставляться до ДСАК. У багатьох практичних задачах ці вимоги мають вигляд обмежень, які накладаються на систему (напр., стійкості критерії, динамічний режим роботи, швидкодія, споживання енергії тощо). Такі задачі, як правило, мають не єдиний розв'язок і дають можливість виділити клас систем, що задовольняють поставлені вимоги. В інших випадках синтезу треба побудувати ДСАК так, щоб забезпечити мінімізацію якогось критерію (див. *Критерії якості систем автоматичного керування*). ДСАК, синтезовані за таких умов, наз. оптимальними щодо мінімуму обраного критерію.

Розв'язання багатьох задач синтезу важко формалізувати, тому деякі методи здійснення його являють собою ітераційний процес (або послідовність проб і помилок), який включає в себе дискретних систем автоматичного керування аналіз.

Найбільше розроблено й формалізовано методи синтезу лінійних ДСАК. Залежно від форми матем. описування ДСАК ці методи поділяють на синтез у частотній або часовій області.

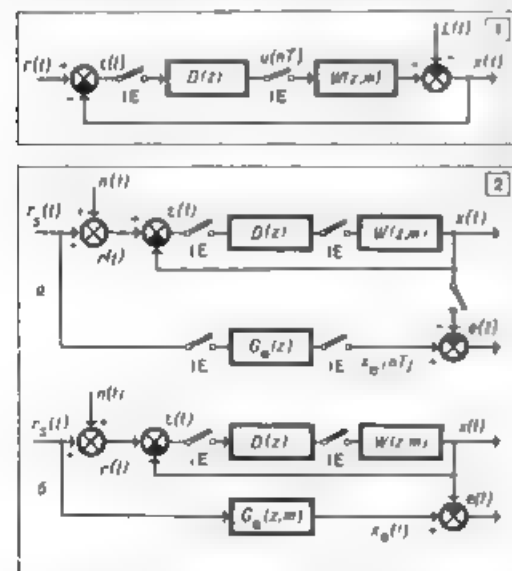
У частотній області задача полягає у визначенні оптим. (щодо обраного критерію) характеристик замкненої ДСАК — передавальної функції  $K_{замк.}(z, m)$  або частотної характеристики  $K_{замк.}(j, \omega, m)$  (див. *Частотні характеристики систем автоматичного керування*) і подальшої реалізації їх шляхом корекції систем автоматичного керування.

У багатьох методах Д. с. а. к. с. у такій постановці задачі розглядають схему послідовної дискретної корекції одноконтурної лінійної ДСАК (має. 1). Тут  $W(z, m) = \frac{x(z, m)}{u(z)}$  —

$\frac{P(z, m)}{Q(z)}$  — передавальна функція незмінної частини системи;  $D(z) = \frac{u(z)}{e(z)}$  — переда-

вальна функція коректувального пристрою;  $K_1(z, m) = \frac{z(z, m)}{r(z)}$  — передавальна функція

замкненої системи;  $K_2(z, m) = \frac{z(z, m)}{r(z)}$  — передавальна функція замкненої системи щодо похибки;  $r(t)$  — вхідний сигнал системи (задавальне діяння);  $x(t)$  — вихідний сигнал системи (керувана координата);  $u(t)$  — керуюче діяння;  $L(t)$  — збурювальне



1. Схема здійснення послідовної дискретної корекції; 2. Розрахункові схеми для синтезу систем з еталонною моделлю; а — схема, що використовує оцінки у дискретні моменти часу, б — схема, що використовує оцінки в неперервному часі.

ся до визначення структури й параметрів керуючої частини ДСАК. В одній з окремих, але важливих задач Д. с. а. к. с. (т. з. задачі

діяння (зведено до виходу системи);  $\varepsilon(z)$  — похибка системи;  $r(z, m)$ ,  $x(z, m)$ , ... — Лаплас дискретні перетворення сигналів  $r(t)$ ,  $x(t)$ , ...; ІЕ — імпульсний елемент;  $T$  — період ІЕ. Передавальну функцію дискретного коректувального пристрою  $D(z)$  знаходять після визначення оптимальної передавальної функції замкненої системи за формулою

$$D(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{K_{\text{з. опт.}}(z)z}{1 - K_{\text{з. опт.}}(z)z}$$

або

$$D(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{1 - K_{\text{з. опт.}}(z)z}{K_{\text{з. опт.}}(z)z}$$

Різні вимоги, які ставлять до системи і її передавальної функції  $K_{\text{з. опт.}}(z)$ , використо-

вляють для скінченної тривалості процесів, ставлять для поліноміальних вхідних діянь

$$r_A(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i,$$

де  $t$  — неперервний час,  $a_i = \text{const}$ ,  $k \geq 1$ . У лінійних ДСАК має місце процес скінченної тривалості, якщо  $K_{\text{з. опт.}}(z)$  є скінченим поліномом по степенях  $z^{-1}$ . Розроблено ще методи синтезу систем зі скінченною тривалістю процесів, коли є обмеження (типу насичення) на керуюче діяння, а також з урахуванням збурювальних діянь; в останньому випадку система синтезується так, щоб здійснювались умови скінченної тривалості і щодо діяння  $r(t)$ , і щодо діяння  $L(t)$ .

Синтез систем з еталонною моделлю. Часто за показник якості сис-

| Вимоги, які ставлять до системи | Вимоги, які має задовольняти при цьому передавальна функція замкненої системи $K_{\text{з. опт.}}(z)$   |
|---------------------------------|---|
| Фізична реалізованість          | Степінь чисельника $K_{\text{з. опт.}}(z)$ не повинен перевищувати степеня знаменника ( $W(z, m)$ — не містити змінних)   |
| Стійкість                       | Усі полюси $K_{\text{з. опт.}}(z)$ мають розташовуватися всередині кола одиничного радіуса  |
| Грубість                        | $K_{\text{з. опт.}}(z)z$ має містити множник $[P(z)]$ (якщо невідома частина стійка) і, крім того, $K_{\text{з. опт.}}(z)z$ має містити множник $[Q(z)]$ (якщо невідома частина нестійка) |
| Астатизм $k$ -го порядку        | $K_{\text{з. опт.}}(z)z$ має містити множник $(z-1)^k$  |
| Відсутність прихованих коливань | $K_{\text{з. опт.}}(z)z$ має містити множник $P(z)$   |

Примітка. Операцію представлення полінома  $A(z)$  у вигляді добутку двох співмножників  $A(z) = [A(z)]_+ [A(z)]_-$ , перший з яких  $[A(z)]_+$  має всі нулі всередині кола одиничного радіуса, а другий  $[A(z)]_-$  — поза ним, який наз. операцією факторизації.

| Вид функції $F(e)$ і додаткові умови                              | Показник якості систем $I(m)$   |
|---|---|
| $F(e) = 1$  | $I(m) = \sum_{n=0}^{m-1} 1 = m$ — час перехідного процесу   |
| $F(e) = e[nT, m]$<br>$\lim_{m \rightarrow \infty}$                | $I(m) = \sum_{n=0}^{m-1} e[nT, m]$ — сума похибок   |
| $F(e) = e^2[nT, m]$<br>$\lim_{m \rightarrow \infty}$              | $I(m) = \sum_{n=0}^{m-1} e^2[nT, m]$ — сума квадратичних похибок  |
| $F(e) = e^2[nT, m]$ ,<br>$e[nT, m] \equiv 0$ при $n \geq \lambda$ | $I(m) = \sum_{n=0}^{m-1} e^2[nT, m]$ — сума квадратичних похибок за скінченної тривалості перехідного процесу |

вуючи методи Д. с. а. к. с. цього класу, наведено у верхній табл.

Розглянемо докладніше деякі постановки задач Д. с. а. к. с. і методи розв'язування їх.

Синтез за умовами скінченної тривалості процесів. Задачу синтезу систем, які мають властивість

теми беруть функціонал  $I(m)$  функції решітчастої, яка є різницею між бажаним  $x_e[nT, m]$  і дійсним  $x[nT, m]$  вихідними сигналами:

$$e[nT, m] = x_e[nT, m] - x[nT, m].$$

При цьому застосовують розрахункові схеми з т. з. еталонною моделлю (мал. 2). Тут

$G_e(z, m)$  — передавальна функція еталонної моделі, яка здійснює задане перетворення корисного сигналу  $r_e$  на потрібний  $x_e$ ;  $\pi(t)$  — завада; решта позначень відповідає прийняттю на мал. 1.

У досить загальному випадку функціонал  $I(m)$  можна подати у вигляді

$$I(m) = \sum_{n=0}^{T-1} F(e|nT, m), \quad (1)$$

де  $F(e)$  — певна функція. Окремі випадки  $F(e)$  й відповідні показники якості наведено в нижній табл.

Щоб оцінити поведінку системи між дискретними моментами часу, розглядають середнє значення функціоналу (1)

$$\overline{I(m)} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \int_0^T F(e|nT, m) dm.$$

При цьому, як і в розглянутих вище у табл. випадках, залежно від виду  $F(e)$  одержують різні показники якості системи. Якщо вхідний сигнал системи  $r(t)$  являє собою стаціонарний випадковий процес, за показника, аналогічний наведеному вище, беруть

$$I(m) = M \left\{ \sum_{n=0}^{T-1} F(e|nT, m) \right\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \overline{I(m)} &= \frac{1}{T} M \left\{ \sum_{n=0}^{T-1} \int_0^T F(e|nT, m) dm \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} M \left\{ \int_0^T F(e|nT, m) dm \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

відповідно для дискретного й неперервного часу, де  $M$  — символ математичного сподівання.

Для випадку, коли  $F(e) = e^2$ , в незмінювана частина системи  $W(z)$  стійка й не має запізнювання, передавальна функція системи, оптимальна щодо мінімуму функціоналу (2) або (3), визначається формулами

$$\begin{aligned} K_{\text{а. опт.}}(z)_x &= \frac{1}{[\Phi_{rr}(z)]_+} \times \\ &\times \left\{ \frac{G_e(z) [\Phi_{r,r_e}(z) + \Phi_{rr_e}(z)]}{[\Phi_{rr}(z)]_-} \right\}_+ \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} K_{\text{а. опт.}}(z)_x &= \frac{W(z)}{[K_1(z)]_+ [\Phi_{rr}(z)]_+} \times \\ &\times \left\{ \frac{K_2(z^{-1}) [\Phi_{r,r_e}(z) + \Phi_{rr_e}(z)]}{[K_1(z)]_- [\Phi_{rr}(z)]_-} \right\}_+ \end{aligned}$$

де  $K_1(z) = \int_0^1 W(z, m) W(z^{-1}, m) dm;$

$$K_2(z) = \int_0^1 \hat{W}G_e(z, m) dm.$$

$$\hat{W}G_e(z, m) = Z_m[W(-z)G_e(s)].$$

$z$  — параметр змичайного перетворення Лапласа,

$Z_m$  — символ модифікованого  $z$ -перетворення;  $\Phi_{r,r_e}(z)$ ,  $\Phi_{rr}(z)$ ,  $\Phi_{rr_e}(z)$  — спектральні щільності  $z$ -перетворення автокореляційних функцій сигналів  $r_e$  та  $r$  і взаємної кореляційної функції сигналів  $r_e$  та  $r$ ;  $\{A(z)\}_+ + \{A(z)\}_- = A(z)$  — операція розщеплення, тобто подання полінома  $A(z)$  у вигляді суми двох поліномів, перший з яких  $\{A(z)\}_+$  має полюси всередині кола одиничного радіуса, а другий —  $\{A(z)\}_-$  — поза ним.

При статистичному Д. с. а. н. с. розв'язано велику кількість задач, які відрізняються видом незмінюваної частини  $W(z)$  (нестійка, із запізнюванням), вибраних функціоналів і обмежень. Розрахункові процедури для детермінованих діянь  $r(t)$  багато в чому подібні наведеним вище.

У ряді випадків еталонну модель можна задати іншими характеристиками (напр., розташуванням своїх полюсів, частотною характеристикою); при цьому застосовують також кореневий логарифмічний метод, метод логарифмічних частотних характеристик та ін.

При розв'язуванні задачі Д. с. а. н. с. у часовій області великого поширення набув метод аналітичного конструювання регуляторів. Для лінійного, повністю керованого об'єкта, описуваного різницею рівняннями

$$x[(n+1)T] = Ax[nT] + Bu[nT],$$

цей метод дає змогу визначити таке керування  $u[nT] = U(x[nT])$ , при якому поряд із забезпеченням асимптотичної стійкості системою керування мінімізується функціонал

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(x[nT], u[nT]). \quad (4)$$

Тут  $x[nT]$  —  $m$ -вимірний вектор фазових координат;  $u[nT]$  —  $q$ -вимірний вектор керуючих діянь;  $A$ ,  $B$  — числові матриці;  $\omega(x[nT], u[nT]) = x'[nT] Qx[nT] + 2x'[nT] \times Bu[nT] + u'[nT] Ru[nT]$ ,  $Q > 0$ ;  $B > 0$ ;  $R > 0$  — задані числові матриці, які задовольняють умову  $|QB'R| > 0$ ; ' — знак транспонування.

Відомо кілька різних методів розв'язування цієї задачі, які дають однакові остаточні результати; найпростіший з них ґрунтується на використанні функцій Ляпунова. Вибираючи додатно означену функцію Ляпунова  $v[nT] = V(x[nT], u[nT])$ , першу різницю якої беруть рівною  $-\omega(x[nT], u[nT])$ , одержують

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (-\Delta v[nT]) = V(x[0], u[0]).$$

Показано, що коли вибирають  $V(x|nT)$  у вигляді  $V(x|nT) = x' |nT| P x |nT|$ , керування, оптимальне щодо мінімуму функціоналу (4), має вигляд

$$u(x|nT) = -(R + B'PB)^{-1}(B'PA + B')x|nT|,$$

де додатно означену матрицю  $P$  визначають з рівняння

$$P = A'PA - Q + (A'PB + B')(R + B'PB)^{-1} \times \\ \times (A'PB + B') = 0.$$

Багато в розглянутих вище методах Д. с. а. к. с. поширено і на випадок дискретних багатовимірних систем автоматичного керування. При синтезі таких систем застосовують і деякі специфічні методи, наприклад, синтез за умовами автономності або інваріантності (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*).

Для нелінійних об'єктів у загальному випадку не вдасться розв'язати задачу керування у вигляді  $u = L(x)$  ( $L$  — в загальному випадку нелінійний оператор), тобто в класі систем із зворотним зв'язком. Відомі лише методи визначення оптимального програмного керування, тобто керування, яке відшуковують у вигляді  $u = u(nT)$ . Так, наприклад, для об'єктів, описуваних нелінійним різницевим рівнянням

$$x[(n+1)T] = F(x|nT, u(nT, nT)),$$

де  $u \in R$ ,  $R$  — замкнена обмежена множина допустимих керувань, послідовність керування  $u|nT|$ , що мінімізує вибраний функціонал, можна визначити або за допомогою дискретного аналога принципу максимуму, або за допомогою методів програмування динамічного.

Крім розглянутих методів останнім часом значну увагу приділяють синтезові дискретних систем керування об'єктами з випадковими параметрами; синтез таких систем базується на застосуванні ідей та методів *дуального керування* і керування з адаптацією. Див. також *Неперервні системи автоматичного керування синтез*.

Літ. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [Бібліогр. с. 926-963]. Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. М., 1966 [Бібліогр. с. 173-174]. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М., 1968 [Бібліогр. с. 410-413]. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968 [Бібліогр. с. 347-361]. Чандр Ш. С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. Пер. с англ. М., 1964. Ю. В. Кременецкий В. М. Кривичко.

**ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ** — один з основних методів математичної статистики, застосовуваний для аналізу результатів спостережень, що залежать від різноманітних факторів, які діють одночасно, для вибору найважливіших факторів, оцінки їхнього впливу на ці результати тощо. Д. а. розвивався переважно у зв'язку з застосуванням його в с.-г. статистиці. Тепер Д. а. застосовують, аналізуючи найрізноманітніші експерименти. Одним з першочергових питань, розглядуваних Д. а., є питання про те, чи

сукупність спостережень експерименту з набором спостережень однієї нормально розподіленої випадкової величини, чи сумішню спостережень нормально розподілених випадкових величин, що різняться лише середніми значеннями. Прикладом застосування Д. а. є с.-г. експерименти, коли порівнюють впливи різних добрив, способів обробки ґрунту й сортів насіння на врожайність культур.

Найпростішу з задач Д. а. можна описати так. Припустимо, що одержані під час експерименту спостереження поділено на  $r$  груп, причому  $i$ -а група містить  $n_i$  величин, припустимо нормальної, з середнім значенням  $m_i$  і дисперсією  $\sigma^2$ , постійною для всіх груп. Треба перевірити гіпотезу (див. *Статистична перевірка гіпотез*) про те, що всі значення  $m_i$  дорівнюють одне одному, або оцінити міліяльність середніх  $m_i$ . Нехай  $x_{ij}$  —  $i$ -а величина в  $i$ -й

групі,  $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$  — серед. арифмет. спостережень  $i$ -ї групи, а  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

( $n = \sum_{i=1}^r n_i$ ) — серед. арифметичне всіх спостережень. Рівність

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \\ + \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

становить позву суму квадратів відхилень спостережень від загального серед.  $\bar{x}$  у вигляді суми двох частин, з яких перша дає суму квадратів відхилень кожного спостереження від відповідного групового серед. значення (сума квадратів усередині груп), а друга — суму квадратів відхилень групових серед. значень від загального серед. значення (сума квадратів між групами). Величини

$$Q_1 = \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

пов'язані з оцінкою дисперсії всередині груп та оцінкою дисперсії між групами і мають такі властивості. Якщо випадкові величини незалежні й мають нормальний розподіл з загальною дисперсією  $\sigma^2$ , то величини  $Q_1$  і  $Q_2$  незалежні. Коли припустити, що  $m_i = m$  для всіх  $i$ , величини

$\frac{Q_1}{\sigma^2}$ ,  $\frac{Q_2}{\sigma^2}$ ,  $\frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$  мають розподіл  $\chi^2$  з  $n - 1$ ,  $r - 1$ ,  $n - r$  ступенями вільності відповідно. Якщо величина

$S_1^2 = \frac{1}{r-1} Q_1$  мало відрізняється від величини  $S_2^2 = \frac{1}{n-r} Q_2$ , то немає підстав вва-

жати серед. значення у групах за різні. А коли  $S_1^2$  значно переважає  $S_2^2$ , то виникає підозра, що серед. значення груп різні.

Більш обґрунтовані висновки одержують так. Відношення  $\frac{S_1^2}{S_2^2}$  наз. дисперсійним відношенням і має розподіл (розподіл  $F$ ), визначуваний числами  $r$  і  $n$ . Замість дисперсійного відношення часто використовують величину

$\lambda$ , яку визначають за рівнянням  $e^{2\lambda} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ .

Розподіл величини  $\lambda$  також відомий, є таблиці розподілів величин  $e^{2\lambda}$  і  $\lambda$ . Для перевірки гіпотези про те, що  $m_1$  однакові при всіх  $i$ , користуються критерієм  $\chi^2$ . Критерій  $\chi^2$  полягає в тому, що припущення про рівність середніх відкидається при рівні значущості  $\alpha$ , коли для одержаного під час експерименту значення  $\chi^2$  виконується нерівність  $|\chi^2| > \chi_{\alpha}^2$ , де  $\chi_{\alpha}^2$  визначається так, що ймовірність  $P(|\chi^2| > \chi_{\alpha}^2) = \alpha$ . Якщо серед. значення  $m_1$  не рівні одне одному, то величина  $\frac{r-1}{n} \times$

$\times (S_1^2 - S_2^2)$  є незсувеною оцінкою (див. *Статистичні оцінки*) для значення  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \lambda_i (m_i - \bar{m})^2$ , (тут  $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \lambda_i m_i$ ). Іке можна розглядати як міру мінливості невідомих середніх значень  $m_i$ . Величина

$t = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (m_1 - m_2)}{S_2}$  має розподіл Стюдента з  $n - r$  ступенями вільності. Інтервал  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha} S_2 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

є довірчим інтервалом для різниці між невідомими серед.  $m_1 - m_2$ , який відповідає довірчому рівненню, число  $t_{\alpha}$  вибрано так, що  $P(|t| > t_{\alpha}) = \alpha$ . Розглянутий метод наз. також однофакторним аналізом, або класифікацією за однією ознакою. Д. а. можна узагальнити на випадок, коли спостереження є незалежними  $k$ -вимірними випадковими векторами або коли спостережувані випадкові величини поділяються на групи складнішим способом, напр., за кількома ознаками (б-а-гатофакторний аналіз) тощо.

Важливий клас задач Д. а. пов'язаний з аналізом моделей з випадковими факторами. В найпростішому випадку розглядають схему, в якій спостереження  $x_{ij}$  мають структуру  $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ , де величини  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  незалежні в сукупності й мають нульові

математичні сподівання, причому  $\alpha_i$  однаково розподілені з дисперсією  $\sigma_{\alpha}^2$ , а  $\beta_j$  — з дисперсією  $\sigma_{\beta}^2$ . Спостереження  $x_{ij}$ , що стосуються  $i$ -ї групи, залежні, ця залежність характеризується коеф. внутрішньогрупової кореляції  $\rho$  величин  $x_{ij}$  і  $x_{i'j}$  ( $j \neq j'$ ):

$\rho = \frac{\sigma_{\alpha}^2}{\sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\beta}^2}$ . За припущення, що величини  $\alpha_i$  і  $\beta_j$  — нормальні випадкові величини, побудовано довірчі інтервали для  $\rho$ , довірчі інтервали й оцінки для  $\sigma_{\alpha}^2$  і  $\sigma_{\beta}^2$ , критерії для перевірки гіпотези про те, що  $\sigma_{\alpha}^2 = 0$ , тощо.

Лит. Шеффе Г. Дисперсійний аналіз. Пер. с англ. М., 1983 (бібліогр. с. 818–825).

А. Я. Доросинцев, ДИСПЕРСІЯ (лат. dispersio — розсіювання)

Діє випадковою величини  $\xi$  є характеристика розкидання значень цієї випадкової величини навколо її математичного сподівання; визначається формулою  $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ , де  $M$  — символ математичного сподівання. Величина  $\sqrt{D\xi}$  наз. стандартним відхиленням випадкової величини і є мірою, що характеризує розкид можливих значень відносно її середнього значення  $M\xi$ . Якщо  $\xi$  — дискретна випадкова величина, що набуває значення  $x_k$  з ймовірностями  $p_k$ , то  $D$  можна обчислити за формулою  $D\xi = \sum x_k^2 p_k - (\sum x_k p_k)^2$ , а якщо  $\xi$  має щільність розподілу  $p(x)$ , то

$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \right)^2$ .

Оск. властивості Д.: Д. сталої дорівнює нулеві; Д. не зміниться, якщо до випадкової величини додати сталу; при множенні випадкової величини на сталий множник  $k$  Д. множиться на  $M^2$ ; Д. суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі Д. Якщо  $D\xi = 0$ , то  $P(\xi = c) = 1$  для якоїсь сталої  $c$ .

Наведемо значення Д. для найважливіших розподілів (при цьому для дискретних розподілів візьмемо  $p_k = P(\xi = k)$ ):

1) біномний розподіл  $p_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $D\xi = np(1-p)$ ,

2) гіпергеометричний розподіл  $p_k = C_N^k \times C_{N-k}^{n-k} (C_N^n)^{-1}$ ,  $k = \min(n, N)$ ,  $n \leq N$ ,  $D\xi = (N-n)(N-1)^{-1} np(1-p)(Np-z)$ ,

3) розподіл Пуассона  $p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ ,  $D\xi = a$  (тобто Д. пуассонівського розподілу збігається з його середнім значенням),

4) розподіл Гауса  $f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$ ,  $D\xi = \sigma^2$ ,

5) рівномірний розподіл в інтервалі  $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ ,  $f(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{\frac{a}{2}}\right)$ ,  $D\xi = \frac{a^2}{12}$ .

6) показниковий розподіл  $p(x) = ae^{-ax}$  ( $x > 0$ ),  $D\xi = \frac{2}{a^2}$ ;

7) гамма-розподіл  $f(x) = \frac{x^{\mu-1}e^{-x}}{\Gamma(\mu)}$ ,  $D\xi = \mu = M\xi$ ;

8) розподіл Стюдента  $D\xi = \frac{n}{n-2}$ , де  $n$  — число ступенів вільності;

9) логнормальний розподіл  $p(x) = a \times (\sqrt{2\pi x})^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \times (b + \ln x)^2\right\}$ ,  $x > 0$ ,

$D\xi = \omega^2 p^2 (\omega^2 - 1)$ ,  $\omega = \exp\left(\frac{1}{2} a^2\right)$ ,  $p = \exp\left(-\frac{b^2}{a^2}\right)$  (див. Розподілі ймовірностей).

Щоб визначити Д. за рядом  $x_1, x_2, \dots, x_n$  незалежних результатів вимірювань випадкової величини, беруть  $D\xi = s^2$ , де  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ ,  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ .

Величина  $s^2$  є персональною оцінкою  $D\xi$ , тобто при  $n \rightarrow \infty$   $s^2$  сходиться за ймовірністю до  $D\xi$ ; більше того, величина  $\sqrt{n}(s^2 - D\xi)$  при  $n \gg 1$  має розподіл, близький до нормального із середнім значенням нуль і Д.  $\mu_1 = (D\xi)^2$ , де  $\mu_1 = M(\xi - M\xi)^4$ . Докладнішу інформацію про величину  $s^2$  можна одержати при конкретних припущеннях про розподіл величини  $\xi$ . Напр., якщо  $\xi$  має нормальний розподіл з параметрами  $(a, \sigma^2)$ , то  $\frac{\sqrt{n-1}s^2}{\sigma^2}$  має розподіл, що не залежить від  $a$

і  $\sigma^2$  ( $\chi^2$  — розподіл з  $n-1$  ступенем вільності), що дає змогу будувати для Д. *двоіри інтервали*.

В. І. Гіжало.  
ДИСПЕТЧЕР у програмуванні — див. Операційна система.

ДИСПЕТЧЕРСЬКОГО УПРАВЛІННЯ АВТОМАТИЗАЦІЯ — застосування комплексної системи (клас систем *людина — машина*) для автоматизації процесу управління з урахуванням оптимальних режимів роботи керованого об'єкта. За допомогою Д. у. а. здійснюється: збирання та обробка інформації про хід керованого процесу, оперативне планування роботи об'єкта в опт. режимі, контроль за виконанням оперативних планів шляхом видавання диспетчером сигналів (на світлових табло, друкованих бланках тощо), одержування поточної інформації про хід процесу й виконання оперативних наказів, одержування даних про стан об'єкта тощо. В систему Д. у. а. входять: оператор (диспетчер), *керуюча обчислювальна машина* (КОМ), засоби зв'язку оператора з КОМ і керованими об'єктами (включаючи телезв'язок), системи давачів і виконавчих пристроїв, які здійснюють контроль і виконання наказів безпосередньо на об'єкті. Частиною системи, яка включає в себе КОМ і засоби зв'язку з оператором, наз. а в т о д и с п е т ч е -

р о ж. 6 два ступені Д. у. а.: на першому система працює як «спорадника», КОМ розробляє оперативні плани роботи об'єкта і звіряє відповідку інформацію, а виконує їх диспетчер (оператор); на другому ступені всі функції управління бере на себе КОМ, яка має *авторитетний зв'язок*. За допомогою такої системи повністю здійснюється планування, контроль і аналіз роботи об'єкта. У цьому разі система функціонує як самопритосовувана. Втручання оператора потрібне тільки в особливо складних випадках. Д. у. а. застосовують адекватного при управлінні транспортом, енергооб'єднаннями, металург. та хім. підприємствами, в системах зв'язку тощо. В СРСР за допомогою Д. у. а. було вперше здійснено стиккування космічних кораблів у міжпланетному просторі, а також керування космічним апаратом «Луноход-1». На Україні комплексну Д. у. а. застосовують на Ворошиловградському паровозобудівному заводі, Львівському телевізійному заводі та на інших машинобудівних і приладобудівних заводах.

На залізницях застосовують дільничні, станційні й комплексні автоматизовані системи диспетчерського управління. В цих системах КОМ збирає та обробляє інформацію про рух поїздів, складає й коректує плани-графіки руху поїздів і здійснює оперативний контроль за виконанням їх. За диспетчером зберігається заг. керівництво й виконання функцій, які важко алгоритмизувати. При Д. у. а. машина за допомогою комплексу програм видає план-графік руху поїздів на 2—4 год. Для здійснення функцій управління рухом (коректувань графіка) в машину з дорожньої дільниці надходить інформація про рух поїздів на дільниці. Як тільки з чергової  $k$ -ї станції відходить поїзд, за допомогою Д. у. а. автоматично встановлюється маршрут за проходження наступної  $k+1$ — $k+2$  станції, а йноді й двох станцій, з урахуванням поїзної обстановки на дільниці. Д. у. а. на дільничних залізницях дає змогу раціонально вести графік руху вантажних і пасажирських поїздів залежно від кількості їх на дільниці, їхньої ваги, місцезнаходження тощо; забезпечує централізоване управління на одноколіїних та одноколіїних із двоколіїними встанками дільничних протяжністю до 600 км з кількістю поїздів на добу до 100—500, при швидкості понад 150 км/год. Економ. ефектом застосування Д. у. а. на залізницях є збільшення дільничної швидкості руху поїздів на 5—10%. Д. у. а. широко застосовують на великих сортувальних і вузлових станціях і під час планування робіт. Тут осн. економічний ефект полягає в поліпшенні обороту вагонів і локомотивів, зменшенні кількості маневрових засобів. Першу автоматизовану систему диспетчерського управління в СРСР розроблено 1953 — 63.

Д. у. а. енергосистемами широко застосовують в СРСР, це дає значний економ. ефект: напр., внаслідок зменшення витрати умовного валива на 1% можна зекономити понад

30 млн. крб. Д. у. а. енергосистемами дає змогу виконувати осв. функції щодо планування тривалості і добових режимів, оперативно коректувати режим енерг. об'єднання, запобігати аваріям, розпізнавати й ліквідувати перед аваріями та аварійні ситуації. За допомогою Д. у. а. здійснюється абірація та обробка статистичних даних про витрату енергії, які надходять від споживачів, а також від електростанцій та енергосистем; про стан стаціонарного устаткування, високовольтних ліній передачі, запасів води у водосховищах гідроелектростанцій тощо. На основі складених планів провадиться автомат. розрахунок добових графіків розподілу навантаження між електростанціями й великими агрегатами. В процесі реалізації добового графіка здійснюється автомат. коректування режиму функціонування енергосистем.

У США Д. у. а. застосовують в управлінні Каліфорнійською енергосистемою. Подібне до цього управління енергосистемами застосовують у Франції, Англії, ФРН, Японії та ін. країнах.

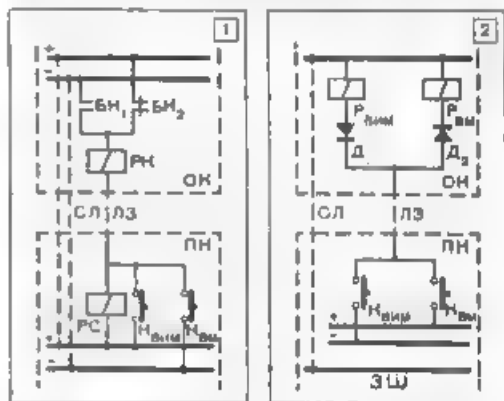
Літ., Буданцев Ю. Ю. Электронные помощники диспетчера М., 1963. Островский А. С. Техника связи, диспетчеризация и оперативного управления в промышленности М. — Л., 1964. [Бібліогр. с. 223—224]. Диканчик С. В. Организация диспетчерской службы отраслевого производственного объединения Л., 1965. Захаров В. А. Участковый автодиспетчер. М., 1967. [Бібліогр. с. 220]. Петров А. П. Эксплуатация железных дорог с применением электронной вычислительной техники М., 1969. [Бібліогр. с. 187—189].

О. О. Балама, В. В. Шкурба.  
**ДИСТАНЦІЙНЕ КЕРУВАННЯ** — процес виконання оператором або автоматичним пристроєм операцій зміни стану технічних об'єктів на відстані шляхом передавання сигналів по лініях зв'язку. Як правило, у процесі Д. к. здійснюються і передавання сигналів про виконання цих операцій (дистанційний контроль). При Д. к. звичайно виконують найпростіші операції — вмикають або вимикають об'єкт, передають сигнал про його стан тощо. Д. к. широко застосовують у диспетчерських системах пром. підприємств, електростанцій і електр. мереж, гідротех. споруд, шахт і зал. з'єднань вузлів. Об'єктами керування є вимикачі, роз'єднувачі, контактори для пуску електр. двигунів, засувки й вентилі. Кожному об'єкту для керування виділяють самостійну лінію зв'язку. В системах з Д. к., як правило, використовують проводів (звичайно кабельні) ліній зв'язку. Оскільки при такому керуванні не використовують методи ущільнення ліній зв'язку, то сигнали, що передаються, прості за формою і звичайно являють собою імпульси (або неперервні сигнали) постійного струму, які відрізняються в деяких випадках інтенсивністю й полярністю. Системи з Д. к. відзначаються простою структурою й високою надійністю. Вплив зовнішніх електр. і магн. полів послаблюється завдяки екрануванню багатожильних кабельних ліній зв'язку та підвищенню потужності сигналів керування.

Економічна ефективність використання систем з Д. к. визначається кількістю об'єктів

керування й довжиною лінії зв'язку. Ці системи доцільно використовувати при відносно невеликих відстанях — до 2—4 км, при 20—30 об'єктах керування. При більших відстанях для керування об'єктами використовують засоби телемеханіки.

Б багато варіантів схем Д. к. Розробляючи такі схеми, особливу увагу приділяють захистові від хибних операцій, зумовлених заходами або пошкодженнями апаратури. На мал. 1 показано електричну схему керування об'єктом, який може перебувати в двох станах



1. Схема дистанційного керування двопозиційним об'єктом.  
2. Варіант схем дистанційного керування двопозиційним об'єктом

(двопозиційним об'єктом). Об'єкт керування ОК з'єднується з пунктом керування ПК лінією зв'язку ЛЗ. Схеми на ОК та ПК живить одне джерело постійного струму через спільну лінію СЛ. В нормальному (неробочому) стані обмотки реле керування РК та реле сигналізації положення об'єкта РС обтікає струм, величина якого залежить від опору обмоток РК та РС, а полярність — від стану об'єкта керування. Якщо об'єкт звимінно, то його блок-контакти БК<sub>1</sub> замикаються, а БК<sub>2</sub> — розмикаються. Величина струму, який протікає по лінії зв'язку, обмежується опором обмотки реле РС, вона недостатня для спрацювання реле РК. Вмикають (вимикають) об'єкт на ПК, натискаючи кнопку вмикання К<sub>вм</sub> (кнопку вимикання К<sub>вим</sub>). При цьому обмотка реле РС закоротується і струм у колі різко збільшується. Реле РК спрацьовує, і його контакти й допоміжними блок-контактами об'єкта здійснюються операції керування.

У наведеній схемі команди керування й сигнали стану об'єкта передаються по однопровідній лінії. Щоб підвищити надійність роботи схем Д. к., використовують двопровідні лінії, в яких команди керування й сигнали стану об'єкта передають по окремих лініях. У схемі керування двопозиційним об'єктом (мал. 2) команди керування розділяються діодами за полярністю струму керу-



вання. Коли натиснути  $K_{ВМ}$ , до лінії зв'язку надходить струм, полярність якого приймають за позитивну, а на ОК через діод  $D_2$  вмикається обмотка реле вмикаєння  $R_{ВМ}$ . Реле спрацює і об'єкт вмикається контактами цього реле. Щоб вимкнути об'єкт, натискають кнопку  $K_{ВМ}$ , і струм зворотної полярності через діод  $D_1$  вмикає реле вимикання  $R_{ВМ}$ , контактами якого об'єкт вимикається.

Лит.: Райнес Р. Л. Дистанционное управление. В кн.: Автоматизация производства и промышленная электроника, т. 1. М., 1962; Райнес Р. Л., Горинзон О. А. Телеуправление. М.—Л., 1965 (библиогр. с. 531—536).

**А. М. Лычек.**  
**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ** — система автоматичного керування з законом регулювання, при якому інформація про збурення вводиться за допомогою диференціальних зворотних зв'язків на вхідною та вихідною координатами ланки, яка виникає дії збурення. Такі системи наз. ще системами з непрямым або диференціальним вимірюванням збурення (за аналогією з мех. диференціалом, де проводяться віднімання мех. обертотних рухів). У Д. с. а. к. величину, яка чисельно дорівнює збуренню або перебуває в незмінній і достатньо простій залежності від нього, можна виділити порівнюванням величин  $\lambda_y$  і  $\lambda_x$ , одержаних перетворенням координат у і x замкнутого контура (відповідну ділянку схеми на мал. обведено пунктиром). Ці координати слід обрати так, щоб збурення  $\lambda$  було між ними. Розглянемо лінійну систему автомат. регулювання (див. мал.). За нульових початкових умов

$$\lambda_x(p) = \lambda_y(p) - \lambda_z(p) =$$

$$= [Y_{n1}(p) - Y_{n2}(p) Y_1(p) Y_2(p)] u(p) - Y_{n2}(p) Y_2(p) \lambda(p). \quad (1)$$

де  $p$  — параметр перетворення Лапласа. Якщо виконується рівність

$$Y_{n1}(p) = Y_{n2}(p) Y_1(p) Y_2(p), \quad (2)$$

що й часто наз. умовою еквівалентності, то

$$\lambda_x(p) = -Y_{n2}(p) Y_2(p) \lambda(p). \quad (3)$$

Якщо, крім цього,  $Y_{n2}(p) = Y_2^{-1}(p)$  і  $Y_{n1}(p) = Y_1(p)$ , то  $\lambda_x = -\lambda$ . Отже, за виконання умов (2, 3) величина  $\lambda_x$  є аналогом збурення  $\lambda$ . Цю властивість можна використати для створення компаундуемого зв'язку КЗ (див. мал.). Передавальна функція системи відносно збурення  $\lambda$

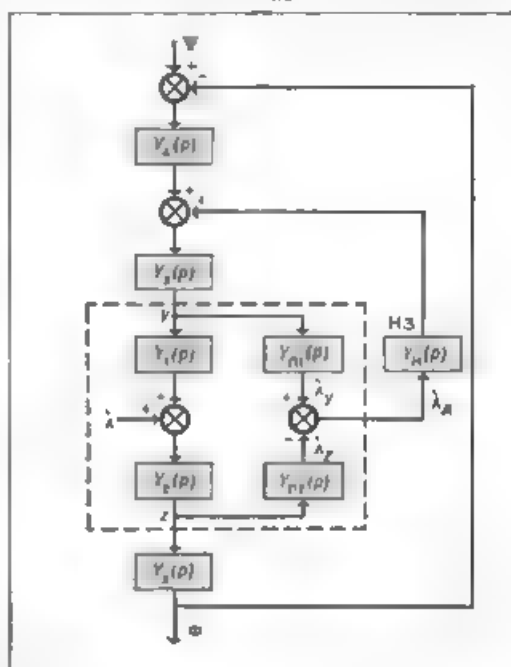
$$Y_{збур}(p) = \frac{\Phi(p)}{\lambda(p)} =$$

$$= \frac{Y_2(p) Y_1(p) [1 - Y_2(p) Y_{n1}(p) Y_n(p)]}{1 + Y_1(p) Y_2(p) Y_3(p) Y_4(p) Y_5(p) - Y_2(p) Y_n(p) [Y_{n1}(p) - Y_2(p) Y_1(p) Y_{n2}(p)]} \quad (4)$$

Якщо виконується умова (2), то

$$Y_{збур} = \frac{Y_2(p) Y_1(p) [1 - Y_2(p) Y_{n1}(p) Y_n(p)]}{1 + Y_1(p) Y_2(p) Y_3(p) Y_4(p) Y_5(p)} \quad (5)$$

У зв'язанні з рівняння (5) немає передавальних функцій елементів, за допомогою яких здійснюється диференціальне вимірювання збурення. Отже, при точному виконанні воно не впливає на стійкість системи. Ланка  $Y_n(p)$  створює з елементом  $Y_{n1}(p)$  позитивний зго-



Структурна схема диференціальної системи автоматичного керування:  $U$  — задальне рівняння,  $\Phi$  — регульована величина,  $\lambda$  — збурення,  $\lambda_x$  — непрямо вимірюване збурення;  $Y_i(p)$  — передавальні функції елементів системи.

ротний зв'язок, а з елементом  $Y_{n2}(p)$  — негативний. При виконанні умови (2) вплив цих зв'язків на стійкість взаємно знищується. Відхилення від умови (2) еквівалентне зворотному зв'язкові (позитивному чи негативному). З рівняння (5) можна зробити висновок, що для забезпечення абс. інваріантності  $\Phi$  відносно  $\lambda$  необхідно, щоб

$$Y_n(p) = Y_2^{-1}(p) \cdot Y_{n1}^{-1}(p). \quad (6)$$

Ця умова важко здійснювана в загальному випадку, бо при цьому потрібно реалізувати обернені передавальні функції

$$Y_{n2}^{-1}(p) \text{ і } Y_2^{-1}(p) Y_{n1}^{-1}(p).$$

Таким чином, у Д. с. а. к. можлива тільки інваріантність до  $\lambda$  умова (6) вказує лише

можу, до якої треба наблизити  $Y_k(p)$ . Разом з тим у Д. с. а. к. можна здійснювати інваріантність і в установлених режимах, більше того, ця система, будучи замкнена, дає змогу забезпечити не лише компенсацію, а й перекомпенсацію дії збурення (негативний статизм регулювання), — як і системи з компаундуючим зв'язками за збуренням. Для цього необхідно, щоб

$$Y_k(0) > \frac{1}{Y_s(0)Y_{pi}(0)}. \quad (7)$$

Принцип диференціального вимірювання збурення можна використовувати в деяких мелінійних системах. Прикладом Д. с. а. к. є система стабілізації напруги генератора, тут об'єкт керування — генератор — охоплюється диференціальним зв'язком (звількою). Диференціальне вимірювання збурень застосовують і в слідуючих системах, у системах стабілізації дільних апаратів, системах екстремального регулювання і т. ін.

Літ. Костюк О. М. Умова еквівалентності систем диференціального керування та систем керування за збуреннями. «Автоматика», 1961, № 1. Мгнський І. М. К вопросу о реализации принципа инвариантности. Изв. АН ССР Энергетика и автоматика, 1961, № 5. Кухарко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [бібліогр. с. 384—374]. Івазкевич О. Г. Нестабильні системи з комбінованим керуванням. К., 1963 [бібліогр. с. 471—479]. В. І. Костюк.

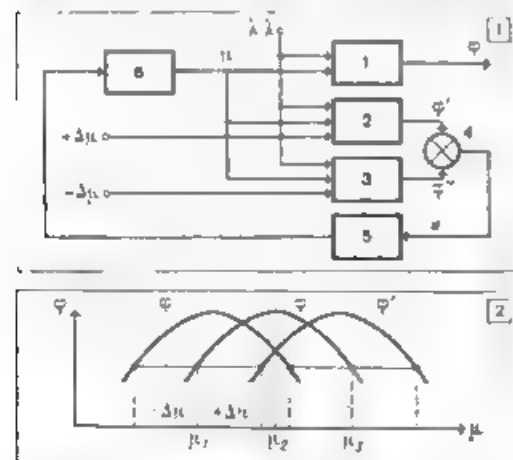
**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА СИСТЕМА ЕКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛЮВАННЯ** — безпосередня система екстремального регулювання, в якій за допомогою зміщення екстремальних характеристик у просторі регулюючих діянь у будь-який момент часу спостерігаю-

побудови систем екстремального регулювання. Д. с. е. р. можна застосовувати там, де вдається побудувати модель екстрем. об'єкта керування і ввести в неї осн. збурювальні діяння, яких зазнає об'єкт. Прикладом цього можуть бути деякі об'єкти хім. промисловості, що піддаються моделюванню фізичному. Структурну схему Д. с. е. р. наведено на мал. 1. На вхід двох моделей (2 і 3) поперевно подаються однакові за величиною, але протилежні за знаком регулюючі діяння  $\Delta\mu$ , під впливом яких екстрем. характеристика в одній моделі зміщується вліво, а в другій — праворуч відносно характеристики ф об'єкта керування (мал. 2). Коли на вхід (1) об'єкта діє регулююче діяння  $\mu_1$ , то показник якості  $\varphi'$  на виході першої моделі визначатиметься діянням  $\mu_1 + \Delta\mu$ , а показник якості  $\varphi''$  на виході другої моделі —  $\mu_1 - \Delta\mu$ . Те саме стосується й точки  $\mu_2$ . Розглядаючи, таким чином, ряд значень регулюючого діяння, можна переконатися в тому, що екстрем. характеристики моделей будуть зсунуті відносно характеристики об'єкта регулювання ф. Оскільки на обидві моделі впливають усі ті збурення  $\lambda, \lambda'$ , що діють і на об'єкт, і переміщують екстрем. характеристику відповідно в горизонтальному й вертикальному напрямках, то при переміщенні характеристики об'єкта переміщуються й характеристики моделей, не змінюючи свого положення ні щодо характеристики об'єкта, ні одна щодо одної. Вимірні значення показників якості  $\varphi'$  і  $\varphi''$  подаються на пристрій віднімання (4), в результаті віднімання після підсилення пристроєм (5) керує двигуном (6). Диференціальна система підтримує рівність  $\varphi' - \varphi'' = 0$  при будь-яких збуреннях, що діють на об'єкт і на моделі. Ця рівність задовольняється тільки при визначенні регулюючого діяння  $\mu_2$  (мал. 2), яке відповідає екстремумові характеристики об'єкта керування.

Якщо в диференціальній системі характеристики моделей зовсім ідентичні, то для пропорційної системи регулювання закон матиме вигляд  $\mu = \alpha \Delta\mu$ , де  $\alpha$  — коефіцієнт пропорційності (підсилення);  $\Delta\mu$  — постійне зміщення моделей;  $\mu$  — відхилення від екстремуму,  $\mu$  — напруга, що керує виконавчим двигуном. Д. с. е. р. є в деякій загально-відомій екстрем. систем, що забезпечує абсолютну інваріантність щодо збурень  $\lambda'$ . Д. с. е. р. мало чим відрізняється від звичайних слідуючих систем, і для визначення її динамічних властивостей можна застосувати методи дослідження таких систем.

Незважаючи на те, що сфера застосування диференціальних систем обмежена через необхідність створювати моделі об'єктів, існує багато пром. об'єктів, у яких це завдання розв'язується відносно просто.

Літ. Кукчевич В. М. Системи екстремального управління. К., 1961 [бібліогр. с. 145—149]. Васильєв В. М. Диференціальні системи екстремального регулювання. К., 1963 [бібліогр. с. 70—71]. Васильєв В. І. Екстремальні системи керування без пошукових коливань. Н., 1966 [бібліогр. с. 172—175]. В. І. Васильєв.



1. Структурна схема диференціальної системи екстремального регулювання.  
2. Статичні екстремальні характеристики моделей ( $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ) та об'єкта ( $\varphi$ ).

ється одночасно два режими роботи (дві точки екстремальної характеристики). Багато реальних об'єктів не допускають спец. пошукових коливань, тому для керування ними не можна застосовувати звичайні принципи

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ КЛАСИФІКАЦІЯ. Диференціальне рівняння, яке містить, крім незалежних змінних і шуканої функції, ще й частинні похідні цієї функції, наз. дифер. рівнянням з частинними похідними. Найвищий порядок частинних похідних, які входять до рівняння, наз. порядком дифер. рівняння. Дифер. рівняння наз. лінійним, якщо воно лінійне відносно шуканої ф-ції й усіх її похідних. Дифер. рівняння 2-го порядку

$$A_{11}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2A_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \Phi \left( x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \quad (1)$$

в даній точці  $x = (x_1, x_2)$  наз. еліптичним, параболічним і гіперболічним, якщо в цій точці відповідно

$$\Delta > 0; \Delta = 0; \Delta < 0, \quad (2)$$

де  $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$ .

Класифікація дифер. рівнянь 2-го порядку

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad (3)$$

де  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , основана на введенні квадратичної форми  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \alpha_i \alpha_j$  до канонічного вигляду. Вибравши належні перетворення  $\xi_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i$ ,  $k = 1, \dots, n$ , зведемо (3) до вигляду

$$\sum_{i=1}^m \left( \pm \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} \right) = P \left( \xi, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right) \quad (4)$$

де  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Дифер. рівняння (3) наз. еліптичним у даній точці, якщо  $m = n$  і всі знаки в лівій частині (4) однакові, гіперболічним у даній точці, якщо  $m = n$  і всі знаки, крім одного, в лівій частині (4) однакові, й параболічним у вузькому розумінні, якщо в лівій частині (4) всі члени мають однакові знаки, одного члена, напр.  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}$ , немає, а права частина має

відповідно похідну  $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ .

Дифер. рівняння (3) наз. параболічним (у широкому розумінні), якщо  $m < n$ , його наз. ультрагіперболічним у даній точці, якщо  $m = n$  і в лівій частині (4) є більше як по одному додатньому і від'ємному знаку.

Систему рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^N A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u_j}{\partial x_2} + \Phi_i(x_1, x_2, u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

наз. гіперболічною системою (г. с.) в даній точці, якщо в цій точці визначник матриці

$$(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \neq 0, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (6)$$

має дійсні й різні корені. Якщо вказаний визначник не має в точці дійсних коренів, то систему (5) наз. еліптичною системою (е. с.) в точці. Прикладом е. с. 1-го порядку є система Коші — Римана

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^N \sum_{0 \leq k_1 \leq k_2} A_{ij}^{(k_1, \dots, k_n)}(x) \frac{\partial^{k_1} u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \Phi_i(x), \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad k = \sum_{i=1}^n k_i,$$

наз. еліптичною в точці, якщо за будь-яких значень дійсних змінних  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , для яких  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$ , визначник порядку  $N$ , у якого елемент на перетині  $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпця має вигляд

$$\sum_{k_1, \dots, k_n} A_{ij}^{(k_1, \dots, k_n)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_n^{k_n} \quad (8)$$

і відрізняється від нуля в цій точці. Прикладом е. с. 2-го порядку є система рівнянь Ламе.

$$\begin{aligned} & \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0, \\ & \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned}$$

при  $\frac{1}{2} \neq \sigma \neq 1$ ,  $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ .

Дифер. рівняння  $2m$ -го порядку

$$\sum_{0 \leq k_1 \leq 2m} A^{(k_1, \dots, k_n)}(x) \frac{\partial^{k_1} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \Phi(x), \quad (9)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n),$$

до коэф.  $A$  не змінюється від будь-якого представлення індексів  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , наз. еліптичним у точці, якщо в цій точці для будь-яких дійсних чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$ , справджується нерівність

$$\left| \sum_{k=2m} A^{(k_1, \dots, k_n)}(x) \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} \right| > \mu(x) \sum_{i=1}^n \alpha_i^{2m}, \quad \mu(x) > 0. \quad (10)$$

Прикладом еліптичного рівняння 4-го порядку є бігармонічне рівняння

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0$$

Е. с. і еліптичні рівняння високого порядку є узагальненням еліптичного рівняння 2-го порядку

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + \Phi = 0. \quad (11)$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n A_{ij} t_i t_j \right| > \mu \sum_{i=1}^n t_i^2, \quad \mu > 0, \quad A_{ij} = A_{ji}.$$

Систему рівнянь

$$\frac{\partial^{n+1} u_i}{\partial t^{n+1}} = \sum_{j=1}^N \sum_{2pk_k + k_0 \leq 2pn} A_{ij}^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t, x) \times \\ \times \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} u_j}{\partial t^{k_1} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \Phi_i(t, x), \quad k_0 < n, \quad (12)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad k = \sum_{i=1}^n k_i,$$

де  $p$  — ціле число, наз. параболічною системою (п. с.) (у розумінні Петровського) в точці  $(t, x)$ , якщо для будь-яких дійсних  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$  корені визначника порядку

$$N, \text{ у якого елемент на перетині } i\text{-го рядка і } j\text{-го стовпця має вигляд} \\ \sum_{2pk_k + k_0 \leq 2pn} A_{ij}^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t, x) \lambda^{k_1} (\alpha_1)^{k_1} \dots \\ \dots (\alpha_n)^{k_n} - \lambda^n \delta_{ij} \quad (13)$$

і задовольняє в цій точці нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda \leq -\delta \quad (14)$$

в якому  $\delta$  додатною постійною.

П. с. є узагальненням одного параболічного рівняння 2-го порядку

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu(t, x). \quad (15)$$

Систему рівнянь

$$\frac{\partial^{n+1} u_i}{\partial t^{n+1}} = \sum_{j=1}^N \sum_{k_0 + k_1 + \dots + k_n \leq n} A_{ij}^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t, x) \times \\ \times \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} u_j}{\partial t^{k_1} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \Phi_i(t, x), \quad k_0 < n, \quad (16)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad k = \sum_{i=1}^n k_i,$$

наз. г. с. (у розумінні Петровського) в точці  $(t, x)$ , якщо за будь-яких дійсних  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$  визначник порядку  $N$ , у якого

елемент на перетині  $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпця має вигляд

$$\sum_{i,j=1}^N A_{ij}^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t, x) \lambda^{k_1} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} - \lambda^n \delta_{ij}, \quad (17)$$

має в цій точці тільки дійсні й різні корені. Г. с. є узагальненням одного гіперболічного рівняння 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu(t, x). \quad (18)$$

Дифер. рівняння або система рівнянь належать до даного типу в певній області, якщо вони належать до цього типу в кожній точці цієї області. Якщо дифер. рівняння в одній частині області належить до одного типу, а в іншій — до іншого, то в усій області його наз. рівняннями мішаного типу; те саме стосується й систем рівнянь.

Б класифікація і складніших дифер. рівнянь, напри., нелінійних, але цю класифікацію тепер не можна вважати усталеною. Літ. Петровський М. Г. Лекції об уравнениях с частными производными М., 1961. В а б и ч В. М. (та ін.) Уравнения математической физики. М., 1964 (Бібліогр. с. 343—382).

В. Г. Приказчиков.

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РЕНТ МЕТОД** — метод розв'язування транспортної задачі лінійного програмування. В основу методу покладено ідею розгляду процесу розв'язування задачі як процесу стабілізації екон. системи. Метод немож. імітує формування дифер. ренти в моделі транспортних перевезень і погодженості попиту й пропозиції. На відміну, напри., від розв'язування транспортної задачі за методом потенціалів, де з самого початку проводиться розподіл усієї продукції, який потім послідовно полишається, при застосуванні Д. р. м. спочатку розподіляють лише частину продукції, але зате оптимально: «споживачів» прикріплюють до найекономічніших у розумінні вартості перевезень «постачальників». Наступні етапи прикріплювання споживачів до постачальників пов'язані з умовним збільшенням вартості перевезень

за рахунок присвоєння постачальникам додаткової вартості — рента — й збільшення «кредитоспроможності» споживачів, що не вийшли в план. У момент цільового розподілу продукції та остаточного розрахунку одержаний план прикріплюється споживачів до постачальників є оптимальним. *О. О. Валас.*

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ** — клас рівнянь у математиці. Див. *Рівняння класифікація*.

**ДИФЕРЕНЦІАТОР** — пристрій для одержання похідної вхідної змінної. Щоб одержати

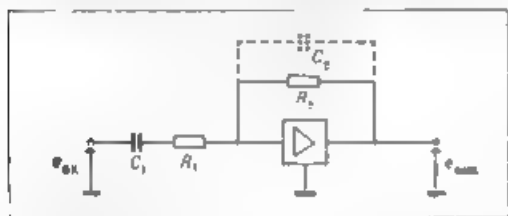


Схема диференціатора

похідну за часом, в аналогових машинах здебільшого застосовують схеми, які реалізують не ідеальний оператор диференціювання  $p$ ,

в оператори  $\frac{ap}{T_0p - 1}$  або  $\frac{ap}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$ ,

за допомогою яких операція диференціювання виконується наближено (мал.). Осн. достоїнством таких Д. є їхня здатність частково вгладжувати паразитні високочастотні перешкоди в вихідному сигналі  $e_{\text{вих}}$  —

$$= \frac{R_2 C_2 p}{(R_1 C_1 p + 1)(R_2 C_2 p + 1)} e_{\text{вх}}, \text{ які істотно по-}$$

силює би ідеальний Д. Є також Д., які наближено реалізують операцію диференціювання й побудовані на RC-колах або трансформаторах. *В. Ф. Сидюченко.*

**ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СИГНАЛІВ** — операція одержання похідної сигналу. Якщо задачі розв'язують на аналогових обчислювальних машинах, похідні машинних змінних за часом здебільшого відтворюються методом неявних ф-цій без використання диференціаторів, яких, по змові, заматаються не застосовувати через обмеженість їхнього робочого частотного діапазону й через те, що вони істотно посилюють паразитні високочастотні перешкоди. Але часто в пристрої керування або для вимірювання треба виконувати безпосередньо Д. с. В цих випадках використовують диференціатори. *В. Ф. Сидюченко.*

**ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СИМВОЛЬНЕ**, диференціювання аналітичне — одержання за допомогою ЦОМ похідної даної функції в аналітичному вигляді. Ця операція була одним з перших прикладів використання ЦОМ для нечислової математики, вона й досі є найхарактернішою пропекурою при автоматизації символічних перетворень на ЕОМ. Починаючи з 1953, розроблено і впроваджено багато різних алгоритмів

диференціювання. В основі цих алгоритмів лежить спільний принцип — послідовна виконання на кожному етапі роботи таких двох дій вибирання підвиразу, який підлягає обробці на цьому етапі, і замінювання вибраного підвиразу іншим за допомогою відповідного правила диференціювання.

**П р и к л а д.** Якщо треба знайти похідну  $\frac{d}{dx} (\sin x + \cos x)$ , то як перший підвираз беруть сам цей вираз. У цьому разі з множини правил диференціювання застосовують пра-

вило  $\frac{d}{dx} (F_1 + F_2) = \frac{d}{dx} F_1 + \frac{d}{dx} F_2$ , за яким зводять цей вираз до вигляду  $\frac{d}{dx} \sin x +$

$+\frac{d}{dx} \cos x$ . Потім для перетворення мож-

на вибрати або підвираз  $\frac{d}{dx} \sin x$ , або

$\frac{d}{dx} \cos x$ . Відповідно застосовуються прави-

ла  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$  і  $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ .

В результаті одержимо  $\cos x - \sin x$ .

Характерними особливостями кожної програми диференціювання є фірма задавання початкового виразу, спосіб представлення цього виразу в машині, кількість виконуваних спрощень і кількість застосовуваних правил диференціювання.

У перших програмах вирази надавалися як послідовність умовних кодів, де кожен код відповідав одній операції. Напр. ф-ція  $V = x^2$  записувалася як E0000X00200V, де E00 означає операції піднесення до степеня. Результат виводився в такому самому вигляді. Наступні програми наближали форму запису до загальноприйнятої в математиці. Тепер програми сприймають початковий вираз у сформованому лінеаризованому записі, прийнятому в мові програмування типу АЛГОЛ і ФОРТРАН. Так, вираз  $A + x^3$  запишеться або як  $A + x + 2$  або як  $A + x^{**2}$ , залежно від того, якими символами позначено операцію піднесення до степеня. Внутр. представлення виразів для перших програм мало в тому відрізнялося від зовн. представлення. Тепер як внутр. представлення використовують здебільшого модифікації запису Лумашевича і схем Канторовича.

Багато програм використовують різною мірою засоби спрощення виразів, одержаних внаслідок диференціювання. Це забезпечує наочніший запис результату, а також значно прискорює процес диференціювання. Так, напр., неспрощений результат диференціювання за  $x$  виразу  $ax + x^{**2}$  має вигляд  $0 \cdot x + a \cdot 1 + 1 \cdot x^{**2} + x \cdot x^{**2} \cdot 2 \cdot x$ . Спрощений його, одержимо вираз  $a + x^{**2} + 2x^{**3}$ . Ефективність програми залежить і від кількості використовуваних правил диференціювання. Напр., крім заг. правила  $(u \cdot v)'$ , де  $u$  і  $v$  розглядають як ф-ції, мож-

на використовувати ще два правила в тих випадках, коли або  $y$ , або  $z$  не залежить від змінної диференціювання. Можна піти далі й використати ще два правила в тому разі, коли або  $u$ , або  $v$  є числами. Збільшення кількості правил прискорює процес диференціювання, але ускладнює саму програму.

Програми диференціювання спочатку створювали як самостійні програми. Потім вони, як правило, почали входити у великі системи, призначені для проведення аналітичних перетворень на машинах, у вигляді або *операторів*, або операцій відносно мови таких систем. Так, у найпоширенішій закордонній системі FORMAC введено операцію FMCDIF.

Вираз  $\frac{d^2z}{dx^2}$  у цій системі записують як FMCDIF (3, x, 2). В CPCR найпотужнішими системами для аналітичних перетворень є машина «МІР-2» і система CIPYUC. Відповідно новою машиною «МІР-2» — АНАЛІТИКОМ наведена вище похідна записується як  $d/dx \uparrow 2$  (3), а в системі CIPYUC як  $d(2, x)$ .

Приклад похідної, одержаної на машині «МІР-2»:

$$\begin{aligned} d/dx (5 \times x + \sin(x+2) + \exp(\ln(x-3)) + \\ + \ln(\operatorname{ctg}(x + \sin(x))) \times \operatorname{arcsin}(4 \times x) = \\ = 5 \times ((\sin(2+x) \times x + (-1 + \sin(2+x)) + \\ + \cos(2+x) \times x + \sin(2+x) \times \ln(x)) \times \\ \times \exp(\ln(-3+x)) + 1/(-3+x) \times \\ \times \exp(\ln(-3+x)) \times x + \sin(2+x)) - \\ - ((1 + \cos(x)/\sin(x + \sin(x)) + 2 \times \\ \times \operatorname{arcsin}(4 \times x) + 4/v(1 - ((4 \times x) + 2)) \times \\ \times \ln(\operatorname{ctg}(x + \sin(x))). \end{aligned}$$

Літ.: Волове Л. Ф. Аналітичне диференціювання в системі CIPYUC «Автоматизація програмування», 1969, в. 2; Гріщенко Т. А., Царюк Н. П. Аналітичне диференціювання в машині «Мір-2». «Математическое обеспечение ЦДМ», 1970, в. 2; Sammet J. E. Survey of formula manipulation. «Communications of the Association for Computing Machinery», 1968, v. 9, № 8.

Т. О. Гріщенко.

**ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ЧИСЕЛЬНО** — наближене обчислення значень похідних заданих порядків від функції, заданої у вигляді таблиць або аналітично.

Один з методів обчислення похідних від функції  $f(x)$ , заданої таблицею її значень в  $n+1$  вузлах  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ( $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ), полягає ось у чому: функцію  $f(x)$  на відрізок, який нас цікавить, замінюють інтерполяційною функцією  $P(x)$  (найчастіше многочленом  $n$ -го степеня) і вважають, що  $m$ -а похідна

$$f^{(m)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(m-1)}(x+n) - f^{(m-1)}(x)}{n} \approx$$

$\approx P^{(m)}(x)$  при  $x_0 \leq x \leq x_n$ . Вибір інтерполяційної функції  $P(x)$  залежить від того, яку дано систему вузлів сітки для  $f(x)$  та при яких значеннях  $x$  потрібно обчислити по-

хідні. Напр., якщо значення  $f(x)$  задано для рівновіддалених значень аргумента з кроком  $h$  і значення похідної  $m$ -го порядку потрібно обчислити для  $x$ , що лежать поблизу вузла  $x_0$ , то як інтерполяційний многочлен  $P(x)$  (див. *Інтерполяція функцій*) вибирають многочлен Ньютона для інтерполювання вперед. Тоді  $\Phi$ -ли Д. ч. матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &\approx \frac{1}{h^m} \frac{d^m P(x_0 + ht)}{dt^m} = \\ &= \frac{1}{h^m} \sum_{k=m}^n \frac{d^m C_k^h}{dt^m} \Delta^k f(x_0), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\Delta^k f(x_0) = \Delta^{k-1} f(x_0 + h) - \Delta^{k-1} f(x_0)$  — послідовна скінченна різниця  $k$ -го порядку від функції  $f(x)$ ,  $x = x_0 + ht$ ,  $C_k^h = \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{k!}$ . Зокрема,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{1}{h} \left( \Delta f(x_0) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(x_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \Delta^3 f(x_0) + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n f(x_0) \right). \end{aligned}$$

Аналогічно, якщо скористатися в інтерполяційних  $\Phi$ -л Ньютона для інтерполювання назад та з  $\Phi$ -л Бесселя, можна знайти похідні  $m$ -го порядку для  $x$ , розміщених відповідно поблизу кінця та середини табл. Зокрема

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{n} \left( \nabla f_n + \frac{1}{2} \nabla^2 f_n + \dots + \frac{1}{n} \nabla^n f_n \right),$$

де  $\nabla^k f(x_n) = \nabla^{k-1} f(x_n) - \nabla^{k-1} f(x_{n-1})$  — послідовна скінченна різниця  $k$ -го порядку.

Наближене диференціювання з використанням інтерполяційних многочленів — операція менш точна, ніж інтерполювання, бо близькість одної до одної двох ординат кривих  $y = f(x)$  та  $y = P(x)$  на відрізку  $[x_0, x_n]$  ще не гарантує близькості на цьому відрізкові їхніх похідних. Особливо важливе значення при обчислюванні похідних мають питання оцінки похибок. Похибка методу, або залишковий член, при використанні інтерполяційних  $\Phi$ -л має вид:

$$\begin{aligned} R_m(x) &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)! (n+k+1)!} \times \\ &\times f^{(n+k+1)}(\xi_k) \frac{d^{m-k} \omega(x)}{dx^{m-k}}, \end{aligned}$$

де  $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$ ,  $\xi_k \in [x_0, x_n]$ ,  $m \leq n$ . Вираз для залишкового члена значно спрощується, якщо  $x$  знаходиться поза відрізком  $[x_0, x_n]$ . Тоді, якщо

$f(x) \rightarrow (n+1)$  раз диференційовна ф-ція на найменшому відрізку  $[a, b]$ , який має вузли інтерполявання та точку  $x$ , то

$$R_m(x) = \frac{\omega^{(m)}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \xi \in [a, b].$$

Щоб одержати практичну оцінку модуля залишкового члена,  $f^{(n+1)}(\xi)$  оцінюють максимальними значеннями  $|f^{(n+1)}(x)|$  на  $[a, b]$ . В деяких випадках вигідніше виражати значення похідних у вузлі сітки  $x_i$  безпосередньо через значення ф-ції. Побудувати такі ф-ли можна, користуючись інтерполяційним многочленом Лагранжа або розвиненням у ряд Тейлора виразу  $A = \sum_{k=1}^m C_k / (x_i + \alpha_k h)$  навколо точки  $x_i$ . При цьому коефіцієнти  $C_k$  добиральють так, щоб розвинення  $A$  в ряд Тейлора не містило  $f^{(l)}(x_i)$  ( $0 \leq l < m$ ,  $m+1 \leq l < m+r$ , де  $r$  — ціле додатне число), і містило значення  $f^{(m)}(x_i)$  з множником, що дорівнює одиниці. Тоді

$$\sum_{k=1}^q C_k / (x_i + \alpha_k h) = f^{(m)}(x_i) + R_m(x_i).$$

Щоб визначити  $C_k$ , спершу треба одержати систему  $q$  ( $q = m+r+1$ ) рівнянь, розв'язок якої знаходиться в замкненому вигляді. Оцінка залишкового члена має вигляд

$$|R_m(x_i)| \leq \frac{h^q}{q!} |f^{(q)}| \max \sum_{p=1}^q |\alpha_p^q C_p|.$$

У випадку, коли точки сітки рівновіддалені, порівнювання різних ф-л вигляду (2) показує, що найпростіші ф-ли будуть і найточніші тоді, коли похідна обчислюється в середньому вузлі  $x_i$ , до того ж вираз  $A$  будуватиметься за непарним числом вузлів, що лежать по обидва боки від  $x_i$ . Наведемо деякі з таких ф-л:

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h} (f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi), \xi \in [x_{i+1}, x_{i-1}]$$

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) - \frac{h^2}{12} f^{(IV)}(\xi_1), \xi_1 \in [x_{i+1}, x_{i-1}]$$

$$f'''(x_i) = \frac{1}{2h^3} (f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})) - \frac{h^3}{4} f^{(VI)}(\xi_2),$$

$$\xi_2 \in [x_{i-2}, x_{i+2}].$$

Вираз вигляду  $A$  можна утворити не тільки для представлення похідної заданого порядку  $m$  у вузлі  $x_i$ , а й для представлення будь-якого лінійного дифер. агрегату

$$\sum_{k=0}^m \varphi_k(x_i) = f^{(k)}(x_i), \text{ де } \varphi_k(x) \text{ — задані не-}$$

перервні ф-ції. Це використовують під час числового розв'язування крайових задач для звичайних дифер. рівнянь.

Проводячи Д. ч. за ф-лами (1), (2), треба брати до уваги й величину неусувної похибки, що виникає тому, що нам відомі не точні значення ф-ції  $f(x_i)$  у вузлах сітки, а наближені  $\tilde{f}(x_i)$ . В випадку, коли диференціювання проводять за ф-лами (2), абс. коусувна похибка

$$\varepsilon^0(x_i) \leq \sum_{k=1}^q \varepsilon_k |C_k|, \quad \varepsilon_k \leq |f(x_i + \alpha_k h) - \tilde{f}(x_i + \alpha_k h)|.$$

Задача відшукування похідної  $f'(x)$  за експериментальною випадковою ф-цією  $\tilde{f}(x)$  значно відрізняється від задачі диференціювання ф-ції, для якої відомі точні дані. У цьому випадку спостереження  $x$  має випадкові

значні помилки, а відношення  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  дуже чутливе навіть до невеликих помилок, якщо  $\Delta x$  стає досить малим. Тому звичайні ф-ли Д. ч. можуть дуже спотворити результати. Для розв'язання такої задачі при досить щільному

ряді початкових значень  $\tilde{f}(x)$  можна застосувати згладжування емпіричних даних з використанням методу найменших квадратів (див. *Апроксимація функції середньоквадратична*). Припустимо, що точні дані  $f(x_i)$  на протязі кількох рівновіддалених вимірів мало відрізняються від відповідних ординат парабол  $y = ax^2 + bx + c$ . Нехай, напр., це має місце, якщо комбінувати вимірювання в точці  $x = 0$  з двома сусідніми (ліворуч та праворуч). Щоб дібрати три параметри до п'яти початкових даних, користуються найменшими квадратами методом, тобто знаходять

$$\text{мінімум величини } \sum_{i=2}^4 (f(x_i) - ax_i^2 - bx_i - c)^2, \text{ добираючи параметри } a, b \text{ та } c. \text{ Якщо}$$

$$\text{треба виправити значення } \tilde{f}(0), \text{ знаходять лише значення параметра } c. \text{ Аналогічно зна-}$$

$$\text{ходять виправлене значення похідної в точці } x = 0. \text{ При цьому потрібно мати шукане значення параметра } b. \text{ В результаті}$$

$$f'(x_i) \approx$$

$$= \frac{-2\tilde{f}(x_{i-2}) - \tilde{f}(x_{i-1}) + \tilde{f}(x_{i+1}) + 2\tilde{f}(x_{i+2})}{10h}.$$

Якщо використати не дві, а чотири сусідні точки по обидва боки від точки  $x_i$ , то ф-ли

Д. ч. для  $x_1$ , що лежать усередині проміжку  $[x_0, x_n]$ , мають вигляд:

$$f'(x_i) \approx \frac{\sum_{k=2}^n k \tilde{f}(x_i + kh)}{2h \sum_{k=2}^n k^2}.$$

Аналогічний прийом застосовують, щоб побудувати значення похідних у крайніх вузлах інтерполяції, але згладжування емпіричних даних відбувається тільки за разуюнок точок, які лежать ліворуч (або праворуч) від відповідних крайніх точок. Якщо, напр., згладжування на початку кривої провадити за чотирма точками, які лежать праворуч від точки  $x_0$ , то

$$f'(x_0) \approx \frac{-21\tilde{f}(x_0) + 13\tilde{f}(x_1) + 17\tilde{f}(x_2) - \tilde{f}(x_3)}{20h}.$$

Для обчислення значень другої похідної провадять згладжування значень першої похідної за методом найменших квадратів 1, взявши їх за початкові, знаходять вираз для другої похідної.

Задача відновлювання похідної за ф-цією, заданою експериментально, належить до числа некоректно поставлених задач. Тому для випадку великих помилок вимірювань відновлювати похідну можна, використовуючи метод регуляризації Тихонова (див. *Некоректно поставлені задачі способи розв'язування*).

Нехай  $f(x)$  неперервно диференційовна на відрізку  $[x_0, x_n]$ . Тоді її похідна, за визначенням, задовольняє інтегр. рівняння Вольтерри 1-го роду,

$$f(x) = \int_{x_0}^x f'(s) ds + f(x_0), \quad x_0 \leq x \leq x_n,$$

для розв'язання якого й застосовують метод регуляризації. Відшукування похідної також можна звести до розв'язання інтегр. рівняння

вигляду  $\int_{x_0}^{x_n} K(x, s) f'(s) ds = \Phi(x)$  з неперервним ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} x_n - x, & x_0 \leq s \leq x \\ x_n - s, & x \leq s \leq x_n \end{cases}$$

та правою частиною  $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x_n} f(s) ds - f(x_0)(x_n - x_0)$ .

Розв'язок цього рівняння знаходять тем методом регуляризації. Для відшукування похідних вищих порядків можна зробити аналогічно. Метод регуляризації можна застосувати для стійкого знаходження лінійної комбінації вигляду  $f''(x) + c_1 f'(x) + b_1 f(x)$  ( $c_1, b_1 = \text{const}$ ) за експериментальними дани-

ми  $\tilde{f}(x)$ . Результати обчислення підтверджують, що переваги має метод регуляризації, коли похибка даних порівнянна за порядком з кроком сітки.

В практичних застосуваннях важливим є такий спосіб Д. ч.: якщо внайдено  $g(x)$ , для якої  $|f(x) - g(x)| \leq \delta$  і відомо, що  $|f'(x) - [f(x+h) - f(x)]/h| \leq ch$ , то

$$\left| f'(x) - \frac{g(x \pm \sqrt{2\delta/c}) - g(x)}{\pm \sqrt{2\delta/c}} \right| \leq 2\sqrt{2\delta c}.$$

Знак «+» або «-» та значення  $h$  і  $\delta$  потрібно вибрати так, щоб аргументи  $f$  та  $g$  попадали в ділянку визначення цих ф-цій. У заг. випадку неправильно вважати, що  $f'(x) \approx g'(x)$ . Але якщо  $f(x)$  — періодична ф-ція на відрітку  $[-\pi, \pi]$ , а  $g(x)$  — тригонометричний многочлен порядку  $n$ , то  $f'(x) \approx g'(x)$ , при цьому

$$|f'(x) - g'(x)| \leq \delta n + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{4}{\pi^2} \ln 2 + \pi e + 4\right) E_n(f').$$

де  $E_n(f')$  — величина найкращого наближення тригонометричними многочленами  $n$ -го порядку (див. *Апроксимація функцій рівномірно*). Зокрема, для будь-якої ф-ції  $\varphi$

$$E_n(\varphi) \leq \frac{\pi}{2} \frac{\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |\varphi^{(k)}(x)|}{(n+1)^k},$$

якщо існує  $k$ -а похідна  $\varphi^{(k)}(x)$  на  $[-\pi, \pi]$ . Візьмемо за  $g(x)$  многочлен тригонометричної інтерполяції  $f(x)$ :

$$g(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx},$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi+1} \sum_{j=-n}^n f\left(\frac{2\pi}{2n+1} j\right) e^{-ik \frac{2\pi}{2n+1} j},$$

$$t = e^{ix}, \quad t_j = e^{\frac{2\pi i}{2n+1} j},$$

$$|f(x) - g(x)| \leq \left\{1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \left[ \frac{2}{\pi} (2n+1) \right]\right\} E_n(f).$$

Припустимо ще, що значення  $f\left(\frac{2\pi}{2n+1} j\right)$  відомі з абс. похибкою, яка не перевищує  $\varepsilon$ . У цьому разі

$$|f(x) - g(x)| \leq \delta \leq \left\{ \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \left[ \frac{2}{\pi} (2n+1) \right] \right\} [E_n(f) + \varepsilon] + E_n(f)$$

У всіх наведених вище ф-лах для одержання нової похибки Д. ч. необхідно враховувати й похибку реалізації ф-л на обчисл. машинах (див. *Похибок обчислювань теорія*).



В інженерній практиці для Д. ч. застосовують моделюючі пристрої — диференціатори.

Лит.: Березин М. С., Жидков Н. П. Методы вычисления, т. 1 М., 1966. Везенев Е. П., Жидков Н. П. Применение метода регуляризации к дифференцированию функций одного переменного зада много таблично. «Вычислительные методы и программирование», 1968, в. 13. Иванов В. В. Анализ точности вычислительных алгоритмов. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1970, т. 10, № 2. Ланцош Н. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Пер. с англ. М., 1961.

А. В. Телнов, О. О. Скороващенко.  
**ДИФУЗИЙНИЙ ПРОЦЕС** — марковський процес із неперервною множиною станів. Для таких марковських процесів існує щільність ймовірності переходу  $p(t, x, z, y)$ , де  $t$  — початковий момент часу,  $z$  — кінцевий момент часу,  $x$  та  $y$  — стани процесу в моменти  $t$  і  $z$  відповідно. Нехай  $X$  —  $n$ -вимірний евклідов простір і  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  — координати точки  $x$ ,  $(y^1, y^2, \dots, y^n)$  — координати точки  $y$ , а  $|x - y|$  — евклідова відстань між цими точками. Припускається, що при всякому  $\Delta > 0$  існують границі:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, h_1 \rightarrow 0} \int_{|x-y| \leq \Delta} (y^i - x^i) p(t-h, x, t+h_1, y) dy = a_i(t, x)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 + h_1} \int_{|x-y| \leq \Delta} (y^i - x^i)(y^j - x^j) p(t-h, x, t+h_1, y) dy = b_{ij}(t, x)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 + h_1} \int_{|x-y| \geq \Delta} p(t-h, x, t+h_1, y) dy = 0$$

Коеф.  $a_i(t, x)$  наз. коеф. переносу, а вектор  $a(t, x)$  в координатах  $a_i(t, x)$  — вектором переносу,  $b_{ij}(t, x)$  — коеф. дифузії, матриця  $B(t, x)$  в елементах  $b_{ij}(t, x)$  — матрицею дифузії. Такі марковські процеси наз. дифузійними, оскільки їх можна інтерпретувати як ймовірнісне описування лампа дифузії. При вивченні дифузійних марковських процесів істотно може допомогти апарат стохастичних диференціальних рівнянь. Див. також *Випадковий процесів теорія*.

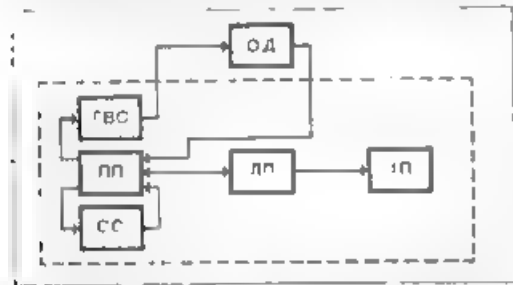
А. В. Скороващенко.  
**ДІАГНОСТИКА АВТОМАТИЧНА** — автоматичне одержання та обробка інформації про стан технічних систем для виявлення їхніх несправностей і тих елементів, невірнотильне функціонування яких призвело (чи може призвести) до виникнення несправностей. Зростання складності сучасних тех. систем значно випереджає за темпами зростання їхньої надійності, а це призводить до зменшення середнього часу між відмовами й до збільшення часу вимушеного простою, і тому проблема створення заг. методів синтезу систем автомат. діагностики (САД) і розробки оптим. алго-

ритміів їхнього функціонування є актуальною. Осн. завданнями, що виникають при цьому, є: розробка принципів аналізу тех. систем з точки зору діагностики їхнього стану; розробка методів побудови оптим. програм діагностики стану складних тех. систем та розробка принципів конструювання й реалізації САД. Перше завдання передбачає емпіричне дослідження реальних тех. систем, які виступають об'єктами діагностики, щоб виділити можливі непрацездатні стани й можливі перевірки та знайти зв'язок між можливими станами і наслідками окремих перевірок, зібрати статистичні матеріали про розподіл ймовірностей окремих станів системи, про затрати на виконання перевірок та ін. Одержані відомості є відповідними даними при розв'язуванні завдання побудови оптим. програм діагностики. Розв'язання цього завдання передбачає виділення якоїсь мінім. сукупності перевірок, достатньої, щоб розрізнити всі стани (побудова тесту) і скласти певну послідовність (програму) проведення перевірок, що входять у тест. При розв'язуванні цих завдань широко використовують матем. апарат *алгебри доіток*, *ймовірностей теорії* та різні методи прийняття рішень і спрямованого пошуку (лінійне й динамічне програмування, *теорія доіток* і т. д.).

Оптим. програма діагностики є основою для проектування САД, бо саме програма визначає в основному структуру й алгоритм функціонування цієї системи. Від вибраної програми істотно залежать такі осн. показники САД, як складність, надійність, габарити, вага, вартість, достовірність результатів діагностики та час, що йде на діагностику стану обстежуваної тех. системи. Повна автоматизація процесу діагностики дає змогу підвищити готовність діагностовуваних систем, зменшити кількість обслуговуючого персоналу й знизити вимоги до його кваліфікації. До осн. принципів конструювання САД належать ще такі два: універсальність, тобто можливість застосовувати одні й ті самі САД для діагностики цілих класів тех. систем, і самоперевірка САД, оскільки сучасні такі системи досить складні й, отже, можуть виявлятися несправними. Щоб забезпечити універсальність САД, для цього роблять стандартні узали й підсистеми, з яких можна створювати САД з різними характеристиками. Крім того, універсальності досягають і перетворенням контролюваних сигналів на дискретну форму, це дає змогу й далі переробляти їх за допомогою ЕЦОМ. Застосування принципу універсальності дає змогу зменшити кількість можливих САД та їхню вартість.

Як приклад на мал. подано одну з можливих блок-схем САД для автомат. діагностики об'єкта діагностики ОД. Програмний пристрій ПП відповідно до закладеної в нього програми *діагностичної* в певні моменти часу видає сигнал у блок генераторів випробувальних сигналів ГВС, внаслідок чого й спрацює один з генераторів. Вироблюваний у ГВС калібрований випробувальний сигнал над-

ходить до відповідного кола обстежуваної системи ОД. Логічний пристрій ЛП, що працює за командами ПП, забезпечує порівняння з урахуванням допусків сигналу, який характеризує реакцію-відповідь ОД. з його номінальним значенням; аналізує результати порівняння і виробляє сигнали типу «в нормі», «не в нормі», визначає місце несправності і подає сигнали на продовження чи припинення перевірок на індикаторний пристрій ІП, що служить для індикації результатів діагностики. Справність САД ви-



Блок-схема системи автоматичної діагностики

значають за допомогою її системи самоперевірки СС, яка видає заздалегідь відомі вихідні сигнали реакції на типові вхідні сигнали. У логіч. пристрої ці сигнали порівнюються з стандартними, які задає програмний пристрій

Існуючі САД розрізняють: за цільовим призначенням — системи для контролю працездатності ОД, пошуку несправностей в ОД і для діагностики стану (тобто і для контролю працездатності, і для пошуку несправностей ОД); за можливістю вмілювати алгоритми функціонування — системи з жорсткою і гнучкою програмами; за видом оброблюваної інформації — аналогові й дискретні; за впливом на ОД — активні, що використовують ГВС для одержання діагностичної інформації, і пасивні, що використовують вбудовані в ОД датчики; за конструктивним зв'язком з ОД — зовнішні САД, конструктивно не зв'язані з ОД, і вбудовані САД, конструктивно зв'язані з ОД (окремі елементи і блоки САД можуть бути вбудовані в ОД). Див. також *Діагностика несправностей ЦОМ. Діагностування складних технічних комплексів. Тести.*

Лит. Мозгалеvский А. В. [та ін.]. Автоматический поиск неисправностей. Л., 1967 [бібліогр. с. 262-263]. Веразков Г. Ф. [та ін.]. Введение в техническую диагностику. М., 1966 [бібліогр. с. 220-223]. Гайденко В. С. [та ін.]. Основы построения автоматизированных систем контроля сложных объектов. М., 1969 [бібліогр. с. 471-476]. Пархоменко П. И. О технической диагностике. М., 1969 Кузнецов П. И. Пчелинцев Л. А., Гайденко В. С. Контроль в поиске неисправностей в сложных системах. М., 1969 [бібліогр. с. 233-238]. Г. Ф. Веразков.

# ДІАГНОСТИКА НЕСПРАВНОСТЕЙ ЦОМ

методи виявлення несправностей у цифровій обчислювальній машині (ЦОМ) за ознаками, що характеризують її чи інші порушення правильності її функціонування. Виявлення

несправностей у ЦОМ здійснюється шляхом контролю правильності роботи її обладнання з використанням відповідних алгоритмів пошуку несправностей.

Розрізняють такі види діагн. контролю: програмний (ПДК), апаратний (АДК) і програмно-апаратний (ПАДК). Кожний вид діагностичного контролю з різною ефективністю дає змогу локалізувати несправності, що виникають у ЦОМ, і, в загальному випадку, є продовженням контролю працездатності ЦОМ

При програмному діагностичному контролі (див. *Контроль програмний*) методи виявлення несправностей у ЦОМ реалізуються програмними засобами. Цей контроль здійснюють за допомогою випробувальних програм, які містяться в *внеш'атмосферному пристрої* контрольованої машини й забезпечують пошук несправностей виконанням стандартних команд ЦОМ та аналізом одержаних при цьому результатів. Випробувальна програма разом з відповідними початковими даними дає змогу з певною ймовірністю виявити елемент машини, в якому є фіз. несправність, або групу елементів, серед яких є й несправний елемент. У такій програмі команди, під час виконання яких працюють елементи контрольованої схеми й за результатами виконання яких виявляють несправність, прийнято аважати як основні. Решту команд розглядають як допоміжні. Надійність випробувальної програми характеризується ймовірністю того, що ніяка з виявлених несправностей не вплине на виконання допоміжних команд програми й на роботу елементів, які функціонують під час виконання її, але не входять до контрольованої схеми

Для пошуку несправностей у ЦОМ звичайно застосовують систему випробувальних програм, до якої входять дві системи підпрограми: контролюючої та діагностичної. Осн. призначення контролюючої підпрограми — виявляти несправності в контрольованій схемі. Якщо на основі інформації, одержаної внаслідок виконання контролюючої підпрограми, встановлено місцеперебування несправного елемента, то провадиться усунення несправності. Якщо ж ця інформація виявляється недостатньою, щоб знати місце несправності, здійснюється перехід до виконання діагн. підпрограми, яка реалізує алгоритм пошуку несправностей і призначена для визначення та вказування елементів з фіз. несправністю (див. *Програма діагностична*). Досвід показує, що діагн. підпрограми мають низьку надійність, бо дають змогу виявляти місце лише тих несправностей, які не призводять до помилок, що впливають на правильність виконання власне діагн. підпрограми. Частка обладнання, відмови якого призводять до помилок, що впливають на правильність виконання діагн. підпрограми, при цьому буває дуже значна. Позитивні якості ПДК в тому, що немає потреби змінювати структуру ЦОМ і додавати ще контролюючого облад-

нання. Осн. вади ПДК: невелика точність знаходження місця несправності й недостатнє охоплення контролем вузлів ЦОМ; значний обсяг виробовувальних програм, що зумовлює труднощі введення їх у машину та зберігання.

При апаратному діагностичному контролі методи виявлення несправностей у ЦОМ реалізуються за допомогою спец. контролюючого обладнання. Прикладом АДК є використання модуля з індикацією несправностей, який має собою електронну схему, здатну здійснювати індикацію власної відмови в роботі. Найпростішим прикладом таких модулів є зарезервовані функціональні елементи, що мають схему порівнювання вихідних величин. Вадю АДК, в якому застосовуються модулі з індикацією несправностей, є труднощі тех. реалізації їх. Другим видом АДК є апаратно-логіч. контроль, при якому контролюване обладнання поділяють на групи і для кожної з них розробляють методику перевірки й контролюючу схему, що реалізує цю методику. Відповідно до обраної методики контролююча схема забезпечує вироблення й подання на контрольовану схему потрібних вхідних сигналів, приймання й аналіз вихідних сигналів контрольованої схеми й індикацію помар несправного елемента при виявленні несправності. Апаратно-логіч. контроль є ефективним, бо охоплює значну частину обладнання ЦОМ і відзначається точністю знаходження місця несправності з контрольованих вузлів. Вадю цього виду АДК є потреба вводити нові елементи й зв'язки в структуру ЦОМ. Апаратний контроль застосовують і для перевірки правильності обчислень у процесі роботи ЦОМ (напр., контроль за модулем), він дає змогу з певною ефективністю виявляти несправності, що виникають (див. *Контроль ЦОМ*). При контролі за модулем у розрядну сітку машини вводять додаткові розряди, які служать для зберігання інформації, й це дає змогу виявляти помилки в словах машини. Найпростішим видом контролю за модулем є контроль за парністю: до двійкового коду слова додається «1» або «0» (вміщувані в додатковий розряд) так, щоб сума цифр усіх розрядів нового коду за модулем 2 дорівнювала нулеві. Нерівність нулеві цієї суми свідчить про наявність помилки в коді слова.

Програмно-апаратний діагностичний контроль являє собою поєднання двох попередніх видів діагн. контролю. ПАДК вважається найефективнішим і найперспективнішим. Його забезпечують за допомогою діагностичних програм, розміщених у пам'яті машини, й додаткового (відносно основної структури ЦОМ) обладнання. В деяких варіантах ПАДК апаратна частина виявляє несправності з точністю до вузла або блока цифрових машин, а діагн. програми шукають несправності у вузлі або блоці, що відомий. В інших варіантах ПАДК у структурі ЦОМ вводять

додаткові елементи й зв'язки, які забезпечують розширення вихідного переліку команд і створення в ЦОМ спец. режимів роботи. При цьому апаратні засоби забезпечують можливість роботи ЦОМ звичайного (макропрограмного) типу в режимі мікропрограмного керування. Використання мікропрограмних режимів роботи дає змогу розширити сферу застосовності діагн. програм і довести точність знаходження місця несправності до окремих функціональних елементів. Вадю цього виду контролю пов'язані з необхідністю враховувати вимоги діагн. контролю до структури машини та її конструкції. ПАДК може здійснюватися й за допомогою обладнання, автономного щодо осн. машинного обладнання. Засобом автономного контролю може слугувати обчисл. машина, яка аналізує правильність роботи ішої машини. Автономний контроль можна здійснювати й за допомогою спеціалізованих контролюючих пристроїв, що реалізують певну методику перевірки правильності роботи вузлів контрольованої ЦОМ. Прикладом може бути пристрій контролю й автомат. пошуку несправностей логіч. схем, який реалізує метод діагностичних таблиць. Згідно з цим методом аналіз схеми проводиться порівнюванням її реакцій на різні комбінації вхідних сигналів з реакціями справної схеми й наступним зіставленням усіх результатів порівнювання. Схему ЦОМ розбивають на кілька контрольованих ділянок. Для кожної ділянки складають тест і діагностичну таблицю й забезпечують можливість підключити контролюючий пристрій до входів і виходів (контрольованих точок) відповідного вузла машини. Перевірка його зводиться до виконання тесту. При викладенні відомим несправну частину вузла визначають за діагн. таблицею.

Лит. 1. Калінін О. Н. Системний і тестовий контроль автоматизованих цифрових вычислительных машин М. 1983 (бібл. гр. с. 191) Митронов Г. А. Исследовательские программы для контроля электронных циф. схем машин М. 1984 (бібл. гр. с. 266—287). Диагностика неисправностей вычислительных машин. М. 1985. Путинцев Н. Д. Апаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин М. 1986 (бібл. гр. с. 417—418). Сидор А. М. Методы контроля электронных цифровых машин М. 1986 (бібл. гр. с. 160) Найденов А. Ф., Петрушенко В. А., Зенин В. Д. Автоматический поиск неисправностей в ЦВМ М. 1984 (бібл. гр. с. 144—146). Л. О. Коритина.

**ДІАГНОСТУВАННЯ СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ КОМПЛЕКСІВ**, технічна діяльність — контроль, перевірка й прогнозування технічного стану, як правило, складних технічних комплексів, що функціонують у межах заданого класу режимів або алгоритмів, та апаратна реалізація цих процедур. Діагностування станів і несправностей у найрізноманітніших мех., енерг., радіотех., і радіоелектронних пристроях, блоках автомат. телеф. станцій, ЦОМ та обчисл. комплексах — характерні приклади діагн. процедур. Розв'язання завдання діагностування в складних системах передбачає в кожному конкретному випадку побудову моделі математичної об'єкта, вибір та оптимізацію

діагн. процедур і реалізацію їх у вигляді тех. пристроїв або програм для ЦОМ.

Клас методів, розроблених для розв'язування основних завдань діагностування в складних тех. системах, ґрунтується на різних розділах матем. і дискретного аналізу, операцій дослідження, програмування математичного, статистичної динаміки й евристичних прийомів. Здійснюється діагн. процедур і засобів їхньої реалізації потребувала розробки спец. розділів сучасної математики — теорії тестів, теорії запитальників тощо.

|           |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|
| $Z, W, Y$ |          | $V$      |          |
| $z_1$     | $z_2$    | $v_1$    | $v_2$    |
| $z_3$     | $z_4$    | $v_3$    | $v_4$    |
| $z_5$     | $z_6$    | $v_5$    | $v_6$    |
| $z_7$     | $z_8$    | $v_7$    | $v_8$    |
| $z_9$     | $z_{10}$ | $v_9$    | $v_{10}$ |
| $z_{11}$  | $z_{12}$ | $v_{11}$ | $v_{12}$ |
| $z_{13}$  | $z_{14}$ | $v_{13}$ | $v_{14}$ |
| $z_{15}$  | $z_{16}$ | $v_{15}$ | $v_{16}$ |

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $R$      |          | $T$      |          |
| $r_1$    | $r_2$    | $t_1$    | $t_2$    |
| $r_3$    | $r_4$    | $t_3$    | $t_4$    |
| $r_5$    | $r_6$    | $t_5$    | $t_6$    |
| $r_7$    | $r_8$    | $t_7$    | $t_8$    |
| $r_9$    | $r_{10}$ | $t_9$    | $t_{10}$ |
| $r_{11}$ | $r_{12}$ | $t_{11}$ | $t_{12}$ |
| $r_{13}$ | $r_{14}$ | $t_{13}$ | $t_{14}$ |
| $r_{15}$ | $r_{16}$ | $t_{15}$ | $t_{16}$ |

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $A$       |           | $P$       |           |
| $a_{11}$  | $a_{12}$  | $p_{11}$  | $p_{12}$  |
| $a_{21}$  | $a_{22}$  | $p_{21}$  | $p_{22}$  |
| $a_{31}$  | $a_{32}$  | $p_{31}$  | $p_{32}$  |
| $a_{41}$  | $a_{42}$  | $p_{41}$  | $p_{42}$  |
| $a_{51}$  | $a_{52}$  | $p_{51}$  | $p_{52}$  |
| $a_{61}$  | $a_{62}$  | $p_{61}$  | $p_{62}$  |
| $a_{71}$  | $a_{72}$  | $p_{71}$  | $p_{72}$  |
| $a_{81}$  | $a_{82}$  | $p_{81}$  | $p_{82}$  |
| $a_{91}$  | $a_{92}$  | $p_{91}$  | $p_{92}$  |
| $a_{101}$ | $a_{102}$ | $p_{101}$ | $p_{102}$ |
| $a_{111}$ | $a_{112}$ | $p_{111}$ | $p_{112}$ |
| $a_{121}$ | $a_{122}$ | $p_{121}$ | $p_{122}$ |
| $a_{131}$ | $a_{132}$ | $p_{131}$ | $p_{132}$ |
| $a_{141}$ | $a_{142}$ | $p_{141}$ | $p_{142}$ |
| $a_{151}$ | $a_{152}$ | $p_{151}$ | $p_{152}$ |
| $a_{161}$ | $a_{162}$ | $p_{161}$ | $p_{162}$ |

Відправним завданням у розробці оптимальних діагн. процедур є побудова матем. моделі тех. комплексу (об'єкта), який перевіряють. Для певного класу тех. комплексів модель об'єкта контролю можна зобразити як автомат скінченний

$$\begin{aligned} Z^t &= f(X^t, Y^t), \\ Y^{t+1} &= h(W^t, Y^t), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $X$  — вхідні,  $Y$  — внутрішні,  $Z$  — вихідні вектори координат;  $t$  визначає момент часу (такт). За описом моделі об'єкта будуються таб-

лиця переходів (мал. 1). Зовнішній вхідний набір  $x_1^t, \dots, x_n^t$  при внутрішньому вхідному стані  $y_1^t, \dots, y_m^t$  переводить скінченну динамічну систему в стан, представлений внутрішнім вхідним станом  $y_1^{t+1}, \dots, y_m^{t+1}$ , якому передують зовнішній вхідний набір  $x_1^t, \dots, x_n^t$  і внутрішній вихідний стан  $w_1^t, \dots, w_r^t$  у момент  $t$ . Побудова програм перевірки виконується за результатами аналізу об'єкта в справному й несправному станах. Як стан (1), так і несправності  $t_j$  задаються формальним способом. В результаті будуються функції

$$\Psi_s = \Psi_s(A, t) \text{ та } \Psi_i = \Psi_i(A, t),$$

реалізовані відповідно справним і несправним (в і-несправному стані) тех. комплексом. Аргумент  $A$  являє собою керуючі дієння на об'єкт, а сама функція  $\Psi$  — виконувати об'єктом дії. Коли в об'єкті є несправність виду  $t_j$ , він реалізує відому функцію  $\Psi_i = \Psi_i(A, t)$ , яку задано в тій самій множині  $T$  і яка приймає значення з тієї самої множини  $R$ ,  $r_{ij} = \Psi_i(t_j)$ , що й функція  $\Psi_s$ , реалізовувана справним об'єктом. Окремі перевірки об'єкта  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, |T|$  і їхні результати  $r_{ij} \in R$  однозначно відповідають функціям  $\Psi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$

$M$ , і це дає змогу будувати таблиці функцій несправностей (мал. 2). Дальшим етапом є побудова формального вирішувального правила перевірки працездатності об'єкта й локалізації несправностей. Воно будується на різниці пари функцій  $\Psi_i$  і  $\Psi_s$ ,  $i, k = \{0, 1, \dots, M\}$ ,  $i \neq k$  при якійсь перевірці  $t_j$  за співвідношенням  $a_{ikj} \in A$ , що приймає два значення.

$$a_{ikj} = \begin{cases} 1, & \text{для } \Psi_i(t_j) \neq \Psi_k(t_j) \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

З множини  $M$  функцій  $\Psi_i$  для всіх можливих пар  $p_{ik} \in P$  будують таблицю покриттів мал. 3), в якій розрізняльними елементами відносно пар  $\Psi$  та  $\Psi_k$  є перевірки  $t_j \in T$ . Розрізняльня сукупність елементів множини  $T$  визначає клас безумовних програм перевірки тех. комплексу.

Щоб розв'язати завдання діагностування в неперервних системах, його матем. опис треба зобразити у вигляді моделі скінченної динамічної системи. Розроблені програми є основою для вибору чи розробки тех. засобів реалізації програм перевірки.

Реалізація програм перевірки найефективніша при використанні автомат. (спеціалізованих або універсальних) засобів перевірки об'єкта контролю і становить діагностику автоматичну. Універсальні автомат. засоби, що працюють за змінною програмою, придатні для перевірки певного класу об'єктів контро-

лю. Одним із таких засобів є універсальна машина «ПУМА», яка охоплює кілька десятків тисяч точок зв'язку з об'єктом контролю. Одау в можливих класифікацій способів та засобів перевірки складних тех. комплексів подано на мал. 4. Діагностування станів і несправностей у складних тех. комплексах є невід'ємною частиною їхнього функціонування. Тому оптимізацію діагн. процедур та ефективну реалізацію їх автомат. засобами можна розв'язувати комплексно в процесі синтезу самого об'єкта.



Лит. Цегельс Н. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем. Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1958, т. 51. Пархоменко П. П. О технической диагностике. М., 1969; Гайденко В. С. [та ін.]. Основы построения автоматизированных систем контроля сложных объектов. М., 1969 [обзор с 471, 476]; Курнецов П. И., Печенин Л. А., Гайденко В. С. Контроль и поиск неисправностей в сложных системах. М., 1969 [обзор с 233, 238]. М. Д. Жуков.

**ДІАЛОГОВИЙ РЕЖИМ** — режим роботи людини в обчислювальній машині, характерний для якого є періодичне повторювання циклу, що включає видавання машині завдання, одержання відповіді та аналіз її. Д. р. забезпечується роботою людини в обчислювальній машині за допомогою індивідуальних пульта. Д. р. передбачає розв'язування таких задач, програма яких у момент початку розв'язування може бути не зовсім відома; людина слідує за здійсненням процесу обробки в об'єктах машини, фіксує ті чи інші проміжні результати і в ході розв'язування задачі видає машині інструкції, керуючи її роботою. Таким чином, Д. р. реалізує найприроднішу з погляду психології взаємодію людини з обчислювальною машиною при розв'язуванні творчих задач. Для ефективної реалізації Д. р. треба, щоб середній час реакції машини, тобто середній час між введенням завдання і одержанням відповіді, був досить невеликим (цей час здебільшого становить від часток секунди до кількох секунд). Д. р. застосовують, коли використувати засоби обчислювальної техніки користувачі — спеціалісти різних галузей науки й техніки, бо в цьому разі користувач розв'язує свою задачу сам, без посередника-програміста. Д. р. особливо ефективний при роз-

в'язуванні таких творчих задач, як доведення теорем, ігрові задачі, аналітичні перетворення тощо, які потребують евристичного підходу. До цього самого типу задач можна віднести й задачу налаштування програм (див. *Налаштування програм*), різні проектно-конструкторські роботи тощо. Розроблено спец. мови для Д. р., що включають і засоби звичайних алгоритмічних мов, і засоби для видавання машині завдань. Найпоширенішими з цих мов є JOSS та BASIC. Як правило, Д. р. реалізується в системах розподілу часу (див. *Обробка інформації в режимі розподілу часу*). Найуживанішими тех. засобами, що забезпечують обмін інформацією між людиною й машиною в процесі діалогу (т. а. термінальними пристроями), є клавішні пристрої та пристрої візуального відображення зі світловим олівцем (див. *Екранний пульт*). У перспективі ефективний Д. р. базуватиметься, мабуть, на пристрої візуального відображення в поєднанні з пристроями введення мовної інформації й набуде широкого застосування в машинах 4-го покоління.

А. І. Нікітін, А. М. Чабос  
**ДІЯСНИЙ ЧАС МОДЕЛЮВАННЯ** — див. *Час моделювання діасний*

**ДІОД НАПІВПРОВІДНИКОВИЙ** — двополюсний прилад, дія якого ґрунтується на принципі використання нелінійних властивостей електронно-діркового переходу в напівпровідниках або контактах напівпровідник-метал, а також на залежності цих властивостей від дії світла, температури й радіоактивного випромінювання. Для виготовлення Д. н. найширше застосовують германій, кремній, селен, арсенід галію та карбід кремнію.

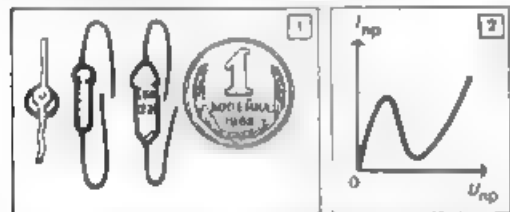
За конструктивно-технологічною ознакою Д. н. поділяють на точкові й площинні (мал. 1). Точкові діоди виготовляють, дотримуючи металеву голку до поверхні напівпровідникового кристалу. Для поліпшення їхніх електр. параметрів і стабілізації використовують процес електроформування. Технологічні методи виготовлення площинних Д. н. досить різноманітні: вирощування в розплаві, сплавлення, дифузія, епітаксiale осаджування та ін. Інтенсивно розвиваються нові, перспективні методи створення р — n переходів, які використовують для легування напівпровідника, електронне та іонне бомбардування. Д. н. широко застосовують в обчислювальній техніці при побудові, напр., логічних схем (див. *Діодні логічні елементи*), дешифраторів, пасивних каналів передачі інформації (імпульсні діоди), для введення та відображення інформації (світло-й фотодіоди) та ін.

Властивості Д. н. описуються системою електр. параметрів, яка характеризує роботу приладу в схемі й використовується під час інженерних розрахунків відповідних кіл.

Для імпульсних діодів, напр., вводяться такі параметри: постійний прямий спад напруги при заданій величині прямого струму, постійний зворотний струм при заданій вели-

чині зворотної напруги, час відновлення зворотного опору  $\tau_{\text{відн}}$ , макс. імпульсний прямий спад напруги на діоді при заданій величині імпульсу струму та ємність  $C$  діода.

Граничні електр. режими роботи імпульсного діода визначаються максимально допустимими зворотною напругою, середнім прямим струмом та імпульсним струмом. Нантиповіші для імпульсних діодів (типу Д9Д, Д310, Д311, Д219, КД503А та ін.) значення  $\tau_{\text{відн}}$  — у діапазоні 5—300 нсек, а  $C = 0,5\text{—}15$  пф.



1. Зовнішній вигляд напівпровідникових діодів  
2. Вольт-амперна характеристика тунельного діода

Особливість імпульсних діодів полягає в необхідності зменшувати час життя носіїв струму  $\tau_{\text{ж}}$  в напівпровіднику та ємність діода для досягнення великої швидкодії. Шляхи зменшення  $\tau_{\text{ж}}$  — термоартування, легування золотом (напр., у діодах Д311, Д219, КД503А та ін.), опромінювання потоком електронів, нейтронною радіацією та ін. Застосування цих спец. способів у зоснаванні з прогресивними технологіями методами (дифузійна межа-технологія, планарно-епітаксціальна технологія та ін.) дають можливість виготовляти імпульсні діоди, які за сукупністю електр. параметрів наближаються до ідеальних ключових елементів. Дальше зменшення інерційності імпульсних Д. н. тісно пов'язане з мікромініатюризацією приладів та використанням нових напівпровідникових матеріалів (напр., інтерметалевих сполук).

Рівень розвитку технології інтегральних схем дає тепер змогу створювати багатоконтурні діодні схеми (діодні лінійки й матриці) в мікроелектронному виконанні. Заміна ними аналогічних діодних структур, що їх збирають з окремих Д. н. ручним шляхом, дає можливість різко підвищити швидкодію та надійність і зменшити габарити, вагу й вартість відповідних вузлів БОМ.

У радіоелектроніці Д. н. застосовують для детектування, перетворення й модулювання НВЧ коливань (НВЧ діоди), випрямлення змінного струму (випрямні діоди), стабілізації постійної напруги (стабілітрони) та для ін. потреб.

У параметричних підсилювачах і системах автоматики застосовують Д. н., у якому використовується залежність ємності  $p$  —  $n$  переходу від прикладеної до нього напруги. Такий діод називається варикапом. Особливе місце серед Д. н. займають тунельні діоди, чия дію оснований на квантово-мех. тунель-

ному ефекті. Прямка гілка їхньої вольт-амперної характеристики (мал. 2) має падаючу ділянку, якій відповідає від'ємна диф. провідність. На тунельних діодах будують прості схеми генераторів, відслідковачів, перетворювачів частоти, перемикачів тощо. Малі габарити, вага і споживана потужність і велика швидкодія сприяють застосуванню тунельних діодів у вузлах БОМ.

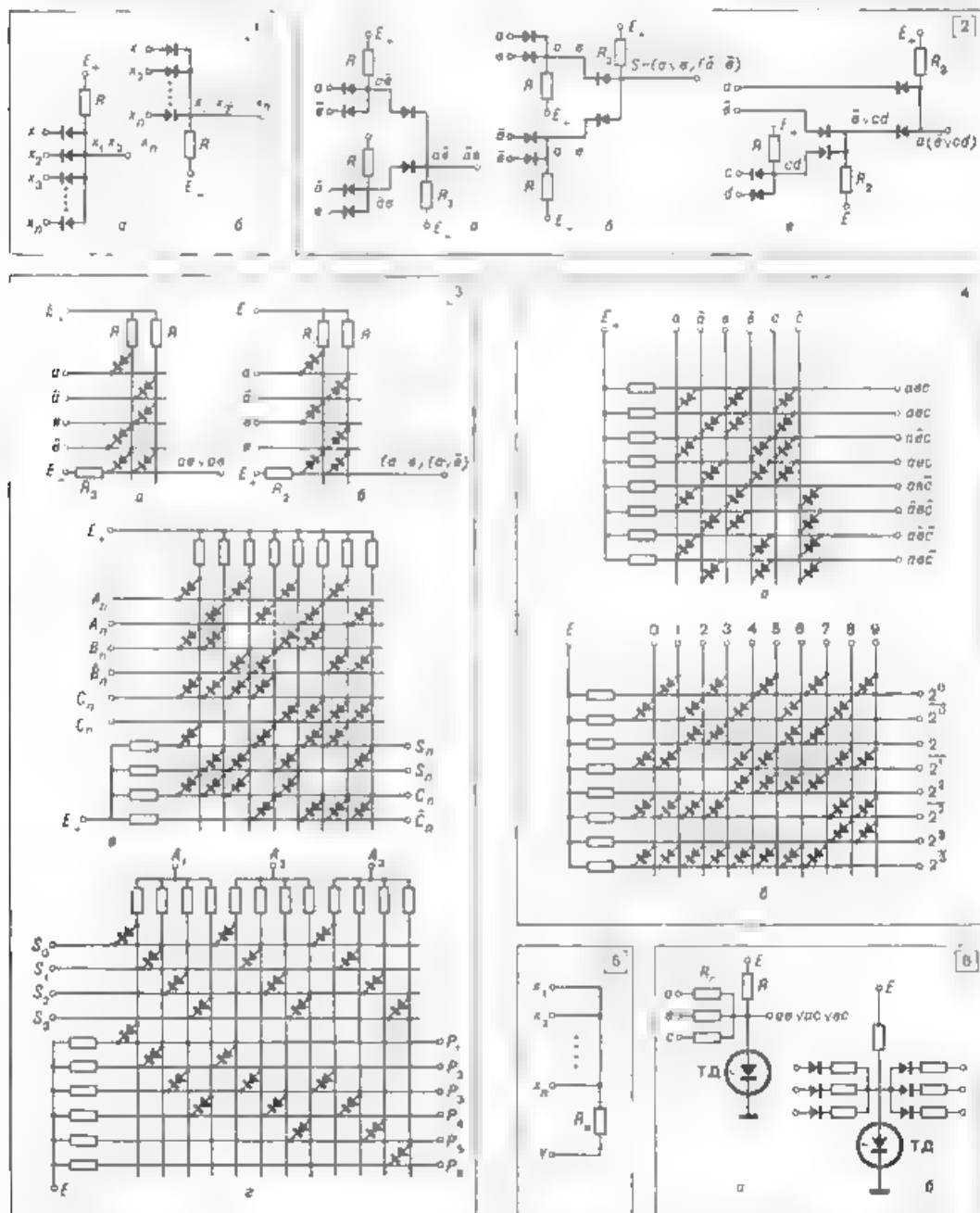
Лит. Справочник по полупроводниковым диодам и транзисторам М — Л, 1984 Полупроводниковые диоды. Параметры, методы измерений М 1968 [6] и др. с. 289) С. Л. Сидоренко.

ДІОДНА ЛІНІЙКА — див. Діодні логічні елементи.

ДІОДНА МАТРИЦЯ — див. Діодні логічні елементи.

ДІОДНІ ЛОГІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ — електронні мола, побудовані з діодів і резисторів і призначені для реалізації логічних функцій. Д. л. є були першими напівпровідниковими логічними елементами, їх застосовували вже в лампових ЦОМ. У Д. л. е. використовується властивість напівпровідникового діода чинити різний опір струмові, що тече в ньому, залежно від полярності прикладеної напруги. Електр. схеми найпростіших Д. л. е. зображено на мал. 1. Якщо потенціал  $V_1$  на вході, відповідний логічній «1», перевищує потенціал  $V_0$ , відповідний логічному «0», то кажуть, що в схемі використовується «позитивний» сигнал, а якщо  $V_1 < V_0$  — то «негативний». Для схем з позитивними сигналами джерела живлення обирають так, щоб виконувалася умова:  $E_+ > V_1 > V_0 > E_-$ , причому одна з напруг живлення  $E_+$  або  $E_-$  може дорівнювати нулеві. Опір  $R$  завжди набагато більший за прямий, але менший за зворотний опір діода. За цих умов на виході схеми «1» (мал. 1, а) потенціал, близький до  $V_1$ , встановлюється лише в тому разі, якщо на всі входи подано сигнали «1». Якщо хоч один із входів перебуває під потенціалом  $V_0$ , то відповідний діод відкритий, і оскільки його прямий опір малий, то й на виході встановлюється потенціал, близький до  $V_0$ . На виході схеми «АБО» (мал. 1, б) такий потенціал буває лише тоді, коли на всі входи подано сигнал «0». Якщо хоч на одному з входів в'яляється сигнал «1», то відповідний діод відкривається, і потенціал на виході схеми зростає до значення, близького до  $V_1$ . При роботі зображених на мал. 1 схем з негативними сигналами виконуваними ними логічними функціями змінюються: схема мал. 1, а реалізує ф-цію «АБО», а схема мал. 1, б — ф-цію «І». При цьому виконується умова:  $E_+ > V_0 > V_1 > E_-$ . Для реалізації логіч. ф-цій, що є суперпозицією ф-цій «І» чи «АБО», описаних Д. л. е. можна комбінувати між собою, приєднуючи виходи одних до входів інших. В результаті одержують багатоступінчасті Д. л. е., які складаються з ряду послідовно зв'язаних схем «І» та «АБО» (мал. 2).

Логічні зміни в ЦОМ найчастіше формують тригери, які можуть водночас видавати й прямі й інвертовані сигнали. За наявності таких сигналів довільну логічну ф-цію в принципі



можна реалізувати за допомогою Д. л. е. «І» та «АБО», зокрема, за допомогою двоступінчастих Д. л. е. типу «І/«АБО» чи «АБО/«І». Д. л. е. типу «І» «АБО» реалізують логіч. ф-ції, подані в диз'юнктивній, а Д. л. е. типу «АБО/«І» - в кон'юнктивній нормальній формі. В двоступінчастих Д. л. е. всі шляхи проходження сигналу аналогічні, кожним входом і виходом послідовно вивмкнено однакову кількість діодів, і цим забезпечено рівність затримок та ослаблень сигналів.

Двоступінчасті Д. л. е. часто описують за допомогою матричних схем (мал. 3, а і б). Матрична форма особливо зручна для зображення Д. л. е., які реалізують водночас кілька різних ф-цій від спільних логічних

змінних (мал. 3,  $e$  і  $z$ ). Окремим випадком таких Д. л. є діодні дешифратори й перетворювачі кодів (мал. 4). Якщо в Д. л. є «1» чи «АБО» (див. мал. 1) напругу живлення замінити напругою одного з сигналів, то одержимо Д. л. є з керуванням за напругою живлення. Такі Д. л. є використано, наприклад, у схемі асувача, зображеній на мал. 3,  $e$ . Замість джерела  $E_+$  напруга подається на штих з регістра вихідного коду. Д. л. є цього типу часто називають клапанним, вважаючи сигнал, що замінює джерело живлення, за основний, а сигнали на виходах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — за керуючі.

У ряді випадків у Д. л. є «1» та «АБО» замість резистора  $R$  можна підключити навантаження. В результаті одержують Д. л. є «з логікою навантаження». Подібну схему «АБО» з керуванням за напругою живлення зображено на мал. 5. Якщо схема працює з позитивними сигналами й велика напруга з навантаження інтерпретується як  $P = 1$ , то  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, P) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \vee P$ , тобто Д. л. є реалізує функцію «АБО» з заборною. Такий Д. л. є можна використати, наприклад, на виході логічного кола, де навантаження являє собою певний виконавчий орган. Д. л. є можна складати з окремих діодів, що є сукупністю кількох діодів зі спільним анодом або катодом (тобто з гальванічними зв'язком між усіма  $p$ - або  $n$ -ділянками напівпровідника відповідно). Д. л. є для реалізації систем логічних функцій (дешифратори, перетворювачі кодів тощо) зручніше складати з діодів і матриць — пристроїв, побудованих із двох перехресних систем провідних шматків, між якими в заданих місцях утворено напівпровідникові діоди. Швидкодія Д. л. є визначається імпульсними характеристиками діодів, сумарною ємністю навантаження закритих діодів і монтажу та максимальними струмами, які може відбирати Д. л. є, а також перемикання від джерел живлення та джерел вхідних сигналів. Будучи пасивними елементами, діоди не можуть посилювати сигнали. У міру проходження по колу з Д. л. є сигнали ослаблюються: зменшуються перепад між рівнями  $V_1$  та  $V_0$  й особливо різко — струм, який можна відбирати з виходу логічного кола (порівняно зі струмами на входи). Зі збільшенням числа ступенів дедалі суворішими стають допуски на опори й вимоги до величин струмів, відбираємих від джерел сигналів і джерел живлення. Для підвищення ефективності Д. л. є, бажаними є великі, порівняно з перепадом потенціалів  $|V_1 - V_0|$ , живильні напруги, але при цьому зростає й може стати надмірною й потужність, розсіювана резисторами. Через вплив перелічених факторів число ступенів у Д. л. є звичайно обмежують двома-трьма. При побудові деяких логічних кіл Д. л. є комбінують з підсилюючими елементами на триодних напівпровідникових, магнітних осердях, лампах тощо. Перевагою чисто діодних логічних схем є їхній менший габарити, низька вартість і вища надійність.

Останнім часом швидко вдосконалюється технологія виготовлення Д. л. є. Починають випускати мікроелектронні діодні лінійки й матриці, а також усі діоди та зв'язання сформовано на одному кристалі напівпровідника і вмонтовано в спільний корпус, а також Д. л. є в інтегрованому виконанні, в яких на одному кристалі або на одному підкладі формують не лише діоди та міжз'єднання, а й резистори. В таких елементах, окрім різкого збільшення щільності компоновки, досягають і більшій надійності й швидкодії при зменшенні вартості. Перехід на мікроелектронне виконання потребує іншого підходу до проектування логічних кіл з Д. л. є. Якщо раніше при проектуванні схем прагнули використовувати якомога меншу кількість діодів, то тепер доцільнішою може виявитися мінімізація, наприклад, кількості «корпусів» (тобто діодних матриць або лінійок) незалежно від заповнення їх діодами.

Швидкодіючі Д. л. є можна будувати на тунельних діодах (див. Діод напівпровідниковий), які на відміну від звичайних діодів є активними приладами і дають змогу посилювати сигнали. Схеми на таких діодах реалізують порогові логічні функції  $\prod^n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Які набувають значення «1», якщо хоча б більше аргументів одночасно дорівнюють «1». На мал. 6,  $e$  для прикладу показано схему найпростішого логічного мажоритарного елемента на тунельному діоді з трьома входами. З виходу знімається великий струм («1»), якщо не менш як на два входи діє сигнал «1». Д. л. є на тунельних діодах відзначаються високою швидкодією (тактова частота порядку 100 МГц і вище), малою споживаною потужністю та багатьма логічними можливостями. Основна їхня вада — відсутність внутрішньої розв'язки між входом і виходом, і це утруднює об'єднання схем у вузли. Щоб забезпечити спрямованість потоку інформації, доводиться використовувати багатопазні системи імпульсного живлення. Простіше спрямованість передавання сигналу забезпечується застосуванням у колах зв'язку звичайних або зворотних діодів (мал. 6,  $d$ ). Д. л. є на тунельних діодах доцільно використовувати для побудови швидкодіючих вузлів ЦОМ, у яких допустимим є застосування логічних елементів з невеликим коеф. розгалуження. Дальше вдосконалення Д. л. є цього типу, підвищення їхньої надійності й розширення сфери застосування пов'язане з поліпшенням відтворюваності й стабільності параметрів тунельних діодів та з розвитком інтегральної технології виготовлення відповідних схем.

Лит. Котт В. М., Гаврилов Г. К., Ваваров С. Ф. Тунельні діоди в висвітлювальній техніці. М. 1967 [бібліогр. с. 212-214]. Річардс Р. К. Елементи й схеми цифрових висвітлювальних машин. Пер. з англ. М. 1961. Пресман А. Н. Расчет и проектирование схем на полупроводниковых приборах для цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М. 1963. Харли Р. Б. Логические схемы на транзисторах. Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 423]. В. М. Корсунский.



**ДІРАКА ФУНКЦІЯ** — те саме, що й *дельта-функція*.

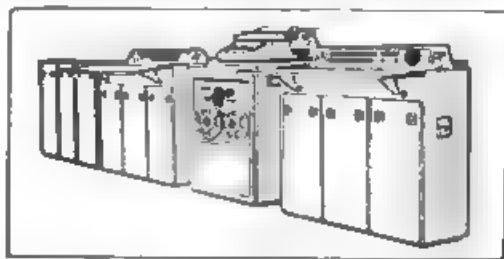
**«ДНЕПР»** — перша вітчизняна цифрова керуюча обчислювальна машина на напівпровідникових елементах. Створено її в Ін-ті кібернетики АН УРСР 1961. «Д.» складається (мал.) з центральної обчислювальної частини та пристрою зв'язку з об'єктом.

Обчислювальна частина являє собою самостійну універсальну цифрову обчислювальну машину середньої продуктивності (час виконання операції додавання 29,5–57,5 мксек). Її містять оперативного значимого пристрою — змінна (ОЗУ) комплектують блоками по 512 слів), усього може бути вкорпоровано до восьми блоків. Алгоритмична повнота використовуваних у машині операцій дає змогу запрограмувати алгоритм керування для багатьох сучасних технологічних процесів. Система команд «Д.» — двоадресна, форма подання чисел — в коді, фіксованою перед вищим розрядом, довжина слова (разом зі знаковим розрядом) — 26 розрядів, система елементів — імпульсно-потенціальна.

Пристрій зв'язку з об'єктом забезпечує автомат. введення показань 250 програмно-опитуваних давачів безперервного сигналу, до 192 частотних давачів і до 1344 сигналів релейного типу 0–12 в. «Д.» має 60 каналів для видавання аналогових і 480 каналів — для видавання релейних сигналів керування та пульта оператора, обладнаний регістром візуальної індикації й клавіатурою введення інформації керування процесом. Щоб машину можна було використовувати в обробці даних системою і як обчислювальну машину середньої продуктивності, для цього її можна доповнювати додатковими пристроями: нагромаджувачем на магн. стрічці (розрахований на записування 1 500 000 слів, швидкість записування — 5650 слів за 1 сек), швидкодіючим цифродрукуювальним пристроєм (швидкість друкування 1200 ± 50 шестирозрядних чисел за 1 хв) й стрічковим перфобатаром (швидкість виведення даних на 5-дорічкову телеграфну перфострічку 1200 ± 50 рядків за 1 хв).

«Д.» використовують як центр. ланку системи автоматизації безперервних процесів. Машина автоматично опитує давачі процесу, обчислює оптим. режими керування й видає відповідні завдання локальним регуляторам (їхній виконавчий механізм). Завдання віддруковуються (в системі, замкненій через людину-оператора), або реалізуються автоматично (через блоки видавання сигналів керування). «Д.» може обчислювати техніко-економічні показники процесу й друкувати їх через задачі інтервали часу (через годину, зміну й добу). Машину застосовують і в системах обробки даних фіз. експерименту, оскільки вона має пристрої, які полегшують її зв'язок з вимірювальними приладами та схемами керування експериментом. Структура системи обробки даних на базі «Д.» залежить від характеру експерименту. При локальному експе-

рименті доцільно безпосередньо підключати машину до давачів досліджуваного об'єкта. Внаслідок специфіки давачів машину підключають до них за допомогою блоку підсилювачів. До машини додають пристрій графічного відтворення результатів експерименту й швидкодіючий алфавітно-цифровий друкувальний пристрій. В експериментах, що здійснюються на віддалених одна від одної установках, систему треба ділити на дві частини: знімання та обробки інформації. Як буферний пристрій зв'язку між ними ви-



Керуюча машина широкого призначення «Дніпро».

користовують нагромаджувач на перфострічці. Дані від окремих об'єктів дослідження записуються на перфострічку, потім інформація зводиться в обчисл. частину «Д.» для відповідної обробки.

У процесі вдосконалення до «Д.» включено систему переривання через 28 причин і додано кілька блоків введення з паперової перфострічки та виведення інформації (швидкодіючий цифровий друкувальний пристрій). «Д.» можна використовувати в цифро-аналогових комплексах для моделювання та вимірювання виробничих процесів.

Лит.: Малиновский В. Н. Цифровые управляющие машины и автоматизация производства. М., 1963 (Бібліот. с. 285–286); Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 (Бібліот. с. 179–181). В. М. Малиновский.

**«ДНЕПР-2»** керуюча обчислювальна система, орієнтована на застосування її як центральної ланки в інформаційно-керуючих системах на промислових підприємствах. Складається в двох основних частин (мал.) — обчислювального комплексу ОК «Дніпр-21» та керуючого комплексу КК «Дніпр-22».

Обчислювальний комплекс призначений для обробки інформації, яка надходить від зовнішніх пристроїв і від КК. ОК можна застосовувати як окрему обчисл. машину для обробки економічних даних і розв'язування інженерно-тех. задач. Опортивний запам'ятовувальний пристрій (ЗП) ОК на феритових кільцях має до 32К комірок (42-розрядних). Передбачено підключення дозвільного ЗП до 32К комірок. Система числення — двійкова. Середня швидкість машини — 20 тис. операцій за 1 сек. До складу ОК входить один мультиміксний і два селекторні канали, що працюють автономно з пам'яттю машини. Передбачено підключення пристроїв введення — виведення з

перфострічок і перфокарт, швидкодіючого алфавітно-цифрового друкувального пристрою, теледальні і друкарських машинок (разом до 96 зовн. пристроїв). Зовнішніми ЗП машини є нагромаджувачі на магнітній стрічці (до 16 стрічкопротягувальних пристроїв). Слова містять у собі змінну кількість 9-розрядних символів: числа — до 8, буквено-цифрова інформація — до 127 символів. У пам'яті адресується кожний символ.

Команди містять у собі одно або кілька машинних *code* залежно від типу команди й

слідкування за перебуванням сигналів аналогових давачів у заданих межах; автомат. слідкування за станом давачів двопозиційного типу (виявлення моменту й звиска перемикачів їх); автомат. слідкування за появою сигналів від давачів числово-імпульсного типу й нагромадження числа імпульсів по кожному з них; видавання відомостей про аварійний стан об'єкта керування, апаратури комплексу, давачів та ліній зв'язку. Вхідні сигнали (заг. кількість їх понад 1800) можуть находити від давачів струму, частот, потен-



Керуюча обчислювальна система «Днепр-2»

кількості адрес, які є в ній. У машині є 0-адресні, 1-адресні, 2-адресні й, в деяких випадках, багатоадресні команди. Адреси можуть бути одно-, дво- і трисимвольні. У командах допускається як пряма й непряма адресація, так і безпосереднє задавання операцій. Мультиплексний канал, забезпечуючи автономний обмін інформацією зовн. пристроїв з пам'яттю машини, здійснює редагування інформації при введенні й виведенні, яке аналогічне редагуванню за шаблоном, прийнятому в мові КОБОЛ. Система переривання ґрунтується на схемно-програмному принципі й забезпечує відпрацювання сигналів переривання, що надходять від КК, зовн. пристроїв та нагромаджувачів, а також внутр. сигналів переривання, які інформують про збої в центрі, процесорі (ЦП) і про особливі ситуації, які виникають при регулярному виконанні програми (переповнення, захист пам'яті тощо). Гнучка структура системи переривання дає змогу організувати будь-яку логіку багатопрограмної обробки інформації.

Керуючий комплекс (КК) призначено для приймання інформації від керуваного об'єкта, видавання керуючих сигналів на об'єкт і для первинної обробки інформації. Крім того, КК здійснює обмін між оператором, що слідкує за технологічними процесом, та ОК. Основні функції КК: автоматичне збирання інформації від давачів керуваного об'єкта (автономно й за командами КК), виринокання поточних значень сигналів аналогових давачів (фільтрація від випадкових перешкод вхідного сигналу); автомат.

ціалу, числово-імпульсних та двопозиційних давачів. Вихідні сигнали (заг. кількість їх понад 1000) видаються на реле й різні регулятори.

Широкі логічні можливості й гнучку структуру «Д.-2» доповнює розвинена система матем. забезпечення. Зовн. мови, спеціалізовані програми-диспетчери та набори стандартних підпрограм дають змогу швидко організувати обчисл. процес на «Д.-2» у системах різних призначень. Числовий код (ЧКД) призначений для програмування будь-яких задач, у т. ч. й задачі керування технологічними процесами, стандартних підпрограм і системних програм. Транслятор ЧКД переводить програми на машинні коди, а за допомогою ретранслятора можна надрукувати в ЧКД будь-яку машинну програму. Автокод АКД-1 призначений для програм, які включають у бібліотеку, та для інших програм, що вимагають широкого використання можливостей системи машинних команд. До автокоду входять як засоби для програмування — зовнішня мова й транслятор, так і засоби налаштування у зовнішній мові — мова налаштування й програма автоналаштувач (АНД).

Автокод реального масштабу часу (АКДРЧ) призначено для програм керування технологічними процесами й тех. об'єктами. Мова АКДРЧ включає всі засоби АКД-1, містить у собі додаткові макрокоманди обміну «Днепра-21» з «Днепром 22», з системою переривання та годинником. Програми, записані в АКДРЧ, наочно відображують функ-

ціювання машини в реальному масштабі часу, зв'язок її з зовн. об'єктами.

Транслятор в АЛГОЛ-60 дає змогу налаштовувати програми безпосередньо зовн. мовою в режимі діалога програмувальника з машиною.

Транслятор в КОБОЛу є необхідною частиною матем. забезпечення систем керування виробничими процесами, обчисл. центрів торговельного та економ. профілю.

Програма-диспетчер ДД-1 організовує обчисл. процес у системах керування технологічними процесами на базі модифікацій машини з малою ємністю оперативного ЗП і невеликою кількістю зовн. пристроїв.

Програма-диспетчер ДД-2 організовує процес налаштування програм (записання числових кодів) одночасно з трьох теледисків.

Програма-диспетчер ДД-3 організовує обчисл. процес в інформаційно-керуючих системах, системах керування технологічними процесами, обчисл. центрах та системах обробки експериментальних даних. ДД-3 працює на розширенні модифікацій машини, забезпечуючи зручну роботу оператора і програмувальника під час налаштування й розв'язування задач у мультипрограмувальному режимі; програма диспетчер ДД-3 включає блоки керування даними.

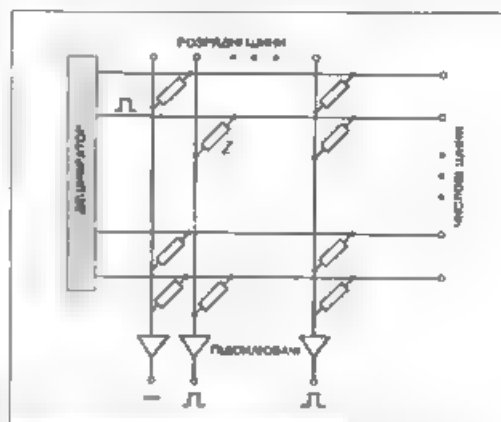
Літ. Управління системою «Дніпро-2». К., 1966. Н. Я. Якимів А. М. Прикладне УВС «Дніпро-2» як базовою машини в системах комплексної автоматизації на підприємстві. В кн.: VII-а Всесоюзна сесія секції «Управління машинами і системами». К., 1970.

А. Г. Кукішук, А. І. Нікітін, А. О. Станібі.

**ДОВГОЧАСНИЙ ЗАПАМ'ЯТУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ (ДЗП),** постійний ЗП, п а с в я н и й ЗП — запам'ятовувальний пристрій, у якому немає засобів записування, що дають змогу змінювати інформацію за допомогою команд у процесі роботи цифрової обчислювальної машини; призначений для тривалого зберігання й видавання інформації в іншій пристрої. Здобільшого в ДЗП зберігаються часто застосовувані в обчислюваннях константи, підпрограми, табличні дані, готові програми, програми спеціалізованих ЦОМ тощо, тобто інформація, яка не потребує надто частих змін. У заг. випадку ДЗП являє собою перетворювач кодів зі сталым співвідношенням між вхідними кодами (адресами слів) та вихідними кодами (словами). Залежно від типу запам'ятовувального елемента, застосовуваного в пристрої, розрізняють ДЗП з лінійними або нелінійними елементами й оптичні. ДЗП з лінійними елементами має нагромаджувач матричної форми (мал. ). Сигнал вибирання певної числової шини надходить до розрядної лише тоді, коли в елемент зв'язку у відповідному перетині. Застосовують переважно резистивні, конденсаторні та індуктивні матриці. Резистивні та конденсаторні матриці виготовляють напильюванням або друкуванням на напівпровідних чи пластмасових картках елементів зв'язку і провідників. Інформацію наносять наступною перфорацією (руйнуванням відповідних

зв'язків) або використанням масок у процесі виготовлення. Труднощі побудови ДЗП великої ємності, пов'язані зі значним споживанням енергії при макс. частоті звертання, з великими розкидами величин опорів або ємності конденсаторів, що погіршують співвідношення сигнал/завада, зменшують інтерес до таких ДЗП.

Великого поширення набули в ДЗП матриці з індуктивним зв'язком, з розмикненням чи замиканням магнітопроводом. У першому випадку числові й розрядні шини проклада-



Матричний пристрій довгочасного запам'ятовувального пристрою з лінійними елементами.

дають друкуванням в обох боків тонкої ізоляційної пластини або на двох пластинках, між якими вставляють екрануючу карту або карту, що збільшує індукційний зв'язок за рахунок захрових струмів, в перфорацію в місцях, визначених кодом зображуваної інформації. Якщо застосовують розмикнений магнітопровід, для підсилення індуктивного зв'язку між числовими та розрядними шинами вставляють феритовий стрижень. Широко відомі трансформаторні ДЗП, в яких застосовують індуктивні матриці з замкненим магнітопроводом. При цьому числові шини пролягають осердя з вихідною обмоткою тих розрядів, у яких на дану адресу слід занести код «1».

ДЗП з нелінійними елементами мають переваги, які полягають в обмеженні паразитних зв'язків, поліпшенні відношення сигнал/завада і зниженні вимог до кін. вибірки числа. В цих ДЗП використовують діодні матриці або магнітні елементи з прямокутною петлею гістерезису. З магнітних елементів при побудові ДЗП найчастіше застосовують замкнені феритові осердя різної конфігурації, *майсери* з постійними магнітними й плоскі магнітні півліки.

В оптичних ДЗП інформація зберігається у вигляді візерунка, що складається з непрозорих і прозорих ділянок на плоскій поверхні типу картки, пластинки чи диска. Інформацію зчитує світловий промінь, що проходить крізь носії. Пошук інформації

здійснюється переміщенням променя, переміщенням косія або одночасним переміщенням променя й косія одного відносно одного. Можливість побудови ДЗП дужче швидкодіючих, надійніших і з меншими затратами, ніж оперативні ЗП (обмежувачі функції ДЗП у процесі роботи лише фізично видавання інформації) і наявність великих масивів інформації, що залишаються протягом тривалого часу експлуатації машини незмінними (константи, стандартні й тестові програми тощо), роблять застосування ДЗП перспективним для часткової заміни ОЗП не лише в спеціалізованих, а й в універсальних ЦОМ.

**ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ НА ЕОМ, МАШИНИЙ ПОШУК ЛОГІЧНОГО ВИСНОВКУ** — напрям у теоретичній кібернетичі, який вивчає можливості моделювання на електронній обчислювальній машині розумової діяльності математика. Важливість цього напрямку зумовлена тим, що в математиці легше, ніж в інших видах творчості, формалізувати й умову розв'язуваної задачі, й елементарні кроки, допустимі під час її розв'язування, і перевірку результату (як і в усіх галузях творчості, сам процес мислення піддається формалізації з величезними труднощами і витратами).

Теор. передумовою для автоматизації Д т на ЕОМ стало створення *логіки математичної*, яка формалізувала поняття логічного введення теорем з аксіом. Ще до появи ЕОМ у працях класичної матем. логіки було розроблено методи, які стали реальною базою практичних *алгоритмів* пошуку висновку. Перші практичні спроби побудувати машинні програми встановлення *вивідності* було зроблено в США на поч. 50-х років. Програма «логік-теоретик» працювала з поширеним, але надто незручним для пошуку висновку формулюванням однієї нескладної теорії (див. *Числення висловлювань*). Тому практичні результати цієї програми були мізерними. Однак використана в ній методика виявилася корисною і мала принципове значення для формування напрямку, який названо *програмуванням евристичним*. Набагато цікавіші логічні теореми доведено за допомогою програми Хао Вана, яку покладено в основу другого напрямку в автоматизації доведення. Згодом перший напрям було продовжено (напр., Геленітер використав аналіз *креслеників* для організації процесу доведення теорем). Проте переважна більшість робіт з Д т на ЕОМ (слідом за роботами Хао Вана) базуються насамперед на розроблених методах матем. логіки. Об'єднання досягнень теорії логіч. виведення й евристичного програмування поки що повністю не здійснено.

Коло теорем, реально доведених на ЕОМ, обмежене, й теореми ці не дуже складні. Відповідні доведення часто спиралась на істотну допомогу з боку людини або у вигляді «спілкуючого» формулювання початкової задачі, або у вигляді вказівок під час розв'язування її (напр., «використати таку лему», «здійснити індукцію за такою формулою» тощо). Крім

ряду логічних теорем, було доведено деякі теореми елементарної алгебри, елементарної та проективної геометрії і елементарної теорії чисел. Напр., такі, якщо квадрат кожного елемента дорівнює одиниці, то група комутативна, «квадратний корінь з простого числа ірраціональний», «простих чисел нескінченно багато». Складність доведення двох останніх теорем, очевидно, наближається до меж сучасних можливостей машинного пошуку виведення. Отже, доведення справді-таки складних теорем, а тим більше теорем, які не адекватно довести людині, поки що малоперспективне. Тому більший інтерес становлять не досягнуті практичні результати, а постановки задач і методи.

Є кілька способів у Д. т. на ЕОМ. Під час доведення теорем значну частину тех. роботи математик може доручити ЕОМ, бо в процесі доведення виникає великий обсяг обчислень або безліч варіантів, кожен з яких легко можна розглянути. Цим способом одержано, напр., деякі результати в теорії чисел. Хоч проведення таких доведень часто вимагає, щоб математик спеціально орієнтував хід своїх міркувань на використання ЕОМ, але цей спосіб ападає, власне, з проблематики машинного пошуку висновку. Спосіб перспективний, та поки що його можливості використано мало. Другий спосіб — це координування математика й ЕОМ, за якого людина визначає принциповий напрям доведення й висловлює гіпотези, а машина виконує всі проміжні логічні переходи і викладки, перевіряє гіпотези і видає матеріал для формування дальших гіпотез. Цей напрям тільки починає розвиватися й потребує не лише теор. розробки, а й дальшого удосконалення систем зв'язку людини з ЕОМ. До цього напрямку належать задачі коректування гіпотез і природного пошуку виведення.

Найпоширенішою є така постановка проблеми автоматизації доведення: матем. теорія формалізується (базою для формалізації є числення предикатів), теорема теорії перетворюється на ф-л, вивідні з тих чи інших аксіом. Після цього треба побудувати алгоритм установаження *вивідності*, тобто алгоритм, який дає правильну відповідь на запитання про *вивідність* ф-л і виявляє *закінчити роботу* для всіх *вивідних* ф-л, але для деяких (або для всіх) *невивідних* ф-л може працювати нескінченно довго. Така постановка пов'язана з нерозв'язністю переважної більшості цікавих теорій, тобто принципово неможливо побудувати алгоритм, який розділяє *вивідність* для всіх формул мови теорії. Існують інші постановки проблеми. 1) Пошук високоякісного виведення. Якість виведення не уточнюють, але мають на увазі виведення якомога компактніше (неприпустимим є надмірне застосування правил), якнайбільше «складне» (одне й те саме допоміжне твердження не слід виводити двічі на різних етапах доведення), записане в природному, звичному для математика вигляді. В Ленінгр. відділенні Матем. ін-ту ім. В. А. Стеклова було

розроблено й запрограмовано алгоритми, які знаходив у межах числення висловлювань природний висновок твердження зі списку гіпотез і записував цей висновок у вигляді логіко-матем. тексту російською мовою. 2) Коректування гіпотез і посилення теорем. Розробляють методи, які дають змогу виводити в задану ф-лу певні виправлення так, щоб вона стала теоремою або (якщо початкова ф-ла вивідна), перетворилася на сильнішу теорему. Досліджують критерії якості виправлень. 3) Надіпрроз'язувальні алгоритми. Спираючись на повноту у пероз'язаних теоріях значних розв'язаних фрагментів, розробляють розв'язувальні процедури для цих фрагментів та алгоритми встановлення визідності, які завершують роботу для якомога ширших класів ф-л.

Основою майже всіх запропонованих алгоритмів установлення визідності становить апарат секвенціальних числень (див. *Генцена формальні системи*). Ці числення часто допомагають організувати процес пошуку висновку «знизу вгору» — шляхом визначення для кожної формули  $F$  порівняно невеликого числа її можливих «безпосередніх попередників», тобто формул, з яких  $F$  можна вивести. У найпростіших випадках уже тільки це дає реальну можливість установити екзистенцію. Однак для числення предикатів такий пошук часто призводить до появи величезної кількості «зайвих» формул, тому безпосередньо застосовувати цей метод стає неможливо. Було запропоновано спосіб, відповідно до якого шукають «знизу вгору» не сам висновок, а певну його «заготовку» з неуточненими значеннями використовуваних змінних. На певних етапах побудови заготовки перевіряється, чи не можна так уточнити значення змінних, щоб одержати вже справжній висновок. Цей метод дає змогу позбутися надмірностей під час виведення й наблизитися до практичних алгоритмів, але перевірка складної заготовки — справа надто важка. Тому широким застосуванням є методи, які поєднують неуточненість значень змінних з порівняльно простою кожною кроку роботи методу резолюцій, який можна застосовувати до класичного числення предикатів, і обернений метод, який можна застосовувати майже до всіх секвенціальних числень. Для підвищення практичної ефективності цих методів вирішальне значення має визначення т. з. естратегій, які накладають ті або інші обмеження на процес установлення визідності. Досліджують, чи можливо включати в схему цих методів спеціальні механізми аксіоматичних теорій, правила для рівності та індукції, складніші формальні мови тощо.

Проблему автоматизації доведень вивчають в СРСР, США, Великобританії, Швеції, ФРН, Польщі та ін. країнах. Спец. міжнародні симпозіуми «Машинний розум» відбуваються щороку в Единбурзі (Великобританія). Два всесоюзні симпозіуми з машинного пошуку виведення відбулися у Тбілісі (Лит. РСР). Див. також *Автоматизований пошук доведень теорем*.

Лит.: Шанин Н. А. [та ін.]. Алгоритми машинного пошуку естетивного логічного вивода в численних висказуваннях. М.—Л., 1965; Математическая теория логического вывода М. 1967; Маллов С. Ю. Обратный метод установления выводимости для логических высказаний. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1968, т. 98, Вычислительные машины и мысли № 1 (сер. анал. М., 1967) (Исследования, в. 491—545); Кибернетический сборник. Новая серия, в. 7. М., 1970; Machine Intelligence Edinburgh, 1971. С. Ю. Маслов

**ДОВЕДЕНЬ ТЕОРІЯ**, метаматематична — наука, що вивчає формалізовані математичні теорії й доведення в них. Вівалі П. ім. математик Д. Гільберт (1862—1943) у рамках запропонованої ним програми обґрунтування математики через доведення несуперечливості. Тепер Д. т. вивчає ширше коло питань, що стосуються структур формалізованих доведень. Центральним для Д. т. є встановлення Гільбертом відмінності між «дійсними» матем. твердженнями, що мають зміст, та «ідеальними» твердженнями, які самі по собі не обов'язково допускають тлумачення, але дають можливість скорочувати доведення дійсних тверджень. За дійсні твердження Гільберт приймав фінітні твердження, тобто, фактично твердження про рівність і відмінність між конструктивними об'єктами (результатами конструктивних процесів). Характерною ознакою фінітних тверджень є відсутність у них конструкцій, пов'язаних з актуальною (завершеною) нескінченністю, т. з. трансфінітних конструкцій, напр., «для кожного натурального числа, існує натуральне число, яке натуральне число, що має властивість  $S$  тощо». Проблему обґрунтування математики було б розв'язано, якби вдалося еквівалентно заг. метод виключення ідеальних тверджень з доведення дійсних тверджень. Гільберт помика, що для цього, в свою чергу, досить за допомогою фінітних засобів довести несуперечливість математики, тобто твердження про те, що ні для якого твердження  $A$  не можна довести ні  $A$ , ні заперечення  $A$  (або твердження про недодатність  $0 = 1$ ). Він вказав і підхід до розв'язання цієї задачі, який і досі є осн. методом Д. т.: треба зробити об'єкт вивчення само розглядану матем. теорію і встановити, що серед її теорем нема теорем  $0 = 1$ . З цією метою теорію формалізують: перелічують її первісні поняття й матем. аксіоми (так само чинять і тоді, коли використовують аксіоматичний метод в інших галузях математики), а також осн. логічні поняття й допустимі правила переходу. Такий перелік визначає формальну систему, або *формалізм*.

Формальну систему, яку вивчають засоби Д. т., наз. предметною теорією, а ту частину Д. т., яка до неї відноситься, — *метатеорією*. З погляду метатеорії, предметна теорія є набором безмістовних символів, аналогічних, напр., позиціям у шаховій грі. Класичним прикладом застосування цього способу розгляду в теоремах двоїстості в проєктивній геометрії: з кожної теореми знову одержують теорему після взаємної заміни слів «точка» й «пряма».

Гільберт сподівався, що можна буде цілком формалізувати всю математику (або значну її частину) й фінитно доведення несуперечливості знайденої формальної системи. Ці сподівання було спростовано 1931 двома теоремами австр. математика К. Геделя (нар. 1906), які є центр. результатами Д. т.: 1) в будь-якій досить багатій несуперечливій формальній системі знайдеться формально нерозв'язне твердження, тобто ф-ла, яку не можна ні довести, ні спростувати засобами цієї системи 2) при сильніших твердженнях такою ф-лою є твердження про несуперечливість системи. Зокрема, якщо вважати, що засобами формалізованої арифметики можна здійснити всі фінитні міркування, то несуперечливість арифметики не можна довести фінитними засобами. Слідом за теоремами Геделя знайдено другий важливий результат Д. т. — теорему Черча про існування нерозв'язаних систем, тобто таких систем, для яких неможливий єдиний метод (*алгоритм*), який щодо кожної формули в скінченне число кроків розв'язує, чи є вона теоремою розглядуваної системи.

Теорема Геделя виявила, по-перше, що необхідно розглядати ієрархії формальних систем, бо в кожній конкретній формальній системі є нерозв'язні твердження; а по-друге, що різні методи доведення несуперечливості номінають. Питання, пов'язані з доведеннями несуперечливості, посідають у сучасній Д. т. центр. місце, бо результати, які одержано при вивченні їх, і методи, які використовують при цьому, застосовують і в самій Д. т., і в інших галузях математичної логіки. Зокрема, багато доведень несуперечливості розв'язують задачу приписування смислу деяким ідеальним твердженням. Один з осн. методів доведення несуперечливості полягає в тому, що природну формалізацію розглядуваної системи замінюють штучною (див. *Генценові формальні системи*), яка містить виділене правило (розр.) і, при цьому вигляді речити правил такий, що введення суперечливості  $0 = 1$ , яке не містить розриву, неможливе. Після цього доводять, що з виведення числових рівностей можна усунути розрив, звідки й випливає несуперечливість. Трансфінитний елемент (як повинен бути наслідком другої теореми Геделя) з'являється з доведення усунути розриву так: можливою виведенню ставлять у відповідність певне трансфінитне порядкове число, визначають операцію, яка зставляє з будь-яким виведенням числової рівності, що містить розрив, певне виведення тієї самої рівності, яке має менше порядкове число. Після цього усунути розрив одержують, застосовують правило трансфінитної індукції (до фінитного предиката). Доведення несуперечливості якоїсь системи  $S$  генценовським методом звичайно виявляє порядкове число  $\alpha$ , що характеризує  $S$  у такому розумінні: можна так конструктивно визначити цілком-упорядковану  $R$  натуральних чисел за типом  $\omega$ , що в  $S$  можна довести цілком-упорядкованість будь-якого власного відрізка  $R$ ; несуперечливість  $S$  можна до-

вести трансфінитною індукцією за  $\alpha$ ; ні для якого цілком-упорядкованості натуральних чисел за типом  $\omega$  в  $S$  не доведена цілком-упорядкованість. Доведення несуперечливості класичної арифметики, яке запропонував австр. математик Г. Генцено (1936), дає для цієї системи характеристику  $\omega_1$  для предикативного аналізу (див. *Предикативність*) характеристичним виявляється  $\omega_0$  — перше дуже критичне порядкове число. Виявляється способом застосування генценовських методів є використання напівоформальних систем, що містять т. з. неелементарні правила виведення, напр., правило нескінченної індукції (правило Карніана); якщо для будь-якого натурального  $N$ , вивідні  $A(0), A(1), \dots, A(N)$ , то вивідним є й  $\forall x A(x)$ . У напівоформальних системах розрив часто можна усунути не тільки за виведення числових рівностей, але й з виведення довідливих ф-л.

Другий метод доведення несуперечливості, що його сформулював К. Гедель 1941 (опубліковано 1958), вводить трансфінитний елемент не у вигляді трансфінитної індукції, а через застосування конструктивних функціоналів скінчених типів. Функціонали типу 0 — це натуральні числа, функціонали типу  $(0 \rightarrow 0)$  — це числові ф-ції, а функціонали типу  $(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0$  — це відображення числових ф-цій у натуральні числа; загалом функціонали типу  $(\sigma \rightarrow \tau)$  переробляють функціонали  $\sigma$  на функціонали типу  $\tau$ . Гедель описує переклад ариф. формул у ф-ли типу  $\equiv \forall \psi \psi M$  ( $\psi, \phi$ ) (або простішого виду), де  $\psi, \phi$  — змінні для функціоналів, і доводить, що для кожної вивідної з арифметичної формули можна вказати такий примітивний рекурсивний функціонал  $\Phi$ , що формула  $M(\Phi, \phi)$  з відною змінною  $\phi$  є вивідною в безкванторній системі  $T$ , правилами якої є правила обчислення значень примітивних рекурсивних функціоналів та індукція. Оскільки перелогами числових рівностей і вони самі, то звідси випливає несуперечливість арифметики. Амер. математик К. Свенстор (1930—61) запропонував доведення несуперечливості класичного аналізу методом Геделя; при цьому використано нове правило визначення функціоналів — правило бар-рекурсії. Але це правило обґрунтовується засобами, прийнятими не для всіх математиків. Метод Геделя було застосовано для обчислення характеристичного числа підсистеми інтуїціоністського аналізу з бар-індукцією типу 0.

Для арифметики результати, аналогічні результатам, що їх одержують методом Геделя, можна одержати гільбертівським методом  $\varepsilon$ -підстановки. Цей метод дає змогу будувати модель не для всієї теорії загалом, а для кожного окремого доведення якоїсь теорії, розширює сферу застосовності традиційного методу доведення несуперечливості через побудову моделей. Саме гільбертівським методом одержано перше фінитне доведення несуперечливості обмеженої арифметики — ариф. системи, де індукція допускається тільки за безкванторними формулами.

Доведення несуперечливості звичайно дає інтерпретацію деяких класів ф-л розглядуваної системи  $S$  у простіший систему  $S_0$ , тобто операцію  $\pi$ , що кожній формулі  $A$  розглядуваного класу ставить у відповідність «зменшену диз'юнкцію» (послабленість) ф-л  $\pi(A)$  системи  $S_0$  таку, що, по-перше, фінітні твердження не змінюються; по-друге, для будь-яких  $A$  і  $B$  за будь-яким виведенням  $B$  з  $A$  у  $S$  і за будь-яким  $i$  можна вказати таке  $j$ , що  $\pi_j(B)$  вивідне з  $\pi_i(A)$  в  $S_0$ . Друга умова відповідає міркуванню: якщо правильно  $\neg A_i \rightarrow \neg B_j$ , то при будь-якому  $i$  правильно  $\neg A_i \rightarrow \neg B_j$ , а тому при кожному  $i$  знайдеться таке  $j$ , що правильно буде  $A_i \rightarrow B_j$ . Зокрема, якщо за  $A$  взяти стандартне вивідне твердження  $0 = 0$ , одержимо: якщо  $B$  вивідне в  $S$ , то для якогось  $j$   $B_j$  вивідне в  $S_0$ . Якщо взяти за стандартне хибне твердження  $0 = 1$ , то одержимо, що суперечливість  $S_0$  веде до суперечливості  $S$ . Якщо формули системи  $S_0$  вважаються дійсними твердженнями, то інтерпретація розв'язує задачу приписування смислу довідним ф-лам системи  $S$ . Найхарактерніший приклад інтерпретації — геделіська інтерпретація ф-л арифметики, що відіграє роль  $S_0$  ф-лами безкванторної системи  $T$ , що відіграє роль  $S_0$ . Аналогічні інтерпретації дають і інші доведення несуперечливості методом Геделя. Доведення несуперечливості методом Геделя дають інтерпретацію екзистенціальних ф-л у безкванторній арифметиці ординально рекурсивних функцій. Метод в-підстановки дає інтерпретацію відсутності контрприкладу, що відрізняється від геделіської інтерпретації використанням функціоналів змислу типу  $(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0$ , які можна визначити за допомогою не тільки примітивних, а й трансфінитних рекурсій. Один з перших прикладів інтерпретації дає теорема Ербрана: кожна ф-ла класичного числення предикатів розкладається, за цією теоремою, у «зменшену диз'юнкцію» ф-л класичного числення висловлювань. Порівнюючи конструктивні (див. *Логіка конструктивна*) і неконструктивні системи, використовують інтерпретацію класичних систем конструктивними, вставляючи подвійне заперечення. В такій інтерпретації конструктивного (інтуїціоністського) числення висловлювань у модальному численні Льюїса  $S4$ . Для аналізу структури конструктивних систем використовують інтерпретацію реалізованості, яка дає можливість вводити конструктивні системи до класичних. Модифікації цієї інтерпретації дають можливість встановлювати необхідні умови вивідності існування в диз'юнкції (якщо в конструктивній арифметиці можна вивести диз'юнкцію замкнутих ф-л, то можна вивести її одну з цих ф-л). Багато метаматем. теорем можна легко довести для систем без розрізу, тому становлять інтерес доведення усуваності розрізу та ін. метаматем. результатів, які самі по собі не є метаматематични-

ми. Одним із перших прикладів такого роду було доведення теореми Ербрана, що міститься в доведенні теореми Геделя про повноту. Останнім часом такий підхід було застосовано для аналізу конструктивних, інтуїціоністських і модальних систем та для доведення усуваності розрізу у простій теорії типів. У застосуванні до ін. галузей матем. логіки виявилися корисними узагальнення метаматем. результатів на нескінченно довгі ф-ли.

Останнім часом, особливо після досліджень амер. математика П. Коена, який довів (1963) незалежність континуум-гіпотези й аксіом вибору від решти аксіом *множинної теорії*, зріс інтерес до проблеми незалежності аксіом. Методи Д. т. широко застосовують у теор. обґрунтуваннях алгоритмів *доведення теорем на ЕОМ*. Тут істотну роль відіграють теореми про спеціалізацію форми доведення і про перебування доведень, напр., додукційна теорема й інтерполяційна теорема.

Див. Новиков П. С. *Элементы математической логики* М., 1959; Hilbert D., *Grundgesetze der Mathematik* Bd. I-2 Berlin, 1908; Kleene S. C. *Introduction to metamathematics* New York-Toronto, 1952; Schütte K. *Beweistheorie* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960; Kreisel G. *Mathematical logic* Birk. Lectures in modern mathematics v. 1 New York, 1965; *Математическая логика* Логический словарь М., 1967; Kreisel G. *A survey of proof theory* The Journal of symbolic logic, 1965, v. 35, N 3; Cohen P. J. *Set theory and the continuum hypothesis* New York-Amsterdam, 1966.

**ДОВЖИНА ЧЕРГИ** — кількість вимог, що перебувають у даний момент часу на черзі в *масового обслуговування системи*. У ймовірнісних системах і в системах з випадковим відходом потоком Д. ч. *випадкова величина*. Приклади Д. ч. кількість суден, що чекають на обробку біля причалів, кількість вагонеток у бункері перед верстатом, обсяг інформації, що підлягає обробці на обчисл. пристрої. Д. ч. — важлива часова характеристика системи, що дає змогу робити висновок про тривалість простоїв транспортних засобів, про задовільність товарів. На основі розподілу Д. ч. (або моментів цього розподілу) можна розраховувати раціональну місткість складу, об'єм асоціативного запам'ятовувального пристрою тощо. Іноколи в Д. ч. включають і вимоги, що перебувають у даний момент на обслуговуванні. Для одностійної системи обслуговування з пуассонівським вхідним потоком і довільно розподіленим часом обслуговування Д. ч. обчислюють за *Формулою Полачека* *формулами*. М. В. Проципний.

**ДОВІДКОВО-ІНФОРМАЦІЙНИЙ ФОНД** (ДІФ) — упорядковане зібрання науково-технічних документів, забезпечене довідковим апаратом і призначене для довідково-інформаційного обслуговування.

З ДІФу підприємства, організації й окремі спеціалісти одержують інформацію про дослідження й розробки, які ведуться тепер, про роботу, заплановані на майбутнє, і про закінчені роботи. Служби ДІФу здійснюють абиявання, оброку, зберігання, пошук і видавання як опублікованих матеріалів, так і неопублікованої наук.-тех. документації (звітів, проєк-



тів, планів н.-д і дослідно-конструкторських робіт); видають залежно від характеру запиту бібліографічну (перелік і адреси документів) і фактографічну (фактичні довідки щодо конкретних відомостей) інформацію.

В СРСР ДІФ побудовано за такою ієрархічною схемою: Генеральний (всесоюзний), центральні галузеві, республіканські (територіальні) фонди, ДІФн при н.-д. інститутах, конструкторських бюро, на підприємствах. Генеральний ДІФ з природничих і тех. наук становить собою сукупність фондів всесоюзних і центр. галузевих інформаційних органів. За тм самим принципом будують ДІФн в галузях промисловості: центр. галузевий ДІФ становить собою сукупність фондів центр. галузевого інформаційного органу й фондів головних організацій галузі. У фонді центр. галузевого інформаційного органу збирають усі опубліковані матеріали з тематики галузі. Щодо наук.-тех. інформації, то в центр. орган надходять документи лише загальногалузевого значення, а в ДІФн головних організацій галузі — документи з закріпленої за ними тематики; або в фонді центр. галузевого інформаційного органу нагромаджується вичерпний фонд вітчизняної наук.-тех. документації й закордонних періодичних видань, а в фондах головних організацій — решта матеріалів з певної тематики.

Для координації й забезпечення оптим. діяльності ДІФу розробляють рубрикатор, у якому відображають тематичні розділи й підрозділи галузей науки й техніки, джерела комплектування й центри комплектування. Такий рубрикатор дає будь-якому інформаційному органі змогу визначити, до якої частини системи ДІФу треба звернутися за необхідною інформацією й куди треба посилати створювані інформаційні матеріали.

Основне призначення довідкового апарату (ДА) ДІФу — забезпечувати пошук інформації. ДА складається з комплексу каталогів, картотек, довідників та інформаційних видань (енциклопедії, словники, довідники, реферативні й бібліографічні видання). У комплекс каталогів і картотек ДА входять: головна картотека, бібліотечні каталоги, алфавітно-предметний покажчик, різні спец. картотеки.

У головній картотекі (ГК) зосереджено всі осн. матеріали за профілем організації, при якій створено ДІФ. У неї вилічують картки на книги й статті, на стандарти, наук.-тех. звіти й інформаційні листки, на описи збірок, проспектів і планів видань та реферативних й бібліографічних журналів. Картки в ГК розташовують, як правило, відповідно до універсальної десятикової класифікації (УДК).

За допомогою системи посилань і відсилань ГК може служити засобом координації всіх каталогів і картотек довідкового апарату. Для цього на розділниках рубрик і під рубрик у ГК ставлять посилкові (відсылкові) картки, які відсилають до відповідних розділів бібліотечного каталогу й до спец. картотек,

створюваних, щоб відповідати на запити вузько спеціалізованого конкретного характеру. В таких спец. картотеках комплектують довідковий матеріал, який становить інтерес у першу чергу для даної організації: картотека з тек. чи інших видів інформаційних матеріалів (звіти, переклади тощо), картотеки характеристик акробу, адреси фірм і заводів-виробників тощо. В спец. картотеках застосовують різні способи індексування: предметні, дескрипторні, за УДК тощо.

Про вибір пошукових систем і пристроїв для ДІФу див. *Інформаційно-пошуковий пристрій*.

Лит.: Старобинская Н. Г. Участие технических библиотек в создании справочно-информационных фондов М., 1965. Шварца И. Г. Справочно-информационный фонд (СИФ). В кн.: Теория и практика научно-технической информации М., 1980.

П. В. Походило.

**ДОВІРЧА ОБЛАСТЬ** — узагальнення поняття *довірчого інтервалу* на випадок багатовимірного параметра. Для  $k$ -вимірного параметра  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  Д. о., що відповідає довірчому рівневі  $\alpha$  або коефіцієнту довіри  $1 - \alpha$ , — випадкова множина  $D$  точок  $k$ -вимірного простору, яку визначають за  $n$  і спостереженнями *випадкової величини*  $z$  з залежним від параметра  $\theta$  розподілом, і така, що  $D$  містить значення  $\theta$  з імовірністю  $1 - \alpha$  при кожному  $\theta$ . Найбільший інтерес становлять Д. о., які є опуклими, зв'язними і, в якійсь розумній, найменшими множинами. Відомі методи наближеної побудови таких Д. о. при великому числі спостережень, а для деяких практично цікавих випадків Д. о. побудовано й при фіксованому числі спостережень.

А. Н. Дороговця.

**ДОВІРЧИЙ ІНТЕРВАЛ** для параметра  $\theta$ , що відповідає довірчому рівневі  $\alpha$ , — інтервал з випадковими кінцями  $c_1$  і  $c_2$ , що містить з імовірністю  $1 - \alpha$  значення параметра  $\theta$  при кожному  $\theta$ .  $c_1$  і  $c_2$  — відомі ф-ції  $n$  і спостережень *випадкової величини*  $z$  з розподілом, що залежить від невідомого параметра  $\theta$ , і наз. довірчими границями, що відповідають довірчому рівневі  $\alpha$ . Число  $i$  —  $\alpha$ -наз. коеф. довіри. Для побудови Д. і. для параметра  $\theta$ , як правило, використовують статистики (ф-ції спостережень), які є «добрими» (див. *Статистичні оцінки*) оцінками невідомого параметра  $\theta$  і мають розподіл, що залежить лише від  $\theta$  (в тому разі, якщо розподіл випадкової величини залежить і від інших невідомих параметрів). Найкращі й асимптотично найкоротші Д. і. будують, використовуючи ефективні й асимптотично ефективні оцінки параметра  $\theta$ . Напр., Д. і. для середнього значення  $m$  побудований за  $n$  незалежними спостереженнями нормально розподіленої випадкової величини з невідомим середнім  $m$  і невідомою дисперсією, має вигляд.

$$\left( \bar{x} - t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right), \quad (1)$$



де  $\bar{x}$  і  $s^2$  — відповідно вибіркові математичне сподівання і дисперсія (див. Емпірична функція розподілу), а  $t_{\alpha}$  визначають за  $n-1$  є як значення  $t$ , для якого

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dx = 1 - \alpha, \quad (2)$$

$$\text{до } z_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

— щільність розподілу Стюдента з  $n-1$  ступенями вільності.

Д. 1. (1) будують на тій підставі, що статистика  $\sqrt{n-1} \frac{\bar{x}-m}{s}$  має щільність розподілу ймовірності  $z_{n-1}(x)$ . Для визначення  $t_{\alpha}$  в таблиці. Теорію Д. 1. розробив 1934 амер. математик Ю. Нейман. Див. також *Довірка області*.

Лит.: Крамар Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. М., 1948; Умиди С. Математическая статистика. Пер. с англ. М., 1967 (6661-ср. с. 601—610). А. Я. Дорогощев.

**ДОВІРЧИЙ РІВЕНЬ** — заздалегідь задана ймовірність, в урахуванням якої будують довірчий інтервал або довірчу область.

**ДОВІРЧІ ГРАНИЦІ** — обчислювані за вибірковими даними кінці інтервалу, що заляжить від результату спостережень, який в наперед задану ймовірність містить невідоме значення параметра розподілу випадкової величини. Див. також *Довірчий інтервал для параметра  $\theta$ , що відповідає довірчому рівневі  $\alpha$ . Довірка області*.

**ДОКУМЕНТ НАУКОВИЙ** — різновид матеріального носія закріпленої на ньому інформації наукової, що має певну логічну завершеність. Треба, щоб Д. н. обов'язково був співвіднесений з часом і місцем його підготовки, а також в ім'я його індивідуального чи колективного автора. Сукупність опублікованих Д. н. становить наукову і технічну л-ру, яка є матеріальною формою існування науки. Д. н. — це результат завершення наук. дослідження, засіб поширення наук. інформації у просторі й часі, осн. спосіб реалізації вступності, інтернац. характеру та ін. закономірностей науки, засіб утвердження пріоритету вченого, оцінки продуктивності його праці тощо. Отже, Д. н. є органічною частиною соціального механізму науки. Див. також

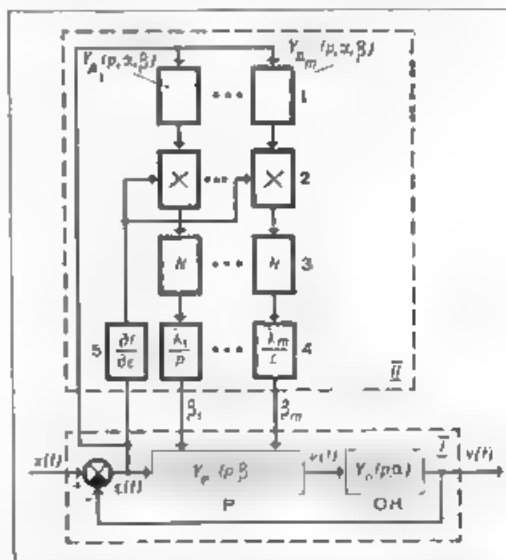
*Інформатика, Інформація документальна, Науково-інформаційна діяльність.*

Р. С. Гіадресський, А. І. Чортій.  
**ДОКУМЕНТАЛЬНА ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА СИСТЕМА** — див. *Інформаційно-пошукова система документальна*.

**ДОМІНУВАННЯ** в теорії ігор — 1) У грі антагоністичній з виграшу функцією  $H(a, b)$  стратегія  $a_1$  1-го гравця домінує над його стратегією  $a_2$ , якщо за будь-якої стратегії  $b$  2-го гравця  $H(a_1, b) \geq H(a_2, b)$ . Симетрично визначається Д. стратегій 2-го гравця. 2) У грі кооперативній поділ  $x$  домінує над поділом  $y$ , якщо знайдеться така коаліція  $k$ , що забезпечує своїм членам виграти, які є відповідними компонентами вектора  $x$  (правильний зміст цього забезпечення визначається *характеристичною функцією гри*), і кожний член коаліції  $k$  в умовах поділу  $x$  одержує більше, ніж в умовах поділу  $y$ .

М. М. Воробієв.

**ДОПОМЕЖНОГО ОПЕРАТОРА МЕТОД** — метод одержування компонент градієнта показника якості автоматичної системи керування за допомогою перетворення сигналу системи допоміжним нелінійним (у загальному випадку) оператором. Розгляньмо систему керування замкнену (і на мал.), яка складається з об'єкта керування ОК й керуючого пристрою (регулятора) Р, описуваних відповідно операторами  $Y_o(p, \alpha)$  та  $Y_p(p, \beta)$ , де  $p = d/dt$  — оператор диференціювання,  $\alpha$  — сукупність змінних параметрів об'єкта ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\beta$  — сукупність варію-



Блок-схема самонастроюваної системи керування з використанням методу допоміжного оператора I — основна система, II — контур самонастроювання; 1 — допоміжний оператор; 2 — ілюкційні ланки; 3 і 4 — блоки, які виконують операції  $N \frac{d}{dt}$  відповідно; 5 — інтегратори;  $\beta_1, \dots, \beta_n$  — значення настрйоуваних параметрів.

яних параметрів настроювання  $\beta_j$  регулятора ( $j = 1, 2, \dots, m$ ),  $x(t)$  і  $y(t)$  — відповідно вхідний і вихідний сигнали системи,  $v(t)$  — керуюче ділення. Часто критерій якості системи автоматичного керування  $I$  визначають через похибку системи  $e$

$$I = Nf(e), \quad (1)$$

де  $N$  — оператор або функціонал.

Як правило, треба, щоб  $I$  набував оптимального значення  $I_0$ , тобто

$$I_0 = \min_{\beta_j \in B_j} I(\beta_1, \dots, \beta_m) \quad (2)$$

або в загальнішому випадку:

$$I_0 = \inf_{\beta_j \in B_j} I(\beta_1, \dots, \beta_m) \text{ або } I_0 = \sup_{\beta_j \in B_j} I(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (3)$$

де  $B_j$  — допустима область змін параметрів  $\beta_j$ .

При використанні градієнтної процедури пошуку оптимальних значень параметрів (див. *Градієнтний метод*) рівняння настроювання параметрів регулятора мають вигляд:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = A \frac{\partial I(\beta)}{\partial \beta} \quad (4)$$

де  $A$  — числова матриця,  $\beta$  — вектор настроюваних параметрів. З (4) виходить:

$$\frac{\partial I(\beta)}{\partial \beta_j} = N \frac{\partial f(x)}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \beta_j}. \quad (5)$$

Враховуючи, що  $e = x - y$ ,  $y = Y_0(p, \alpha)v$ ,  $v = Y_p(p, \beta)e$  і беручи до уваги, що  $x$  не залежить від  $\beta$ , одержимо

$$\frac{\partial e}{\partial \beta_j} = - \frac{\partial y}{\partial \beta_j}, \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \beta_j} &= Y_0(p, \alpha) \frac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial \beta_j} e + \\ &+ Y_0(p, \alpha) Y_p(p, \beta) \frac{\partial e}{\partial \beta_j}. \end{aligned} \quad (6b)$$

Перетворення (6) дає:

$$\frac{\partial e}{\partial \beta_j} = -Y_{dj}(p, \alpha, \beta)e, \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (7)$$

де оператор

$$Y_{dj}(p, \alpha, \beta) = [1 + Y_0(p, \alpha)Y_p(p, \beta)]^{-1} Y_0(p, \alpha) \frac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial \beta_j} \quad (8)$$

наз. допоміжним оператором.

З (7) і (5) видно, що перетворення похибки системи з цим оператором дає змогу визначити компоненти градієнта  $I$ , бо  $N$  і  $f(e)$  (див. (3)) заздалегідь задано (вибрано). Структурну схему контура самонастроювання, оснований на використанні Д. о. м. для випадку, коли  $A = \lambda I$  (де  $I$  — одинична матриця,  $\lambda$  — скалярний множник), наведено на мал. (контур II). Вираз (8) можна записати у вигляді:

$$Y_{dj}(p, \alpha, \beta) = Y_{d0}(p, \alpha, \beta) Y_{dp}(p, \beta), \quad (9)$$

де  $Y_{d0}(p, \alpha, \beta) = [1 + Y_0(p, \alpha)Y_p(p, \beta)]^{-1} \times Y_0(p, \alpha)$  — спільна для всіх допоміжних операторів частинка, а  $Y_{dp}(p, \beta) = \frac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial \beta_j}$  —

т. з. істотні допоміжні оператори. З (9) видно, що  $Y_{d0}(p, \alpha, \beta)$  залежить від параметрів об'єкта і регулятора, а  $Y_{dp}(p, \beta)$  — тільки від параметрів регулятора.

Іноді для спрощення контура самонастроювання  $Y_{dj}(p, \alpha, \beta)$  апроксимують простішими ланками, зокрема використовують лише істотні допоміжні оператори для наближеного визначення компонент градієнта:

$$\frac{\partial e}{\partial \beta_j} \approx -Y_{dj}(p, \beta)e. \quad (10)$$

Д. о. м. використовують у т. з. безпошукових самонастроюваних системах. При цьому для досягнення оптимального значення  $Y$  не треба застосовувати спец. пошукові сигнали, проте необхідна значна апріорна інформація про структуру й параметри системи.

Літ.: Казанов Н. Е. Математическая теория непрерывных самонастраивающихся систем. «Известия АН СССР. Энергетика и автоматика», 1962, № 6. Евлахов Л. Г. Самонастраивающаяся система с поиском градиента методом искусственного оператора. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1963, № 1. Костык В. И. Беспощадные градиентные самонастраивающиеся системы. Н. 1969 (Бюллет. с. 264-273).

В. І. Костюк, Ю. В. Кременько  
**ДОПУСТИМА МНОЖИНА** — множина допустимих векторів у задачах програмування математичного. Д. м. буває обмежена або необмежена, відкрита або замкнена, опукла або неопукла. Від перелічених властивостей Д. м. залежить існування, єдиність і характеристичні властивості екстремуму.

**ДОПУСТИМА ОБЛАСТЬ** — те саме, що й допустиме множество.

**ДОПУСТИМА ТОЧКА** — те саме, що й допустимий вектор.

**ДОПУСТИМЕ КЕРУВАННЯ** — значення керуючого ділення або керуючого параметра, яке має деякі обмеження, зумовлені конкретними особливостями керованого об'єкта. Фіз. суть і походження цих обмежень можуть бути різноманітними (конструктивні обмеження, експлуатаційні). Напр., одним з параметрів керування рухом автомобіля є кут повороту керма. Конструктивні особливості автомобіля такі, що цей параметр підпорядкований обмеженням виду  $\alpha \leq u \leq \beta$ ,

де  $\alpha$  і  $\beta$  — двох крайніх положень керма. Експлуатаційним обмеженням для автомобіля є, напр., температура води або мастила у двигуні, яка не повинна підніматися вище від певного рівня.

У випадку керуваного об'єкта, що має кілька керуючих параметрів  $u_1, \dots, u_r$ , вважають, що конструкцією об'єкта й умовами експлуатації в просторі змінних  $u_1, \dots, u_r$  задано якусь множину  $U$ . Керуючі параметри в кожний момент часу повинні набувати лише таких значень, щоб точка  $u = (u_1, \dots, u_r)$  належала множині  $U$ . Множину  $U$  називають областю керування. У найпростішому випадку керуючі параметри можуть незалежно один від одного змінюватися в деяких межах:  $\alpha_i \leq u_i \leq \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

...,  $r$ , причому ці нерівності визначають область керування у вигляді  $r$ -вимірного паралелепіпеда. У загальному випадку внаслідок конструкції об'єкта між керуючими параметрами  $u_1, \dots, u_r$  можуть бути зв'язки, що виражаються, наприклад, рівняннями виду  $\Phi(u_1, \dots, u_r) = 0$  або нерівностями  $\Phi(u_1, \dots, u_r) \leq 0$ . При цьому область керування може мати геометрично складніший характер. Так, напр., якщо параметри  $u_1$  і  $u_2$  зв'язані співвідношенням  $(u_1)^2 + (u_2)^2 - 1 \leq 0$ , то область керування являє собою круг.

Для застосувань особливо важливий випадок замкненої області керування, тобто випадок, коли точка  $u$  може бути всередині множини  $U$  або на її межі. При визначенні Д. к. враховують і характер зміни керування в часі  $u(t)$ . При цьому розглядають керування у вигляді і неперервних, і кусково-неперервних функцій часу. Припущення про кусково-неперервне керування зумовлене тим, що оптимальні керування в багатьох випадках виявляються розривними. Це потребує стрибкоподібної, миттєвої зміни керуючих параметрів, що, як правило, не суперечить фіз. властивостям керуваного об'єкта. Для математичного описування об'єкта керування треба вказати не тільки на його математичну модель, а й Д. к. Див. також *Оптимального керування теорія*.

Л.м. Болтянський В. Г. Математический методы оптимального управления. М., 1969.

В. І. Іванченко

**ДОПУСТИМИЙ ВЕКТОР** — вектор, що задовольняє всі обмеження в задачі математичного програмування. Ітераційні процеси, як правило, починаються з якогось Д. в. Для відшукування Д. в. часто застосовують загальні оптимізаційні методи. Так, вихідний опорний план у задачі матем. програмування лінійного можна знайти симплекс-методом, застосувавши його до якоїсь нової задачі, еквівалентної вихідній. При цьому Д. в. нової задачі очевидний. Пошук Д. в. здебільшого можна звести до якої-небудь задачі програмування математичного, для якої за Д. в. беруть довільний вектор у просторі змінних вихідної задачі.

Для відшукування Д. в. множини  $\Omega = \{x : f_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$  досить у задачі відшукування  $\min \{f_j : f_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$  зробити якусь кількість кроків, починаючи від вектора  $(x^0, f^0) = (x^0, \max_j f_j(x^0))$ , де  $x^0$  — довільно. Наближення  $x^k$ , що відповідає значенню  $f_k \leq 0$ , є Д. в. множини  $\Omega$ .

Методи матем. програмування, що ґрунтуються на теорії двоїстості, дають змогу будувати послідовність наближень, збіжну до опт. вектора зони допустимості множини.

Р. А. Полян, М. В. Приям.  
**ДОПУСТИМИЙ ШЛЯХ** у теорії графів — шлях, уздовж якого мають задовольнятися задані обмеження. Нехай дано граф  $(U, I)$ , де  $I$  — множина його вершин, а  $U$  — множина його дуг. У множині  $I$  виділено якусь фіксовану підмножину  $A$ . У відповідність кожній вершині  $i$  ( $i \in I$ ) графа поставлено множину  $\Phi_i$  якогось простору  $R$  і  $\phi$ -цію  $f_i(\mu_i)$ , що набуває значень з простору  $R$  і визначена на множині шляхів  $\mu_i$ , які виходять з  $A$  й заходять в  $i$ . Шлях  $\mu_{i_m} = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_m) = (\mu_k, i_{k+1}, \dots, i_m)$ ,  $i_k \in A$  наз. допустимим, якщо  $f_{i_k}(\mu_{i_k}) \in \Phi_{i_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Нехай у множині  $I$ , крім підмножини  $A$ , виділено й підмножину  $B$ . Кожному Д. ш.  $\mu$  з  $A$  в  $B$  поставлено у відповідність число  $f(\mu)$ , яке наз. довжиною цього шляху. Найкоротшим Д. ш. називають Д. ш.  $\mu_{i_m} = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ , який має мінім. довжину і для якого  $f_{i_m} = (\mu_{i_m}) \in \Phi_{i_m}$ ,  $\Phi_{i_m} \subseteq \Phi_{i_m}$ .

Багато екстрем. задач на графах, теорії розкладів і дискретного програмування зводяться до відшукування найкоротшого Д. ш.

І. М. Мельник.  
**ДОПУСТИМИХ НАПРЯМІВ МЕТОД** — один з оптимізаційних методів.

**ДОСТАТНІ СТАТИСТИКИ** — див. Статистичні оцінки.

**ДОСТАТНІСТЬ ОЗНАК**. У розпізнаванні образів набір ознак  $x = f(z)$  наз. достатнім щодо набору деяких первісних ознак  $z$ , якщо  $x$  дає змогу одержати за будь-якої функції втрат, пов'язаних з помилковим розпізнаванням, те саме значення ризику розпізнавання, що набір ознак  $z$ . Це виконується тоді й тільки тоді, коли апостеріорні розподіли класів при перетворенні ознак  $x = f(z)$  зливаються незмінними, тобто  $P(k/f(z)) = P(k/z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , де  $k$  — порядковий номер класу,  $m$  — число класів. Термін «Д. о.з» запроваджено з матем. статистики, де використовують аналогічне поняття «достатньої статистики». Д. о. з означає, зокрема, що, користуючись ознаками  $x$ , можна забезпечити ту саму мінім. імовірність помилки розпізнавання, що й при використанні ознак  $z$ . Достатніми ознаками, напр., є набір апостеріорних імовіріос-

тей  $P(k/z)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Заняття ознаки  $z = f(z)$  простіші за первісні ознаки  $z$ . Тому дуже важливо знайти для цих первісних ознак простіші достатні ознаки  $z$  і так спростити (з дешевити) розпізнавальну систему.

Створюючи розпізнавальний пристрій, конструктор досліджує, чи є вибрані ознаки достатніми щодо первісних. Напр., при розпізнаванні зображень неперервна функція ясності двох змінних перетворюється на набір дискретних величин розкладанням поля зображення на елементи (клітинки) і дискретним вимірюванням середньої ясності кожного з них. Потрібно вибрати розміри клітинок і кількість рівнів квантування так, щоб дискретний опис був мінім. за обсягом інформації й водночас достатнім. Щоб вибрати достатні ознаки, треба знати розподіл  $P(k/z)$  і  $P(k/x)$ . Вони, як правило, невідомі. Тому в практиці вибирають достатні ознаки експериментально або на основі інтуїції. Здебільшого обмовляються тим, що для різних наборів ознак  $z$  виникають різні помилки розпізнавання, і вибирають той набір, який мінімізує ту саму помилку розпізнавання, що й первісні ознаки.

Т. М. Віслюк

**ДОСТУП ДОВІЛЬНИЙ** — спосіб організації звертання до пам'яті ЦОМ, при якому час, що затрачується на звертання, не залежить від розміру почини інформації, вибраної чи розміщеної раніше.

**ДОСТУП ПОСЛІДОВНИЙ** — спосіб організації звертання до пам'яті ЦОМ, при якому час, що затрачується на звертання, залежить від розміщення інформації, вибраної чи розміщеної раніше.

**ДОЦІЛЬНІСТЬ** у кібернетичі — загальна характеристика поведінки складних динамічних систем, яка спрямована на досягнення певного кінцевого результату й реалізується на основі механізмів зворотного зв'язку й адаптації. Поняття доцільної поведінки дає змогу розглянути під єдиним кутом зору й процес життєдіяльності людини та інших тварин, і функціонування різних сервосистем у техніці.

Поняття Д. спочатку склалося в класичному природознавстві, де воно означало пристосованість організмів до умов навколишнього середовища, а наукова інтерпретація поняття набула відносної завершеності в рамках рефлекторної теорії. Виникнення кібернетики радикально змінило емпіричну базу наукової інтерпретації поняття Д. Це мало свій прояв насамперед у створенні штучних автомат. пристроїв, які реалізують в умовах вироб. функції контролю й керування, які традиційно вважали прерогативою людського розуму. Функціонування кібернетичних пристроїв, що уособлюють своєрідну єдність природи та людського розуму, наділяється рисами доцільної поведінки. Це дало новий імпульс розвитку науки про інтерпретацію поняття Д. і поставило вимогу її експлікації (уточнення) в термінах кібернетики. Перша така експлікація належить амер. математикові Н. Вінеру (1894—1964) та його співробітникам

(А. Розенблюту й Дж. Бігелову). Згідно з цим означенням, поняття доцільного, або телеологічного, означає, що акт або поведінку можна вважати спрямованою на досягнення мети, тобто фінальної умови, за якої система встановлює певне співвідношення в часі чи в просторі з іншою системою, а термін «телеологія» вживається як синонім мети, контрольованої зворотним зв'язком.

Строгіша експлікація поняття Д. в термінах кібернетики, яка розкриває «механізми» доцільної поведінки, стала можливою, коли склалася т. з. фізіологія активності — теоретична концепція, що зародилася на стику фізіології, психології й кібернетики. У світі уявлень фізіології активності будьяка пристосована реакція, яка конститує ту чи іншу форму доцільної поведінки, складається з такою осн. функціональною схемою: потреба (яка виражає змуну внутр. відношень під впливом середовища індивіда або середовища виду), настанова, відібраний під впливом настанови стимул, реакція; зворотний зв'язок; звиріння, надання результатів звиріння завдяки впливові настанови функції позитивного або негативного підкріплення; корекція. Інакше кажучи, найрізноманітніші форми пристосованих реакцій, незалежно від того, чи спричиняються ці реакції стимулами, що виходять із зовн. або внутр. середовища організму, реалізуються за тією самою осн. функціональною схемою, тобто спираються безпосередньо не на завадливий, преформований (зовн. стимулом), а на активно — під впливом «успіху» (плюс ефект звиріння) або «неуспіху» (мінус ефект звиріння) — кореговану сукупність законних збуджень. Саме в цьому протиставленні принципу мікретапної корегованості механістичному принципіві відправної преформованості полягає те нове розуміння функціональної структури адаптивних актів, що конституують доцільну поведінку, яка склалася в рамках біокібернетичного підходу.

Деякі вчені виділяють як характерну ознаку доцільної поведінки властивість самозбереження, важливості системи в умовах несталості зовн. середовища. Так, напр., рад. математик А. М. Колмогоров (п. 1903) вважає, що поняття «діяти доцільно» включає зміня оберігати себе від зовнішніх впливів, здатність сприяти розмноженню особици. В такому розумінні Д. формується історично, у процесі прогресивної еволюції, передумовою якої є природний добір видів. За твердженням рад. фізіолога М. О. Беріштейна, Д., визначувана метою самозбереження, виживання, до якої прагнуть активно, не є необхідною і споконвічною умовою еволюції, оскільки елементарні механізми дарвінівського survival of the fittest (виживання найпристосованішого) здійснюються через флуктуаційні спадкові мутації і не потребують цілеспрямованості, активного передпрограмування.

Конкурентна боротьба флунтуючих мутантів, яка лежить в основі природного добо-

ру, в тут випадковою. Д. виникає там, де фактори випадковості відіграють другорядну роль порівняно з факторами активного програмування, і життєдіяльність організму виступає як боротьба за витримування цілі програми, як процес вироблення негентропії (негативної ентропії), яка переважає над деструктивними змінами. Зростання негентропії і пов'язані з ним інформаційні процеси становлять те загальне, що характеризує активну цілеспрямовану поведінку людини та функціонування різних сервомеханізмів абіогенної природи.

Інформаційні процеси, здатність високоорганізованих систем виробляти й здійснювати цілі своєї діяльності становлять фундаментальну характеристику всіх складних форм поведінки. Для позначення й формалізації цієї характеристики англ. кібернетики А.-М. Елдрю запровадили поняття *hedony*, яке являє собою функцію, що її значення виражає ступінь досягнення цілі. На його думку, *hedony* відноситься і до біологічних імпульсів тварин, які виражаються в активних діях, і до цілеспрямованого функціонування кібернетичних пристроїв. Поняття *hedony* пов'язане з вінерівським поняттям ефективного тонуусу, який зумовлює процес вироблення умовного рефлексу. Разом з тим уявлення про здатність досить складних автоматів самостійно виробляти цілі своєї роботи, про свободу волі автоматів ґрунтуються на елементарних помилках антропоморфізму.

Цілеположна діяльність людини ґрунтується (імітується) антиентропійним цілеспрямованим функціонуванням автомата. Як існа своєрідність цих, по суті, відображальних процесів пов'язана в принципово різницею в способі вироблення (постановки) цілей, із зумовленістю їх законами реальної дійсності. Як укажує В. І. Ленін, «... цілі людини породжені об'єктивним світом і передбачають його, — виходять його як дано, наявне» (Повне зібрання творів, т. 29, с. 159), проте взаємовідношення свідомої діяльності людини і природи не зводиться до простого збігу. Людина виділяє себе з природи. В основі її цілеположної діяльності лежить бажання підкорити світ собі. Тому цілі діяльності видаються людині зовн. відносно навколишньої природи, хоча вони породжені природою. Зміст цих цілей визначається не тільки (й не стільки) біологічними імпульсами, але насамперед соціальними мотивами, бо він складається в процесах суспільного життя людини. Проте зміст цілей функціонування автомат. пристроїв визначає людина. Цілеспрямоване функціонування машини несе на собі відбиток цілеположної діяльності людини, яка су проводжується зростаючим організованості в навколишньому середовищі. Машина виступає як знаряддя праці, тоді як мета трудового процесу виходить від людини. Об'єктивна цілеспрямованість функціонування пристроїв, визначувана як внутр. необхідність, як імпульс, узятий поза зв'язком з цілеположною діяльністю людини, не може мати ін-

шої інтерпретації, крім телеологічної, лише вираженої в термінах кібернетики.

Літ.: Верейський Н. А. Пути развития философии в связи с ними задачи кибернетики. В кн. Исследования в области кибернетики. М., 1982. Кольмогоров А. И. Автоматы и жизнь. В кн. Невозможное и возможное в кибернетике. М., 1986. Свинцицкий В. И. Понятие целесообразности в функционировании кибернетических систем. В кн. Основы кибернетики. М., 1984. Бассис Ф. В. Подлинный и значимый нефрофизиологический мониторинг. М. А. Берштейн «Вопросы философии». 1987, № 11. В. И. Свинцицкий

**ДРЕЙФ НУЛЬОВОГО РІВНЯ операції якого підсилювача — зміна в часі величини вхідної напруги, визначувана за відсотком корисного вхідного сигналу. Д. н. р. в випадковим процесом, і тому його найточніше можна охарактеризувати ймовірнісними або статистичними показниками: макс. значенням і найімовірнішим часом досягнення його. Шляхом поділу величини Д. н. р. на коеф. передавання операційного підсилювача (ОП) визначається відносений до входу Д. н. р. його можна подавати як неправильний випадковий вхідний сигнал, що накладається на корисний вхідний сигнал і спричинює одну з складових похибки вхідного сигналу. В процесі проектування й експлуатації ОП величину віднесенного Д. н. р. прагнуть звести до мінімуму. Д. н. р. спричинюється флюктуаціями фіз. процесів. Так, в ОП з резистивними зв'язками (без проміжних перетворювачів форми сигналу) оск. причинами Д. н. р. є нестабільність напруг джерел живлення й контактних напруг між елементами ламп, зміна емісії катода й опори в вхідних колах, нестабільність сіткового струму, температурна залежність параметрів транзисторів, недостатня ізоляція вхідного кола від кіл з високою напругою, неоднаковість параметрів і старіння ламп і транзисторів.**

С такі методи зменшення величини віднесенного Д. н. р.: стабілізація напруг джерел живлення, побудова вхідних каскадів ОП за містковими й балансними схемами, астосування ламп з малим сітковим струмом та ізоляція землею вхідних кіл ОП. Ці способи дають змогу на порядок зменшувати величину віднесенного Д. н. р. Використання додаткового каналу підсилювання в ОП з модуляцією та демодуляцією сигналу (МДМ-підсилювачі) дає змогу зменшувати величину віднесенного Д. н. р. до 25—50 *мкВ/год*; схеми ОП з паралельними каналами дають зменшення до 10—15 *мкВ/год*. У підсилювачах, виконаних за простими схемами, без спец. засобів зменшення Д. н. р. й при істотній величині його, застосовують елементи регулювання рівня вхідної напруги, або т. з. «наладжування нуля», яке виконують періодично в процесі експлуатації аналогового розв'язувального пристрою. Віднесена величина Д. н. р. для деяких аналогових обчисл. машин така: «МНТ-9-3» — 600 *мкВ* (8 *год*); «ІМУ-1» — 3 *мВ* (10 *хв*); «МН 7» — 5 *мВ* (10 *хв*); «МН 10» — 2 *мВ* (8 *год*); «ІМУ-10» — 30 *мкВ* (8 *год*).

А. Ф. Верань,

**ДРОБОВИХ КРОКІВ МЕТОД** — один з економічних методів розв'язування задач математичної фізики. Коли розмірність задачі збільшується, кількість операцій для одержання числового розв'язку зростає внаслідок зростання кількості точок і логіч. труднощів складання програми розрахунку. Для системи дифер. рівнянь

$$\frac{du}{dt} = Lu, \quad (1)$$

де  $L = L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  — дифер. оператор,  $u = u(x, t)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , схема звичайної апроксимації (див. *Синтез чисельних методів*)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A_1 u^{n+1} + A_2 u^n, \quad A_1 + A_2 \sim L$$

стають неефективними в разі багатовимірних задач. Щоб знайти  $u^{n+1}$ , необхідне обернення оператора  $E - \tau A_1$ , що потребує сотні  $N^{(m)}$  операцій, де  $N$  — кількість точок на один вимір,  $m$  — кількість просторових вимірів, а  $\alpha(m)$  дуже зростає зі збільшенням  $m$ . Так, напри., для рівняння теплопровідності  $\alpha(1) = 1$ ,  $\alpha(2) = 3$ .

Щоб одержати економічні усталені різницеві схеми, запропоновано методи, ґрунтовані на таких ідеях: а) розщеплення різницевої схем, б) набл факторизації, в) розщеплення (слабкої апроксимації) дифер. рівнянь.

У випадку рівняння (1) відповідні різницеві схеми мають такий вигляд (для спрощення взято два дробові кроки)

а) схема розщеплення:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = A_{11} u^{n+1/2} + A_{21} u^n,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = A_{12} u^{n+1} + A_{22} u^{n+1/2}, \quad (2)$$

$$A_{11} + A_{12} = A_1, \quad A_{21} + A_{22} = A_2;$$

б) схема наблженої факторизації:

$$(E - \tau A_{11})(E - \tau A_{12}) u^{n+1} = (E + \tau \Omega) u^n, \quad (3)$$

$$A_{11} + A_{12} = A_1, \quad \Omega \sim A_2$$

в) схема слабкої апроксимації:

$$\frac{du}{dt} = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) u = Lu, \quad L = L_1 + L_2,$$

$$\alpha_1(t, \tau) = 2,$$

$$\alpha_2(t, \tau) = 0 \text{ при } t \in \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \tau, \left( n + 1 \right) \tau \right), \quad (4)$$

$$\alpha_1(t, \tau) = 0,$$

$$\alpha_2(t, \tau) = 2 \text{ при } t \in \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \tau, \left( n + 1 \right) \tau \right).$$

У випадку комутативних операторів схеми (2) і (3) еквівалентні за умови, що  $\Omega =$

$= A_{21} + A_{22} + \tau A_{21} A_{22}$ . І в тому, і в іншому випадках обернення оператора  $E - \tau A_1$  замінюється оберненням оператора  $(E - \tau A_{11})(E - \tau A_{12})$  (тобто послідовним оберненням операторів  $E - \tau A_{11}$ ,  $E - \tau A_{12}$ , взятими кажучи, простішої структури. За умови  $A_{11} + A_{12} \sim A_1$  має місце співвідношення набл. факторизації

$$E - \tau A_1 \sim (E - \tau A_{11})(E - \tau A_{12}).$$

Трантування методу в) дає змогу розглядати схему розщеплення

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = A_1 u^{n+1/2},$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = A_2 u^{n+1}$$

як просту апроксимацію рівняння (4), що слабо апроксимує рівняння (1)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) u^{n+1}.$$

Отже, в основу методу розщеплення покладено представлення складних операторів через простіші, так що інтегрування початкового рівняння зводиться до інтегрування рівнянь простішої структури. При цьому схеми дробових кроків обов'язково повинні відповідати умовам апроксимації і стійкості лише в остаточному підсумку (коли їх записують у щільних кроках).

Методом розщеплювання розв'язують багато складних задач матем. фізики. До однієї з модифікацій методу розщеплювання належить метод «частинок у комірках», широко використовуваний при розв'язуванні задач матем. фізики, в якому розщеплювання не пов'язано зі зменшенням розмірності оператора.

Існує зв'язок між схемами розщеплювання й теорією *лінійних*, а саме: декомпозиція інфінітезимальних операторів підгрупи безпосередньо стосується схем розщеплення. Одним методом розщеплення є змістовнішим не лише практично (бо він забезпечує побудову економ. різницевої схем), а й теоретично, оскільки декомпозиція операторів у методи розщеплення відбувається при значно слабших припущеннях.

Великого розвитку набули схеми розщеплення підвищеного порядку точності, і вже досягнуто певного прогресу в ефективній реалізації їх.

Лит. Яковко Н. Н. Метод дробних шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967 [бібл.огр с. 189—193]. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М. 1971 [бібл.огр с. 338—350]. М. М. Яценко.

**ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗАДАЧА** — задача мінімації (максимізації) дробово-лінійної функції

$$R(x) = \frac{L_1(x)}{L_2(x)} = \frac{d_1 + (c_1, x)}{d_2 + (c_2, x)} \quad (1)$$

при лінійних обмеженнях

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

де  $A$  — матриця  $m \times n$ ;  $c_1$  і  $c_2$  —  $n$ -вимірні вектори;  $b$  —  $m$ -вимірний вектор,  $d_1$  і  $d_2$  — дійсні числа,  $x \geq 0$  означає невід'ємність усіх компонент вектора  $x$ . Один з можливих підходів до дослідження Д.-л. п. з. полягає ось у чому. Нехай  $X$  — множина, яку визначають обмеженнями (2). Д.-л. п. з. наз. допустимим, якщо  $X$  не пуста і  $L_1(x)$  підміняє від нуля хоч би в одній точці цієї мн-ни. Розв'язуючи задачу мінімізації, розглядають дві допоміжні задачі *програмування лінійного*:

$$\begin{aligned} \min (d_1 x_0 + (c_1, x)) \quad & \begin{cases} Ax = b; \\ d_1 x_0 + (c_1, x) = 1; \\ x_0 \geq 0; \quad x \geq 0; \end{cases} \\ \min (-(d_1 x_0 + (c_1, x))) \quad & \begin{cases} Ax = b; \\ d_1 x_0 + (c_1, x) = -1; \\ x_0 \geq 0; \quad x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

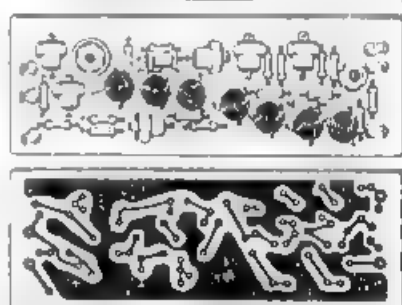
Доведено, що для того, щоб Д.-л. п. з. була допустимою, необхідно і достатньо, щоб принаймні в одній з цих задач — у 1-ї чи 2-ї — був допустимий план з  $x_0 > 0$ , при цьому, коли допустимий план у задачі 1-ї чи 2-ї існує, то у відповідній задачі існує і допустимий план з  $x_0 > 0$ ; коли Д.-л. п. з. допустима, а мн-на допустимих планів однієї з задач — 1-ї чи 2-ї — пуста, то  $\inf \left\{ \frac{L_1(x)}{L_2(x)} \right\}$  збігається з оптим. значенням цільової ф-ції 2-ї задачі. Якщо Д.-л. п. з. допустима, а задача 1-а і 2-а мають допустимі плани, то  $\inf \left\{ \frac{L_1(x)}{L_2(x)} \right\}$  збігається з мінімумом серед оптим. значень цільових ф-цій, обох задач 1-ї і 2-ї. Ці твердження зводять Д.-л. п. з. до розв'язування задач лінійного програмування. Перехід від змінних  $x_0$  з до змінних  $x$  здійснюють за ф-лами.

$$x_0 = \frac{-1}{|L_1(x)|}, \quad x = \frac{x}{|L_2(x)|}.$$

Д.-л. п. з. часто виникають в економіч. задачах, коли за цільову ф-цію беруть «відносну ефективність» (напр., прибуток, віднесений до одиниці витрат).

**ДРУКОВАНА СХЕМА** — монтажний вузол електронної апаратури, в якому з'єднання між елементами схеми виконано у вигляді плоских провідників, нанесених на ізоляційну основу. Друкованим способом виготовляють конденсатори, опори, індуктивності й контакти перемикачів, а найчастіше — електр. з'єднання між елементами схеми, а самі елементи встановлюють на платах (див. мал.), пропускаючи їхні виводи в отвори, просвердлені в точках з'єднання, або накладаючи планарні виводи елементів на контактні площини плат. Ідеї створення Д. с. висловлювали в Росії ще 1904, але практично априсити їх стало можливим після того, як було створено нові матеріали, малогабаритні деталі й розроблено спец. технологію Д. с.

Відомо понад 40 різних технологічних методів виготовлення Д. с.: травлення, гальванічний, переносу, вакуумного наплення та ін. Всі ці способи можна поділити на 2 класи: за способами 1-го класу суцільний металевий шар наносять на ізоляційну основу, потім ті місця, в яких мають залишитися провідники, покривають захисним шаром, решту металевої плівки видаляють; за способами 2-го класу метал наносять лише на ті ділянки ізоляційної основи, які мають стати провідниками. При виготовленні Д. с. способом трав-



Друкована схема: а — вигляд з боку зачіпних металів; б — вигляд з боку друкованого монтажу

лення вихідним матеріалом є фольговані діелектр. пластини. Ті ділянки металевої фольги, які мають виконувати роль провідників, покривають хімічно стійким шаром, а незахищені ділянки видаляють у травильній ванні. При гальванічному методі вихідним матеріалом є ізоляційна плата з отворами, всю поверхню якої покрито тонким хімічно осадженим провідним шаром. Ділянки плати, де не повинно бути провідників, покривають захисною маскою, а на ділянки, що відповідають майбутнім провідникам, у гальванічній ванні нарощують металевий шар, потім тонкий первинний шар провідника витравлюють. Виготовляючи Д. с. методом переносу, провідники одержують на відполірованій металевій поверхні осаджуванням в електролітичній ванні, потім їх переносять на ізоляційну основу. Щоб нанести рисунок, застосовують метод шовкографії, фотометод, офсетний, електролітичний, літографічний, наплення кризь трафарет тощо. Фотоспособ забезпечує точне відтворення рисунка схеми, його застосовують у малосерійному виробництві. Для масового виробництва застосовують шовкографію — нанесення захисного шару за допомогою еластичної лопаточки кризь отвори дрібної шовкової чи металевої сітки на ділянки, що підлягають захистові. Перспективною є електронно-й світлопроменева технологія одержування рисунка друкованого монтажу з використанням електронних керуючих обчисл. машин. Як струмопровідні матеріали використовують мідну, нікелеву або алюмінієву фольгу. Матеріал основи повинен мати добрі ізоляційні властивості.

малу діелектр. проникність, добру вологостійкість і достатню термостійкість. Ці шматки задовольняють гетинакс, поліетилек, фторопласт, лавсан та ін. Напісні деталі встановлюють на друковану плату вручну або на автоматичній лінії. Друковані плати дають змогу автоматизувати паяння, якщо всі напісні деталі розміщено з одного боку, а виводи — з другого. Групове паяння провадять кількома способами: занурюванням у розплавлений припій, вибірковою паянням через фільери, хвилюю припоєм, що створюється за допомогою електромагнітного нагнітача, та ін. При паянні хвилюю припоєм на поверхні припою не буває окисної плівки, він усе час переміщується і добре змочує місця паяння. Припій вибирають з температурою плавлення, яка дає змогу провадити групове паяння без відшаровування провідників і не порушуючи структури ізоляційної основи. Можливість автомат. складання Д. с. передбачають, розробляючи друкований монтаж. Деталі розміщують у взаємно перпендикулярних напрямках, їхні виводи випливають у вузлах координатної сітки, крок якої вибирають залежно від кроку автомат. лінії. Товщину і ширину друкованих провідників і віддалі між ними вибирають залежно від матеріалу, густини струму, допустимого спадку напруги, паразитної ємності та індуктивності, потрібної мех. міцності з'єднання з ізоляційною основою і технології нанесення провідників. Внаслідок доброго тепловідводу плоскі друковані провідники допускають більшу густину струму, ніж круглі такого самого перерізу. Щоб зменшити паразитні ємності, використовують плоскі друковані екрани. Залежно від ширини плоского екрана, відстані від екрана до провідників і ширини провідників паразитна ємність зменшується в 2—10 раз, і це має істотне значення у високочастотних схемах. Провідники, які перебувають під потенціалом землі, роблять широкими, щоб зменшити паразитні зв'язки за рахунок зрівнювальних струмів. Щоб запобігти здиранню та відшаровуванню провідників під час групового паяння, на ділянках фольги завширшки понад 4 мм роблять щілинкоподібні розриви або вікна. Застосування *інтегральних схем* висуває нові вимоги до друкованого монтажу. Корпуси елементів займають значно меншу площу, ніж потрібно для розміщення друкованих провідників при звичайному методі одно- або двохшарового монтажу, тому з'єднувальні провідники стають довгими, зростають розподілені індуктивності та ємності. Застосування багатшарового друкованого монтажу дає змогу значно скоротити провідники, бо монтаж стає об'ємним. Внаслідок цього краще використовувати простір, значно полегшується конструювання схеми, підвищується заг. надійність пристрою. Для виготовлення багатшарових друкованих плат основним є метод пошарового нарощування, наскрізної металізації та «відкритих контактних площин».

Д. с. мають кілька істотних переваг перед схемами з напісним монтажем: підвищуються мех. міцність блоків (бо елементи схеми міцно зв'язані з ізоляційною основою), ступінь стабільності та ідентичності паразитних електр. параметрів монтажу, спрощується конструювання й регулювання, зменшуються габарити блоків. Методи машинного проектування Д. с. дають змогу автоматизувати проектування й виробництво їх.

Лит.: Мажоров С. А. Технологія провадження високочастотних машин. М.—Л., 1965 [бібліогр. с. 406—408]. Фазеев Н. И. Технологія провадження узорів електронних числительних машин. М., 1967 [бібліогр. с. 318—319].

**ДУАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ** — керування, в якому керуючі дії мають двоїстий характер; їх використовують для вивчення керуваного об'єкта (КО) і для доведення його до потрібного стану. Д. к. застосовують у системі автоматичного керування (САК) у тому випадку, коли апріорна інформація про КО в керуючому пристрої (КП) не достатня і визначення поведінки КО може дати додаткові відомості про його властивості. При цьому КП розв'язує дві задачі: на основі інформації, що надходить, з'ясує властивості й стан КО і за даними про КО визначить, які дії необхідні для керування. В заг. випадку в САК процес визначення КО та керування ним пов'язані й становлять складний двоїстий, або дуальний, процес, розвиток якого характеризує якість роботи системи.

Завдання синтезу оптим. алгоритму керування в теорії Д. к. для окремого випадку зводиться ось до чого. Припустимо, що відомою є *модель математична КО*, яка в дискретному часі має вигляд:

$$x_k = f(u_k, x_k), \quad (1)$$

де  $x_k$  — регульована величина, скінчення й однозначна функція  $f(\cdot)$  — оператор КО,

$u_k$  — керуюче діяння, а  $k = \frac{t}{\Delta t}$ ,  $\Delta t$  — інтервал дискретизації часу  $t$ . Збурювальне діяння  $x_k$ , яке не можна виміряти КП, вважаємо невідомим сталим у часі параметром  $x$  із заданою апріорною щільністю розподілу ймовірностей  $p_k(x)$ . У  $k$ -й момент часу в КП відомим є бажане значення регульованої величини  $x_k^*$ . Додаткова інформація про величину  $x$  міститься у векторі спостережень  $(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_0) = y_{k-1}$  величини  $x$  у попередні моменти часу й у векторі керувань  $(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_0) = u_{k-1}$ , які можуть зберігатися в пам'яті КП і являють собою спостережувану передісторію керуваного процесу. Для практич. значний інтерес становить випадок, коли  $y_k = x_k + h_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, k-1$ , де  $h_k$  — випадкова похибка вимірювання величини  $x_k$  з відомою щільністю розподілу ймовірностей  $p(h_k)$ .

Відхилення регульованої величини  $x_k$  від її бажаного значення  $x_k^*$  призводить до втрат



у системі, які можна оцінити дитомою функцією втрат  $W_k = W(x_k, z_k)$ . Система функціонує протягом заданого часу  $n$  і загальна функція втрат має вигляд

$$W = \sum_{k=0}^n W(x_k, z_k).$$

Назвемо оптимальною системою, для якої повний ризик  $R$  — математичне сподівання ф-ції втрат

$$R = M(W) = \sum_{k=0}^n M(W_k) = \sum_{k=0}^n R_k \quad (2)$$

— мінімальний. Тут  $R_k$  — питомий ризик, який визначають як

$$R_k = \int_{\omega(y_{k-1}, u_{k-1})} r_k \cdot p(y_{k-1}, u_{k-1}) d\omega. \quad (3)$$

Функціонал  $r_k$  з (3), який наз. умовним питомих ризиком, являє собою матем. сподівання питомих втрат  $W_k$  при фіксованих значеннях векторів  $y_{k-1}$  та  $u_{k-1}$ . Його визначають у вигляді

$$r_k = \int_{\omega(z, u_k)} W[x_k(y_{k-1}, z), z_k] \times \\ \times p(z/y_{k-1}, u_{k-1}) \Gamma_k d\omega, \quad (4)$$

де  $\Gamma_k = p(u_k/y_{k-1}, u_{k-1})$  — умовна щільність розподілу  $u_k$ , яку наз. питоמוю стратегією керування. У (3) й (4) символом  $\omega(\cdot)$  позначено область інтегрування. Вираз  $p(z/y_{k-1}, u_{k-1})$  являє собою апостеріорну щільність розподілу невідомого параметра  $z$  і при заданих апіорних щільностях  $p_0(z)$  і  $p(h_i)$  його знаходять за формулою Байєса

$$p(z/y_{k-1}, u_{k-1}) = \\ = \frac{p_0(z) \prod_{i=0}^{k-1} p(y_i/z, u_i) \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma_i}{p(y_{k-1}, u_{k-1})}. \quad (5)$$

Умовну щільність розподілу  $p(y_i/z, u_i)$  визначають з урахуванням (1) за відомою щільністю розподілу  $p(h_i)$ . Послідовність ф-цій  $\delta = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$  прийнято називати стратегією керування. Залежність ризику  $R$  від стратегії  $\delta$  позначимо через  $R^\delta$ . Стратегію, яка мінімізує ризик  $R$ , наз. оптимальною. Цю стратегію шукають у класі допустимих стратегій  $\Delta$ . З (3—5) випливає, що кожний доданок  $R_k$  у (2) залежить від вибору послідовності  $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ . При цьому вибір питомих стратегій  $\Gamma_k$  впливає не лише на ризик  $R_k$  у  $k$ -й момент часу, а й на значення всіх майбутніх питомих ризиків  $R_{k+1}, \dots$

...,  $R_n$ . Цей вплив виявляється, як випливає з (5), в апостеріорній щільності розподілу невідомого параметра і становить суть дуальності керування: вибір керування визначає не лише поведінку величини  $z$ , а й темп нагромадження інформації про збурення  $z$ .

У 1961 в працях рад. вченого О. А. Фельдбаума, які поклали початок теорії Д. К., узагальнено постановку задачі на марковські КО, коли збурення  $z$  являє собою випадковий марковський процес, і на багатовимірні КО з урахуванням їхньої динаміки. Для практич. важливе значення має випадок, коли неспостережуване збурення  $z$  являє собою стаціонарний випадковий процес. При цьому розумна ідеалізація задачі полягає в припущенні, що час функціонування системи  $n \rightarrow \infty$ . Щоб оцінити якість такої системи, замість (2) слід використати функціонал середніх очікуваних втрат за одиницю часу

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n R_k. \quad (6)$$

Функціонал (6) записано в припущенні, що існує границя.

Строгу матем. постановку задачі Д. К. здійснюють методами керування випадковими процесами теорії за неповними даними. В заг. випадку, щоб відшукати опт. стратегію Д. К., використовують методи програмування динамічного. Для функціоналу (2) питомих стратегій знаходять послідовно, починаючи з скінченного моменту  $n$ . Оскільки розглядають задачу Байєса (див. *Байєсівський метод*), то стратегія оптимальна в будь-який момент часу  $n = s$  ( $s = 0, 1, \dots, n$ ) являється детермінованою і при фіксованій спостережуваній передісторії  $(u_{n-s-1}, y_{n-s-1})$  має вигляд

$$u_{n-s}^* = u_{n-s}^*(u_{n-s-1}, y_{n-s-1}). \quad (7)$$

Ця стратегія визначається в мінімізації функції

$$V_{n-s} = \alpha_{n-s} + \int_{\omega(y_{n-s})} V_{n-s+1}(u_{n-s+1}, u_{n-s}, y_{n-s}) d\omega, \quad (8)$$

де  $\alpha_{n-s} = \alpha_{n-s}(u_{n-s}, y_{n-s-1}) =$

$$= \int_{\omega(z)} W_{n-s} p_s(z) \left[ \prod_{i=0}^{n-s-1} p(y_i/z, u_i) \right] d\omega. \quad (9)$$

Для великих  $n$  і особливо для функціоналу (6) серйозні труднощі в розв'язанні задачі Д. К. пов'язані зі зростанням розмірності векторів  $u_{n-s-1}$  та  $y_{n-s-1}$  в (7). Тут істотно допомагає впровадження т. з. марковських достатніх статистик незростаючої вимірності. Визначимо в просторі векторів  $u_{n-s-1}, y_{n-s-1}$  ф-цію  $\sigma_{n-s-1}$ . Позначимо  $\Delta^\sigma$  підклас класу допустимих стратегій  $\Delta$ , які залежать від

$u_{n-s-1}, u_{n-s-1}$  тільки через  $\sigma_{n-s-1}$ . Функцію  $\sigma_{n-s-1}, s = 0, 1, \dots, n$  наз. достатньою статистикою, коли

$$\min_{\delta \in \Delta} R^{\delta} = \min_{\delta \in \Delta^{\delta}} R^{\delta}. \quad (10)$$

При цьому вираз (7) можна записати у вигляді

$$u_{n-s}^* = u_{n-s}^*(\sigma_{n-s-1}). \quad (11)$$

Статистику  $\sigma_{n-s-1}, s = 0, 1, \dots, n$  наз. марковською достатньою статистикою, якщо справджується рівність (10) і статистику  $\sigma_{n-s}$  можна обчислити за  $\sigma_{n-s-1}$  та  $u_{n-s}^*$ . В розглянутому вище прикладі цю умову задовольняє апостеріорна щільність розподілу збурення  $z$ , яку можна записати у вигляді рокурентного співвідношення, емі валентного (5).

Цікавим є випадок, коли марковську достатню статистику можна задати скінченновимірним вектором параметрів  $C = (C_1, C_2, \dots, C_m)$ . Проте строго це можливо тільки в окремих задачах. На практиці для такої спараметризації задачі використовують наближено достатні статистики.

Коли збурення  $z$  являє собою марковський процес, впровадження марковських достатніх статистик дає змогу звести задачу Д. к. до дослідження якогось керованого марковського процесу. Оптим стратегія Д. к. в цьому разі виявляється стаціонарною, або регулярною, тобто  $u_{n-s}^* = u^*(\sigma_{n-s-1})$ . Для відшукування такої стратегії застосовують ітераційні методи пошуку в просторі стратегій. Розглянуті вище заг. методи розв'язування задачі Д. к. пов'язані зі значними труднощами при обчислюванні. Тому на практиці часто обмежуються відшукуванням субоптимальних стратегій Д. к., спрощуючи постановку задачі або змушуючи клас допустимих стратегій.

Найпростішим методом синтезу субоптимального керування можна вважати визначення стратегії в мінімізації питомих ризиків  $R_k$  в (2). Визначена таким способом стратегія в заг. випадку дуже грубим наближенням до оптим стратегії Д. к.: вона спрямована в кожний момент часу лише на доведення об'єкта до потрібного стану й не містить у собі спец. функцій по вивченню об'єкта. Але для деяких об'єктів така стратегія виявляється строго оптимальною. Зрозуміло, що коли об'єкт безінерційний, це має місце за умови, що темп нагромадження інформації

про об'єкт не залежить від вибору керуючих діянь. Такого роду системи Д. к. прийнято називати нейтральними. З матем. точки зору це відповідає випадкові, коли

$$\min_{\delta \in \Delta} R^{\delta} = \sum_{k=1}^n \min_{\Gamma_k} R(\Gamma_k). \quad (12)$$

Істотне значення має визначення умов, за яких має місце (12), наприр., умови відносності систем керування змінених до розімкнених.

Теорію Д. к. застосовують у задачах самонавчання, екстрем. регулювання, побудови оптим самонастроюваних моделей тощо.

Лит. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем М., 1986 [бібліогр. с. 494—498]; Живоглядов В. И. Автоматические системы с накоплением информации. Фрунзе, 1988 [бібліогр. с. 154—160]; Ширлов А. И. Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. В кн.: Transactions of the fourth Prague conference in information theory, statistical decision functions, random processes. Prague, 1967. В. І. Іваненко, Д. В. Коромача.

**ДУГА графа** — напрямлене ребро, яке сполучає дві вершини графа.

**ДУЕЛЬ у теорії ігор** — гра антагоністична, в якій гравці, що мають обмежені ресурси (обосприсає), призначені для ятрати, вибирають моменти пострілів або цільності стрільби на якомусь інтервалі часу. Ці вибори є стратегіями гравців. *Виграшу функцію* визначають як матем. сподівання якоїсь випадкової величини, що підпорядковується можливим наслідкам Д. Залежні від інформації про дії суперника розрізняють Д. шумові, безшумні й мішані.

Теорію Д. застосовують у військовій справі та в економіці (конкурентна боротьба за ринки, рекламна кампанія тощо).

Приклад мішаної Д. Кожен з дуелантів має право на один постріл. У 1-го гравця — безшумна зброя (якщо 1-й гравець вистріляв, але не влучив, то 2-й гравець не знає про постріл, що відбувся), а у 2-го гравця — шумова (факт пострілу негайно стає відомий суперникові). Якщо 1-й гравець влучає у 2-го гравця, то його виграш дорівнює 1, якщо 2-й влучає в 1-го гравця, то 1-й гравець одержує -1, у решті випадків виграш 1-го гравця дорівнює 0. Стратегія оптимальна 1-го гравця описується щільністю розподілу на якомусь інтервалі  $[a, 1]$ , 2-го гравця — щільністю на тому самому інтервалі й стрибком на правому кінці інтервалу (2-му гравцеві рекомендується зберігати загрозу пострілу до самого кінця).

Лит. Карлин С. Математические методы в теории игр, программирования и экономики. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 798—819].

А. С. Михайлов.

**ЕВРИСТИКА** — в широкому розумінні слова — розділ психології, що розкриває природу розумових операцій людини під час розв'язування різних задач незалежно від їхнього конкретного змісту. У вузькому розумінні Е. — це здогадки, що базуються на заг. досвіді розв'язування споріднених задач. Спроби систематизувати Е. робили Р. Декарт, Г.-В. Лейбніц, В. Больцано та ін. У більшості випадків Е. — прийом, що дає змогу зменшувати кількість варіантів, які переглядають, розв'язуючи задачу, причому цей прийом здебільшого не гарантує якнайкращого розв'язку. Напр., людина, граючи в шахи, користується евристичними прийомами вироблених рішень, бо продумати весь хід з початку й до кінця практично неможливо, оскільки є надто багато варіантів гри (треба обдумати бл.  $10^{12}$  варіантів). Методи Е. широко застосовують у кібернетичі (див. *Евристичні методи в розпізнаванні, Програмування евристичне*).

О. Г. Івахненко.

**ЕВРИСТИЧНІ МЕТОДИ В РОЗПІЗНАВАННІ** — методи розв'язування задач розпізнавання, навчання або самонавчання розпізнавати, побудовані на інтуїтивних міркуваннях, що спираються на попередній досвід. Цим Е. м. в р. відрізняються від формальних методів, які логічно виводять з певних гіпотез про множини розпізнаваних сигналів, про клас, до якого належить вирішувальна функція, тощо. Евристичні методи можуть привести до швидкого й успішного розв'язання тієї чи іншої проблеми в тих випадках, коли в досвід розв'язування схожих у чомусь проблем. У подібних випадках рішення вдається знайти без великих затрат зусиль і часу на вивчення закономірностей, специфічних для даної конкретної проблеми. Рішення знаходять на основі аналогій і не цілком усвідомлених асоціацій з апріорними ішими схожими проблемами.

Цілеспрямована діяльність людини є переважно евристичною, бо формальні правила для найкращих у якомусь розумінні дій майже завжди невідомі. Як типовий приклад можна навести гру в шахи, для якої стратегія, що приводить до виграти, невідома. А проте, людина, використовуючи нагромаджений досвід і різні інтуїтивні міркування, може грати в шахи настільки успішно, що обчислювальна машина, яка має колосальні переваги в швидкості перегляду варіантів продовження гри, не може змагатися з сильним шахістом. Найокрашніший приклад Е. м. в р. являє собою *перцептрон*. Амер. нейрофізіолог Ф. Розенблатт запропонував принцип дії перцептрона за аналогією до відомих з фізіології схем зв'язків між нервовими клітинами в живому мозку. Ф. Розенблатт прийшов до дуже ефективного методу навчання *розпізнавальної системи*. З формального погляду цей метод становить збіжний ітераційний алгоритм відшукування гіперплощини, яка розділяє дві точкові множини в  $n$ -вимірному просторі ознак (див. *Розпізнавання образів*). Перцепт-



рон можна успішно використовувати для розв'язування задач навчання в тих випадках, коли в обраному просторі ознак така роздільна гіперплощина існує.

Оси. задаю Е. м. в р. є те, що вони не гарантують успішного розв'язання задачі. У разі невдачі спроби застосувати інтуїтивні міркування шляхи просування до розв'язання поставленої задачі залишаються невизначеними. В подібних випадках доводиться вдаватися до детального експериментального й теоретичного вивчення закономірностей, специфічних для даної проблеми. В результаті такого вивчення можуть або виникнути нові евристичні міркування, або буде знайдено достатню кількість даних для формальної постановки задачі і її матем. розв'язання. Так, напр., спроба застосувати найпростіший тришаровий перцептрон для розпізнавання зображень, коли зображення, які відрізняються лише переносом у полі зору, слід віднести до одного класу, виявилася невдахою. Вивчення проблеми показало, що для успішного розв'язання її необхідно ввести додаткове обмеження: треба, щоб ваги асоціативних елементів, які відрізняються переносом, були однаковими.

Часто ефективними є комбіновані методи, які ґрунтуються на одночасному використанні двох критеріїв вибору рішень: формального й евристичного. Напр., у випадку, коли експериментальних даних мало, а рішення матем. моделі має багато коефіцієнтів, тільки довізнання розв'язку задачі за другим, евристичним критерієм дає змогу знайти єдину оптимальну оцінку всіх коефіцієнтів. При одному критерії задача не має єдиного (регулярного) розв'язку.

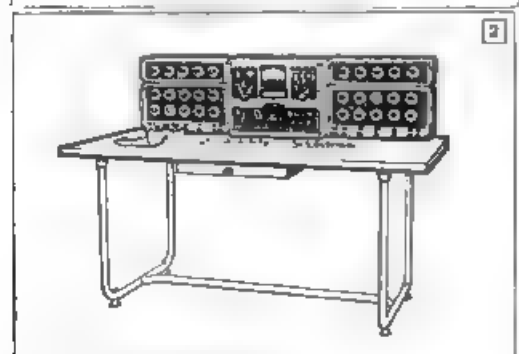
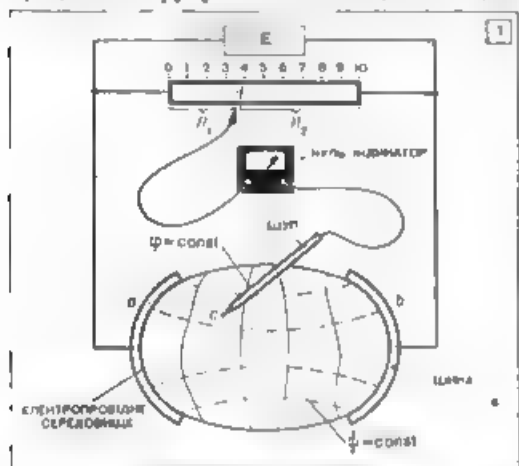
Літ.: Івахненко А. Г. Системи евристичної саморегуляції в технічній кібернетикі. К. 1971. 608 с. 364—367. Розенблатт Ф. Прикмети нейродинамики. Пер. з англ. М., 1968 [бібліогр. д. 468—473]. Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и ассоциативное моделирование. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 220—224].

О. Г. Івахненко.

**«ЕГДА», інтегратор** ЕГДА — аналогова математична машина для розв'язування технічних задач і для одержання інтегральних характеристик поля. Робота інтегратора ґрунтується на використанні методу ЕГДА — електрогидродинамічної аналогії (див. *Моделивання на суцільних середовищах*).

Електр. схема інтегратора (мак. 1) являє собою електр. міст, який складається з градуїзованого потенціометра  $R_1$  і  $R_2$  й власне мо-

делі з електропровідного матеріалу (металевої фольги, електроліту чи електропровідного паперу), виготовленої згідно з правилами геом. подібності. До металевих шин  $a$  і  $b$  підключають джерело напруги  $E$ , величину якої, щоб було зручно відлічувати, вважають за 100%, тоді потенціали на шинках будуть  $\varphi_a = 0$   $\varphi_b = 1 = 100\%$ . На арізнаних краях моделі між шинками  $a$  та  $b$  значення потенціалів змінюється від 0 до 100%. Отже, потенціал  $\varphi_d$  у точці  $d$  на потенціометрі визначають за рівнянням  $(\varphi_d - \varphi_a) / (\varphi_b - \varphi_a) = R_1 / (R_1 + R_2)$ . Плечі потенціометра  $R_1$  і  $R_2$  можна вибрати так, щоб  $\varphi_d$  набирало будь-якого значення між  $\varphi_a$  і  $\varphi_b$ , тобто між 0 і 100%. Співвідношення, що визначає величину потенціалу  $\varphi_d$ , встановлюють на потенціометрі на градульованій шкалі. Щуп прорезають по моделі доти, поки нуль-індикатор не покаже, що немає струму — в цій точці потенціал



1. Схема інтегратора ЕГДА  
2. Інтегратор «ЕГДА-9/60»

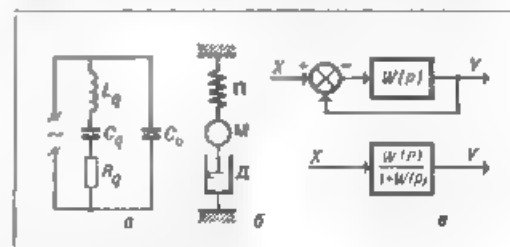
дорівнює  $\varphi_d$ . Визначивши ряд точок із заданим потенціалом і з'єднавши їх між собою, одержують лінію рівного потенціалу — еквівалентність. Лінійні струми можна побудувати за тим самим методом, обернувши задачу. В інтеграторі ЕГДА при моделюванні на електро-

провідному папері джерелом живлення є випрямляч постійного струму з напругою 12-30 в, а нуль-індикатором — гальванометр. Для електролітичної ванни використовують змінний струм частотою 50-1000 гц, а гальванометр підключають через вектор-вимірний пристрій. Щоб розширити клас розв'язуваних задач і підвищити точність розв'язування, схему інтегратора поповнюють потенціометричними подільниками напруги й струму (для реалізації граничних умов 1, 2 і 3-го роду), автомат. змiрювальним пристроєм з цифровим відліком, автомат. графопобудовником, стабілізованим джерелом живлення тощо. Є й інтегратори унікальних конструкцій, призначені для розв'язування певного класу задач, і універсальні інтегратори. В СРСР серійно випускають універсальний інтегратор «ЕГДА-9/60» (мал. 2), що його широко використовують для розв'язування різних задач гідро- й аеромеханіки, фільтрації, електро- й радіотехніки, буд. механіки, побудування ф-цій, що здійснюють конформне відображення, тощо.

Лит. Філяченко П. Ф., Панчишин В. И. Інтегратори ЕГДА. Моделювання потенціальних полів на електропровідній бумазі. М., 1961 (Визлор. с. 157-165); Математичне моделювання на інтеграторах ЕГДА-9/60. М., 1968. В. Г. Панчишин.

**ЕЙЛЕРА ЛАНЦЮГ** — ланцюг, який містить усі ребра графа. Знаходження Е. л. у графі — це такий неперервний обхід усіх його ребер, при якому кожне з ребер не проходить двічі.

**ЕКВІВАЛЕНТНА СХЕМА** — 1) Схема заміщення я — комбінація найпростіших елементів електричного кола (опорів, ємностей та індуктивностей), яка за своїми властивостями еквівалентна якомусь реальному пристроєві й наочно відображає суть процесів у ньому. Існує багато реальних пристроїв, у яких взагалі немає котушок індуктивності, резисторів і конденсаторів, проте для спрощення аналізу ці пристрої замінюють електр. Е. с. Напр., кварцовий резонатор роблять у вигляді пластинки, викріаної з кристала кварцу і вміщеної між двома електро-



Еквівалентні схеми

дам. У радіотех. пристроях такий прилад діє як коливальний контур, що складається з котушки індуктивності  $L_0$ , двох конденсаторів  $C_0$  та  $C_0$  й резистора  $R_0$  (мал., а). Багато процесів у мех., теплових, хім. та інших системах описують тими самими диф. рівняння-

ми, що й процеси у відповідних електр. схем. Це дає змогу при аналізі реального процесу замінити його відповідною Е. с. Так, мех. системи, що складаються з засередженої маси  $M$ , пружини  $\Pi$  і демпфера  $D$  (мал., б), можна поставити у відповідність Е. с., аналогічну зображеній на мал., а (без конденсатора  $C_0$ ). Електричні й електронні Е. с. лежать в основі аналогового моделювання відповідних процесів (див. *Аналогові моделі*).

2) У теорії автоматичного керування — схема, одержана з першопної через еквівалентне структурне перетворення  $\Pi$ . Так, дві схеми, зображені на мал., в (W(p) — передавальна функція ланки), еквівалентні одна одній у згаданому розумінні.

А. А. Тумин

**ЕКВІВАЛЕНТНИХ ЗБУРЕНЬ МЕТОД** — наближений метод визначення моментів розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь за заданими характеристиками випадкових параметрів, які входять у рівняння; полягає в обробці результатів багаторазового інтегрування початкових рівнянь за різних, певним чином вибраних не випадкових початкових умов і не випадкових еквівалентних збурень. Е. в. м. вистосовують для досліджування точності функціонування динамічних систем за випадкових збурень. Нехай динамічну систему описано системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(X_1, X_2, \dots, X_n, V_1, V_2, \dots, V_m, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

які задовольняють умови існування та єдиності в області  $D(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0, t)$ , де  $f_1, \dots, f_n$  — не випадкові функції,  $V_1, V_2, \dots, V_m$  — випадкові параметри,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — шукані випадкові функції. Припускають, що для параметрів  $V_r$  задано матем. сподівання, які дорівнюють нулеві, й моменти зв'язку  $\mu$  до  $q$ -го порядку включно:

$$M[V_r] = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m); \quad (2)$$

$$\mu_{r_1 r_2 \dots r_k} = M[V_{r_1} V_{r_2} \dots V_{r_k}]$$

$$(k = 1, 2, \dots, q; r_1, r_2, \dots, r_k = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

а розв'язок системи (1) можна розвинути в ряд Маклорена за параметрами  $V_r$ .

Нехай розв'язок системи (1) має вигляд  $X_i = \Phi_i(t, V_1, V_2, \dots, V_m)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). (4)

Тоді, розвиваючи (4) в ряд Маклорена  $q$ -го степеня за величинами  $V_r$  і діючи на обидві частини цього розв'язання оператором матем. сподівання з урахуванням (3), одержимо:

$$v_1 = M[X] = \Phi_0 + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \dots \sum_{r_k=1}^m \left( \frac{\partial^k \Phi}{\partial V_{r_1} \partial V_{r_2} \dots \partial V_{r_k}} \right)_0 \mu_{r_1 r_2 \dots r_k}, \quad (5)$$

де  $\Phi_0 = \Phi(t, 0, 0, \dots, 0)$ . Для обчислення матем. сподівання координат реальних систем використати безпосередньо формулу (5) практично неможливо, бо для цього треба мати значення похідних, які входять під знак сум. Через те суму (5) обчислюють інакше: у розв'язанні розв'язку (4) в ряд Маклорена замість  $V_r$  підставляють деякі їхні окремі значення  $\xi_{r_0}$ . Усього беруть  $N$  різних комбінацій параметрів  $\xi_{r_0}$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), і цьому відповідають  $N$  рівностей. Потім вводять невизначені коефіцієнти  $\alpha_r$ , множать на них праві й ліві частини цих рівностей, а після цього їх почленно додають. В результаті виходить співвідношення

$$S = \sum_{r=1}^N \alpha_r x_r = \sum_{r=1}^N \alpha_r \Phi_0 + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \dots \sum_{r_k=1}^m \left( \frac{\partial^k \Phi}{\partial V_{r_1} \partial V_{r_2} \dots \partial V_{r_k}} \right)_0 \sum_{r=1}^N \alpha_r \xi_{r_1} \xi_{r_2} \dots \dots \xi_{r_k}. \quad (6)$$

З порівняння (5) і (6) випливає, що сума  $S$  являтиме собою наближене значення матем. сподівання змінної  $X$

$$S = \sum_{r=1}^N \alpha_r x_r = M[X]. \quad (7)$$

Якщо величини  $\alpha_r$  і  $\xi_{r_0}$  задовольняють систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^N \alpha_r = 1,$$

$$\sum_{r=1}^N \alpha_r \xi_{r_1} \xi_{r_2} \dots \xi_{r_k} = \mu_{r_1 r_2 \dots r_k} \quad (k = 1, 2, \dots, q; r_1, r_2, \dots, r_k = 1, 2, \dots, m). \quad (8)$$

Величини  $x_r$ , що входять в (7), в результаті інтегрування системи (1) при конкретних  $\xi_{r_0}$ .

Щоб алгебр. система (8) була сумісною, кількість пробних комбінацій  $N$  беруть рівною кількості рівнянь системи (8)  $N = C_{m+q}^q$ . Знайшовши  $\alpha_r$  із системи (8), можна визначити не тільки матем. сподівання, а й центр. моменти довільного ( $p$ -го) порядку  $v_p = M[X^p] = \sum_{r=1}^N \alpha_r x_r^p$ , де  $x_r^p$  —  $p$ -й степінь розв'язку  $x_r$  системи (1).

Аналогічно можна знайти будь-які моменти зв'язку для ф-цій  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Так, напр., момент зв'язку  $v_p = M[X_1, X_2, \dots, X_n]$  ( $k_1, k_2, \dots, k_p = 1, 2, \dots, n$ ) визначають за

$$v = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_p} \quad (k_1, k_2, \dots, k_p = 1, 2, \dots, n),$$

де  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_p}$  є розв'язки системи (1), одержані при окремих значеннях параметрів  $V$ , що дорівнюють  $\hat{v}_{k_1 k_2 \dots k_p}$ .

Е. о. м. пов'язується з виконанням протистих, але дуже громіздких обчислень, його, як правило, реалізують за допомогою ЦОМ. Діагн. Калак в. П. Е., Доступов Б. Г. Статистичка динаміка нелинейних автоматичних систем М., 1982 [бібліогр. с. 325-329].

В. Г. Грішутин, О. М. Платошкін.  
**ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЮВАННЯ** — побудова за заданими об'єктами еквівалентних об'єктів у тому чи іншому розумінні. Типовими прикладами об'єктів, до яких застосовують Е. п., є алгебричні вирази, алгоритми, автомати, схеми комбінативні, алгоритми схеми та ін. Е. п. відіграють важливу роль у задачі мінімізації логічних систем Е. п. є однією з форм аксіоматизації алгебр та інших систем.

З погляду загальної проблеми суть Е. п. — одержати ефективну процедуру, яка породжує еквівалентності відношення (є. в.), тобто всі пари еквівалентних об'єктів. У тому разі, коли клас об'єктів рекурсивно перелічний, загальна проблема Е. п. рівносильна задачі одержання ефективної процедури, яка породжує для кожного об'єкта  $\alpha$  всі об'єкти, йому еквівалентні й тільки їх, тобто клас еквівалентності, що містить  $\alpha$ . Звичайно проблему Е. п. ставлять у посиленій формі на множині пар об'єктів задаються певні операції замикання і потрібно знайти їхню скінченну або рекурсивну підмножину розгляданого є. в., виникнення якого збігається б з цим є. в. Як правило, розглядаються такі операції. Нехай для об'єктів визначено поняття підоб'єкта, тобто такої частини об'єкта, яка сама є об'єктом розгляданого виду. Операцією замикання за допомогою пари  $(\alpha, \beta)$  наз. операцію, що дає по об'єкту  $\gamma$  об'єкт  $\gamma'$ , який одержуємо з  $\gamma$  замінюючи будь-якого входження підоб'єкта  $\alpha$  об'єктом  $\beta$  (якщо  $\alpha$  не входить до  $\gamma$ , то вважають, що  $\gamma'$  збігається з  $\gamma$ ). Замиканнями відносно замін множини  $R$  пар об'єктів наз. найменшу множину  $\bar{R}$  таку, що: 1)  $R \subseteq \bar{R}$ , 2) якщо  $(\alpha, \beta) \in R$ , то  $(\beta, \alpha) \in \bar{R}$  і 3) якщо  $(\alpha, \beta) \in \bar{R}$  і  $(\gamma, \delta) \in \bar{R}$ , то  $(\gamma, \delta') \in \bar{R}$ , де  $\delta'$  одержуємо з  $\delta$  операцією замін за допомогою пари  $(\alpha, \beta)$ . Поряд з операцією замін звичайно розглядають ще операцію підстановки (зад парами об'єктів), яка полягає в тому, що всі входження певного елементарного підоб'єкта до обох елементів пари  $(\alpha, \beta)$ , замінюються одним і тим самим об'єктом  $\gamma$ . Підмножина  $R \subseteq E$  наз. повною для  $E$  або повною системою правил Е. п., якщо її замикання відносно замін і підстановок збігається

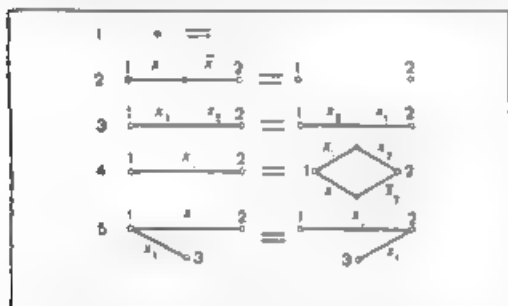
з  $E$ . Відношення еквівалентності, замикане відносно замін, наз. конгруенцією. Очевидно, повна підмножина існує тільки для конгруенцій, причому підмножина  $R$  є повною для конгруенції  $E$  тоді й тільки тоді, коли будь-який об'єкт  $\gamma$  можна перевести на будь-який  $E$ -еквівалентний йому об'єкт  $\delta$  тільки операціями замін за допомогою пар з  $R$ , де  $\bar{R}$  — замикання  $R$  відносно підстановок. Саме тому пари  $(\alpha, \beta)$  з конгруенції  $E$  наз. правилами Е. п., а операція замін за допомогою пари  $(\alpha, \beta)$  наз. застосуванням правила  $(\alpha, \beta)$ . Типовим прикладом описаної підстановки є Е. п. в алгебрах. Для алгебри  $\mathcal{A} = (A, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  довільної сигнатури  $\Phi = (\varphi_1^{(n_1)}, \dots, \varphi_n^{(n_n)})$  проблема Е. п. збігається з задачею алгебричної аксіоматизації й полягає ось у чому. На множині всіх термінів сигнатури  $\Phi$  розглядається природна конгруенція, тобто таке є. в.  $E$ , що  $(\alpha, \beta) \in E$  тоді й тільки тоді, коли терми  $\alpha$  і  $\beta$  представляють одну й ту саму ф-цію алгебри  $\mathcal{A}$ . Пари  $(\alpha, \beta)$  із  $E$  наз. рівностями або тотожностями і замість  $(\alpha, \beta) \in E$  звичайно пишуть  $\alpha = \beta$ . Операція підстановки полягає в заміні всіх входжень певної змінної довільним термом. Треба знайти скінченну повну для  $E$  множину рівностей. Напр., для булевої алгебри  $(A, \wedge, \vee, \neg)$  скінченну повну систему утворюють такі 10 рівностей:

- 1)  $x \vee y = y \vee x$ ;
- 2)  $x \wedge y = y \wedge x$ ;
- 3)  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ;
- 4)  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ ;
- 5)  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ;
- 6)  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ;
- 7)  $(x \wedge y) \vee y = y$ ;
- 8)  $(x \vee y) \wedge y = y$ ;
- 9)  $(x \wedge \bar{x}) \vee y = y$ ;
- 10)  $(x \vee \bar{x}) \wedge y = y$ .

За такої постановки проблема Е. п. має позитивне вирішення далеко не для всіх алгебр. Відомо, що воно вирішується позитивно для всіх двоелементних алгебр, а також для всіх скінчених груп. Водночас для будь-якого  $n \geq 3$  існують алгебри (групоїди) з  $n$  елементами, для яких ця задача не має позитивного розв'язку. Існують також нескінченні групи й нескінченні підгрупи, для яких зазначена задача розв'язується негативно. Вона розв'язується негативно і для алгебри регулярних подій (див. Алгебри подій), що виникає в процесі визначення автоматів скінчених. В останньому випадку розглянуто деякі модифікації описаної постановки проблеми Е. п., що допускають позитивне вирішення її.

Іншим типовим прикладом такої постановки проблеми Е. п. є Е. п. контактних схем. Дві контактні схеми вважають еквівалентними, якщо існує така взаємно однозначна від-

повідність між їхніми полюсами, що парам відповідних полюсів обидві схеми реалізують одну й ту саму ф-цію. Підсхеми визначаються як підграфі зі збереженням букв, приписаних ребрам. Полюсами підсхем слід вважати вершини, що є полюсами схеми, й ті вершини, які інцидентні ребрам схеми, які не входять до підсхеми. Наступна множина, що складається з п'яти пар еквівалентних схем, а повною (полюси позначено кружками й занумеровано так, що відповідним полюсам приписано однакові номери, див. мал.),



Повна система правил для контактних схем

причому, перше правило означає, що схема, яка складається з однієї вершини, що не є полюсом, еквівалентна пустій схемі.

Правила  $(\alpha, \beta)$ , що належать конгруенції  $E$ , наз. локальними, оскільки застосування їх зберігає  $E$  (тобто переводить об'єкти в  $E$ -еквівалентні їм) незалежно від об'єкта, з якому відбувається заміна підоб'єкта  $\alpha$  об'єктом  $\beta$ . Іноді відсутність повної системи таких правил змушує розширювати допустимі засоби  $E$ , п. за рахунок нелокальних правил  $(\alpha, \beta)$ , що їх застосування (тобто зберігання  $\phi$  в.) може залежати від околу підоб'єкта  $\alpha$  і, зокрема, від усього об'єкта. Змістовні приклади нелокальних правил виникають за  $E$ , п. схем алгоритмів. Не існує скінченних повних систем локальних правил  $E$ , п. для автоматів. У зв'язку з задачею мінімізації особливого інтересу набувають т. з. спрямлені  $E$ , п., коли під час кожного застосування правил  $E$ , п. не збільшується складність (у будь-якому розумінні) перетвореного об'єкта.

В тому разі, коли доповнення до  $\phi$  в. рекурсивно перелічне (що буває, напр., із природною  $\phi$  в. на множинах алгоритмів або програм, які обчислюють всюди адекватні функції), загальна проблема  $E$ , п. рівносильна проблемі еквівалентності, тобто проблемі розв'язання відношення еквівалентності.

Лит. Мурекін В. Л. Об эквивалентных преобразованиях контактных схем «Проблемы кибернетики», 1961, в. 5. Янов Ю. П. О системах тождеств для алгебр. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8. Мурекін В. Л. О преобразованиях конечных автоматов. «Проблемы кибернетики», 1963, в. 15. Янов Ю. П. О локальных преобразованиях схем алгоритмов. «Проблемы кибернетики», 1968, в. 20. Янов Ю. П. О направленных преобразованиях формул. «Математические заметки», 1969, т. 6, № 6. Ю. П. Янов.

**ЕКВІВАЛЕНТНІ СТАНИ АВТОМАТА** — стани автомата, які індують одна і той самий оператор автоматний. У процесі мінімізації числа станів автомата  $E$ , с. а. ототожнюються.

**ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ВІДНОШЕННЯ** (еквівалентність, еквіваленція) на множині  $A$  — рефлексивно, симетричне й транзитивне бінарне відношення, тобто таке відношення, яке повністю визначається підмножиною  $E$  прямого добутку  $A \times A$ , яка задовольняє такі три умови: для будь-якого  $a \in A$  ( $a, a \in E$ ; якщо  $(a, b) \in E$ , то  $(b, a) \in E$ , якщо  $(a, b) \in E$  і  $(b, c) \in E$ , то  $(a, c) \in E$ . Найпростішими прикладами  $E$ , в. є відношення рівності, яке складається з усіх пар виду  $(a, a)$ , й  $E$ , в., яке збігається з множиною  $A \times A$ . Будь-яке  $E$ , в.  $E$  на множині  $A$  визначає розбиття  $A$  на парно неперетинні класи еквівалентності або  $E$  класи:  $E_a = \{b : (a, b) \in E\}$  і, навпаки, кожне розбиття множини  $A$  однозначно визначає  $E$  в. на  $A$ . Потужність множини всіх  $E$ -класів (тобто фактор-множини за  $E$ ) наз. рангом  $r(E)$   $E$ , в.  $E$ .

Перетин будь-якої множини  $E$ , в. (на одній і тій самій множині  $A$ ) знову  $E$ , в. Сумою  $E_1 + E_2$  двох  $E$ , в.  $E_1$  та  $E_2$  наз. транзитивне замикання об'єднання  $E_1 \cup E_2$ . Очевидними є такі нерівності:

$$\max(r(E_1), r(E_2)) \leq r(E_1 \cup E_2) \leq r(E_1) \cdot r(E_2) \\ \text{й} \quad 1 \leq r(E_1 + E_2) \leq \min(r(E_1), r(E_2)).$$

Будь-яке  $E$ , в.  $E$  на множині  $A$  поширюється, природно, й на множину функцій, які відображають  $A$  в  $A$ :

$$(f, g) \in E \Leftrightarrow \forall x ((f(x), g(x)) \in E).$$

Щоб поширити  $E$  на множину ф-цій від кількох аргументів, спочатку поширюють  $E$  на множину кортежів елементів з  $A$  покомпонентно:

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in E \Leftrightarrow \forall i \\ 1 \leq i \leq n \\ ((x_i, y_i) \in E).$$

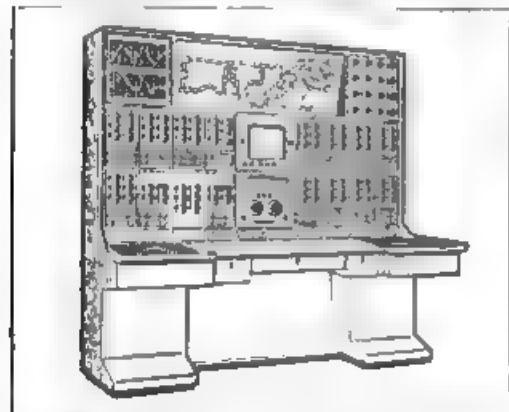
Будь-яка ф-ція  $f$ , що відображає  $A$  в  $B$ , породжує  $E$ , в.  $E_f = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$  на  $A$ , яке іноді наз. ядром ф-ції  $f$ . Для кожного класу  $A$  синтаксичних об'єктів з ф-цією значення  $f$  (яка приписує кожному  $a \in A$  ямесь значення  $f(a)$ )  $E$  в.  $E_f$  можна вважати природним  $E$ , в. на  $A$ . Напр., терми довільної алгебри є еквівалентними, якщо вони зображають однакові функції, автомати є еквівалентними, якщо їхня поведінка однакова; програми є еквівалентними, якщо вони обчислюють однакові ф-ції; номери еквівалентні, коли вони є номерами одного й того самого об'єкта. Найважливішими задачами в таких випадках є проблема еквівалентності (тобто проблема розв'язності  $E$ , в., її іноколи наз. ще проблемою тотожності, й подягає вона в побудові алгоритму, який для будь-яких двох об'єктів дає відповідь на запитання, еквівалентні вони чи ні) і проблема еквівалентних перетво-





спективного й оперативного розрахунку найвигіднішого режиму складних гідро-теплових енергосистем, у т. ч. електростанцій із заданою витратою енергосистем. «ЭКРАН-4» розв'язує систему нелинійних алгебричних рівнянь, виведених на основі методу невизначених множників Лагранжа з урахуванням рівнянь зв'язку (включаючи ізопериметричні умови).

«ЭКРАН-7» (мал.) виготовлено повністю на напівпровідниках із застосуванням імпульсних перетворювачів функціональних. Відп



Спеціалізований обчислювальний пристрій «ЭКРАН-7».

Інформація: характеристики відносних простотів витрати палива й витрати характеристики станцій при заданих денному й нічному складі працюючого устаткування, параметри та оперативна схема осн. електр. мережі, графіки навантаження ліній міжсистемних зв'язків енергосистем та ціни палива й витрати енергосистем, задані на розрахунковий період. У пристрій можна вводити інформацію про фактичне навантаження електростанцій і через систему телевимірювання, він може задавати й виводити цю інформацію й порівнювати її з інформацією оптим. режиму. Для характеристики відносних простотів витрати палива використовуються кусково-лінійна апроксимація з довільно розміщеними точками впади. Характеристики гідроелектростанцій, що працюють при змінних напорах, відтворюються імпульсними функціональними перетворювачами двох незалежних змислів з автономним налаштуванням вузлів інтерполяції. Виводиться інформація (оптимальних навантажень і витрати палива) на автомат. цифродрукуювальну машину й за викликом — на цифрові вимірювальні прилади з автомат. масштабуванням. Електроннопроменевий індикатор з тривалим післясвітченням дає змогу спостерігати (за викликом) задані графіки, введені характеристики, оптим. графіки навантаження станцій, зміну рівня води у водосховищах тощо. Використовується в кількох енергосистемах.

Див. Сив'яков В. М. [та ін.] Вычислительное устройство для распределения активной нагрузки

при заданном расходе топлива. «Электричество», 1960, № 8. Богословский А. В., Закидацкий А. И., Шукляко В. М. Специализированное вычислительное устройство для распределения активной нагрузки. В кн.: Системы и средства автоматизации производства и управления. М., 1968. В. М. Сив'яков

**ЭКРАНИЙ ПУЛЬТ** — пристрій введення та виведення інформації в цифровій обчислювальній машині, що складається з об'єднаних в одну систему телевізійного екрана, світлового олівця та електрифікованої друкарської машинки. Е. п. дає змогу візуально контролювати інформацію, яка вноситься з клавіатури, та вносити поправки за допомогою світлового олівця. На екран можна виводити й графічну інформацію (графіки, креслення), в яку також можна вносити виправлення за допомогою світлового олівця. Е. п. дає змогу здійснювати діалогов режим роботи людини й машини (див. *Взаємодія людини з обчислювальною машиною*).

**ЕКСПЕРИМЕНТ БЕЗУМОВНИЙ** — експеримент, у якомухідну послідовність, що подається на автомат, повністю визначено до початку експерименту. Див. *Експерименти з автоматами*.

**ЕКСПЕРИМЕНТ КРАТНИЙ** — експеримент, що проводиться над кількома копіями автомата. Див. *Експерименти з автоматами*.

**ЕКСПЕРИМЕНТ ПРОСТІЙ** — експеримент, що проводиться над одним автоматом. Див. *Експерименти з автоматами*.

**ЕКСПЕРИМЕНТ УМОВНИЙ** — експеримент, у якому символи, що подаються на вхід автомата, залежать від символів, що на його виході. Див. *Експерименти з автоматами*.

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ СПОСОБИ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ** — один з найважливіших етапів досліджування в різних галузях природознавства й техніки. Для обробки даних зазвичай застосовують методи *імовірностей теорії й математичної статистики*. В основі цих методів лежить великих чисел закон, згідно з яким при великій кількості незалежних дослідів імовірність подій наближено замінюють відповідними частотами, а математичне сподівання (м. с.) випадкових величин — їхніми середніми арифм. значеннями. Проте на практиці часто доводиться обмежуватися порівняльним невеликою кількістю дослідів. Звідси виникає додаткова задача оцінювання точності характеристик, одержуваних з дослідів.

Домовимося позначати через  $X_v$  випадкове значення випадкової величини  $X$ , якого вона набуває внаслідок  $v$ -го дослідів, а через  $x_v$  — конкретне значення випадкової величини  $X$ , одержане внаслідок  $v$ -го дослідів. Щоб визначити повні похибки (див. *Похибка*) оцінок м. с.  $m_x^*$ , дисперсії  $d_x^*$ , функцій розподілу, щільності ймовірності випадкових величин, кореляційних моментів  $R_{xy}^*$  і коэф. кореляції  $r_{xy}^*$  випадкових величин  $X$  і  $Y$  (див. *Статистичні оцінки, Емпірична функція розподілу*), крім оцінок похибок методу, належить додат-

ково зробити аналіз спадкових похибок і заокруглення похибок. Виконаємо це на прикладі

ді оцінки  $m_{x,\varepsilon}^* = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{v,\varepsilon}$ . Припустимо, що замість  $x_v$  ми маємо справу з  $x_{v,\varepsilon}$ , причому для дисперсії випадкової величини  $E_v = \sigma_v^2 - X_{v,\varepsilon}$  виконується співвідношення  $D(E_v) = \sigma^2$ . Тоді замість  $m_x^*$  одержимо

$m_{x,\varepsilon}^* = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{v,\varepsilon}$ . Припускаючи, що  $E_v$  попарно незалежні, у відповідності з нерівністю Чебишова з ймовірністю 0,96 справджується така оцінка спадкової похибки  $|m_x^* - m_{x,\varepsilon}^*| < 5 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . В разі, коли  $E_v$  —

попарно незалежні й нормально розподілені випадкові величини з нульовими м. с. і дисперсією  $D(E_v) = \sigma^2$ ,

$$P(|m_x^* - m_{x,\varepsilon}^*| < \delta) = \frac{\delta \sqrt{n}}{\sigma} \int_0^{\frac{\delta \sqrt{n}}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\frac{\delta \sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

$$\text{де } m_{x,\varepsilon}^* = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{v,\varepsilon}, \quad \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

а  $p$  — ймовірність того, що  $|m_x^* - m_{x,\varepsilon}^*| < \delta$ . Для останнього інтеграла складено таблиці, якими можна скористатися з практичних розрахунків. За умови  $(n+1) \cdot 2^{-\tau} < 0,1$  для похибки заокруглення обчислення  $m_x^*$  на ЦОМ у режимі з плаваючою комою справджується оцінка

$$|m_{x,\varepsilon}^* - m_{x,\varepsilon,\tau}^*| < 1,06 \max_v |x_{v,\varepsilon}| \frac{(n+2)(n-1)}{2n} 2^{-\tau}.$$

де  $\tau$  — кількість розрядів у мантісі числа. При великому  $n$  ця похибка може виявитися досить значною. Щоб уникнути цього, необхідно виконувати додавання на ЦОМ по можливості без заокруглювань. Відомо, що  $X_{v,\varepsilon,\tau}$  є асимптотично по  $\tau$  рівномірно розподіленими на  $(-\frac{1}{2} 2^{-\tau}, \frac{1}{2} 2^{-\tau})$  випадковими величинами. В разі, коли  $X_{v,\varepsilon,\tau}$  попарно незалежні, з ймовірністю 0,96 справджується оцінка  $|m_{x,\varepsilon}^* - m_{x,\varepsilon,\tau}^*| < \frac{5 \cdot 2^{-\tau}}{2\sqrt{3n}}$ .

де  $m_{x,\varepsilon,\tau}^* = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{v,\varepsilon,\tau}$ . Беручи до уваги,

що закон розподілу величини  $M_{x,\varepsilon,\tau}^*$  близький до нормального, можна одержати ще точнішу оцінку для похибки заокруглення.

Сукупність  $n$  випадкових величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  можна розглядати як коорд. випадкової точки в  $n$ -вимірному просторі, або як складові  $n$ -вимірного випадкового вектора. М. с. довільної ф-ції  $n$  випадкових величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  визначається ф-єю

$$M\{\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \times f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

де  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — щільність ймовірностей  $n$ -вимірного випадкового вектора, визначена співвідношенням

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{P(x_1 < x_1 + \Delta x_1, x_2 < x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n < x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \dots \cdot \Delta x_n},$$

де  $p(x_1 < x_1 + \Delta x_1, x_2 < x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n < x_n + \Delta x_n)$  — ймовірність сумісного справдження подвійної нерівності  $x_k < x_k + \Delta x_k$ . Беручи

$\varphi(X_1, \dots, X_n) = X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}$ , одержимо момент  $n$ -вимірного вектора  $X(X_1, \dots, X_n)$  порядку  $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ . Якщо по черзі взяти одні з індексів  $r_1, \dots, r_n$  рівними 1, а інші — 0, одержимо м. с. випадкових величин  $X_1, \dots, X_n$ . М. с.  $m_{x_1}, \dots, m_{x_n}$  складових  $X_1, \dots, X_n$  випадкового вектора  $X$  і визначають  $n$ -вимірний вектор  $m_x$ , який природно назвати м. с. випадкового вектора  $X$ . Беручи по черзі одні з індексів  $r_1, \dots, r_n$  рівними 2, а інші рівними 0, одержимо дисперсії випадкових величин  $X_1, \dots, X_n$ . Нарешті, беручи два з індексів  $r_1, \dots, r_n$  рівними 1, а інші — рівними 0, одержимо кореляційні моменти випадкових величин  $X_1, \dots, X_n$ :  $K_{\nu\mu} = M\{(X_\nu - m_{x_\nu})(X_\mu - m_{x_\mu})\}$ ,  $\nu, \mu = 1, 2, \dots, n$  ( $K_{\nu\nu} = D_{x_\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ ;  $K_{\nu\mu} = K_{\mu\nu}$ ). Сукупність  $K_{\nu\mu}$  складових випадкового вектора утворює симетричну кореляційну матрицю випадкового вектора  $K = \|K_{\nu\mu}\|$ . В багатьох практично важливих випадках  $m_x$  і  $K$  цілком визначають числові характеристики випадкового вектора. Дійсно, щільність ймовірності багатовимірного нормального закону розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^n |K|}} \times e^{-\frac{1}{2}(K^{-1}u, u)} \quad u = x - m_x.$$

Метод максимуму правдоподібності

для цього випадку зводиться до найменших квадратів методу (див. Апроксимація функції середньоквадратична). Щоб обчислити елементи матриці  $K$  і дати оцінку їхній точності, можна скористатися з відповідними співвідношеннями для випадкових величин.

Випадковою функцією наз. ф-цію, значення якої для кожного даного значення аргументу (або кількох аргументів) є випадковою величиною. М. с. випадкової ф-ції  $X(t)$  наз. ф-цію  $m_x(t)$ , значення якої при кожному даному значенні аргументу дорівнює м. с. випадкової ф-ції при цьому  $t$ :  $m_x(t) = M[X(t)]$ .  $m_x(t)$  становить собою якусь середню ф-цію, біля якої групуються й відносно якої коливаються всілякі реалізації  $x(t)$ . Дисперсія ф-ції  $X(t)$  — така ф-ція, значення якої при кожному даному значенні аргументу дорівнює дисперсії значення ф-ції  $X(t)$  при цьому значенні аргументу. Як і в разі випадкового вектора, для характеристики розкиду ф-ції  $X(t)$  недостатньо знати дисперсію. Щоб врахувати зв'язок між значеннями випадкової ф-ції для різних значень аргументу, необхідно вадати, крім дисперсії, кореляційну функцію  $K_x(t, t') \cdot m_x(t)$  і  $K_x(t, t')$  є менш повними характеристиками  $X(t)$ , ніж її скінченновимірні закони розподілу. Проте в багатьох практично важливих випадках мова цілком визначають закон розподілу ф-ції  $X(t)$  як, напр., це має місце для нормально розподіленої випадкової ф-ції.

Загальною обчисл. ф-лою для оцінки  $m_x(t)$  є

$$\begin{aligned} m_x(t) &\approx m_{n,u}^* = \\ &= \frac{1}{2\pi u} \sum_{k=1}^n \int_{-u}^{t+u} x_k(u) du \approx m_{n,P,\Delta}^* = \\ &= \frac{1}{2nP} \sum_{k=1}^n \sum_{v=-P+Q}^{P+Q-1} x_k(v \cdot \Delta t), \quad (1) \end{aligned}$$

де  $x_1, \dots, x_n$  —  $n$  реалізацій  $X(t)$ ;  $u$  — оцінка знайзу такого макс. числа  $n^*$ , що на відріжку  $[t-u, t+u]$   $m_x(t)$  з заданою точністю не відрізняється від прямої  $(-P+Q)\Delta t = u+t$ ,  $P \cdot \Delta t = u$ . Зміст набл. рівностей  $\approx$  і  $\approx$  істотно різний. У першому випадку — це оцінка для  $m_x(t)$ , яка за будь-якого  $n$  може значно відрізнятися від самої  $m_x(t)$ , проте ймовірність цього факту як завжди мала, коли  $n$  достатньо велике. В другому випадку — це законна набл. рівність, причому  $|m_{n,u}^* - m_{n,P,\Delta}^*| < \frac{\max_{t \in [t-u, t+u]} \omega_x(\Delta t)}{1} \cdot \Delta t$ . Де  $\omega_x$  — модуль неперервності реалізації  $x_k(t)$ . Якщо  $X(t)$  — стаціонарна ергодична випадкова ф-ція, то  $n^* = \infty$  і замість (1) можна записати

$$m_x(t) \approx m_P^* = \frac{1}{P} \sum_{v=1}^P x(v \cdot \Delta t). \quad (2)$$

На основі нерівності Чебишова  $P(|X - m_x| > \varepsilon) < D_x/\varepsilon^2$  і відомого виразу  $D(m_P^*) = \frac{1}{P} \left[ R_x(0) + 2 \sum_{r=1}^P \left(1 - \frac{r}{P}\right) R_x(r\Delta t) \right]$ , де  $R_x$  — автокореляційна функція випадкової ф-ції  $X(t)$ , одержуємо

$$\begin{aligned} P(|M_P^* - m_x| > \varepsilon) &< \frac{1}{\varepsilon^2 P} \left[ R_x(0) + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{r=1}^P \left(1 - \frac{r}{P}\right) R_x(r\Delta t) \right]. \end{aligned}$$

Якщо  $X(r\Delta t + i\Delta t)$  і  $X(i\Delta t)$  для  $r > \tilde{P}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  незалежні, то, беручи до уваги відому нерівність  $R_x(i\Delta t) \leq R_x(0) = D_x$ ,

одержимо  $P(|M_P^* - m_x| > \varepsilon) < \frac{2\tilde{P}-1}{\varepsilon^2 P} D_x$ .

Істотно припустити, що  $X_1 = M_P^* - m_x$  має нормальний закон розподілу, щільність якого

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{M_P^*}}} e^{-\frac{x_1^2}{2D_{M_P^*}}}$$

Тоді

$$\begin{aligned} P(|X_1| \leq \varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{M_P^*}}} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{M_P^*}}} e^{-\frac{x_1^2}{2D_{M_P^*}}} dx_1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2D_{M_P^*}}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2D_{M_P^*}}}} e^{-u^2} du, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} P(|X_1| \leq \varepsilon) &> \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}}} e^{-u^2} du, \\ d &= \frac{2\tilde{P}-1}{P} D_x. \end{aligned}$$

При автомат. визначенні оцінки м. с. на ЦОМ з метою економії пам'яті машини вигідно обчислювати  $m_P$  за рекурентною ф-лою  $m_P^* = (P-1)/P m_{P-1}^* + x(P\Delta t)/P$ . Оскільки зі зростанням  $P$  число  $x(P\Delta t)/P$  може швидко вийти з розрядної сітки машини, вигідніше застосовувати ф-лу.

$$m_{k,P}^* = \frac{k-1}{k} m_{k-1}^* + \frac{m_{P_k}(k)}{k};$$

$$x[(v-1)P_0 \cdot \Delta t + \Delta t] + \\ + x[(v-1)P_0 \Delta t + 2\Delta t] + \dots + \\ + x[v \cdot P_0 \cdot \Delta t] \\ m_{\eta}^2(v) = \frac{P_0}{P_0}.$$

Якщо у ф-лах (1) і (2) покласти  $x = (m_{\eta} - \eta)^2$ , то матимемо оцінку дисперсії  $D_{\eta}$  випадкової ф-ції  $\eta(t)$ . Якщо  $x = [\eta(t) - m_{\eta}] [\xi(t + \theta) - m_{\xi}]$ , де  $\eta(t)$  і  $\xi(t)$  — випадкові ф-ції, то матимемо оцінку взаємної кореляційної ф-ції  $R_{\eta\xi}(\theta)$ ; зокрема, для  $\eta = \xi$  одержимо автокореляційну ф-цію  $R_{\eta\eta}(\theta)$ .

Досить важливою характеристикою стаціонарної випадкової ф-ції є її спектральна щільність  $S(\omega)$ , яка становить собою перетворення Фур'є від кореляційної ф-ції. Є два способи побудови оцінок спектральної щільності. Перший з них полягає у визначенні оцінок кореляційної ф-ції і в обчислюванні її перетворення Фур'є (див. Фур'є інтегралі способи обчислювання). Другий спосіб полягає в побудові оцінки спектральної щільності згідно з співвідношенням

$$S(\omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{4\pi} \overline{(X_L(t\omega))^2}, \text{ де } X_L(t\omega) = \\ = \int_{-L}^L x(t)e^{-i\omega t} dt. \text{ Для першого і другого спо-}$$

собів при обчислюванні перетворення Фур'є доцільно використовувати алгоритм швидкого перетворення Фур'є. Щоб одержати докладну оцінку, можна застосувати згладжування  $S(\omega)$  і відповідні оцінки за допомогою пер-

етворення Стеклова  $S_h(\omega) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h S(\omega + u) du$  або загальнішого перетворення виду

$$\bar{S}_h(\omega) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h W_h(u) S(\omega + u) du,$$

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h W_h(u) du = 1, \quad W_h(u) \geq 0.$$

Зараз не зменшується інтерес до створення спеціалізованих обчисл. пристроїв як неперервної, так і дискретної дії для цілей кореляційного аналізу. Такі пристрої використовують для реалізації порівняно простих і однотипних обчислювальних алгоритмів кореляційної обробки великих масивів початкових даних. Крім того, є *корелятори*, призначені вимірювати характеристики стаціонарних випадкових ф-цій. Вони дають змогу обчислювати оцінки  $m_x$ ,  $R_{xx}$  і  $R_{xy}$  за методом осередковування однієї або багатьох реалізацій і поточні оцінки  $m_x$ ,  $R_{xx}$  і  $R_{xy}$  у масштабі часу вхідного сигналу за будь-якої тривалості спостереження його.

Однією з характерних задач обробки експериментальних даних є задача виявлення при-

хованих періодичностей, тобто задача розпізнавання спектральної структури реальних процесів  $X(t)$  за результатними вимірюваннями їх, яку можна сформулювати так. Припускають, що на  $[-L, L]$   $X(t) =$

$= \sum_{j=1}^n (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t) + n(t)$ , де  $n(t)$  — випадковий зашумок. Задача зводиться до визначення  $\omega_j$ ,  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  і статистичних характеристик зашумку. Щоб обчислювати статистичні характеристики  $n(t)$ , використовують наведені вище алгоритми.

Для обробки статистичних даних методами теорії ймовірності й матем. статистики створено спеціалізовані автоматизовані системи. Одну з них розроблено в Ін-ті кібернетики АН УРСР на базі ЕОМ «М-220». Вона здійснює автомат. побудову робочих програм для розв'язування вказаних споживачем задач. У системі є засоби для автомат. поповнювання її матем. забезпечення (див. Математичне забезпечення ЦОМ). В ОЦ Московського держ. ун-ту на базі ЕОМ «Сетунь» створено автоматизовану систему статист. обробки результатів вимірювання хвильових коливань рівня моря й деяких інших океанологічних параметрів. Її можна застосовувати й для обробки матеріалів інших вимірювань.

Лит.: Васильов В. В. Вычислительные математические приборы М., 1958 (Библиогр. с. 200—204); Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., 1962 (Библиогр. с. 873—878); Дрейер А. А., Черепеникова Ю. Н. Автоматизированная система статистической обработки материалов наблюдений на ЭЦМ «Сетунь». М., 1958 (Библиогр. с. 171—172); Иванов В. Н. Алгоритмы автоматической оценки вероятностных характеристик производственных процессов. В кн.: Труды I Всесоюзного симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике М., 1970, Сергеев Ю. П. [и др.] Некоторые вопросы построения автоматизированной системы обработки статистических данных, «Кибернетика», 1970, № 2; Задирака В. К. Оценка преобразования Фурье, «Кибернетика», 1971, № 4.

В. К. Задирака, В. В. Иванов, Л. В. Сергеев.

**ЕКСПЕРИМЕНТИ З АВТОМАТАМИ** — процес подання вхідних послідовностей в автомат, спостереження одержуваних вихідних послідовностей і побудова висновків, відповідно до цих спостережень. Автомат, над яким проводять експеримент, звичайно вважається «чорним ящиком», у якому доступні спостереження тільки вхідні й вихідні події, а внутрішня будова і процеси в ньому — невідомі. Висновки слід робити лише на основі введеної інформації, одержаних реакцій та апріорної інформації про автомат, наявної при розв'язуванні даної задачі (це може бути, наприклад, таблиця переходів, верхня оцінка числа станів автомата тощо).

Точніше, поняття експерименту по суті збігається з поняттям обчислювального функціоналу. Нехай зафіксовано якийсь клас  $\mathcal{A}$  автоматів ініціальних із вхідним алфавітом  $X$  і вихідним алфавітом  $Y$ . Введемо такі позначення:  $[X]$  — сукупність усіх скінченних множин слів в алфавіті  $X$ ;  $\{X, Y\}$  — су-

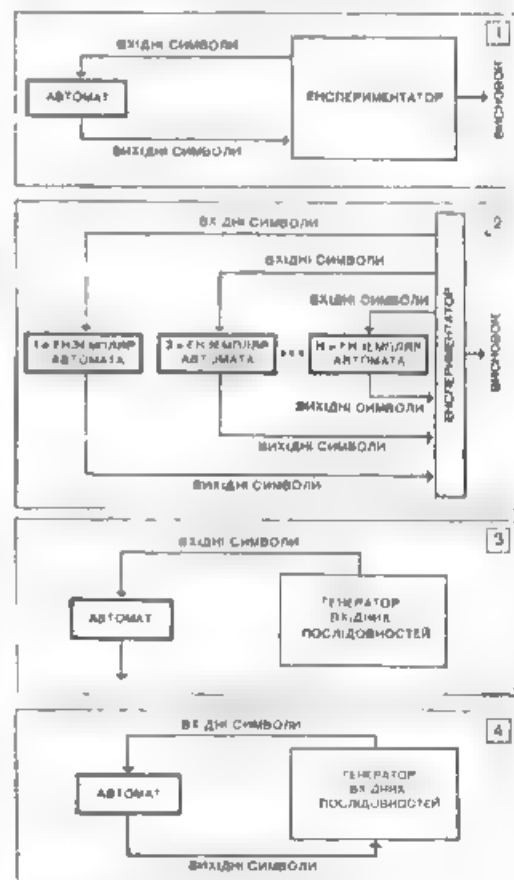
купність усіх скінченних множин пар слів виду  $(x, y)$ , де  $x$  — слово в алфавіті  $X$ , а  $y$  — слово в алфавіті  $Y$ . Якщо  $\alpha \in \{X\}$  і  $A \in \{Y\}$ , то  $(\alpha, A)$  — елемент в  $\{X, Y\}$ , який складається з усіх пар виду  $(x, y)$ , що  $x \in \alpha$ , а  $y \in A$ , в яке  $A$  переробляє  $x$ . Формально визначення експерименту тако: це трійка  $(\Delta, \Omega, F)$ , де  $\Delta$  — множина конструктивних об'єктів, яку називають множиною апріорних інформацій (елементами  $\Delta$  можуть бути, напр., таблиці переходів автоматів, множини таких таблиць тощо),  $\Omega$  — множина конструктивних об'єктів, яку наз. множиною висновків (елементами  $\Omega$  можуть бути, напр., таблиці переходів з візначеним початковим станом),  $F$  — ефективна функція від двох аргументів  $\delta \in \Delta$ ,  $\eta \in \{X, Y\}$ , яка набуває значення  $i \in \{X\}$ ,  $i \in \Omega$  (припускають, що  $(X) \cap \Omega = \emptyset$ ).

Нехай  $A$  — автомат, в який з'явлено якийсь елемент  $\delta'$  множини  $\Delta$  апріорних інформацій. Тоді результат  $E(A)$  експерименту  $E = (\Delta, \Omega, F)$  з автоматом  $A$  визначають так. Крок 0. Знаходять  $\alpha_0 = F(\delta', A)$ , де  $A$  — пустий елемент. Якщо  $\alpha_0 \in \Omega$ , то  $E(A) = \alpha_0$  і процес припиняється. Якщо  $\alpha_0 \in \{X\}$ , то знаходять  $\eta_1 = (\alpha_0, A)$  і здійснюють крок 1. Крок  $i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Знаходять  $\alpha_i = F(\delta', \eta_{i-1})$ . Якщо  $\alpha_i \in \Omega$ , то  $E(A) = \alpha_i$  і процес припиняється. Якщо  $\alpha_i \in \{X\}$ , то знаходять  $\eta_i = (\alpha_i, A)$  і здійснюється крок  $i + 1$ .

Класифікація експериментів. Експерименти можна класифікувати за числом потрібних для проведення їх екземплярів (копій) досліджуваного автомата (одна автомат наз. копією іншого, якщо обидва автомата мають однакові таблиці переходів і перебувають в однаковому стані перед початком експерименту), а саме: 1) прості експерименти (мал. 1), коли потрібен єдиний екземпляр автомата (тобто слова з  $\alpha_0 \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots$  продовжують одне одного); 2) кратні експерименти, коли потрібно більше ніж один екземпляр автомата (мал. 2). Різновидом кратного експерименту можна вважати експеримент з одним автоматом, який має «зворотну кнопку», тобто пристрій, який після подання в автомат входної послідовності дає змогу експериментаторові повернути автомата у первісний стан. Така ситуація буває, напр., коли «замовник» задумав якийсь оператор  $T$  й неспроможний описати його мовою, доступною «виконавцеві», зате може відповісти на будь-які запитання типу: «На що  $T$  переробляє вхідну послідовність  $x(1), \dots, x(i)$ ?». У цьому разі «замовник» виступає в ролі власника уявного «второго ящика», з яким можна провадити кратні експерименти.

Експерименти можна класифікувати й за видом залежності від передісторії процесу на: 1) безумовні (нерозгалужені) експерименти (мал. 3), коли застосовували вхідну послідовність (або послідовності в разі кратного експерименту) цілком визначено заздалегідь (тобто функція  $F$  залежить лише від  $i$ -го аргументу  $\delta$ ), 2) умовні (розгалужені) експерименти (мал. 4), коли кожний наступний символ вхідної послідовності (або послідовностей у разі кратного експерименту) експериментатор вибирає залежно від поданих раніше вхідних послідовностей і одержаних вихідних послідовностей (тобто функція  $F$  істотно залежить від 2-го аргументу  $\eta$ ).

Міри «вартості» експерименту. Должна експерименту  $E$  з автоматом  $A$  — це заг. число вхідних символів, що їх подають в автомат  $A$  в процесі проведення експерименту.



1. Схема простого експерименту.  
2. Схема кратного експерименту.  
3. Схема безумовного експерименту.  
4. Схема умовного експерименту.

Висота експерименту  $E$  (кратного) з автоматом  $A$  — це число букв у найдовшому простому експерименті, що входить у цей кратний експеримент. У разі простого експерименту поняття довжини й висоти збігаються. Іноді розглядають і ін. міри «вартості» експериментів. Кратність експерименту з автоматом  $A$  — це число копій автомата  $A$ , необхідних для проведення експерименту (простий експеримент — це експеримент кратності 1, а крат-

ним, звичайно наз. експеримент кратності 2 і більше). Порядок експерименту з автоматом  $A$  — це число частин цього експерименту, поділених операціями прийняття рішень (безумовний експеримент — це експеримент порядку 1, а умовний — порядку 2 і більше).

**Основні задачі.** 1. **Діагностична** задача. Відомо, що даний автомат  $A$ , таблиця переходів якого з нас  $e$ , перебуває в одному із станів  $q_1, q_2, \dots, q_r$ . Знайти цей стан. 2. **Установна** задача. Відомо, що автомат  $A$ , таблиця переходів якого з нас  $e$ , перебуває в одному із станів  $q_1, q_2, \dots, q_r$ . Встановити  $A$  у відомий став. Множина станів  $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ , один з яких, як відомо експериментаторові, є початковим, наз. множиною допустимих станів.

Діагностична задача, отже, є задачею визначення початкового стану  $A$ , а установна — полягає у визначенні кінцевого стану  $A$ . Експеримент, який розв'язує діагн. задачу, наз. діагностичним, а експеримент, що розв'язує установну задачу, — установним. Діагн. задачу ставлять і для простих і для кратних експериментів; установна ж має сенс тільки для простих експериментів. 3. **Задача розшифрування** (розпізнавання) автоматів має кілька варіантів. Розглянемо основні з них. а) **Задача розпізнавання** автоматів із заданого класу. Відомо, що автомат  $A$ , як неініціалізований, належить заданому скінченному класові  $M$  неініціалізованих автоматів. Треба визначити цей автомат (тобто серед автоматів класу  $M$  вибрати той, що збігається з  $A$ ). б) **Задача ініціального розшифрування** автоматів, що мають не більше як  $k$  станів. Відомо, що ініціалізований автомат  $A$  з заданими вхідним і вихідним алфавітами має не більше як  $k$  станів. Треба визначити цей автомат (напр., у вигляді таблиці переходів з відміченим початковим станом), у якому реалізовано той самий оператор, що й в автоматі  $A$ . в) **Задача залишкового розшифрування** автоматів, що мають не більше як  $k$  станів, полягає в тому, щоб за допомогою підходящого простого експерименту  $E$  визначити ініціалізований автомат, у якому реалізовано той самий оператор, що й в автоматі  $A$  з початковим станом, у який він перейшов після експерименту  $E$ . Якщо  $A$  є дуже зв'язним зведеним автоматом, то залишкове розшифрування для  $A$  є не що інше, як визначення його таблиці переходів (з точністю до нумерації станів) за допомогою простого експерименту. г) **Заг. задача залишкового (ініціального) розшифрування** автоматів відрізняється від попередніх задач тим, що заздалегідь не відома верхня оцінка числа станів автомата  $A$ , а задано лише вхідний і вихідний алфавіти.

Деякі результати. Основні теорії Е. з а. завдяк амер. математик Е.-Ф. Мур. Він одержав і перші результати в цьому напрямі. Зокрема, він показав, що діагн. задачу для

зведеного автомата з  $k$  станами, два з яких є допустимими, завжди можна розв'язати простим безумовним експериментом довжини  $l$ , де  $l \leq k - 1$ . Цей результат рівнозначний такому: якщо які-небудь два стани автомата  $A$  з  $k$  станами не можна відрізнити один від одного вхідними словами довжини  $k - 1$ , то їх не можна відрізнити й ніякими вхідними словами більшої довжини. Якщо діагн. задачу для автомата з  $k$  станами,  $r$  з яких є допустимими, взагалі можна розв'язати, провівши простий безумовний (умовний) експеримент, то її можна розв'язати й простим безумовним (умовним) експериментом довжини  $l$ , де  $l \leq (r - 1)k$ . Установну задачу для автомата з  $k$  станами, з яких  $r$  є допустимими, завжди можна розв'язати за допомогою простого безумовного експерименту довжини  $l$ , де  $l \leq \frac{1}{2}(r - 1)(2k - r)$ . У класі всіх автоматів з  $k$  станами цю оцінку не можна знизити.

Клас автоматів  $\{A_1, \dots, A_N\}$  наз. виключним, якщо жодний стан будь-якого автомата  $A_i$  не еквівалентний жодному станові автомата  $A_j$ . Якщо відомо, що автомат  $A$  належить до виключного класу автоматів  $\{A_1, \dots, A_N\}$ , де  $A_i$  має  $k_i$  станів, а  $k_{i+1} < k_i$ , то автомат  $A$  можна розшифрувати простим безумовним експериментом довжини  $l$ , де  $l \leq (k_1 + k_2 - 1) \left[ \left( \sum_{i=1}^N k_i \right) - 1 \right]$ . Задачу ініціального розшифрування автоматів не більше як  $k$  станами можна розв'язати кратним безумовним експериментом висоти  $h$ , де  $h \leq 2k - 1$ . У класі всіх автоматів з  $k$  станами цю оцінку не можна знизити. Задачу залишкового розшифрування автоматів не більше як  $k$  станами можна розв'язати простим безумовним експериментом довжини  $l$ , де  $l \leq \frac{1}{2} \ln k \ln k$  ( $m$  — число букв вхідного, а  $n$  — вихідного алфавітів).

Нехай для будь-яких  $m, n, k \in \mathbb{N}$  означимо якесь множини (можливо множини всіх) автоматів з фіксованим  $m$ -буквеним вхідним і  $n$ -буквеним вихідним алфавітами й  $k$  станами  $\mathcal{A}_X(m, n, k)$  — множини тих автоматів з  $\mathcal{A}(m, n, k)$ , які мають задану властивість  $E$ . Твердити, що майже всі автомати з  $\mathcal{A}(m, n, k)$  мають властивість  $E$ , якщо  $|\mathcal{A}_X(m, n, k)| / |\mathcal{A}(m, n, k)| \rightarrow 1$  при  $k \rightarrow \infty$ . Виявляється, що зазначені вище оцінки довжин експериментів, як правило, справджуються лише для невеликої частини автоматів. Це явище виявлено після того, як було встановлено такі результати. Нехай  $\mathcal{A}(m, n, k)$  — множина всіх зведених автоматів з заданими  $m, n$  і  $k$ . Тоді діагн. задачу для майже всіх автоматів з  $\mathcal{A}(m, n, k)$  з двома допустимими станами можна розв'язати простим безумовним експериментом довжини  $l$ , де  $l \leq \log_m \times \times \log_n k + 4$ ; установну задачу для майже всіх автоматів з  $\mathcal{A}(m, n, k)$  з  $r \leq k$  допустимими

станами можна розв'язати за допомогою простого безумовного експерименту довжини  $k$ , де  $1 < 5 \log_2 k$ . Нехай  $\pi(m, n, k)$  — множина всіх автоматів  $\pi$  з заданими  $m, n$  і  $k$ . Тоді задачу ініціального розшифрування для майже всіх автоматів  $\pi$  з  $\pi(m, n, k)$  можна розв'язати критичним безумовним експериментом висоти  $c \log_2 k$  і задачу залишкового розшифрування — простим безумовним експериментом довжини  $k'$ , де  $c$  і  $k'$  — незалежні від  $k$  константи.

Легко побачити, що не може бути такого експерименту, який би для всіх (чи принаймні для майже всіх) автоматів розв'язав заг. задачу ініціального (залишкового) розшифрування. Проте буває й от що. Нехай  $\pi(m, n, k)$ , як і вище, — множина всіх автоматів із заданими  $m, n$  і  $k$ . Твердять, що з частотою 1 — а автомати мають задані властивості  $E$ , якщо  $|\pi_E(m, n, k)| / |\pi(m, n, k)| > 1 - \epsilon$  для всіх  $k$ . Тоді для будь-якого  $\epsilon > 0$  існує критичний (простий) експеримент, який з частотою 1 — а розв'язує заг. задачу ініціального (залишкового) розшифрування. При цьому висота (довжина) відповідного критичного (простого) експерименту виявляється відносно невеликою — порядку  $\log k$  (порядку  $k^\epsilon$ ), де  $k$  — число станів того «сирого» ланцюга, до якого застосовують цей експеримент.

Літ. наведення Я. М. О расшифровке автоматов при отсутствии информации о числе состояний «Доклады АН СССР», 1970, т. 190, № 3. Трахтенброт В. А., Баравин Я. М. Конечные автоматы (Поведение и синтез). М., 1970 [Ібідіогр. с. 389—395]; Каршунев А. Д. О верхней оценке длины кратчайших однородных экспериментов по распознаванию одно заключительное состояние для почти всех автоматов «Доклады АН СССР», 1969, т. 184, № 1. Мур Э. Ф. Умножительные эксперименты с последовательными автоматами. В кн.: Автоматы. Пер. с англ. М., 1958; Гилд А. Введение в теорию конечных автоматов. Пер. с англ. М., 1968 [Ібідіогр. с. 265—266]; Хэббард Т. Н. Точные верхние границы длины минимальных экспериментов, определяющих заключительное состояние для всех классов последовательных автоматов. В кн.: Информационный сборник. Новая серия, т. 2 М., 1966.

Я. М. Баравин.

**ЕКСПЕРТНІХ ОЦІНОК МЕТОДИ** в прогнозуванні — один із трьох основних класів методів науково-технічного прогнозування, який ґрунтується на припущенні, що на основі думок експертів можна збудувати адекватну модель майбутнього розвитку об'єкта прогнозування. Відправною інформацією при цьому є думки спеціалістів, які займаються дослідженнями й розробками в прогнозуванні галузі. Е. о. м. поділяють на індивідуальні та колективні, залежно від того, на основі чого розробляють прогноз: на основі суджень одного експерта чи групи їх. Індивідуальні експертні оцінки бувають двох типів: оцінки типу «інтерв'ю» та аналітичні. Серед методів колективних експертних оцінок розрізняють метод комісії, метод віднесеної оцінки й дельфійський метод.

Оцінка типу «інтерв'ю» — це бесіда прогнозіста з експертом, у ході якої прогнозіст, відповідно до наперед розробленої про-

грам, ставить перед експертом запитання відносно перспектив розвитку прогнозованого об'єкта. Процес аналітичної експертної оцінки полягає в самостійній роботі експерта, спрямованій на аналіз тенденцій і на оцінку майбутнього стану й шляхів розвитку прогнозованого об'єкта. З методів аналітичної експертної оцінки найпоширеніші морфологічний метод і метод складання аналітичних оглядів. В основу морфологічного методу покладено наперед розроблену схему розгляду прогнозуваних об'єктів, призначену виявити можливі варіанти розв'язувань якоїсь багатоваріантної проблеми. При цьому виділяють різні типи характеристик аналізованих об'єктів і їхні різні властивості, зазначають елементи кожного типу, перебирають всі можливі доданки характеристик кожного типу, формулюють різні варіанти розвитку аналізованих об'єктів. У процесі аналізу кожного з виділених варіантів експерт визначає перспективні з погляду досягнення певної мети в майбутньому.

Застосування методів колективної експертної оцінки іноді дає змогу підвищити точність і ступінь конкретизації прогнозу. Методом комісії — це проведення групою експертів дискусії, щоб виробити заг. позицію з питань майбутнього розвитку прогнозуваних об'єктів. Коли використовують цей метод, даються знаки взаємний впливу експертів і певна інерційність у відмові від колись уже висловленої публічно думки, нерідко впливають і ім. фактори, й усе це може призвести до небажаних наслідків. Цих над можна частково поборити за допомогою методу віднесеної оцінки, або методу «мозкового штурму».

Дальшим розвитком методів колективної оцінки стало розроблення дельфійського методу (за назвою давньогрецького міста Дельф, де в храмі Аполлона, за переказом, дельфійський оракул передає майбутнє). Дельфійський метод припускає відмову від прямих колективних обговорень. Дебати заміняють ретельно розробленою програмою послідовних індивідуальних опитів, які проводять здебільшого у формі таблиць експертної оцінки. Відповіді експертів узагальнюють і разом з новію додатковою інформацією та узагальненими аргументами передають їм назад, а вони після цього уточнюють свої попередні відповіді. Таку процедуру повторюють кілька разів, поки не досягнуть прийнятної збіжності всіх висловлених думок.

Дуже важливим завданням колективної експертизи є оцінка деяких аспектів розвитку прогнозованого об'єкта, чого не можна досягти ін. методами (напр., аналітичним розрахунком, у результаті експерименту тощо), а також визначати ступінь угодженості думок експертів по конкретних перспективах розвитку, сформульованих перед цим окремими спеціалістами. Тому в процесі колективної експертизи потрібно забезпечити взаємну незалежність суджень експертів; оцінки, як правило, перетворюють на

кількісну форму; експерт зазначає структуру аргументів, що стали йому основою для тієї чи ін. оцінки, і ступінь своєї обізнаності з галуззю, до якої стосується певна оцінка. Успіхові колективної експертизи багато в чому сприяє заінтересованість експертів.

Новим етапом розвитку методики експертних оцінок у прогнозуванні є метод ергономічного графа. Суть його полягає в побудові (на основі експертних оцінок) і наступному аналізі моделі складної мережі взаємозв'язків, які виникають під час розв'язування перспективних науково-тех. проблем. При цьому забезпечується можливість формування багатьох різних варіантів науково-тех. розвитку, кожний з яких веде в перспективі до досягнення мети розвитку прогнозованого галузі. Наступний аналіз моделі дає змогу визначити оптимальний (за рядом критеріїв) шлях досягнення мети. За такого підходу до розроблення прогнозу збільшується обґрунтованість рішень, які приймають у галузі планування та керування процесами науково-тех. і економічного розвитку.

Лоп Глушкова В. М. О прогнозуванні на основі експертних оцінок. «Кибернетика», 1969, № 2. Добров Г. М. Прогнозування науки і техніки. М., 1969 (бібліогр. с. 194-208). Грозова Ю. В. Аналіз согласованности мнений при коллективной экспертной оценке перспектив развития конкретной отрасли техники. В кн. Материалы по науковедению, в. 5, № 1, 1971, № 1. G. Rank correlation methods. New York, 1945 (6 біогр. с. 168-170). Янич В. Прогнозування науки і технічного прогресу. Пер. з англ. М., 1970 (бібліогр. с. 447-543). В. М. Глушкова Г. М. Добров.

**ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ** — одна з задач задавання випадкових процесів теорії. Е. н. п. полягає в побудові

оцінки  $\hat{\xi}(t_0)$  значення випадкового процесу в точці  $t_0$ , що не належить до множини  $E$ , на результатах спостереження процесу  $\xi(t)$  на  $E$ . Інакше кажучи, потрібно вказати такий функціонал  $\hat{\xi}(t_0) = f(\xi(t), t \in E)$  від результатів спостереження, який можна було б в якнайбільшій мірі підставою прирівняти до значення  $\xi(t_0)$ . Здебільшого за міру точності екстраполяції беруть середньоквадратичну похибку  $\sigma^2 = M[\xi(t_0) - \hat{\xi}(t_0)]^2$ . Оцінка, для якої середньоквадратична похибка є мінімальною, має вигляд

$$\hat{\xi}(t_0) = M[\xi(t_0)/\xi(t), t \in E]. \quad (1)$$

Ф-ла (1) визначає умовне математичне сподівання  $\xi(t_0)$  при відомих  $\xi(t)$ ,  $t \in E$ . Але побудова за допомогою співвідношення (1) явних екстраполяційних ф-л можлива лише у виняткових випадках: або коли є явний вираз для умовного розподілу  $\xi(t_0)$  при відомих  $\xi(t)$ ,  $t \in E$ , або при деяких спец. припущеннях щодо процесу  $\xi(t)$  (напр.,  $\xi(t)$  — марковський процес;  $\xi(t)$  — компонента багатовимірної марковської процесу). У практично важливому випадку *гаусівського випадкового процесу*  $\xi(t)$  оптимальна екстраполяція  $\hat{\xi}(t_0)$  лінійно виражається через результати спостереження. Тому при визначенні задач екстраполяції часто обмежуються розглядом

лінійних функціоналів (див. *Оператор*) від результатів спостереження (задача лінійної е. п.). Якщо обмежуються самими лише лінійними функціоналами, точність екстраполяції зменшується, але це компенсується істотним спрощенням задачі й зручністю практичного використання одержуваних результатів. Якщо найкращу лінійну оцінку  $\hat{\xi}(t_0)$  значення  $\xi(t_0)$  шукати у вигляді  $\hat{\xi}(t_0) = \int_E c(t) \xi(t) dt$ , де  $c(t)$  — невідома вагова функція, то з умови мінімуму середньоквадратичної похибки  $M[\hat{\xi}(t_0) - \xi(t_0)]^2$  для ф-ції  $c(t)$  одержують інтегральне рівняння:

$$\int_E B_2(t, s) c(s) ds = B_2(t_0, s), \quad (s \in E). \quad (2)$$

Тут  $B_2(t, s) = M[\xi(t) \xi(s)]$  — кореляційна функція процесу  $\xi(t)$ , при цьому припускають, що вона є відомою. У ряді випадків (при спец. припущеннях щодо  $E$  та процесу  $\xi(t)$ ) можна одержати явний розв'язок інтегр. рівняння (2). Зокрема, явні розв'язки задані Е. н. п. одержано для стаціонарних випадкових процесів з дробово-раціональною спектральною щільністю. Характер одержуваних при цьому результатів можна проілюструвати такими прикладами:

**П р и к л а д 1.** Якщо  $\xi(t)$  — стаціонарний випадковий процес із спектральною щільністю

$$f(\lambda) = \frac{A}{|\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n|^2}, \quad A = E =$$

$= (-\infty, 0)$  (спостерігається все минуле процесу  $\xi(t)$ ), то  $\hat{\xi}(t_0) = c_0 \xi(0) + c_1 \xi'(0) + \dots + c_{n-1} \xi^{(n-1)}(0)$ , де  $c_0, \dots, c_{n-1}$  — деякі константи,  $\xi^{(i)}(0)$  — похідна порядку  $i$  процесу  $\xi(t)$  в точці 0.

**П р и к л а д 2.** Якщо  $\xi(t)$  — стаціонарний випадковий процес із спектральною щільністю

$$f(\lambda) = A \frac{\lambda^2 + \alpha^2}{\lambda^4 + \alpha^4} \quad |E = (-\infty, 0), \text{ то } \hat{\xi}(t_0) = c_0 \xi(0) + c_1 \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} \xi(t) dt. \quad \text{А якщо той самий}$$

процес спостерігають на  $E = (-T, 0)$ , то

$$\hat{\xi}(t_0) = c_0 \xi(0) + c_0 \xi(-T) + \int_{-T}^0 [c_1 e^{\alpha t} + c_1' e^{-\alpha t}] \xi(t) dt.$$

Тут  $c_0, c_1, c_1'$  — константи, що залежать від  $t_0$  та  $\alpha$ .

Методи Е. н. п. широко використовують в автоматичному керуванні теорії, теорії зв'язку, радіофізичній, в розпізнаванні образів.  
М. Й. Явченко.



**ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ У НАВЧАННІ РОЗПІЗНАВАНИХ ОБРАЗІВ** — визначення результату розпізнавання для довільного сигналу на основі заданих результатів розпізнавання для окремих сигналів, які утворюють *навчальну вибірку*.

*Розпізнавальна система* (або розпізнавальний алгоритм) служить для того, щоб на основі спостережуваного сигналу, який характеризує якийсь об'єкт, вибрати одне з можливих рішень. Мета навчання розпізнавальної системи полягає в тому, щоб за відомими правильними рішеннями, вказаними вчителем для якоїсь вибірки сигналів, визначити рішення для сигналів, що не увійшли до вибірки. Цей процес, з одного боку, подібний до навчання людини на прикладах, з другого, його можна розглядати як відновлення якоїсь функції за її значеннями в окремих точках, тобто як *екстраполяцію функції* (або її інтерполяцію). Очевидно, що екстраполяція функції або *інтерполяція функцій* має сенс тільки в тому разі, коли на шукану функцію з самого початку накладено певні обмеження, тобто вказано клас, до якого явно належить шукана функція. Клас функцій можна або чітко окреслити, або задати не цілком точно, вказавши перевагу тих чи інших функцій. Перевага характеризується певним функціоналом, заданим на множині функцій. Прикладом такого функціоналу може бути якась оцінка складності функції. Якщо ніяких обмежень немає, то екстраполяція втрачає сенс, бо в цьому разі функцію можна продовжити цілком довільно.

У найпростішому і звичному випадку функції одновимірного аргументу (тобто функції однієї змінної) достатньо накласти на функції досить загальні і порівняно слабкі обмеження, для того, щоб екстраполяція з прийнятною точністю була можливою. Напр., досить припустити існування та обмеженість похідної, щоб екстраполяція (в даному разі — інтерполяція) була можливою з *логічною*, об'єктивно пропорційною до числа рівномірно розподілених точок, у яких значення функції задано.

Проте в загальному випадку функції багатовимірного аргументу при таких самих заг. припущеннях про функції екстраполяція неможливі. Випадок багатовимірного аргументу, характерний для більшості практично важливих задач розпізнавання, має ту особливість, що точки, в яких необхідно задати значення функції, утворюють багатовимірну сітку. Число точок у ній зростає зі зростанням розмірності  $N$  аргументу як  $m^N$ , де  $m$  — число значень, що їх набуває кожна компонента аргументу. Навіть при мінімальному значенні  $m=2$  (компонента є змінною величиною, якщо вона набуває, принаймні, двох різних значень) число точок, що порівнює  $2^N$ , збільшується зі зростанням розмірності  $N$  так швидко, що вже при  $N$  порядку кількох десятків задати  $2^N$  точок практично неможливо. Тому у випадку екстраполяції

функцій багатовимірного аргументу необхідно накладати значно строгіші обмеження на клас функцій. З цими труднощами багатовимірності дослідники мають справу, розв'язуючи задачі навчання в тих випадках, коли розпізнавані об'єкти характеризуються великим числом ознак. У таких випадках аргументом вирішувальної функції є набір ознак. Вимірність  $N$  такого аргументу дорівнює числу ознак. Тому при розпізнаванні об'єктів, що характеризуються кількома десятками ознак, щоб подолати труднощі багатовимірності, необхідно заздалегідь вжити достатньо вузький клас, до якого належить вирішувальна функція.

Достатньо вузьким класом функцій слід вважати клас, який характеризується порівняно невеликими значеннями *енсеплон-ентропії*, так що *інформації* *кількість*, що міститься в навчальній вибірці, має бути не меншою за *ентропію* класу. Звичайно, якщо клас функцій задано у параметричній формі, цю вимогу можна грубіше сформулювати так: треба, щоб число невідомих параметрів функції було того самого порядку, що й довжина навчальної вибірки. Звичайно, треба, щоб клас функцій, який вибирають, був адекватним даній конкретній задачі, бо в протилежному разі може виявитися, що шукана вирішувальна функція не належатиме вибраному класові функцій і тому її й не буде знайдено. Вибір класу вирішувальних функцій можна здійснити, визначивши закономірності, яким підпорядковуються спостережувані сигнали в конкретному випадку розв'язуваної задачі (див. *Моделі об'єктів розпізнавання*).

В. А. Ковалевський.

**ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ** — наближене визначення значень якоїсь функції в точках, які лежать поза відрізком, що належить області визначення функції, за її значеннями у внутрішніх точках цього відрізка. Іншими словами, якщо відомі значення функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[x_0, x_n]$ , то за цими значеннями в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $x_0 < \dots < x_n$ ) можна визначити значення функції в точках, які лежать поза відрізком  $[x_0, x_n]$ . Апаратом для цього служить, напр., Е. ф. за допомогою інтерполяційних многочленів (див. *Інтерполяція функцій*), коли за значення  $f(x)$  у точці  $x$  беруть значення многочлена  $P_n(x)$  степеня  $n$ , який набуває в  $n+1$  точці  $x_i$  заданих значень  $y_i = f(x_i)$ .

Д. К. Либенберг.

**ЕКСТРЕМАЛЬ** (від лат. *extremus* — крайній) — така функція одного чи кількох аргументів, яка дає екстремум (максимум чи мінімум) якійсь змінній величині, залежній від функцій, і яку називають функціоналом. Напр., функціоналом є кількість тепла, яке виділяється в обмотці якоря електродвигуна за час пуску, причому функція, від якої залежить цей функціонал, є залежність струму якоря від часу. В. в цьому разі є така залежність струму електродвигуна від часу, при якій досягається мінімум втрат тепла під час

пуску. Е. використовують для складання опт. програм роботи й синтезу структур систем автомат. керування. Д. М. Воєчук.

**ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РЕГУЛЮВАННЯ** — спосіб автоматичного керування, що полягає у встановленні такого режиму роботи об'єкта, за якого безпосередньо вимірюваний показник якості (якийсь функціонал координат системи) має максимальне (мінімальне) значення. Е.р. — окремий випадок оптимального керування, для якого показник якості є безпосередньо вимірюваним. За Е. р. розв'язують задачі: 1) знаходження градієнта цільової функції, який визначає напрям руху до екстремуму в просторі регулювання координат за наявності завад, збурень та інерційності об'єкта оптимізації; 2) організації стійкого руху системи в напрямі точки екстремуму за мінімально можливий час або за мінімізації ін. показників (напр., функціоналу, що характеризує середньоквадратичне відхилення від точки екстремуму).

Задачу Е. р. можна розв'язати, використавши розімкнений або замкнений принципи керування (див. Система екстремального регулювання).

Е. р. є одним із способів керування виробничим процесом (див. Регулятор екстремальний, Оптимізатор автоматичний).

В. М. Крицень, А. А. Тунія.

**ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ** в теорії графів — задачі на відшукування мінімуму (максимуму) якої-небудь числової характеристики графа, який належить до певного класу. Прикладом можуть бути задача про знаходження точних верхніх і нижніх границь для хроматичного числа графа із заданими кількостями вершин та ребер, задача про визначення найбільшої кількості ребер графа з фіксованими кількостями вершин і радіусом тощо. Найчастіше такі задачі вкладаються в схему: задано якийсь граф  $F_1, \dots, F_r$ ; треба знайти найбільшу кількість  $m(n; F_1, \dots, F_r)$  ребер, яку може містити  $n$ -вершинний граф  $L^n$ , у якому не вкладається жоден з графів  $F_i$  (граф  $K$  вкладається в  $L$ , якщо в  $L$  існує частина, ізоморфна  $K$ ); крім того, треба описати множини всіх графів, екстремальних для  $F_1, \dots, F_r$ .

Найбільший внесок у розробку методів розв'язування задач зазначеного типу зробили угорські математики. Першу таку задачу поставив і розв'язав (1940) П. Туран. Він довів, що при будь-якому натуральному  $n$  єдиним екстремальним  $n$ -вершинним графом для певного  $p + 1$ -вершинного графа є граф  $T^{n,p}$ , описуваний так: нехай  $r$  — остата від ділення  $n$  на  $p$ , розіб'ємо  $n$  вершин графа на  $p$  неперетинних підмножин, з яких  $r$  містять по  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1$  вершини, а решта  $p - r$  підмножин — по  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$  вершини; дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли вони належать різ-

ним підмножинам. Підраховано, що кількість ребер графа  $T^{n,p}$  дорівнює  $\frac{p-1}{2p}(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}$ .

Як правило, визначити екстремальний граф  $L^n$  і кількість його ребер вдається лише при достатньо великих значеннях  $n$ . У зв'язку з цим багато авторів дослідили граничні властивості екстремальних графів. Доведено, що, коли  $p + 1$  — мінім. хроматичне число графів  $F_1, \dots, F_r$  і  $L^n$  — екстремальний граф для цих графів, то  $m(L^n) = m(T^{n,p}) + O(n^{2-\frac{1}{p}})$ . Тут  $m(K)$  — кількість ребер графа  $K$ ,  $c$  — додатна константа, залежна від  $F_1, \dots, F_r$ .

Цей результат значно підсилює така теорема. Нехай граф  $L^n$  — екстремальний для графів  $F_1, \dots, F_r$ . Коли для всіх  $i = 1, \dots, r$  хроматичне число  $\chi(F_i) \geq p + 1$  і  $\chi(F_i) = p + 1$ , причому для якогось розфарбовування графа  $F_i$  за допомогою кольорів  $c_1, \dots, c_{p+1}$  кольором  $c_1$  забарвлено  $r$  вершини, то

$m(L^n) = m(T^{n,p}) + O(n^{2-\frac{1}{p}})$  і вершини  $L^n$  можна розбити на  $p$  неперетинних підмножин  $A_1, \dots, A_p$  так, щоб здійснювалися умови:

- будь-яке  $A_i$  містить  $\frac{n}{p} + O(n^{\frac{1}{p}})$  вершини;
- кількість ребер, що з'єднують вершини з  $A_i$ , не перебільшує  $O(n^{2-\frac{1}{p}})$  ( $i = 1, \dots, p$ );
- степінь кожної вершини графа дорівнює  $\frac{n}{p}(p-1) + O(n^{\frac{1}{p}})$ ;
- за винятком не більш як  $O(n^{2-\frac{1}{p}})$  пар  $(x, y)$  виду  $x \in A_i, y \in A_j$  ( $i \neq j$ ) утворені суміжники вершинами.

Мінім. інформацію граничні теореми дають при  $p = 1$ . В цьому разі ключовою, але ще не розв'язаною задачею є задача відшукування екстремального графа для певного дводольного графа з кількістю вершин у кожній долі  $t$ . Встановлено, що кількість ребер такого

графа не перебільшує  $cn^{2-\frac{1}{t}}$  ( $c$  — якась константа), проте добрі нижні оцінки при до-  
вільному  $t$  невідомі.

Для розв'язування деяких екстремальних задач при великих значеннях  $n$  існує т. зв. метод прогресивної індукції, що ґрунтується на використуванні граничних теорем. Зокрема, доведено таку теорему. Для того щоб граф  $T^{n,p}$  ( $p \geq 1$ ) був екстремальним для графів  $F_1, \dots, F_r$ , починаючи з якогось  $n$ , необхідно й достатньо, щоб  $\chi(F_i) \geq p + 1$  ( $i = 1, \dots, r$ ) і для якогось  $t_0$  у графі  $F_{t_0}$  існувало ребро, видалення якого зменшувало б хроматичне число графа. За цих умов граф  $T^{n,p}$

при достатньо великому  $n$  є єдиним екстремальним графом.

Лит.: Зыков А. А. О некоторых свойствах directed-графов комплексов // Математический сборник. Новая серия, 1949, т. 24, № 2. Ершова А. П. Кожухов Г. И. Об оценках хроматического числа связанных графов, адюнкты АН СССР, 1962, т. 142, № 2. Вязов В. Г. О числе ребер в графе с данным радиусом // Доклады АН СССР, 1967, т. 173, № 6. Turán P. On the theory of graphs. Colloquium mathematicum, 1954, v. 3, № 1; Simonovits M. A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems. В кн. Theory graphs Budapest, 1968. М. К. Голубере

**ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ НА ГРАФАХ** — задачі, які полягають у відшукуванні найбільшого або найменшого значення якоїсь числової функції, визначеної на сітці, заданій певним графом. До таких задач належать завдання про найкоротший шлях, задача про критичний шлях, задача про відшукування допустимого шляху, сіткова задача, сіткова задача неоднорідна тощо.

**ЕКСТРЕМУМ** (лат. extremum — крайній) — значення якоїсь невідомої або функції  $f(x)$ , що є її максимумом або мінімумом. Розрізняють *екстремум локальний* —  $E$ , в деякому доволі малому околі даної точки, і *екстремум глобальний* —  $E$ , в усій розглядуваній області значень  $x$ . Локальний максимум або мінімумом неперервної ф-ції  $f(x)$  є тако значення  $f(x_0)$ , для якого справедливо відповідно нерівність  $f(x) < f(x_0)$  або  $f(x) > f(x_0)$  для всіх  $x$ , що містяться всередині інтервалу  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , де  $\delta > 0$  — якесь достатньо мале число. Для диференційовних ф-цій, заданих у явному вигляді,  $E$  досягається тільки в тих точках  $x_0$ , де  $f'(x_0) = 0$  (необхідна умова існування  $E$ ). Щоб знайти точки  $E$ , розв'язують рівняння  $f'(x) = 0$  і кожний з одержаних коренів  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  досліджують одним з таких 2 способів (які дають достатні умови існування  $E$ ). 1) Знаходять знаки  $f'(x)$  у точках  $\xi_k$ ,  $\xi_{k+1}$  ( $x_{k-1} < \xi_k < x_k < \xi_{k+1} < x_{k+1}$ ) ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Якщо  $f'(\xi_k)$  і  $f'(\xi_{k+1})$  мають однакові знаки, то  $E$  немає; якщо  $f'(\xi_k) > 0$ , а  $f'(\xi_{k+1}) < 0$ , то маємо точку мінімуму; якщо  $f'(\xi_k) < 0$ , а  $f'(\xi_{k+1}) > 0$ , то маємо точку максимуму. 2) Знаходять  $f''(x_k)$ ,  $f'''(x_k)$ ,  $f^{IV}(x_k)$ , ... Якщо порядок першої відмінної від 0 похідної з цього ряду — парний, то ф-ція  $f(x)$  має або максимум (коли похідна від'ємна), або мінімум (коли похідна додатна). А якщо порядок цієї похідної непарний, то ф-ція не має  $E$ .

Якщо ф-цію  $y = f(x)$  задано неявно (за допомогою рівняння  $F(x, y) = 0$ ), то розв'язують систему  $F(x, y) = 0$ ,  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0$  й одержані розв'язки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , ...,  $(x_n, y_n)$  підставляють у  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$  і  $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}$ . Якщо в точці  $(x_1, y_1)$  ці частинні похідні мають різні знаки, то при даному  $x_1$  ф-ція має мінімум; а якщо вони мають однакові знаки, то ф-ція має максимум. Якщо одна з цих похідних до-

рівняє 0, аналітичні методи стають складнішими. Див. також *Мінімізації функцій методи*, *Оптимізації методи чисельні*.

О. Т. Хагро.

**ЕКСТРЕМУМ АБСОЛЮТНИЙ** — найменше (найбільше) значення функціоналу в усій області його визначення. Якщо аргумент обмежено якимись умовами, що описують допустиму область змін, то  $E$  а — це найменше (найбільше) значення функціоналу в цій області.

**ЕКСТРЕМУМ ГЛОБАЛЬНИЙ** — крайнє (найбільше або найменше) значення числової функції на всій множині значень, яких ця функція набуває, тобто її глобальний максимум або глобальний мінімум.

Задача відшукування точок, у яких досягається  $E$ , г., є задачею програмування математичного. Якщо ці точки відшукують у усьому просторі незалежних змінних, то задачу наз. задачею на безумовний екстремум. А якщо її відшукують при якихось обмеженнях на незалежні змінні, то задачу наз. задачею на умовний екстремум. Див. також *Глобального пошуку методи*.

В. П. Гуменко.

**ЕКСТРЕМУМ ЛОКАЛЬНИЙ** — значення функціоналу в точці, в якій виконується слідуюча умова: існує такий околі цієї точки, що найменшого значення з цього околі функціонал досягає саме в розглядуваній точці.

**ЕКСТРЕМУМУ ДРЕЙФ** — змінювання координат точки екстремуму статичної характеристики об'єкта керування внаслідок дії на нього зовнішніх збурень. В об'єктах з одним регулюючим діянням розрізняють такі два типи  $E$  д.: горизонтальний (дійдф уздовж осі регулюючого діяння) і вертикальний (уздовж осі показника екстремуму). В об'єктах з  $n$  регулюючими діяннями  $E$  д. відбувається в  $(n+1)$ -вимірному просторі, який утворюється  $n$  осями регулюючого діяння і  $(n+1)$ -віссю показника екстремуму. При аналізі й синтезі екстремальних систем задають гіпотези щодо характеру  $E$  д. Найчастіше  $E$  д. приймають у вигляді одиничного стрибка, лінійно зростаючого збурення та випадкового процесу, як правило, з нормальним розподілом. Горизонтальним типом  $E$  д. задаються для аналізу перехідних процесів в екстремальних системах (див. *Екстремальне регулювання*). При наявності  $E$  д. вертикального типу екстремальні системи (див. *Система екстремального регулювання*) втрачають працездатність при швидкості  $E$  д., більшій за деяку критичну, тому визначити її — це має велике значення для оцінки граничних можливостей і швидкодії екстремальної системи. Розрахунок екстремальних систем при випадковому  $E$  д. дає змогу визначити точність підтримування екстремуму й критичну дисперсію випадкового збурення, за якої екстремальна система зберігає працездатність.

Лит. див. до ст. *Система екстремального регулювання*. А. А. Тунія.

**ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТЕОРІЯ** — сукупність знань про властивості електричних та магнітних кіл, про закономірності й методи аналізу процесів, що перебігають у них, про методи синтезу таких кіл за прийнятими критеріями якості. Галуззю дослідження Е. к. т. є пристрої й сигнали в колах, характеристики й умови спостереження яких такі, що в якійсь обмеженій області простору істотно проявляється лише один бік електромагнітного процесу. Ця обставина дає змогу перейти від розподілених у просторі векторних величин силових напруженості електр. поля, вектора електр. зміщення, вектора густини електр. струму, вектора напруженості магн. поля і вектора магн. індукції до таких інтегральних понять, як ерс, напруга, електричний заряд, струм, магнітний потік, і від реальних електр. та магн. кіл (РК) — до графо-аналітичної абстракції, яка виражається у зображенні РК в різній формі через набір ідеальних електр. і магн. елементів (електр. і магн. опір, ємність, індуктивність, джерело напруг, струмів і потоків та ін.), що відбиває осн. явища, які перебігають у реальному пристрої.

Сукупність електр. елементів, призначену для інтерпретації реального пристрою, електроматн. процесів в якому можна описувати за допомогою понять про ерс, струм та напругу, наз. **ідеальним електричним колом** (ЕК). Аналогічно сукупність магн. елементів, призначену для інтерпретації реального пристрою з феромагнітними тілами, що утворюють замкнені контури, де за наявності магніторухливих сил утворюються магн. потоки, наз. **ідеальним магн. колом** (МК). За наявності в реальному електр. пристрої електронних ламп, транзисторів, фотореєсторів, напіпровідникових діодів та інших електронних елементів інтерпретуючий набір елементів наз. **електронним колом**.

Представлення реального кола через ідеальне виконують, враховуючи характеристики використовуваних сигналів, оскільки вони істотно впливають на ступінь абстракції перебігаючих фіз. процесів. Напр., для певного типу дрітного резистора найістотнішим параметром на низьких частотах є активний опір, а на високих — ємкисий. Разом з тим для середнього діапазону частот не можна нехтувати ні активною, ні реактивною складовою опору, і в цьому разі даний резистор доцільно розглядати як складне *RLC*-коло. Отже, інтерпретація реального резистора ідеальним електр. елементами повинна бути різною залежно від спектра частот робочих сигналів кола. А якщо розглядати ЕК й МК, то для них можливі формальні визначення й формальні перетворення, основані на сукупності певних понять, не пов'язаних з сигналами. Абстрагування кола до рівня об'єкта дослідження, не залежного від сигналу, дає змогу докідувати власні властивості кіл безвідносно до характеристик сигналів, а тим самим і виконати важливі узагальнення в рамках єдиної теорії абстрактних кіл. У зв'язку з цим су-

час. підхід в Е. к. т. пов'язується з застосуванням фундаментальної теорії простору станів (фазового простору), згідно з якою кола розглядають з позиції теорії систем і відповідних їй понять: об'єкт, стан, вхід, вихід, еквівалентність, стійкість систем і станів тощо. Суттю теорії систем є відшукування не фіз. *механізмів* в осн. властивостях досліджуваної системи, а матем. зв'язків між ними, внаслідок чого живчення систем, у тому числі й кіл, супроводжується розв'язуваннями у тому або іншому вигляді таких проблем: а) з'ясування осн. властивостей об'єктів, які входять у склад системи; б) визначення співвідношень між цими властивостями; в) представлення взаємодії між різними об'єктами у вигляді співвідношень між їхніми властивостями; г) складання повної сукупності співвідношень між властивостями системи; д) складання рівнянь зв'язку між властивостями, які змінює експериментатор (входи), і властивостями, що їх спостерігають, але не піддають безпосередній зміні (виходи).

Е. к. т. включає в себе дві осн. області дослідження — аналіз і синтез ЕК і МК. Аналіз кіл пов'язаний з розв'язуванням задач знаходження станів, напр., розрахунку розподілу струмів, напруг, асінхронізму і потужностей в елементах кола, задач стійкості електр. і магн. кіл як систем, задач по визначенню чутливості до змін характеристик тощо. При цьому число незалежних рівнянь, які зайняти можна скласти, дорівнює числу невідомих, завдяки чому задачі аналізу супроводжуються розв'язуваннями певних систем рівнянь. Задачі синтезу кіл складніші й полягають у розробці методів побудови кіл із заданими властивостями, напр., для електронних кіл однією з важливих задач синтезу є задача побудови кіл, описуваних бажаними матем. рівняннями. В задачах синтезу кіл число рівнянь, яке можна скласти, звичайно менше за число невідомих, тому і їхній розв'язок практично завжди неоднозначний.

Реальне електр. коло — це об'єкт, який складається з сукупності провідних тіл і середовищ, які утворюють замкнені шляхи для електр. струму. А оскільки ЕК, що його інтерпретують, є абстрактним образом, то залежно від призначення й форми представлення ЕК різні: схема сполучення, геом. образ, матрична форма представлення тощо. Важливе практичне значення має матеріальне втілення абстрактного ЕК в набір реально сполучених фіз. елементів, характеристики яких максимально наближені до ідеальних. Це дає змогу створювати моделюючі пристрої для аналізу й дослідження складних РК і ЕК й конструювати нові прилади з наперед заданими характеристиками.

В основи більшості методів аналізу ЕК лежить ідея розчленування їх на складові частини — елементи кола. Елементи поділяються на пасивні (резистори, котушки індуктивності, конденсатори тощо) й активні (джерела струму, джерела напруги, електронні лампи, транзистори та ін.). Сукупність взаємо-

зв'язків між елементами утворює схему сполучення. Схему сполучення ЕК без зазначення характеру елементів наз. її геом. образом. Ті елементи ЕК, які можна з'єднувати з рештою тільки двома полюсами (затискачами), наз. двополюсниками. Аналогічно вводять поняття про триполюсники, чотириполюсники і взагалі багатополісники. Точки, в яких з'єднуються три і більше полюсів, наз. вузлами ЕК; частини, які з'єднують два будь-які вузли, — його гілками, а будь-який замкнений шлях, який проходить по кількох гілках — контуром ЕК. Процеси, які відбуваються в ЕК, поділяють на усталені (стаціонарні) й перехідні (нестационарні), а самі ЕК, залежно від реакції на процеси, — на лінійні й нелінійні, і залежно від співвідношень між довжиною хвилі змінного сигналу й фазового розподілу вздовж кожної гілки — на ЕК з зосередженнями й ЕК з розподіленими параметрами.

Залежно від мети аналізу властивості ЕК можна виражати різними способами, наприклад, за допомогою алгебр, чи дифер. рівнянь або визначаючи реакцію кола на вплив на входи певних елементарних ф-цій. Якщо відома реакція кола на елементарну ф-цію, то для лінійних ЕК реакцію на довільний вхідний сигнал можна визначити на основі принципу суперпозиції (принципу накладання, див. *Розрахунок електричних кіл методами*).

Як елементарні ф-ції часто використовують синусоїдні сигнали і відповідні їм розвинені вхідні сигнали у ряд або інтеграл Фур'є (методи перетворення Фур'є). Проте методом перетворення Фур'є втрачається істотний недолік — за допомогою їх можна одержати лише складові усталеного режиму, тому в заг. випадку не можна одержувати вхідний сигнал як функцію часу.

Труднощі перетворення значною мірою усуває перехід в область комплексного змінного в виконанні інтегрування в комплексній площині. Відповідно перетворення, яке в узагальнених інтегралах Фур'є, наз. перетворенням Лапласа. Його використовують, щоб розв'язувати дифер. рівняння, визначати реакції кіл на безперервні сигнали, а також щоб розв'язувати різницеві рівняння й визначати реакції на дискретні сигнали. Однак у двох останніх випадках найзручнішим виявляється застосування спеціально розробленого методу *z*-перетворення.

Позитивним у методах перетворення є те, що вони дають змогу дослідникові оперувати не з дифер. рівняннями, а з алгебраїчними. Така сама позитивна якість властива й методів передавальних ф-цій, які для кіл з постійними параметрами можна визначити як відношення перетворення Лапласа вихідної величини до відповідного перетворення вхідної, коли є нульові початкові умови.

Цей метод має ще й те позитивне, що вимірність передавальної ф-ції часто виявляється вищою за вимірність відповідної системи алгебр або дифер. рівнянь. Оскільки ЕК через невідомість кількості входів і виходів звичай-

но належать до класу багатозв'язаних систем, то для них часто застосовують поняття передавальної матричної ф-ції. Регулярне застосування передавальної ф-ції знаходять при розрахунку процесів в ЕК і при аналізі їхньої стійкості.

Застосовуючи до аналізу ЕК метод простору станів, рівняння кола записують у вигляді рівняння стану, яке для лінійного випадку ЕК в матрично-векторній формі має вигляд

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)V,$$

$$Y = C(t)X + D(t)V,$$

де  $X$  — вектор змінних станів, визначуваний в  $n$ -вимірному просторі координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;  $V$  — вектор вхідних ф-цій, визначений в  $m$ -вимірному просторі;  $Y$  — вектор вихідних ф-цій, визначуваний в  $r$ -вимірному просторі;  $A(t)$  — основна матриця ЕК;  $B(t)$ ,  $C(t)$  та  $D(t)$  — матриці зв'язку ЕК.

При цьому поняття стану ЕК можна схематично охарактеризувати як миттєву інформацію про ЕК, необхідну для визначення при відомій вхідній ф-ції, її виходу і її стану в майбутньому. Отже, стан кола в момент  $t_1$  містить усю ту інформацію про минуле ( $t < t_1$ ) кола, яка необхідна для того, щоб визначити реакцію на довільний вхідний сигнал у майбутньому ( $t > t_1$ ). З цієї причини стан кола зв'язується з його пам'яттю, тому для *RLC*-кіл компонентами вектора повинні бути струми в індуктивностях  $L$  і напруги на конденсаторах  $C$ .

Традиційні методи аналізу стаціонарних і нестаціонарних процесів в ЕК пов'язані з використанням трьох груп рівнянь. Перша група утворюється з рівнянь, складених для окремих елементів кола в застосуванні узагальненого закону Ома. Друга — шляхом застосування першого правила Кірхгофа. Третю групу рівнянь складають на основі застосування другого правила Кірхгофа. Для аналізу динамічних процесів в ЕК використовують різні форми представлення сигналів і параметрів ЕК — комплексну, операторну, точкову та ін. Метод рівнянь Кірхгофа й Ома через громіздкість застосовують рідко, бо в методи, для яких шількість потрібних обчислень можна істотно скоротити, застосовуючи ряд прийомів і принципів. Розрізняють методи аналізу, для яких ефекту зменшення кількості обчислень досягають, застосовуючи методи формального перетворення власне ЕК (методи трансфігурацій, інакше, перетворення, підсхем), і методи, загальна ідея яких полягає в особливому виборі групи сигналів, що характеризують окремі процеси в складному ЕК, для котрої можна скласти й розв'язати незалежну систему рівнянь і через яку за допомогою досить простих залежностей можна виразити решту невідомих сигналів. Крім того, є окрема група методів розрахунку (прямі методи), яка дає змогу в разі потреби знаходити простіше лише шукані складові процесу в ЕК.

Методи трансфігурації ґрунтуються на можливості заміни за певними правилами ЕК в цілому і окремих його частин (підсхем) простішими колами. В результаті такої заміни система струмів і напруг не зміниться (еквівалентні перетворення) або буде одержано нове ЕК з іншими сигналами, геом. образом та кількістю вузлів і контурів, але таке, що між системою струмів, напруг, ерс і системою вихідного ЕК буде збережено заданий взаємозв'язок (нееквівалентні перетворення).

До другої групи методів — методів визначальних координат (невідомих) — належать: метод контурних струмів, метод вузових напруг і загальний метод визначальних координат.

Другим осн. напрямом дослідження Е. м. т. є синтез кіл за заданою реакцією на вхідний сигнал. Стосовно до лінійних ЕК (наприклад, для фільтрів) синтезом часто наз. визначення структури кола й числових значень його складових елементів за відомими операторними виразами цього кола або часовими характеристиками при впливі на вхід сигналу певної форми. Практичне розв'язання цієї задачі пов'язане, по-перше, із в'ясуванням можливості фіз. реалізації ЕК з реакцією, відповідною заданій, за допомогою звичайних елементів (конденсаторів, індуктивностей, резисторів), оскільки конкретне розв'язання задачі синтезу за допомогою лінійних пасивних ЕК може не існувати (напр., коли потрібний негативний опір), і, по-друге, з розробкою методу конкретної реалізації кола з заданою реакцією у вигляді схеми з'єднання, а потім у вигляді фіз. ЕК, оскільки розв'язок може бути багатозначним. Практично відповідність реакції ЕК заданій реакції можлива лише для обмеженої області визначення аргументу. Відповідність при цьому є наближеною, тому в задачах синтезу ЕК вводять параметр, який характеризує ступінь близькості одержуваної реакції до бажаної. Ширші можливості відкриває синтез кіл з нелінійних елементів, якими є більшість електронних пристроїв. Синтез електронних кіл є основою електронного матем. моделювання. При цьому моделюванні використовують властивості електричних та електронних кіл (а іноді й магнітних), а також *теорію теорію, автоматичного керування теорію і багато галузей математики. Електронне моделювання займається синтезом кіл, що є моделями різних об'єктів (див. Аналогові моделі, Квазіаналогові моделі, Моделі змінної структури, Моделі фізичні) і матем. операцій, теор. питаннями побудови відповідних обчисл. та керуючих електронних установок, машин і пристроїв (див. Аналогові обчислювальні машини) і методами розв'язування за їхньою допомогою різноманітних задач (див. Електричні моделюючі сітки).* В цьому разі задачі синтезу можна сформулювати інакше. Так, для однієї з груп моделюючих кіл під синтезом розуміють визначення для заданого набору елементів, що утворюють моделі різних матем. операцій (під-

сумовування, множення, інтегрування, функціонального перетворення та ін.), структури кола й числових значень масштабних коефіцієнтів за заданими рівняннями модельованого об'єкта. Для квазіаналогових моделюючих кіл (див. *Квазіаналогові моделювання*) задача синтезу полягає у використанні принципу утворення потенціально-нульових вузлів (див. *Потенціально-нульова точка*) і принципу утворення вузлів з нульовими власними провідностями (див. *Нульові власні провідності вузлів метод*) при створенні моделей.

В Е. м. т. виник новий напрям — застосування електронних цифрових обчислювальних машин для аналізу й синтезу електронних, електр. і механ. кіл (див. *Машини проектування інтегральних схем*). Для цього напрямку характерне створення чисельних методів розрахунку алгебр. і дифер. рівнянь, строга формалізація осн. понять Е. м. т., зокрема, поняття синтезу кіл, розробка формальних мов для описування кіл тощо. Застосування ЕЦОМ накладає свій відбиток на вибір зручної системи параметрів і на критерій оптимальності методів аналізу та синтезу кіл. Літ.: Заліз З. В. Основи общей теория линейных электрических схем. М. 1951 [Бібліогр. с. 323-332]. Нейман Л. Р., Калантаров П. Л. Теоретические основы электротехники, ч. 3 М. 1959. Астахов Г. И. Теория линейных электрических цепей. М. 1960. Библ.гр. с. 626-699]. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М. 1973 [Бібл.гр. с. 733-734]. Максимович Н. Г. Линейные электрические цепи и их преобразование. М. 1961 [Бібл.гр. с. 241-264]. Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К. 1987 [Бібл.огр. с. 369-364]. Нейман Л. Р. Демирчян К. Г. Теоретические основы электротехники, т. 1-2 Л. 1967. Тапиз А. А. Оптимизация синтеза линейных электрических цепей. М. 1963 [Бібл.огр. с. 279-282]. Максвелл Д. К. Избранные сочинения по теории электричества. Пер. с англ. М. 1952. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. Пер. с англ. М. 1969.

Н. В. Аристов.

**ЕЛЕКТРИЧНІ МОДЕЛЮЮЧІ СІТКИ** — моделюючі пристрої, машини змінні в яких відповідають з точністю до постійних масштабів шуканим невідомим із скінченнорівнянцевим рівнянням, що апроксимують початкові диференціальні; призначені для розв'язування диференціальних рівнянь. Існує два методи побудови Е. м. с.: фізичний і математичний. Фіз. метод полягає в тому, що досліджуваний об'єкт будь-якої фіз. природи розбивається на велику скінченну кількість осередків, кожний з яких замінюється електр. схемою, що складається з резисторів, індуктивностей, ємностей тощо, які моделюють певні фіз. властивості осередків. Електр. моделі осередків з'єднуються між собою, утворюючи Е. м. с. Матем. метод ґрунтується на апроксимації початкового дифер. рівняння в частинних похідних системою алгебр. чи звичайних дифер. рівнянь (похідні за часом замінюють іноді в дифер. формі), для розв'язання якої будують модель, що її також наз. Е. м. с. Якщо клас можливих Е. м. с., побудованих за фіз. методом, обмежений суто аналоговими пристроями, що ґрунтуються на принципі подібності між об'єктом і моделлю,

лю, то матем. підхід часто приводить до коє-  
виваналогових Е. м. с., в основу яких покладе-  
но загальніший принцип — принцип екої-  
валентності рівнянь об'єкта і моделі щодо  
одержуваних результатів (див. *Подібності  
теорія*).

Е. м. с. можна побудувати як на омів-  
них опорах, якщо коеф. системи алгебр. рів-  
нянь задовольняють умови: а) матриця коеф.  
симетрична; б) діагональні коеф. матриці  
на модуль більші або дорівнюють сумі по-  
бічних коеф. того самого рядка; в) усі побіч-

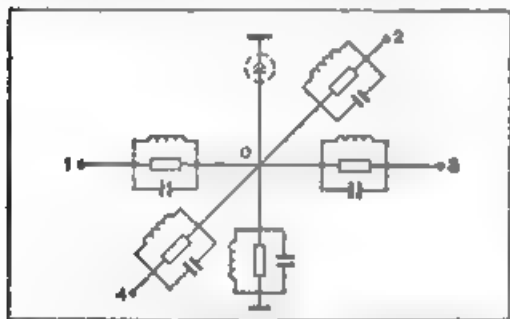


Схема зв'язки електричної моделювальної сітки.

ні коеф. мають знак, протилежний знакові  
діагональних коеф. Якщо для умов не ви-  
конано, то будують або Е. м. с. на реактивних  
елементах, або квазіаналогові Е. м. с. з ру-  
чим чи автомат. зрівноважуванням. Тоді до  
складу Е. м. с. входять електронні блоки:  
підсилювачі постійного струму, *перетворю-  
вачі функціональні* тощо. До складу обла-  
дання Е. м. с., крім власної сітки, входять ще  
й пристрій для задавання крайових умов, ви-  
мирювальний пристрій, блок живлення тощо.

Е. м. с. широко використовують у тепло-  
фізиці, електродинаміці, гідро- й аеромехані-  
ці, буд. механіці тощо для розв'язування диф-  
фер. рівнянь з крайовими умовами. На мал.  
показано вузол Е. м. с. для розв'язування  
двовимірних дифер. рівнянь у частинних по-  
хідних 2-го порядку (0 — центр, вузол, 1—  
4 — сусідні вузли). Відповідним добором па-  
раметрів елементів можна моделювати рів-  
няння еліптичного, параболічного та гіпер-  
болічного типів.

Вади описаних Е. м. с. (громіздкість схем,  
труднощі при автоматизації введення й виве-  
дення даних, вузький клас розв'язуваних  
задач) можна усунути, перейшовши до ал-  
горитм. Е. м. с. зі змінною структурою. Об-  
числювання в таких Е. м. с. здійснюються по-  
слідовно за допомогою аналогового арифм.  
пристрою відповідно до обраного алгоритму  
розв'язування задачі, а проміжні й остаточ-  
ні результати зберігаються або в *запам'ято-  
вувальному пристрої АОМ*, або оператор за-  
писує їх на папері. Останнім часом Е. м. с.  
використовують для побудови гібридних сис-  
тем типу «сітка — ЦОМ», осн. достоїнства  
яких — велика точність обчислювання та  
швидкодія.

Літ.: Тетельбаум И. М. Электрическое моде-  
лирование. М., 1959 (Библ.огр. с. 318—319). Во-  
лжиский Б. А., Лушма В. Е. Модели для  
решения краевых задач. М., 1980 (Библ.огр. с. 447).  
Пухова Г. Е. Избранные вопросы теории матема-  
тических машин. К., 1984. Карплюс У. Модели-  
рующие устройства для решения задач теории по-  
ля. Пер с англ. М., 1982. В. Н. Крайськова.

**«ЕЛЕКТРОН»** — аналогова обчислювальна  
машина для інтегрування систем звичайних  
лінійних і нелінійних диференціальних рів-  
нянь до 55-го порядку зі сталими й змінними  
коефіцієнтами. Її можна використати й для  
розв'язування деяких алгебр., трансцендент-  
них та інтегр. рівнянь. Машина забезпечує  
одночасне виконання до 205 лінійних опера-  
цій (підсумовування, множення на сталий  
коефіцієнт і інвертування знака) і до 165 не-  
лінійних операцій різної складності (зокрема,  
множення й ділення двох змінних). Вона може  
виконувати й деякі логічні операції, напр.,  
до 30 функціональних перемикань залежно  
від певних співвідношень між змінними або  
за заданою в часі програмою. Як аргумент при  
інтегруванні рівнянь використовують час.  
Усі змінні, що входять до системи, яку  
треба розв'язати, відтворюються в машині  
напругами постійного струму, що змінюються  
в діапазоні  $-100 \pm +100$  в.

«Е» побудовано за структурно-секційним  
принципом, ця АОМ складається з 5 ідентич-  
них секцій, у кожній з яких є шафа лічильно-  
розв'язувальних блоків, шафа живлення  
і стабілізатор напруги живлення. До складу  
машини входять 1 центр, пульт керування,  
два переносні пульти керування та апаратура  
для перевірки й налаштування всіх лі-  
чильно-розв'язувальних блоків. Кожна з 5  
секцій може працювати автономно чи з по-  
єднанням з іншими. Якщо секція працює ав-  
тономно, то керування нею здійснюють за  
допомогою центр. або переносного пульта  
керування або пульта керування секцією.  
Можливості кожної секції визначають лі-  
чильно-розв'язувальні блоки. Розв'язувальні  
підсилювачі — лампові. Макс. час інтегру-  
вання — 1000 сек. Інтегрувальні ємності  
(полістиролові): 1 мкф  $\pm 0,1\%$  і 0,1 мкф  $\pm$   
 $\pm 2\%$ . Операційні опори й потенціометри —  
мікродротяні. Точність виконання окремих  
матем. операцій, якщо вхідні сигнали постійні  
або повільно змінюються, характеризують  
середньоквадратичні зведені похибки таких  
порядків: для операції інтегрування, якщо  
стала часу 1 сек, і час інтегрування до  
300 сек — 0,3%; для операції масштабіного  
підсилювання — 0,1%; для операції множен-  
ня (ділення) електронними схемами — 0,5%;  
для виконання аналогічних операцій електро-  
мет. схемами — 0,1%. Споживана потуж-  
ність — не більше як 25 ват.

Літ.: Александров Б. П. [та ін.]. Опыт ис-  
пользования аналоговой вычислительной машины  
«Электрон». В кн. Передовой научно-технический  
производственный опыт. М. 10. 63. 430 13 М., 1963  
В. С. Голубевский.

**ЕЛЕКТРОННА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МА-  
ШИНА (ЕОМ)** — обчислювальна машина,  
основними елементами якої є електронні при-  
лади (електронні лампи, транзистори, інте-

гральні елементи), параметрони, магнітні елементи тощо.

Першу ЕЦОМ «ENIAC» було створено в Пенсільванському ун-ті (США) 1946. Це була спеціалізована обчисл. машина, призначена для балістичних розрахунків при стрільбі. Машина працювала в десятковій системі числення, вона складалася з 18 000 ламп, швидкість  $\Pi$  — 200 мксек для операції додавання і 2300 мксек при множенні. В 1948 у США випущено першу серійну універсальну ЕЦОМ «IBM-603», що складалася з 1400 ламп і працювала з тактовою частотою 50 кГц. Першу вітчизняну ЕЦОМ «МЗСМ» було розроблено в 1950 в Ін-ті електротехніки АН УРСР.

ЕОМ принципово відрізнялися від обчисл. машини інших типів (мех., електр., електро механічних та ін.) як компонентами, так і формою утворення й подання сигналу. ЕОМ мають ряд переваг: вони компактніші, надійніші, споживають менше енергії, дужче швидкодіють, зручніше стинуються з зовн. джерелами інформації, з зручншою швидкістю видають результати обробки інформації. ЕОМ можна об'єднувати в комплекси обчисл. машин для переробки інформації на різних рівнях або в обчислювальні системи для переробки великих масивів інформації при спільній роботі.

За способом обробки представленої інформації ЕОМ поділяють на *цифрові обчислювальні машини*, що оперують з інформацією, поданою в цифровій (дискретній) формі, *аналогові обчислювальні машини*, які обробляють дані, подані в аналоговій (неперервній) формі, й *змішані обчислювальні машини*, в яких перероблювана інформація подається частково в дискретній, частково в неперервній формі. Див. також *Обчислювальна машина*, *Обчислювальна техніка*.

**П. В. Погодієв.**  
**ЕЛЕКТРОННЕ МОДЕЛЮВАННЯ** — дослідження процесів різної фізичної природи шляхом синтезу моделюючих (електричних або електронних) кіл, у яких розподіл струмів, напруг чи інших величин відповідає певним чином математичним залежностям, які описують процеси в досліджуваному об'єкті. Моделюючі кола будують, встановлюючи аналогії між різними об'єктами й рівняннями самого кола (див. *Класична аналогова моделювання*). Однією з перших було використано аналогію між перебігом процесів у різних електр. колах. Моделюючі кола такого типу будували для дослідження систем електропередач. Ці кола ваз. розрахунковими столами змінного струму. Така модель являла собою зменшену копію досліджуваної лінії електропередачі, яка відрізнялася від модельованого об'єкта тим, що до її складу замість елементів з розподіленням по довжині параметрами входять котушки індуктивностей, конденсатори та резистори.

Інший великий клас електронних моделей — це моделі для розв'язування дифер. рівнянь у частинних похідних. Цими рівняннями описують процеси фільтрації водогрунту, деформації товстих балок і стрижнів,

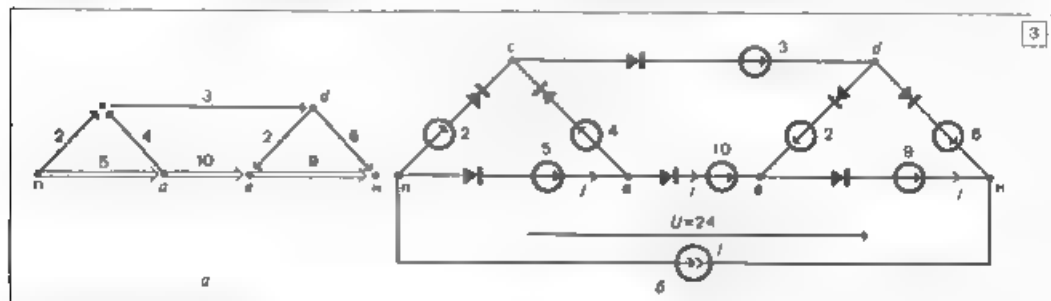
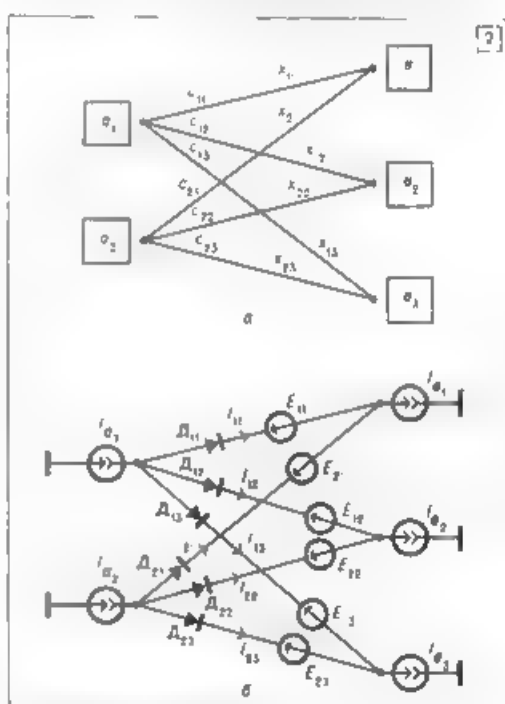
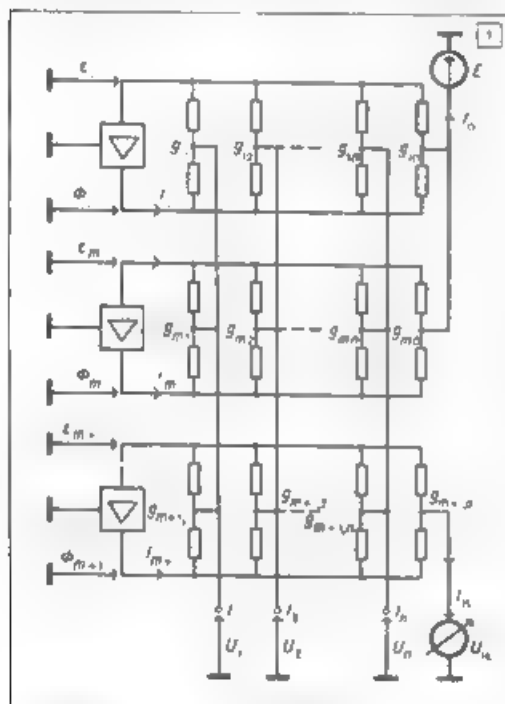
поширення радіохвиль тощо. І дотепер це, по суті, не розроблено досить ефективних методів розв'язування цих рівнянь на ЦОМ. Тому в задачах такого роду моделюючі кола часто є практично єдиним засобом, що дає змогу одержати розв'язок у прийнятні строки. Синтезууючі подібні моделі, використовують два осн. принципи. Перший з них полягає в тому, що суцільне середовище, в якому відбувається процес, умовно розглядають як таке, що складається з окремих осередків. Процес у кожному такому осередку відтворює спец. електр. схема, яка складається з опорів або з опорів та конденсаторів. Ці окремі схеми з'єднуються між собою так само, як і осередки в досліджуваній системі. Умови на межі зони, яка становить інтерес, моделюють, підключаючи джерела електр. напруги чи струму до відповідних виводів відповідних схем, розмішених на межі. В результаті цього одержують одно-, дво- або тривимірну електр. сітку, в якій розподіл струмів чи напруг між точками з'єднання окремих деталей схем аналогічний розподілові відповідних величин у досліджуваній системі (див. *Електричні моделюючі сітки*). Чим більша кількість осередків, на які поділено моделювану систему, тим аналогія точніша. Тому при конструюванні електр. сіток часто користуються т. з. методом «електричної лупи». Суть цього методу полягає в тому, що зону найцікавішого простору поділяють на дрібніші комірки. Це дає змогу докладніше досліджувати процеси в цій зоні. Спец. пристрій, який складається зі схем, які відповідають дрібнішим осередкам, можна підключати до різних точок сітки. Це відповідає переміщенню лупи узадовж досліджуваного простору. Оскільки сіткові моделі для розв'язування дифер. рівнянь у частинних похідних дуже складні й мають великі габарити, їх, як правило, не випускають серійно. В США будували машини, які складалися тільки з однієї електр. схеми, яка одночасно може відтворювати процес лише в одному осередку. Після того як процес розв'язування для одного осередку повністю завершено, результати цього розв'язування завантажуються, а схема перемикається на відтворювання процесу в сусідньому осередку і т. д. Хоч такі машини й дають змогу значно зменшити кількість використовуваних обладнання, але вони не набули широкого поширення, бо при цьому різко збільшується час розв'язування задачі. Інший підхід до розв'язування цієї самої проблеми полягає у використанні суцільних середовищ (див. *Моделювання на суцільних середовищах*). Найпоширенішим є т. з. електродинамічний зв'язок. При цьому розподілові величини у досліджуваній системі створюють у відповідність розподілу електр. струмів і потенціалів в електропровідній рідині. Виготовляючи посудини з фігурним дво- і вишшучим в електропровідну рідину спец. фігурні електрода, можна з великою точністю моделювати межі досліджуваної зони. В СРСР, США та інших країнах будували моделі, в яких за електропровідне



середовище: правили спец. електропроникний папір або інші тверді середовища. Моделі на твердих середовищах компактніші й зручніші в експлуатації, ніж моделі, створювані за допомогою електролітичних ванн. Найчисленнішим є сімейство електронних моделюючих машин, призначених для відтворення процесів у системах, що описуються звичайними дифер. рівняннями. Ці машини складаються з набору електронних функціональних блоків, кожен з яких призначено для виконання однієї з таких матем. опера-

цій, для ст. Аналогова обчислювальна машина, Г. П. Галушкінський.

**ЕЛЕКТРОННЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ** — розв'язування задач програмування математичного за допомогою аналогових пристроїв. Застосовують його поряд з використанням цифрової техніки для задач порівняно невеликих розмірів. На електронних моделюючих пристроях можна досить ефективно розв'язувати, напр., загальні задачі програмування лінійного, коли невідомих і обмежень по



1. Схема моделювання загальної задачі лінійного програмування.

2. Модель транспортної задачі лінійного програмування. а — схематичне зображення б — електрична схема

3. Модель задачі сіткового планування та управління. а — сітковий графік, б — електрична модель сіткового графіка.

цій, як множення, додавання, відтворення нелинійних ф-цій, інтегрування за часом. Їх часто наз. електронними дифер. аналізаторами.

більше як по 20—30, класичні транспортні задачі з числом комунікацій до 1000—1500, задачі сіткового планування і керування з числом блоків до 1000 та ін. задачі. Завдяки

простоті й наочності одержування розв'язку за допомогою Е. м. з. м. п. та можливості швидко змінювати умови задачі й отримувати оперативні оцінювати різні варіанти її це моделювання широко використовують у дослідній і розраховувальній практиці планування.

Відомі графічні методи моделювання, характерною особливістю яких є те, що оптимальний розв'язок задачі програмування шукають як установлений розв'язок системи диф. рівнянь, що описує подорож точки в багатовимірному просторі з координатами, пропорційними шуканим невідомим. Так, розроблено схему для розв'язування задачі програмування з лінійними обмеженнями у вигляді нерівностей і з цілою функцією

$$F(x) = c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

Обмеження  $f_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - b_i$ ,  $a_i > 0$  моделюються за допомогою підсилювача операційного з діодом у колі зворотного зв'язку. Напряга на виході підсилювача дорівнює або нулеві (при дотриманні нерівності), або граничний величині, якщо  $f_i(x) < 0$ . Ця напряга визначає процес мінімізації, бо вона разом з напрягою  $\frac{dF}{dx_j}$  подається на інтегруючий підсилювач. Діод у зворотному зв'язку інтегратора моделює обмеження  $x_j \geq 0$ . Коли мінімум функції мети досягається на межі області, а це, зокрема, завжди відбувається в задачах лінійного планування, розв'язок являє собою коливальний режим з області точки мінімуму. Градієнтні методи можна використовувати й для розв'язування деяких задач програмування нелінійного.

В ін-ті кібернетики АН УРСР розроблено теорію неізоналогового моделювання, яку успішно застосовують для Е. м. з. м. п. Характерною особливістю неізоналогових методів і схем моделювання задач матем. програмування є підхід до цих задач як до алгебраїчних об'єктів. Це допомагає будувати простіші моделі й розв'язувати більшість задач, не вдаючись до ітераційних методів.

На мал. 1 наведено одну з можливих схем моделювання загальної задачі лінійного програмування за допомогою *перетворювача лінійного оборотного*. Функція мети реалізується разом із системою лінійних обмежень задачі. За реалізації цього способу на моделі на 1-му кроці одержують допустимий розв'язок і відповідно цьому розв'язкові значення ф-ції мети. Величину цієї ф-ції тепер можна перевести в розряд задаваних величин і змінювати в потрібний бік, починаючи зі значення, одержаного на 1-му кроці. Ця операція є суттю 2-го й останнього кроку, на якому одержують оптимальний розв'язок. Як тільки величина ф-ції мети починає перевищувати оптимальне значення, система, яка складається з обмежень і цієї ф-ції, стає несумісною, й це проявляється в різкому виході операційних підсилювачів з нормального лінійного режиму і збільшенні вихідних напруг до 100 і більше в.

Є й інший підхід до моделювання задач матем. програмування: досліджують аналогію між розв'язками, одержаними за допомогою електричного кода, яке складається з джерел напруги, джерел струму, діодів, опорів і трансформаторів, та оптич. векторами задачі. Потужність, споживана в електричному колі, уподібнюється до ф-ції мети. Оскільки ця потужність мінімальна, струми й напруги, які моделюють змінні, є аналогами оптич. розв'язку задачі матем. програмування. Ці ідеї широко використовують під час моделювання сіткових задач. Схематичне зображення транспортної мережі, яка складається з двох пунктів виробництва і трьох пунктів споживання та шістьох гілок, що зв'язують їх одна з одним, показано на мал. 2, а. Рівняння цієї задачі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= a_2, \\ x_{11} + x_{21} &= b_1, \\ x_{12} + x_{22} &= b_2, \\ x_{13} + x_{23} &= b_3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \rightarrow \min, x_{ij} \geq 0.$$

Електр. схему, яка моделює рівняння (2), наведено на мал. 2, б. Іншою задачею, яка часто тріпається в практиці планування, є задача про знаходження найдовшого (критичного) шляху на графі. Подібні задачі виникають у системах сіткового планування і керування. Найпростіша електр. модель сіткового графіка складається з діодів, джерел напруги та джерел струму — аналогічно до схеми моделі Денніса для визначення найкоротшого шляху, однак на відміну від неї діод і джерело напруги виникли послідовно. На мал. 3, б наведено електричну модель сіткового графіка мал. 3, а. Величини ерс на мал. 3, б позначено цифрами в умовних одиницях. Критичний шлях на графі між первісною (п) і кінцевою (к) подіями зображатиметься шляхом протікання струму від зовнішнього джерела. Описані схеми стали основою для створення машини «АСОР-1» та «Оптимум-2».

Для моделювання сіткових задач матем. програмування дуже ефективним є й цифро-аналоговий метод, де аналогами гілок і вузлів сітки є дискретні елементи, але з'єднуються вони між собою аналогічно до конфігурації мережі. Існують цифро-аналогові схеми для моделювання задач сіткового планування та керування, задач про екстрем. потоки в мережі, про оптимальну зв'язуючу мережу та ін. Цифро-аналогові пристрої порівняно з аналоговими мають кілька переваг, головною з яких є можливість автоматично вводити й виводити інформацію та спрягати ці пристрої з ЦОМ для спільної роботи. Літ.: Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Б., 1964. Васильев В. В. Клепикова А. Н. Тимошенко А. Г. Решение задач оптимального планирования на электронных моделях. К., 1966 (Библиогр с 161—164). Рыбашов М. В., Дудников Е. Е. Градиент-

ные методы решения линейных равенств, неравенств и задач линейного программирования на аналоговых вычислительных машинах М., 1970 [6] биолор. с. 141—142]. Рунг Е. В. Linear programming on an electronic analogue computer. «Communication and electronics», 1958, № 24; Дежнев Д. Б. Математическое программирование в электрических цепях Пер. с англ. М., 1961 [6] биолор. с. 212—214].

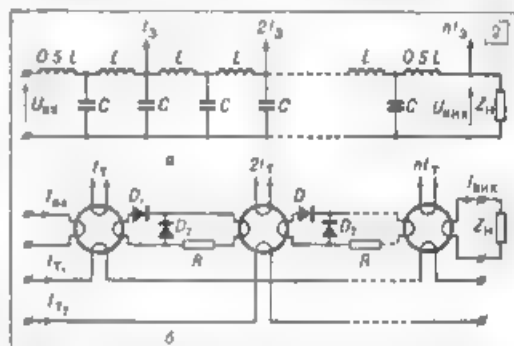
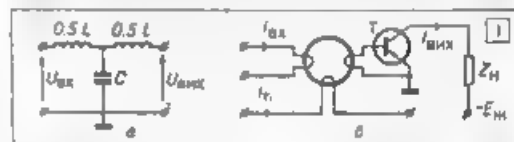
А. М. Напильков.

**ЕЛЕМЕНТ ЗАТРИМКИ** — электрическая схема с одним входом и одним або кількома виходами, яка застосовується для часової затримки імпульсних сигналів. Залежно від способу передавання інформації в цифровій обчислювальній машині (ЦОМ) Е. з. бувають двох типів: асинхронні та синхронні. В Е. з. асинхронного типу в міру надходження сигналів на їхній вхід на виході виникає сигнал через проміжний час, що дорівнює тривалості затримки  $t_z$ , величина якого визначається параметрами схеми Е. з. В Е. з. синхронного типу інформація передається примусово за допомогою синхронізуючих імпульсів, і, коли на вхід Е. з. надходить інформаційний імпульс, на виході він з'являється через проміжок часу, що дорівнює тривалості одного такту  $t_T$ .

Серед Е. з. розрізняють пасивні (мал. 1, а), що не мають підсилювальних властивостей, і активні, що підсилюють сигнал (мал. 1, б). Як підсилювальний елемент використовують електронну лампу або транзистор. Осн. параметром Е. з. асинхронного типу є час затримки сигналу, який у схем із зосередженими параметрами здебільшого залежить від величини активного опору  $R$ , індуктивності  $L$  (або взаємніндуктивності  $M$ ) і ємності  $C$ , а в схемах з розподіленими параметрами — від довжини лінії  $l$ , діелектричної проникності  $\epsilon$  та магнітної проникності  $\mu$  середовища між провідниками лінії. Тривалість затримки, напр., у ланці з пасивних елементів  $L-C$ , визначають за формулою  $t_z = \sqrt{LC}$ , а час затримки в лінії з розподіленими параметрами  $t_{zл} = 0,33 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{\mu \epsilon}$ . Тривалість затримки пасивних Е. з. може становити одиниці мікросекунд із стабільністю порядку 1% від величини  $t_z$ . Активні Е. з. часто використовують для побудови різних схем однобіаторів (цекаючих мультівібраторів), які виконують функцію затримки й формування сигналу. Ці схеми дають змогу одержати час затримки до кількох секунд і досить просто регулювати його в широких межах. Їх використовують здебільшого тоді, коли до стабільності часу затримки не ставлять особливо високих вимог. Щоб збільшити тривалість затримки, Е. з. включають у вигляді ланцюжка, що складається з  $n$  ланок і утворює ланцюг затримки в схемах асинхронного типу (мал. 2, а) і т. а. тактову лінію в схемах синхронного типу (мал. 2, б). Заг. час затримки для ліній затримки визначають за співвідношенням  $t_{zл} = nt_z$ , а для тактової лінії —  $t_{zл} = nt_T$ . Лінії затримки забезпечують час затримки від часток мікросекунд до 10 сек.

Е. з. використовують у вузлах ЦОМ, побудованих на основі потенціально-імпульсної елементної структури або імпульсної елементної структури та на основі елементних структур, у яких використовують магнітні або параметричні елементи, напр., у суматорах нагромаджувальних з послідовним перенесенням — для затримки сигналів перенесення, в динамічних триггерах — для організації динамічної пам'яті, в схемах на ферит-діодних і ферит-транзисторних коірках і лараметронах — для узгодження за часом сигналів, в електр. схемах розподільників

сигнала, зсувних пристроїв) — для створення сигналів, зсувних у часі, тощо.



1. Схеми елементів затримки: а — синхронна пасивна  $L-C$  схема, де  $U_{вх}$  й  $U_{вих}$  — напруги на вході й виході елемента затримки,  $L$  — індуктивність і ємність  $C$ ; б — синхронна активна схема ферит-транзисторного елемента, де  $I_{вх}$  й  $I_{вих}$  — сила струму на вході й виході його,  $I_T$  — сила струму у тактовій обмотці,  $E_M$  — напруга джерела живлення,  $T$  — транзистор,  $Z_H$  — опір навантаження. 2. Ланцюжковий схем сполучення  $n$  елементів затримки синхронного й асинхронного типу: а — ліній затримки на пасивних елементах  $L-C$ , де  $U_{вх}$  й  $U_{вих}$  — напруги на вході й виході схеми,  $t_z$  — час затримки однієї ланки; б — тактова лінія затримки на ферит-діодних елементах, де  $I_{вх}$  й  $I_{вих}$  — сила струму на вході й виході схеми;  $I_T$  й  $I_T$  — сила струму в тактових обмотках;  $t_T$  — час одного такту;  $D_1$  і  $D_2$  — діоди,  $R$  — опір.

(комутаційних пристроїв) — для створення сигналів, зсувних у часі, тощо.

Д-р Васильєв М. П., Гашковец І. С. Логические элементы в промышленной автоматике. М., 1962 [6] биолор. с. 156—157]. Гиршберг В. В. (та ін.). Единая серия полупроводниковых логических и функциональных элементов (ЭТ) М — Л, 1966 [6] биолор. с. 112].

Л. Я. Нагорный.

**ЕЛЕМЕНТАРНА СИСТЕМА** — максимально спрощена для зручності досліджування, розглядувана як єдине ціле, формалізація якої реально існуючої або проєктованої системи. Сам вибір формалізації реальної системи як Е. с. виключає для дослідника можливість членувати цю систему на складові частини, ланки, вузли тощо й розглядати внутрішній взаємозв'язок між ними. Вивчаючи досить

складні системи, дуже часто буває зручно вибирати таку формалізацію, коли розглядану систему подають у вигляді впорядкованої сукупності Е. с. з певною структурою і внутрішніми зв'язками. Е. с. має такі особливості, властиві системам: 1) у кожний момент часу стан Е. с. можна охарактеризувати кількісно за допомогою певної величини, яку наз. її миттєвою характеристикою; 2) миттєва характеристика Е. с. змінюється з часом за певними законами функціонування; 3) Е. с. може зазнавати впливу зовнішніх дій з середовища (вхідні діяння); 4) Е. с. може сама впливати на середовище (вихідні діяння); 5) характер зміни миттєвих характеристик і формування вихідних діянь може мати ймовірнісне значення. Відмітною особливістю Е. с. є сталість її елементарної структури, яка полягає в наявності стану, вхідного й вихідного діянь. Формалізуючи реальні процеси, рішення про вибір об'єктів, що їх беруть як Е. с., ухвалюють залежно від рівня дроблення, на якому проводять дослідження в кожному окремому випадку.

Так, виробниче підприємство (іноді можна розглядати як Е. с. При цьому за миттєвої характеристики правлять такі величини, як наявність виробничих потужностей, введених у даний момент часу, показники використання плану, наявність матеріалів і напівфабрикатів на всіх етапах виробництва тощо. Вхідними діяннями є надходження матеріалів, інформація про зміни планових завдань тощо. Вихідні діяння це продукція, яку випускають, та інформація про хід виконання плану. В інших випадках, визначаючи функціонування того самого підприємства, за Е. с. можна вибирати цехи, бригади і навіть окремі верстати. Для дослідження Е. с. застосовують різноманітні матем. методи: марковські й інші марковські процеси, методи програмування математичного, моделювання математичного та автоматів теорії.

М. В. Яровицький.

**ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ.** Обчислювання елементарних ф-цій (е. ф.) на ЕЦОМ є одним з найпоширеніших матем. операцій і має велике практичне значення. Під е. ф. розуміють ф-цію  $y = f(x)$ , яка містить скінченне число обчисл. операцій, що виконуються над аргументом, залежною змінною і деякими сталими. Під обчисл. операціями розуміють чотири арифм. дії, піднесення до цілого степеня, добування кореня, взяття тригонометричних і обернених їм ф-цій, логарифмування й потенціювання.

Е. ф. поділяють адебільшого на алгебричні й трансцендентні. Найпростішою алгебр. ф-цією є степеневі ф-ція  $y = x^a$ , де  $a$  — дійсне число. Найпростішими трансцендентними ф-ціями є: показникова ф-ція  $y = a^x$ , де  $a > 0$  і  $a \neq 1$ ; логарифмічна ф-ція  $y = \log_a x$ , де  $a > 0$  і  $a \neq 1$ ; тригонометричні ф-ції  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  тощо; обернені тригонометричні ф-ції  $y = \arcsin x$ ,

$y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$  та ін. Крім перелічених, на практиці часто використовують і складніші е. ф., такі, як прями й обернені гіперболічні ф-ції, цілі алгебр. многочлени й дробово-раціональні алгебр. ф-ції. Обчислюючи е. ф. за допомогою ЕЦОМ, використовують різні чисельні методи. Вибір методу обчислювання залежить передусім від таких важливих характеристик ЕЦОМ, як швидкодія, розрядність, форма представлення числа, зміність запам'ятовувальних пристроїв тощо. Осн. методами обчислювання е. ф. є такі: степеневі розкладання, многочленні наближення, розкладання в ланцюгові дробі, раціональні наближення, ітераційні процеси. Іноді е. ф. знаходять як розв'язки дифер. рівнянь. Зупинимось на деяких із цих методів.

Найпростіше степеневі ряди (розв'язання) одержують, розвиваючи е. ф.  $y = f(x)$  у ряд Тейлора — Маклорена

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Так, напр., степеневе розв'язання ф-ції  $y = \sin x$  можна записати в такому рекуррентному вигляді:

$$y_{n+1} = y_n + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

де  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $y_0 = x$ . Оскільки розв'язання в ряд Тейлора — Маклорена є найкращим тільки в околі точки  $x = 0$ , то, природно, воно не може задовольнити потреб практики для обчислення е. ф. на заданому проміжку. Так, напр., для одержання 10 вірних цифр при обчислюванні ф-ції  $y = \ln(1+x)$ , коли  $x \in [0, 1]$ , треба мати  $10^{10}$  членів розв'язання з ряд Тейлора і всього 14 членів при розкладанні за поліномами Чебишова.

Одним з найпростіших методів одержання розкладу за поліномами Чебишова є метод економізації степеневих рядів. Суть його полягає в зменшенні кількості членів степеневих рядів заміною членів ряду з високими степенями відповідними поліномами Чебишова. Використовуючи властивість ортогональності поліномів Чебишова, можна безпосередньо одержати розклад е. ф. за ними (для  $x \in [-1, 1]$ ) у вигляді

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \text{ де } T_n(x) \text{ — поліноми Чебишова}$$

$$\text{шоста 1-го роду, } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x) T_n(x) dx, n \neq 0.$$

$$\text{Тяж, напр., } e^{kx} = I_0(k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(k) T_n(x),$$

де  $I_n(x)$  — ф-ція Бесселя 1-го роду порядку  $n$  уявного аргументу. Проміжним між розв'язанням у ряд Тейлора — Маклорена і розкладанням за поліномами Чебишова є роз-

винення в. ф. в ряди нев'язок, що мають вигляд

$$y = \Psi(y_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n, \text{ де } x_0 = F(x, y_0), y_0 -$$

наближене значення шуканої в. ф. При цьому невідома ф-ція  $F(x, y(x)) = 0$ , якщо  $y(x)$  точно збігається зі значеннями в. ф. у точці  $x$ . У випадках, коли за рівнянням  $x_0 = F(x, y_0)$  можна знайти  $x = \Phi(y_0, x_0)$  і розвинути ф-цію  $y(x) = y[\Phi(y_0, x_0)]$  у ряд Тейлора — Маклорена за степенями  $x_0$ , одержимо тукаме розвинення в ряд нев'язок. Так, для ф-ції  $y = e^x$ , взявши  $x_0 = x - \ln y_0$ , одержимо  $x = x_0 + \ln y_0$ , звідки  $e^x = e^{x_0 + \ln y_0} = y_0 e^{x_0} =$

$$= y_0 \left[ 1 + \frac{x_0}{1!} + \frac{x_0^2}{2!} + \frac{x_0^3}{3!} + \dots \right]. \text{ При } y_0 = 1$$

одержимо розвинення ф-ції  $y = e^x$  у ряд Тейлора — Маклорена. За наближення  $y_0$  вигідно брати найкращі наближення в. ф. на заданому проміжку зміни аргументу: ряд нев'язок має швидшу збіжність на заданому проміжку, ніж розвинення в. ф. у ряд Тейлора, але повільнішу, ніж розклад за поліномами Чебишова. Так, для ф-ції  $y = e^x$  при  $x \in [0, 1]$  для одержання 10 вірних цифр необхідно взяти 14 членів розвинення в ряд Тейлора, 11 членів розвинення в ряд нев'язок з найкращим постійним наближенням і 9 членів при розкладі за поліномами Чебишова. Перевагою розвинення в ряд нев'язок є те, що вони мають легко обчислювані коефіцієнти.

Важливу роль при обчислюванні в. ф. відіграють ітераційні процеси. Ітераційні ф-ли по четвертий порядок включно можна одержати на основі модифікованого методу Чебишова

$$y_{i+1} = y_i - \frac{z(x, y_i)}{z'_y(x, y_i)} - \frac{z''_y(x, y_i) z^2(x, y_i)}{2! [z'_y(x, y_i)]^3} - \frac{3[z''_y(x, y_i)]^2 z^3(x, y_i) + z'''_y(x, y_i) z^2(x, y_i)}{3! [z'_y(x, y_i)]^5} z^2(x, y_i),$$

де  $z = F(x, y) = 0$ ,  $x$  — аргумент,  $y = f(x)$  — шукана в. ф. Залишивши в ф-лі два члени, одержимо відомий метод Ньютона, тобто ітераційний метод другого порядку. Ітераційні ф-ли по четвертий порядок включно для обчислювання в. ф.  $y = \sqrt[n]{x}$  можна одержати з рівняння  $x = \frac{y^n}{x} - 1$  у вигляді

$$y_{i+1} = \frac{1}{n} \left[ (n-1)y_i + \frac{x}{y_i^{n-1}} \right] - \frac{n-1}{2n^3} \times \times \frac{(y_i^n - x)^2}{y_i^{2n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} \frac{(y_i^n - x)^3}{y_i^{3n-1}}.$$

Підставивши в цю ф-лу вираз  $y_i = \sqrt[n]{x} (1 + \delta_i)$ , одержимо відповідно вирази відносних похибок для ітераційних ф-л 2-го, 3-го і 4-го порядків у вигляді

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} &= \frac{n-1}{2!} \delta_i^2 - \frac{(n-1)(n+1)}{3!} \delta_i^3 + \\ &+ \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{4!} \delta_i^4 - \dots; \\ \delta_{i+1} &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \delta_i^2 - \\ &- \frac{(n-1)(2n^2+n-1)}{8} \delta_i^3 + \\ \delta_{i+1} &= \frac{(n-1)(6n^3-5n+1)}{24} \delta_i^4. \end{aligned}$$

За початкові наближення для ітераційних ф-л беруть здебільшого початкові наближення у вигляді поліномів нульового і першого степеня, що мають мінім. величину або абсолютної, або відносної похибки. Найкращі початкові наближення опуклої (увігнутої) ф-ції  $y = f(x)$  на  $x \in [a, b]$  для  $f(x) > 0$  або  $f(x) < 0$ , що мають мінім. величину або похибки, визначають за ф-лами:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{m+M}{2}, \\ \text{де } m &= \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x); \\ y_0 &= Ax + B, \\ \text{де } A &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad B = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \\ &- A \frac{a+c}{2}, \end{aligned}$$

значення  $c$  знаходять з рівняння  $f'(c) = A$ . Найкращі початкові наближення опуклої (увігнутої) в. ф., що мають мінім. величину відносної похибки, визначають за ф-лами:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2mM}{m+M}, \\ \text{де } m &= \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x); \\ y_0 &= A(x+p), \\ \text{де } p &= \frac{by(a) - ay(b)}{y(b) - y(a)}, \\ A &= \frac{2y(c)y(b)}{y(b)(c+p) + y(c)(b+p)}, \end{aligned}$$

величину  $c$  знаходять із рівняння  $(c+p) \times \times y'(c) = y(c)$ . Важливу роль для обчислювання на ЕЦОМ, які працюють з довільною значністю, відіграють рекурентні ф-ли, одержані на основі виразів вигляду:  $z\left(\frac{x_m}{n}\right) =$

$= f[z(x_m)]$ , або  $x(mx_m) = f[z(x_m)]$  шляхом

заміни  $x_m = \frac{x}{n^m}$  при прийнятому позначенні  $x_m = x(x_m)$ .

На основі оцінок похибок одержаних рекурентних  $\phi$ -л у ці  $\phi$ -л в разі необхідності вводять нормувальний множник, який зменшує їхню похибку. Прикладом такого типу  $\phi$ -л може бути вираз для обчислення  $x =$

$$- \operatorname{ctg} x, \text{ що має вигляд } x_{i-1} = \frac{1}{2} \left( x_i - \frac{1}{x_i} \right),$$

$i = n, n-1, \dots, 0$ , де  $x_n = \frac{2^n}{x}$ , звідки

$$x_0 = \operatorname{ctg} x.$$

Лит. Литвинский В. С. Вычисление элементарных функций на автоматических цифровых машинах. Ини. Вычислительная математика, сб. 2, М., 1967. Костерин Л. А. Чернышевский О. А., Илюшинский А. Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. М., 1963. 161-бл. ир. с 240 збл. Теслер Г. С. Вычисление некоторых элементарных функций на ЦММ В им. Математическое обеспечение ЭВМ и эффективная организация вычислительного процесса, в 2 К., 1967. Благосещенский Ю. И. Дорожничкина А. А. Вычисление элементарных трансцендентных функций на ЭВМ с произвольной точностью В им. Математическое обеспечение ЭВМ и эффективная организация вычислительного процесса, в 2 К., 1967.

Ю. И. Благосещенский, Г. С. Теслер.

## ЕЛЕМЕНТАРНІ ОПЕРАЦІЇ НАД СЛОВАМИ

МІ — операції над словами, кожна з яких в сукупності операцій над цифрами (символами), що складають дані слова Е. о. над с в компонентами операцій вищих рівнів — машинних операцій, вбудованих процедур тощо. Набір Е. о. над с повинен забезпечувати алгоритм виконання будь-якої заданої системи операцій ЦОМ. З міркувань ефективності система операцій машинних ЦОМ істотно надмірна, відповідно до цього і набір Е. о. над с. не можна обмежувати операціями, які необхідні для забезпечення алгоритму, повноти системи операцій машини.

Хоч видів Е. о. над с. є багато, виділяють типові елементарні операції, до яких належать такі: зсування слова, дешифрування слова, додавання до слова одиниці (або «1»), елементарне додавання двох слів, порівнювання слів, передавання слів, порозрядне додавання слів за модулем  $m$ , порозрядне доповнювання слів, порозрядне логічне додавання слів і порозрядне логічне множення слів. Для переробки нечислової інформації система елементарних операцій включає дії посимвольної обробки слів, а саме: посимвольне зсування слова, посимвольне порівнювання слів, дешифрування символів, лічба символів Е. о. над с., у яких результати дій над цифрами кожного розряду не залежать від цифр суміжних розрядів початкових слів, належать до порозрядних операцій (передавання слова, логічні операції додавання і множення, порозрядне додавання за модулем  $m$ , порозрядне доповнювання). Елементарне підсумовування слів, додавання до коду слова одиниці, дешифрування і зсування слова, а також елементарні дії посимвольної обробки слів не є порозрядними операці-

ми, бо розряди слова внаслідок цих операцій формуються не тільки залежно від відповідних розрядів початкових слів, але можуть бути й  $\phi$ -цією попередніх розрядів (операції підсумовування і лічби) або залежати від частини ця всього значення початкового слова (операції зсування і дешифрування).

Операція зсування полягає у зміщенні цифр (символів) слова, що зберігається в регістрі, ліворуч або праворуч на задане число розрядів (символів). Так, при зсуванні праворуч на  $k$  розрядів стан 1-го розряду регістра переміститься в  $(k+1)$ -й розряд, 2-го — в  $(k+2)$ -й і т. д., при зсуванні ліворуч на  $k$  розрядів стан  $m$ -го розряду переміститься в  $(m-k)$ -й розряд і т. д. За способом записування цифр, що виходять з регістра, зсуви поділяють на лінійні й циклічні. Під час лінійного зсування цифри, що виходять з регістра, або губляться, або надходять у другий регістр; під час циклічних зсувань виходять цифри надходять у звільнювані розряди того самого регістра, а при лінійному зсуві у звільнені розряди регістра можуть записуватися нулі, одиниці, символи «пусто», або надходити нова інформація з іншого регістра. Якщо змистом регістра є послідовність  $k$ -розрядних символів, операція зсування на один символ полягає у зсуванні на  $k$ -розрядів, що здійснюється звичайно для підвищення швидкодії, одночасно.

Операція дешифрування полягає в перетворенні значень слів на сигнали. Кожному значенню слова у дійсному алфавіті (діапазоні значень) відповідає одиничний сигнал, що виникає і зберігається тільки при даному значенні слова (діапазоні значень). До типових належать операції дешифрування значення слова та дешифрування діапазону значень слова, що реалізуються за допомогою дешифраторів 1-го і 2-го роду; одержувані сигнали використовуються як керуючі.

Операція додавання до слова однієї (або «1») перетворює дане значення слова на одне з суміжних його значень. Операція лічби, разом з перевіркою, чи дорівнює нулеві вміст регістра в оброблюваному словом, забезпечує виконання арифметичних операцій. У деяких випадках доцільно будувати спеціалізовані об'єкти, пристрої для виконання арифм. дій на базі операцій лічби одиниць. За допомогою операцій лічби й посимвольного зсування можна реалізувати операцію лічби символів. При цьому кожне посимвольне зсування супроводиться додаванням одиниці в лічильник, де формується результат операції. Аналогічно можна організувати відлічування потрібної кількості символів від даної послідовності, напр., для передавання в інший пристрій, при цьому в лічильнику записується число, що вказує на кількість відлічуваних символів, а при зсуванні символів у лічильник записується «1». Операція лічби широко використовують у керуванні для утворення послідовностей адрес команд, лічби кількості циклів під час виконання різних операцій, для фор-

мування часових тактів різної тривалості та ін.

Операція елементарного відсумовування полягає в утворенні арифм. суми двох чисел, представлених в одній системі числення, в природному вагові розрядів, в однаковій кількості розрядів і в комою, що міститься перед одним і тим самим розрядом. Операція відсумовування в осн. змістом операції додавання, яку порівняно з відсумовуванням ускладнено за рахунок можливого представлення чисел у системі з плаваючою комою, різних знаків доданків, прийнятим способом представлення від'ємних чисел тощо. Особливістю операції відсумовування є залежність значення  $i$ -го розряду результату операції (суми) не тільки від  $i$ -х розрядів початкових слів, а й від перенесення  $p_{i+1}$ , що утворюється під час відсумовування молодших  $(i+1)$ -х розрядів, що в свою чергу ф-цією перенесення  $p_{i+2}$  з  $(i+2)$ -х розрядів. При послідовному відсумовуванні порозрядно обробляють початкові слова, починаючи з молодших розрядів при паралельному — всі розряди обробляють одночасно. Цей блок, що його використовують для реалізації будь-яких модифікацій відсумовування, є суматор однорозрядний, призначений для утворення суми за модулем  $m$  трьох цифр (двох цифр доданків і цифри перенесення в молодших розрядах) та формування перенесення, що виникає при додаванні їх.

Операцією порівнювання слів визначають відношення старшинства двох слів, вона в осн. змістом машинної операції умовного переходу, яка обов'язково є в системі операцій універсальних ЦОМ. Збільшеного під порівнюванням розуміють операцію, що її виконують над повними числами з урахуванням їхніх знаків, тобто алгебр. порівнювання. Модифікацією цієї операції є порівнювання абс. величин або порівнювання за модулем, яке часто застосовують під час обчислювань, напр., визначаючи закінчення ітераційного процесу за заданою точністю та ін. Особливо слід відзначити модифікацію операції порівнювання для виявлення рівності значень двох величин, за допомогою якої реалізують умовний перехід за точним збігом слів, визначають збіг символів при обробці нечислової інформації та ін. Операцію порівнювання виконують збільшеного в блоках арифметичного пристрою, призначеного для додавання — віднімання з поданням деяких елементів, які визначають, впроваджуючи реалізовувану модифікацію операції порівнювання. Порівнювання на рівність, на відміну від інших модифікацій, доцільно виконувати схемою, об'єднуючи порівнювані величини порозрядно на елементах збігу. Елементарна операція порівнювання на рівність у схемній реалізації має велике значення при організації операцій посимвольної обробки нечислової інформації. Порівнювання символів на рівність, що в осн. змі-

стом операції посимвольного перегляду рядків, виконується при цьому з макс. швидкістю, а апаратні затрати при цьому незначні. Елементарні операції порівнювання символів і посимвольних асувань забезпечують розпізнавання символів та впорядкування послідовностей їх, тобто ці операції є необхідними для універсальної обробки нечислової інформації.

Передавання слова полягає у зчитуванні слова з однієї комірки пам'яті, пересилання його і записування в іншій комірці. Використовується ця операція при обміні інформацією між пристроями ЦОМ, а також у процесі перероблення інформації в пристрої. Якщо в даних пристрої інформація подається однаково, обмін інформацією між ними полягає в операції передавання слів. У пристроях, що перетворюють інформацію, напр., в операційному пристрої, застосовують і прямо, й інверсне передавання слів. Напр., якщо від'ємне число задано зворотним кодом знаслідок інверсного передавання слова, якому відповідає це число, одержують додатне число, що подається прямим кодом, і навпаки. З одного регістра в інший можна передавати не все слово, а якусь його частину — так можна виділяти абсолютне значення, знак, порядок, дріб або цілу частину числа і т. д. Отже, інформація при передаванні може перетворюватися.

Порозрядне додавання слів за модулем  $m$  полягає в додаванні за модулем  $m$  цифр відповідних розрядів слів. Ця операція є частиною операції додавання чисел, отже, входить до складу арифм. операцій. Порозрядне додавання слів за модулем належить до числа елементарних операцій, що є функціональною частиною відповідної машинної операції.

Порозрядне доповнювання слів слідує перетворенню код кожного розряду слова на зворотний. При двійковому кодуванні послідовність розрядів слова  $x_0x_1x_2 \dots x_n$  перетворюється на послідовність  $\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$ , де  $\bar{x}_k = 1 - x_k$ , тобто виконується інвертування слова; операція порозрядного доповнювання може бути функціональною частиною машинної операції інвертування. Порозрядне доповнювання всіх цифр числа (без розряду знака) перетворює прямий код від'ємного числа на зворотний і, навпаки, є частиною операції додавання в машинах з представленням чисел у прямому коді. Модифікації операції інвертування використовують, щоб змінити знак числа; для цього при представленні чисел у прямому коді виконують інвертування знаків; для чисел, представлених у зворотному коді, інвертують усі розряди слова.

Порозрядне логічне додавання двох слів полягає в двійковій відповідності розрядів цих слів. Логічне додавання входить до числа елементарних операцій, що є функціональною частиною

відповідної машинної операції. Логічне додавання можна використовувати для модифікації кодів команд і чисел. Напр., за допомогою логіч. додавання можна записати нову адресу на очищене адресне поле команди. Для цього виконують логічне додавання слова команди з очищеним адресним полем і слова, що містять нову адресу в частині, яка відповідає очищеному полю команди, і нулі — в решті розрядів слова.

Порядок логічне множення двох слів полягає в кон'юнкції відповідних розрядів цих слів. Логічне множення є функціональною частиною відповідної машинної операції. Користуючись логіч. множенням, можна виділити будь-яку частину слова. Напр., можна виділити порядок або мантису числа, будь-яку адресу або код операції в слові команди тощо. Для виділення будь-якої частини слова використовують набір з одиницями у тих розрядах, які має бути виділено, і з нулями — в решті розрядів.

Типові Е. с. над а. реалізують у блоках *НОМ* типовах.

Лит. Глушкова В. М. Синтез цифрових автоматів. М., 1982 [бібліогр. с. 484—489]. Рубинчик З. І. Елементарні операції в загальної машинних. К., 1986 [бібліогр. с. 299—301].

І. П. Онуков.

**ЕЛЕМЕНТАРНІ ТЕОРІЇ.** Е. т.  $T_h(K)$  класу  $K$  алгебричних систем сигнатури  $\Omega$  наз. сукупність усіх замкнених формул логіки предикатів першого ступеня сигнатури  $\Omega$ , істинних на всіх системах з класу  $K$ . Якщо клас  $K$  складається з однієї системи  $\mathfrak{A}$ , Е. т. цього класу наз. Е. т. системи  $\mathfrak{A}$ . Дві алгебр. системи однієї сигнатури наз. елементарно еквівалентними, якщо їхні Е. т. однакові. Е. т. класу  $K$  наз. повною, якщо будь-які дві  $K$ -системи елементарно еквівалентні. Під Е. т. сигнатури  $\Omega$  розуміють Е. т. якогось класу алгебр. систем сигнатури  $\Omega$ . Рівносильне означення: Е. т. сигнатури  $\Omega$  — це несуперечлива сукупність замкнених ф-л сигнатури  $\Omega$  логіки предикатів 1-го ступеня, замкнених щодо висновків. Е. т.  $T$  сигнатури  $\Omega$  наз. рекурсивно (скінченно) аксіоматизованою, якщо існує така рекурсивна (скінченна) сукупність  $T_0 \subseteq T$ , що  $T$  є множина всіх висновків з  $T_0$ , які вивають собою ф-л логіки предикатів 1-го ступеня сигнатури  $\Omega$ . Якщо  $\Sigma$  — сукупність замкнених ф-л логіки предикатів 1-го ступеня сигнатури  $\Omega$ , то  $\text{Mod}(\Sigma)$  позначають клас усіх моделей для  $\Sigma$ , тобто всіх алгебр. систем сигнатури  $\Omega$ , на яких справджуються всі ф-л з  $\Sigma$ . Клас  $K$  алгебр. систем сигнатури  $\Omega$  наз. аксіоматизованим, якщо існує така сукупність  $\Sigma$  замкнених ф-л сигнатури  $\Omega$ , що  $K = \text{Mod}(\Sigma)$ . В цьому разі  $\Sigma$  наз. сукупністю аксіом для  $K$ . Клас  $K$  тоді й тільки тоді можна аксіоматизувати, коли  $K = \text{Mod}(T_h(K))$ . Е. т.  $T$  сигнатури  $\Omega$  наз. розв'язною, якщо існує алгоритм, який за довільною замкненою ф-лою логіки предикатів 1-го ступеня сигнатури  $\Omega$  визначає, чи належить ця формула теорії  $T$ , чи ні. Наприклад, клас щільно лінійно впорядко-

ваних множин без найменшого й найбільшого елементів аксіоматизовний, його Е. т. розв'язна, будь-які дві системи з цього класу елементарно еквівалентні, отже, Е. т. цього класу повна; крім цього, Е. т. розгляданого класу скінченно аксіоматизовна. Клас скінчених циклічних груп не є аксіоматизованим, але його Е. т. розв'язна і, значить, рекурсивно аксіоматизовна. Є приклад скінченно аксіоматизованих нерозв'язних Е. т. Це Е. т. зрул, кілець, полів тощо. Проте повна рекурсивно аксіоматизовна теорія обов'язково є розв'язною. Тому, щоб довести розв'язність  $T$ , досить довести, що ця теорія повна. Існує кілька методів доведення повноти.

Метод категоричності зводиться до зазначення, що Е. т., яка є категоричною в певній нескінченній потужності й не має скінчених моделей, обов'язково повна. Теорію наз. категоричною в потужності  $\alpha$ , якщо всі її моделі потужності  $\alpha$  ізоморфні. Напр., Е. т. ялічбр замкнених полів фіксованої характеристики рекурсивно аксіоматизовна й категорична в кожній лічбовій потужності, а скінчених моделей не має. Тому ця теорія повна й розв'язна. Зокрема, розв'язною є Е. т. полів комплексних чисел. Було одержано необхідні й достатні умови для того, щоб повна теорія, яка має нескінченну модель, була категорична в лічбовій потужності. Кажуть, що дві ф-л тієї самої сигнатури, що й сигнатура теорії  $T$ , еквівалентні в теорії  $T$ , якщо ці ф-л мають однакові вільні змінні й для будь-якої моделі  $\mathfrak{A}$  теорії  $T$  і будь-якого способу приписування як значень цих вільних змінних елементів моделі  $\mathfrak{A}$  обидві ці формули або водночас справджуються при цих значеннях невідомих, або обидві вони хибні. Умови лічбової категоричності: для кожного  $i$  існує скінченна кількість ф-л з  $i$  вільними змінними  $x_1, \dots, x_n$  така, що кожна ф-ла відповідної сигнатури з вільними змінними  $x_1, \dots, x_n$  еквівалентна в теорії  $T$  одній із цих ф-л. Але найважливіший результат, що його одержано досі при вивченні категоричних теорій, — це така теорема: повна теорія скінченної чи лічбової сигнатури, категорична в одній лічбовій потужності, категорична і в будь-якій іншій лічбовій потужності.

Для доведення повноти Е. т. використовують і метод модельної повноти. Систему  $\mathfrak{A}$  сигнатури  $\Omega$  наз. елементарною підсистемою системи  $\mathfrak{B}$  тієї самої сигнатури, якщо  $\mathfrak{A}$  є підсистемою системи  $\mathfrak{B}$  і для будь-якої ф-ли  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  логіки предикатів 1-го ступеня сигнатури  $\Omega$  (з вільними змінними  $x_1, \dots, x_n$ ) та будь-яких  $a_1, \dots, a_n$  з  $\mathfrak{A}$  і істинності  $\Phi(a_1, \dots, a_n)$  в  $\mathfrak{A}$  впливає істинність  $\Phi(a_1, \dots, a_n)$  в  $\mathfrak{B}$ . Е. т. наз. модельно повною, якщо для будь-яких  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \text{Mod}(T)$  з того, що  $\mathfrak{A}$  є підсистемою  $\mathfrak{B}$ , випливає, що  $\mathfrak{A}$  є елементарною підсистемою  $\mathfrak{B}$ . Виявляється, що модельно повна теорія, яка має мінім.



модель, є повною. Мінімальною наз. таку модель  $E$ , т. є, яка ізоморфно вкладається в будь-яку іншу модель цієї  $E$ . т. Повною є й така модельно повна теорія, всі моделі якої універсально еквівалентні. Універсально еквівалентними наз. алгебр. системи сигнатури  $\Omega$ , на яких справджуються одні й ті ж самі універсальні ф-ли, а універсальною наз. формулу у випередженій формі, що не містить кванторів існування. Використовуючи техніку модельної повноти, можна довести повноту й розв'язність теорії дійсно замкнених полів, окрема поля дійсних чисел і деяких інших  $E$ . т. Проте до 1965 майже не було відомо інших прикладів розв'язних  $E$ . т. класів полів, крім наведених вище. В 1965 було відкрито серію класів полів з розв'язною  $E$ . т., зокрема, було доведено розв'язність  $E$ . т. поля  $p$ -адичних чисел. Але найважливішим є результат про розв'язність  $E$ . т. скінченних полів і полів липків. З результатів, що не стосуються полів, слід згадати теорему про розв'язність  $E$ . т. упорядкованих абелевих груп і теорему про розв'язність  $E$ . т. абелевих груп.

З розвитком теорії складності алгоритмів з'явилася можливість оцінювати складність алгоритмів і для розв'язних  $E$ . т. З цього погляду алгоритми, що їх одержують за допомогою теоретико-множинних методів, не ефективні. Ефективнішими є алгоритми, які одержують, безпосередньо перетворюючи ф-ли (метод елімінації кванторів). Такі алгоритми, напр., виявляються адекватного примітивного рекурсивними. Перші доведення розв'язності  $E$ . т. (для теорії натуральних чисел, для  $E$ . т. алгебрично замкнених полів фіксованої характеристики і для дійсно замкнених полів тощо) одержано саме методом елімінації кванторів. Цим методом будують алгоритми і для  $E$ . т. поля  $p$ -адичних чисел.

Теорію нерозв'язних  $E$ . т. розробляв амер. математик А. Тарський у 40-х роках, хоч нерозв'язність логіки предикатів 1-го ступеня й нерозв'язність арифметики натуральних чисел доведено ще раніше. Осн. знаряддя в теорії Тарського — метод інтерпретацій.  $E$ . т.  $T$  наз. істотно нерозв'язною, якщо нерозв'язною є можна теорія  $T_1 \supseteq T$  тієї самої сигнатури. Теорію  $T$  сигнатури  $\langle \mathcal{P}^{(2)} \rangle$  наз. відносно елементарно визначуваною або відносно інтерпретовною в теорії  $T_1$  сигнатури  $\Omega$ , коли існують такі ф-ли  $\Omega$ ,  $x_1, \dots, x_2$ ,  $\Psi(x, y; x_1, \dots, x_2)$  сигнатури  $\Omega$ , що для кожної або відповідно для якоїсь моделі  $\mathfrak{M}$  теорії  $T$  можна знайти таку модель  $\mathfrak{B}$  теорії  $T_1$ , яка має таку властивість. Можна знайти такі  $a_1, \dots, a_2 \in \mathfrak{B}$ , що множина  $A = \{b \in \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \models \Psi(b, a_1, \dots, a_2) \text{ істинне в } \mathfrak{B}\}$  разом з так визначеним на  $A$  предикатом  $P$ , що  $P(x, y)$  істинне тоді й тільки тоді, коли  $\Psi(x, y; a_1, \dots, a_2)$  істинне в  $\mathfrak{B}$ , утворює алгебр. систему, ізоморфну системі  $\mathfrak{M}$ . Це визначення поширюється й на теорії  $T$  довільної скінченної сигнатури. Виявляється, що коли істотно нерозв'язна скінченно аксіоматизована теорія  $T$  відносно ін-

терпретовна в теорії  $T_1$ , то  $T_1$  теж нерозв'язна. Можливість ефективного застосування цієї теореми Тарського пов'язана з існуванням скінченно аксіоматизованої істотно нерозв'язної підтеорії арифметики натуральних чисел. Цим методом доведено нерозв'язність  $E$ . т. багатьох класів кілець, полів раціональних чисел та інших класів полів.

Великий інтерес викликали теорії класів скінченних систем. Перший результат — нерозв'язність  $E$ . т. класу скінченних моделей. Важливим є результат рад. математика А. І. Мальцева (1909—68) про нерозв'язність  $E$ . т. скінченних груп. Для вивчення  $E$ . т. класів скінченних систем і в деяких інших випадках теорема Тарського напевно чи може бути корисною. Було запропоновано новий метод. Теорія  $T$  сигнатури  $\Omega$  невідокремна, якщо не існує рекурсивної множини ф-л сигнатури  $\Omega$ , яка містить усі тотожні істинні намічені ф-ли сигнатури  $\Omega$  і сама міститься в  $T$ . Виявляється, що коли невідокремна теорія  $T$  відносно елементарно визначувана в теорії  $T_1$ , то теорія  $T_1$  теж невідокремна. Це зауваження дало змогу довести невідокремність багатьох теорій. Як  $T$  при цьому зручно брати  $E$ . т. всіх скінченних бінарних предикатів,  $E$ . т. скінченних симетричних бінарних предикатів і подібні  $E$ . т.

Лит.: Ершов Ю. Л. [та ін.]. Элементарные теории. — Успехи математических наук, 1965, т. 20, № 4. М. А. Тайцлин.

**ЕЛЕМЕНТНА СТРУКТУРА ЦОМ** — сукупність принципів побудови елементарних компонент цифрової обчислювальної машини, що переробляють інформацію на різних операціях над цифрами (в елементарних машинах), і елементарних операцій над словами як систем операцій над цифрами (в блоках машини).

До осн. понять  $E$ . а. ЦОМ звичайно належать такі: 1) представлення цифр в елементах і з'єднувальних колах; 2) система зв'язків між елементами; 3) система елементарних операторів; 4) функціонально-схемні особливості елементів системи; 5) способи виконання елементарних операцій над словами (в типових блоках і автоматах керуючих); 6) гол. конструктивно-технологічні риси елементарної бази. Ці поняття належать лише до елементарних завг. призначення, а яких будують комбінаційні схеми й нагромаджувальні схеми; на елементи спец. призначення, напр. такі, що формують елементи в запам'ятовувальній пристрої, ці поняття не поширюються. Зазначені поняття поділяють на дві осн. групи: перша (об'єднує перші три поняття) визначає особливості виконання операцій над окремими цифрами, друга — над упорядкованими послідовностями цифр. При цьому способи виконання елементарних операцій над словами істотно залежать від виконання операцій над окремими цифрами.

За способом представлення цифр розрізняють елементи без запам'ятовування й елементи з запам'ятовуванням. В елементах без запам'ятовування знімання інформації зі входу елемента призво-

диль до відновлення початкового стану носія, в елементах з запам'ятовуванням такого відновлення не стається. До елементів без запам'ятовування належать, напри., елементи з застосуванням транзисторів (транзисторно-діодні елементи), а до елементів з запам'ятовуванням — елементи з застосуванням феритів як носіїв інформації (феритно-діодні та феритно-транзисторні елементи). Тут мають на увазі запам'ятовування інформації внаслідок змінування стану носія без штучного затримування його в зміненому стані за допомогою позитивного зворотного зв'язку, коли відмикають вхідний сигнал. Тобто мають на увазі запам'ятовування інформації в комбінаційних елементах або в комбінаційних частинах тригерів (застосовуючи їх як окремі запам'ятовувальні елементи). На відміну від елементів з носієм без запам'ятовування, елементи з запам'ятовувальним носієм, що їх наз. *логічними затримувальними елементами* (ЛЗЕ), потребують примусового поревернення носія в першій стан після чинд час кожного такту змінювання інформації. А це потребує фіксованого часового поділу між тактами записування та зчитування. Зазначена класифікація має дуже істотне значення для побудови логічних схем. Усереднені цих класів визначають підкласи способів фіз. представлення цифр в елементах, які визначають електронно-тех. особливості побудови схем.

Представлення цифр у з'єднувальних колодах здійснюється інформаційними сигналами. Розрізняють інформаційні сигнали імпульсні й потенціальні. В основу такої класифікації покладено різницю в причині утворення фронту (спаду) сигналу. Якщо спад сигналу настає без зовн. діяння на елемент, який утворює цей сигнал, то сигнал вважають імпульсним (напр., вихідні сигнали динамічних тригерів), якщо ж спад сигналу виникає внаслідок зовн. діяння на елемент, який утворює його, то сигнал вважають потенціальним (напр., вихідні сигнали статичних тригерів). Залежно від того, чотіями яких типів вихідних сигналів в елементах, їх класифікують на потенціальні, імпульсні й потенціально-імпульсні, причому елементи ЛЗЕ, як правило є імпульсними, а серед решти елементів трапляються елементи всіх трьох зазначених типів.

Система зв'язків між елементами визначає принципи передавання й перетворення інформації в комбінаційних і нагромаджувальних схемах. У комбінаційних схемах є два способи передавання інформації від елемента до елемента — асинхронний і синхронний (і відповідні цим способам класи комбінаційних систем). Використовуючи асинхронний спосіб, інформацію передають природним шляхом, тобто без спец. зовн. діяння. В синхронному передаванні інформацію між будь-якими елементами передають спец. синхронізуючими сигналами. Якщо уявити, що процес перетворення інформації в комбінаційній схемі поділено на окремі дискретні такти, то асин-

хронний спосіб передавання зумовлює однотактний процес перетворення, а синхронний — багатотактний (як правило, дво- або тритактний процес стосовно до одного каскаду схеми). Для ЛЗЕ єдино можливим способом передавання є синхронний (див. *Елементні структури на логічних затримувальних елементах*). У нагромаджувальних схемах у кожному елементарному циклі перероблення інформації відбувається зчитування інформації з тригерів, перетворення її комбінаційними елементами й запам'ятовування перетвореної інформації на тригерах. Для задоволення умов правильного обміну інформацією між запам'ятовувальними й перетворювальними елементами потрібно, щоб перемикання тригерів відбувалися тільки після перших двох (адебільшого суміщувальних) дій. У зв'язку з цим у нагромаджувальних схемах існують два осн. способи обміну інформацією між тригерами й комбінаційними елементами — однотактний і двотактний. В однотактному способі обміну інформацією рознесення в часі несумісних дій елементарного циклу здійснюється, як правило, за допомогою радіотех. затримок перемикавання тригерів, при двотактному — введенням проміжних стійких станів схеми за допомогою додаткових тригерів і синхронізуючих сигналів. Вибір тих чи ін. способів передавання інформації здійснюється залежно від способу представлення цифр, і відповідно до цього визначають три типові системи зв'язків і відповідно до них — осн. класи Е, с, ЦОМ: а) потенціально-імпульсний, оснований на використанні виключно потенціальних інформаційних сигналів; як правило, в ній реалізують асинхронний спосіб передавання та двотактний обмін інформацією відповідно в комбінаційних і нагромаджувальних схемах; б) потенціально-імпульсний систему зв'язків, оснований на використанні потенціальних та імпульсних інформаційних сигналів, причому тут, як правило, на виходах тригерів утворюються лише потенціальні сигнали, але перемикаються тригери лише імпульсними сигналами; на відміну від попередньої системи, тут застосовують (завдяки використанню затримок імпульсних сигналів) однотактний обмін інформацією з нагромаджувальних схем; в) імпульсну систему зв'язків, оснований на використанні лише імпульсних інформаційних сигналів; на відміну від обох попередніх, у ній використовують переважно синхронний спосіб передавання, а в модифікації цієї структури на ЛЗЕ — лише синхронний.

Система елементарних операторів характеризує принципові якісні особливості логіч. фі-ції, реалізовуваних системою елементів. Кожний елементарний оператор можна одержати в елементного комбінаційного оператора (логіч. фі-ції, що її реалізують комбінаційним елементом чи комбінаційною частиною запам'ятовувального елемента), як-що виконати спеціальну процедуру, в результаті якої кількість аргументів фі-ції змен-

шується до мінімуму, зберігаючи всі її властивості. Напр., елементарному оператору  $x_1x_2x_3 \vee x_4x_5x_6 \vee x_7x_8x_9$  відповідає елементарний оператор  $y_1y_2 \vee y_3y_4$ . Збереження в елементарних операторах як ще принципів функціональних властивостей елементарних операторів дає змогу виділити відносно невелику кількість типів (функціонально повних або надлишкових) систем елементарних операторів, яким відповідає дуже багато систем елементарних операторів, застосовуваних у більшості відомих ЦОМ. Здебільшого це такі системи елементарних операторів:

- 1)  $x \vee y, xy, \bar{x}$       2)  $x \vee y, xy, \bar{xy}$
- 3)  $x \vee y, \bar{xy}$       4)  $x \vee y, \bar{x} \vee \bar{y}$
- 5)  $\bar{xy}$
- 6)  $\bar{xy} \vee \bar{yz}$       7)  $\bar{xy} \vee \bar{yz} \vee \bar{zx}$

Характерно, що зазначені системи можна використовувати в елементарних структурах, які істотно відрізняються за фіз. принципами побудови елементів, але найкраще пристосовані для якого-небудь певного принципу реалізації. Разом з тим використання однієї системи елементарних операторів у фізично різних системах елементів зумовлює аналогічну побудову логіч. схем на базі цих систем.

Функціональні особливості системи елементів визначаються системою елементарних операторів і способами реалізації їх, у т. ч. способами побудови тригерів і відновлення інформаційних сигналів.

Оператори елементів, що являють собою логіч. ф-ції, реалізовувати елементами, поділяють на елементи комбінаційні оператори й елементи запам'ятовувальні оператори як твердо визначені композиції комбінаційних операторів. Перші з них являють собою базисні *перемикальні функції*, суперпозиціями яких є будь-які перемикальні ф-ції, реалізовані в машині в процесі переробки інформації, основою елементарних комбінаційних операторів є вибрані *оператори елементарні*. Другі являють собою ф-ції, виконувані тригерами (незалежно від способу реалізації їх). Ці оператори виражаються у вигляді суперпозицій елементарних комбінаційних операторів тобто у відповідних операторних формах з урахуванням виду інформаційних сигналів. Проте незалежно від операторних форм є два види елементарних запам'ятовувальних операторів — з роздільними входами та з лічбовим входом. Виразити вони в скороченій диз'юнктивній нормальній формі відповідно так  $\delta_{t+1} = \delta_t \cdot \bar{y}_0 \vee y_1 \cdot \bar{y}_0$ ;  $\delta_{t+1} = \delta_t \cdot y \vee \bar{\delta}_t \cdot \bar{y}$ , де  $\delta_t$  і  $\delta_{t+1}$  — стани (одичинний вхід) тригера в момент часу  $t$  й наступний обчислюваний момент дискретного часу  $(t+1)$ ,  $y_1, y_0$  і  $y$  — вхідні сигнали (одичинний, нульовий і загальний) тригера з роздільними входами та з лічбовим входом відповідно. Логічні вирази для реальних тригерів одержують на основі наведених виразів внаслідок пере-

кладу їх на операторну форму з урахуванням характеристик інформаційних сигналів і часових співвідношень між ними. Способи реалізації елементарних операторів залежать від обраного способу представлення цифр в елементах і колах зв'язку. Як правило, тригери реалізуються на основі тих самих принципів представлення цифр, що й комбінаційні елементи.

Система елементів реалізує функціонально повний набір елементарних операторів, має в своєму складі підсилювальні елементи, щоб підтримувати потрібні характеристики (відновлення) інформаційних сигналів, що разом забезпечує її тех. повноту (я розумінні можливості реалізувати будь-яку схему). Залежно від того, є чи немає підсилення вихідного сигналу, комбінаційні елементи відповідно поділяють на елементи з пасивним і активним виходами (тригери обов'язково мають активний вихід); останнім часом більше застосовують комбінаційні елементи з підсилювальним вихідним сигналом. Проте підсилення вихідного сигналу не акцлює доцільності використання спец. елементів з особливо потужним підсиленням.

Згідно з наведеними характеристиками, є такі класи типових Е. с. ЦОМ та їх пристроїв для переробки інформації: *потенціально-елементна структура ЦОМ на напівпровідниках і інтегральних схемат*; *потенціально-імпульсна елементна структура на напівпровідниках*; *імпульсна елементна структура на напівпровідниках*; Е. с. ЦОМ на феритах; Е. с. ЦОМ на параметронах. В обчисл. машинах найпоширеніші три перші класи Е. с. ЦОМ, з яких тепер надають перевагу потенціально-імпульсним і асинхронним (особливо Е. с. ЦОМ на інтегральних схемат).

Способи виконання елементарних операцій над словами поділяють на осн. підгрупи характеристик операцій у *дешифраторах, регістрах, лічильниках і суматорах* різних функціональних типів. Нижче наведено лише осн. характеристики типових блоків ЦОМ (див. *Блоки ЦОМ типові*). Дешифратори 1-го роду (з виведенням усіх конститuent) за способами побудови поділяють на лінійні, прямокутні й пірамідальні, з яких обширнішим багатоваріантним класом є прямокутні дешифратори. Дешифратори 2-го роду, що визначають діапазон числових азначень дешифрованого слова, поділяють в основному на дешифратори, які реалізують дужкову та бездужкову форми запису утворених функцій. Регістри як блоки, що виконують операції проміжного оперативного зберігання, передавання та зсування слів, поділяють за способами приймання й видавання та за видами й способами перетворення (зсування) інформації. Лічильники як регістри, що виконують операції лічби одиниць інформації (прості, реверсивні односторонні та реверсивні двосторонні), за способами представлення станів поділяють на лічильники з позиційним, з не-

позиційним, з одиничним і з комбінованим кодуванням. Усереднені їх також є відповідна деталізація на варіанти суматорів як блоків, що виконують елементарну операцію додавання (утворення суми числових значень двох слів), розрізання їх на словами побудови на послідовні й паралельні. Серед послідовних суматорів виділяють суматори з затримкою та запам'ятовуванням переносу й з різними модифікаціями комбінаційної частини. За способом побудови паралельні суматори поділяють на щільні: нагромаджувальні, комбінаційні та комбінаційно-нагромаджувальні, а в середині їх, як і в лічильниках, — суматори з наскрізними, групами й частково-груповими переносами. З порозрядних логік, операцій гол. можна виокремити логік. додавання та логік. множення. Реалізація їх здійснюється на спец. комбінаційних схемах, а записанням результатів у регістри обчисл. пристроїв, або цілком на його компонентах, використовуваних для арифм. операцій (див. *Операції над числами*).

Відповідно до типу й наведених характеристик способів виконання елементарних операцій над словами проводять і класифікацію типових блоків обчисл. машин, причому кожний варіант якого-небудь типу блоку визначається комбінацією значень деяких характеристик. Вибір цієї комбінації здійснюють актичним з вимог, що їх ставлять до блоку й параметрів системи елементів, на основі якої він реалізується.

Гол. конструктивно-технологічні риси елементної бази саме й є тією характеристикою Е. с. ЦОМ, за якою можна класифікувати покоління електронних обчислювальних машин: елементи на електронних лампах (1-е покоління), на напівпровідниках як окремих деталях (2-е покоління) та таких самих компонентах, але в мікромініаторному виконанні (проміжне між 2-м і 3-м поколіннями), на інтегральних напівпровідникових елементарних схемах (3-е покоління), на таких самих схемах, але з середнім рівнем інтеграції (проміжне між 3-м і 4-м поколіннями), на такого ж роду схемах, але з високим рівнем інтеграції (великих інтегральних схемах — ВІСх, 4-е покоління), на оптико-електронних ВІСх з використанням світлових (а не електр.) інформацийних сигналів (5-е покоління). Три останні типи елементів є перспективними (щодо стану на 1970 р.). Кожному з них властиві специфічні особливості конструктивної реалізації схем і технології виготовлення їх. Покоління обчисл. машин, що їх класифікують за характеристикою їхніх елементних структур, разом з тим істотно різняться не лише за елементними, а й алгоритм. структурами.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифрових автоматів. М., 1962 [бібліогр. с. 464-463]. Вавилов В. Н., Портнов Г. П. Синтез схем електронних цифрових машин. М., 1963 [бібліогр. с. 437-474]. Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1964 [6 биогр. с. 293-301]. Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М., 1968 [бібліогр. с. 324-328]. Ричардс Р. К. Элементы и схемы цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1961.

З. Л. Рабинович.

**ЕЛЕМЕНТНИЙ СИНТЕЗ ЦОМ** — структурний синтез автоматів і їхніх композицій у базисі заданої системи елементів. На стані Е. с. ЦОМ із заданих елементів створюють працездатні схеми суматорів, дешифраторів, регістрів, лічильників, схем автоматів керування та ін. Е. с. ЦОМ, який задовольняє задані вимоги швидкодії та надійності при мінім. структурних витратах, поділяють на такі етапи: 1) вибір варіанта структури з урахуванням особливостей елементної бази; 2) одержання аналітичних функцій, які описують роботу заданої схеми в якійсь стандартній (канонічній) формі; 3) записування аналітичних виразів у заданій системі операторів елементних; 4) забезпечення потрібної якості фіз. характеристик схеми; 5) порівнявання різних варіантів схеми.

Вибір канонічної форми вираження функцій визначається наявністю досить ефективних методів її одержання, а також наявністю добре вивчених і простих методів мінімізації відповідно до обраних критеріїв. Істотно впливає на вибір канонічної форми, а також на методи її мінімізації задана функціонально повна система елементних операторів. У зв'язку з цим у кожному конкретному випадку застосування тієї чи іншої функціонально повної системи елементів виникає задача мінім. представлення логік. рівнянь, які описують роботу заданої схеми, за допомогою заданої системи елементних операторів. Можливі два способи розв'язування цієї задачі. Перший полягає в довольному способі переведення якогось стандарту (на зокрема, булевого запису) в опорний операторний і мінімізації цього запису. При цьому приймають за в. домі алгоритми мінімізації функцій, зображених в операторному вигляді. Другий спосіб передбачає використання відомих (напр., у булевій алгебрі) методів мінімізації функцій і наступного переведення їх в операторний запис. Тепер використовують обидва способи переведення, але загального алгоритму мінімізації для доволних систем операторів не сформульовано і, загалом кажучи, невідомо, чи є він.

Існуючі методи мінімізації блоків ЦОМ тимових порівняно прості і зручні для формалізації, проте методи синтезу доволних схем з пам'яттю, які містять звичайно ще й істотну комбінаційну частину, розроблено значно меншою мірою. Виділення для складної схеми її комбінаційної й запам'ятовувальної частини дає змогу відповідно використати при Е. с. ЦОМ можливості розвинутого апарату синтезу комбінаційних схем. При цьому задачу мінімізації витрат апаратури розв'язують шляхом роздільної мінімізації для комбінаційної та запам'ятовувальної частини.

У зв'язку з розвитком елементно-технологічної бази ЦОМ, який веде до дальшого укрупнення модулів елементів, вирівнювання вартості елементів пам'яті (тригерів) та комбінаційних схем, підвищення ролі стандартних, методів Е. с. ЦОМ із зазначеним вище поділом на комбінаційні й запам'ятовувальні частини стають неефективними. В цих умовах

мінімізація елементів пам'яті вже не відіграє домінуючої ролі і, дещо надмірно збільшуючи кількість елементів пам'яті при модуванні, можна настільки спростити комбінаційну частину, що загальні витрати апаратури, виражені умовними одиницями (напр., вартістю реалізації входу логіч. схеми), будуть мінімальні (з урахуванням нерозподілу завантажень, зменшення потрібної кількості входів та ін.) Т. ч., треба розв'язувати задачу оптимізації схеми в цілому, а не задачу мінімізації її складових частин. При цьому оптимізації для типових блоків ЦОМ досягають одержанням чисельних формул, які виражають витрати апаратури і швидкодію залежно від заданих вимог, що їх ставлять до вузла й параметрів його елементної структури, і вибором оптимального варіанта після зіставлення всіх одержаних варіантів. Щодо оптимізації схем доволених автоматів, то в цьому разі використовують методики, які полягають у зображенні автомата у вигляді композиції простіших автоматів (компонент композиції), які вибирають, виходячи з властивостей кодованого автомата. Як такі компоненти часто використовують регістрові структури (див. *Автомат регістровий*), які (з поступовим збільшенням розрядності) переходять у роль стандартних моделей на основі сучас. технологій. Має технологічність реалізації схем ЦОМ досягають, мінімізуючи кількість типів вузлів, а також забезпечуючи повторюваність і однорідність структури. В цьому аспекті дуже перспективний Е. с. ЦОМ на основі однорідних структур (див. *Обчислювальні середовища*).

Практичне виконання Е. с. ЦОМ схем на 3-му і 4-му етапах ґрунтується на використанні ідеї надання логіч. операторам спрощених фіз. залежностей, які дають можливість враховувати якість фіз. характеристики схем. У цьому разі крім логіч. характеристик, можливому елементному операторові задають якісної й вагової характеристики. Якісна характеристика включає в себе набір залежностей між фіз. значеннями входних сигналів і сигналів на виході оператора, а також різницю між часом встановлення входного та вихідного сигналів. Вагова характеристика є функцією вартості, габаритів, струму служби й інших, подібних цим, факторів. Усі ці характеристики використовують для забезпечення потрібної якості схем, а також для порівняння схем з погляду заданого критерію. На 3-му етапі Е. с. ЦОМ потрібне узгодження роботи елементів та вузлів у часі. Оскільки асинхронні схеми в ЦОМ використовують порівняно мало, нажте розглянемо приклади побудови синхронних структур.

Характерна проблема, що постає при реалізації схеми сучас. елементами, — це усунення можливих порушень роботи через явище ризику й гонок. Явище ризику (*ризик проблема*) полягає в можливості неправильного виконання схеми через неоднозначність виникнення сигналів на прямому й інверсному виходах *злам атома* елемента під час його перемикання з одного стану в інший.

Риск за зміною  $x_i$  буває, якщо при зміні значення аргумента  $x_i$  ф-ція  $f$  не змінює свого значення, але при підстановці в конкретне зображення цієї функції як для аргумента, так і для інверсії одного й того самого значення, вона змінює своє значення. Якщо с ризик за відновленням аргументу при зміні значення ф-ції з «0» на «1», то кажуть про ризик у нулі, а при зміні з «1» на «0» — про ризик в одиниці.

Коли булеву ф-цію зображено довільною *диз'юнктивною нормальною формою*, немає ризику в нулі, а коли її зображено довільною *кон'юнктивною нормальною формою*, — тоді ризик в одиниці. Зображення булевих ф-цій у вигляді скорочених диз'юнктивних нормальних форм і скорочених кон'юнктивних нормальних форм вільні від ризику по всіх змінних. Щоб усунути небезпеку ризику, необхідно, щоб елемент, на входах якого він відбувається, мав більше як два входи, причому сигнал хоча б на одному з них при перемиканні мався незмінним, дорівнюючи нулю для елементів «1» та дорівнюючи одиниці для елементів «АБО».

Виникнення явища гонок (*закон проблеми*) пов'язане з тим, що зміна стану реальних елементів пам'яті відбувається неодноразово або через випадковий розкид часу їх перемикання, або через неоднаковість комутаційних затримок і довжин ланцюжків елементів на входах елементів пам'яті. Елемент, який виграє ці гонки, раніше за інші змінить свій стан і через коло зворотного зв'язку змінить сигнали на входах інших елементів, а це порушить потрібну послідовність функціонування автомата. Усунути такі небажані наслідки можна не лише підраховуючи й точно узгоджуючи час проходження сигналів в часом перемикання запам'ятовувальних елементів, а й за допомогою протигонкового модування станів автомата.

Розв'язання питання часового узгодження значно спрощується при введенні спец. тактувального генератора, який забезпечує примусове тактування; при цьому автомат стає автоматом синхронним. Відносно просто розв'язується проблема гонок і проблема узгодження переходів автомата з одного стану в інший при використанні пристрою багатозадачного (зокрема, двофазного) тактування й подвоєння кількості запам'ятовувальних елементів (див. *Елементна структура ЦОМ, Потенціальна елементна структура ЦОМ*).

Для правильного функціонування пристрою необхідно, щоб автомат, потрапивши в заданий стан під впливом входного сигналу  $x_i$  а достатньо великою тривалістю, лишався у ньому, доки надійде наступний сигнал  $x_i$ , а не продовжував переходити з цього стану в новий доти, доки не скінчиться дія сигнал. Таку незалежність функціонування пристрою забезпечує використання двофазного тактування, бо перехід у будь-які два сусідні стани тактують різні фази синхронізації, а ці фази є відповідно рознесеними в часі. Розроблено

кілька варіантів використання двофазного тактування для схем автоматів на потенціальних елементах, зокрема, деякі такі методи вимагають подвоєння не кількості запам'ятовувальних елементів, а числа станів, а це можна забезпечити, додавши один тригер. Щоб не допустити гонок у менш явочних конструкціях, ніж варіант з подвоєнням числа тригерів, необхідно виконати таку умову для будь-яких двох «зв'язаних» пар станів  $a - b$  і  $c - d$  («зв'язаність» пар станів  $a - b$  і  $c - d$  виконується за умови  $a \neq b \neq c \neq d$ , причому  $a, b, c, d$  — стани автомата, відповідні умові, що існує, принаймні, один вхідний сигнал з автомата, за якого  $ax = b, cx = d$ ) достатньо, щоб коди цих станів  $A, B, C, D$  були такі, щоб у них була хоча б одна змінна кодування, яка набуває в кодах  $A$  та  $B$  значення, протилежного її значенню в кодах  $C$  та  $D$ . Отже, безпеки гонок немає, коли набори  $A$  й  $B, C$  й  $D$  не зв'язані хоча б за однією двійковою змінною.

Рациональне часове узгодження служить не тільки забезпеченню надійності, а й часто дає змогу істотно скоротити витрати апаратури. Напр., якщо можлива частота роботи елементів істотно більша за потрібну частоту вступу коду в  $n$ -розрядному зсувному регістрі на потенціальних елементах, то послідовно за кілька тактів можна виконати зсув коду і зменшити потрібну кількість допоміжних тригерів а відповідно до формули  $n = \frac{n}{b-1}$ , де

$b$  — число тактувальних фаз. Характерно, що тут схема регістра не змінюється, а змінюється лише підсилювач зовнішніх шин.

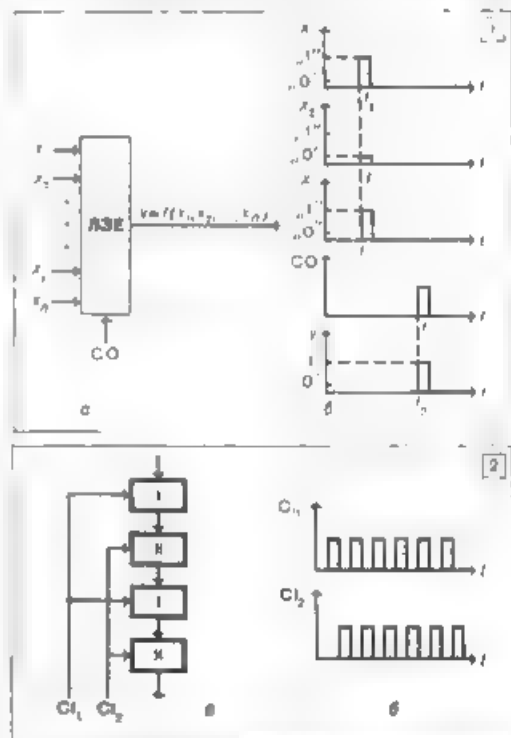
В цілому задача часового узгодження схем ЦОМ досить широка й складна, розв'язування її фактично починається ще на етапі об'єднання мікропрограм, а завершується на етапі тех. синтезу з урахуванням монтажних з'єднань тощо. Щоб поліпшити й прискорити перевірку виконання часового узгодження схем ЦОМ, розробляють спец. мови та програми для ЦОМ (див. Автоматизація проектування ЦОМ, Інженерні методи синтезу дискретних автоматів).

Лит. Глушков В. М. Синтез цифрових автоматів М., 1982 (бібліогр. с. 464-469). Рабинович З. Л., Калитонюк Ю. В. Общее прикладное решение комбинационных схем. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1963, т. 3, № 4. Мацевитый Л. В., Денисенко Е. Л. О кодировании внутренних состояний некоторых многотактных устройств. «Кибернетика», 1968, № 1. Рабинович З. Л. Элементарные операции с вычислительных машинах М., 1966 (бібліогр. с. 299-301). Рабинович З. Л., Калитонюк Ю. В., Комукаев Э. И. Методика кодирования состояний конечных автоматов с точки зрения минимизации аппаратных затрат. В кн.: Теория дискретных автоматов Рига, 1967.

В. М. Новал, Е. Г. Комукаев.

**ЕЛЕМЕНТИ СТРУКТУРИ НА ЛОГІЧНИХ ЗАТРИМУВАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТАХ** — система елементів цифрової обчислювальної машини, в якій кожний елемент, крім логічних функцій, виконує й функцію запам'ятовування. Сигнал на виході логічного затримувального елемента (ЛЗЕ) в момент подавання

вхідних сигналів не виникає. Для формування вихідного сигналу на спец. вхід ЛЗЕ подається сигнал опитування (СО). На мал. 1 показано умовне позначення ЛЗЕ і часову діаграму його роботи. Значення вихідного сигналу («0» або «1») в момент часу  $t_1$  задовольняє від значень величин вхідних сигналів у момент часу  $t_2$  та виду булевої функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що її реалізує ЛЗЕ. Отже, у функціональному відношенні ЛЗЕ схожий на логічні елементи без запам'ятовування.



1. Умове позначення логічного затримувального елемента (а) та часова діаграма його роботи (б).  
2. Двотактна схема передавання інформації, логічний елементом (а) та часова діаграма його роботи (б).

При передаванні інформації в схемах, виконаних на ЛЗЕ, виникає необхідність жорсткої синхронізації сигналів. Найчастіше така синхронізація здійснюється за двотактною схемою. При цьому всі ЛЗЕ поділяють на дві групи, кожною з яких керують синхронізуючі імпульси (СІ) з проміжком у часі на півперіод (мал. 2). У першому такті інформація в момент надходження  $СІ_1$  передається від елементів 1-ї групи до елементів 2-ї групи, а в момент надходження імпульсів  $СІ_2$  — від елементів 2-ї групи до елементів 1-ї групи. Аналогічно будують тритактні схеми передавання інформації: елементи поділяють на три групи, кожною з яких керують синхронізуючі імпульси, з проміжком у часі на  $1/3$  періоду. Двотактні схеми передавання інформації найчастіше застосовують в елементних

структурах ЦОМ на феритах, а тритактні — на параметронах. Однотактних схем передавання інформації практично не застосовують, бо при побудові їх треба вживати спец. заходів для селективного (односпрямованого) передавання сигналів. Крім того, між кожною парою з'єднаних між собою ЛЗЕ потрібно включити спец. схеми затримки, які забезпечують розподіл у часі інформаційних і опитувальних (синхронізуючих) сигналів.

В елементних структурах на феритах застосовуються логічні елементи таких типів: елемент «АБО», який реалізує булеву функцію  $f(x, y) = x \vee y$ , елемент заборони, що реалізує булеву функцію  $f(x, y) = \bar{x}y$ , та елемент, що реалізує константу «1» (генератор одиниць). Одиниця («1») в елементних структурах на феритах звичайно подана імпульсом певної полярності, а нуль («0») — відсутністю імпульсу. В елементній структурі на параметронах «0» та «1» кодуються гармонічними коливаннями, що відрізняються за фазою на  $\pi$  радіан. При такому кодуванні цифр функція «інверсія» реалізується переключенням входних індукцій ЛЗЕ. Основним ЛЗЕ в елементній структурі на параметронах є мажоритарний елемент, що реалізує булеву функцію  $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ . Крім того, в цій системі елементів широко застосовують універсальні ЛЗЕ, які реалізують операції Пірса і Шеффера.

Л. М. Навилов, Е. Н. Портов, Г. П. Синтез схем електронних цифрових машин. М. 1987 (64 с, ілюстр. с. 42, 410). Рабинович, Я. І. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 (бібліотеч. с. 290-301).

Ю. А. Бузунов, С. М. Власов.

**ЕЛІОНІКА** — розділ електроніки, що вивчає явища, пов'язані зі взаємодією електронних та іонних пучків з речовиною і застосуванням цих пучків у технологічних процесах виробництва електронних приладів. Е. розвивається в двох осн. напрямках — фізичному й технологічному. Предметом її фіз. напрямку є теор. й експериментальні дослідження механізму проникнення прискорених електронів та іонів у речовину, ефективності перетворення їхньої кінетичної енергії на тепло, розподілу потужності, яка виділяється в об'ємі, кінетики теплових процесів у зоні взаємодії пучків з речовиною і дуже близько від цієї зони, фіз.-хім. змін в опромінених ділянках матеріалу тощо. Завданнями технологічного напрямку є теоретична і практична розробка методів дослідження електронно- та іонно-променевих процесів для обробки матеріалів — локального випаровування їх, легування напівпровідників, мікронапівування та мікронапівування, полімеризації мономерів тощо.

Перші відомості про спробу використати гострофокусовані електронні та іонні пучки як знаряддя для мікрообробки матеріалів з'явилися у 1950-х роках. Систематичному глибокому й інтенсивному вивченню можливостей такого застосування в електронній пром-сті в усіх розвинених країнах великою мірою сприяв прогрес у галузі мікроелектроніки

(див. *Мікроелектронна елементна база обчислювальної техніки*) на початку 1980-х років.

Циїлими особливостями електронного променя є те, що в ньому можна одержати високу й легко регульовану густину енергії й що його практично вимити можна спрямувати в будь-яку точку оброблюваної поверхні. Стажаються з речовиною, електрони, що швидко летять, віддають їй більшу частину своєї кінетичної енергії, спричиняючи в ній різноманітні зміни. Найменший переріз електронного пучка в зоні взаємодії з опромінюваним матеріалом — порядку мікрометра і навіть його часток а густина потужності в пачі досягає  $10^9 \text{ ат/см}^2$ . Електроннопроменеві технологічні операції виконуються у високому й надвисокому вакуумі. В сучасній мікроелектронній техніці електронний промінь використовують при виготовленні р-л переходів, резисторів, виготовлення діодів, транзисторів деяких типів, для з'єднання компонент мікрохвильової техніки. Виготовляючи р-л переходи, монокристалічні ділянки платівки з попередньо нанесеними на них паром легуючої речовини опромінюють так, щоб у місці електронного бомбардування напівпровідник розплавлявся на задану глибину і щоб з нього в розплаві проникла легуюча домішка. Після вимкнення пучка розплавлена зона остигає й кристалізується, а напівпровіднику утворюється мікронапівпровідник певного типу провідності, а на межі цієї зони — р-л перехід. На одній платівці можна виготовити сотні й тисячі таких компонентів. Відтвореність характеристик таких мікродіодів, розташованих на всій поверхні, дуже висока. Щоб одержати резистори, на діелектричний чи напівпровідниковий підклад з ізолюючим шаром спочатку у вакуумі наносять провідну плівку, а потім егравірують її променем, роблячи смужки потрібних розмірів. За допомогою електронного променя зручно виготовляти й мініатюрні плівкові конденсатори у вигляді, напр., введених один в один «гребінців» тощо.

Особливе місце в Е. посідає електронна літографія, яка характеризується високою роздільною здатністю. Використання електронного пучка замість пучка світла для експонування фоторезистивних матеріалів дає змогу створювати моноболокові функціональні вузли, які складаються з тисяч ідентичних логіч. елементів, геом. розміри яких становлять частки мікрометра. При цьому відпадає потреба у трудомісткому процесі виготовлення масов. полегнується завдання автоматизації процесів електр. з'єднання окремих мікросхем у функціональні вузли. Іоннопроменеві способи обробки застосовують для очищення поверхонь, травлення плівок, селективного нанесення тонких шарів матеріалу на потрібні ділянки підкладу, легування напівпровідників тощо. Легування здійснюється, напр., на нагріванням, а шляхом прямого заглиблення розіганих полем іонів домішки в кристалічні ґратки. Завдяки цьому можна значно точніше регулювати кількість введених домішок, глибину їхнього залягання та розміри

ри зони легування. Через те, що в зоні опромінювання немає високих т-р, різко зменшується кількість небажаних сторонніх домішок, які звичайно дифундують у нагріту зону напівпровідника; з іонного пучка не потрібні домішки видаляє фокусуюча система.

Методи Е. тепер активно вивчають, застосування їх у технології розширюють. Практичне здійснення цих методів тісно пов'язане з успіхами в розробці електроннопроменевого та іоннопроменевого обладнання і з досягненнями в побудові сучасних кіберн. засобів керування. Для цілей Е. створено чимало пром. пристроїв і автоматизованих агрегатів. В СРСР розроблено елітронні пристрої кількох типів (напр., «ЭДУРО») і високоєфективні керуючі системи (див. «Київ-67»).

Дит.: Кабанов А. Н. Современное состояние и перспективы развития электроннолучевых методов микрообработки. «Физика и химия обработки материалов», 1967, № 4. Вислідження в технології електронно-лучевих процесів. Персанга М., 1965, зупинити on electron beam techniques for microelectronics. «Microelectronics and reliability», 1965, v. 4, № 1.

В. П. Дермач.

**ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ СПОСОБІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** Говорячи про методи розв'язування тих чи інших диференціальних рівнянь у частинних похідних, звичайно мають на увазі найбільш методи, бо точні розв'язки вдається знайти дуже рідко, та й до того ж частіше це в замкненому вигляді, а у вигляді рядів, які треба ще підсумовувати. Одним з найпоширеніших методів наближеного розв'язування крайових задач для дифер. рівнянь є різницеві методи. Широке застосування цих методів зумовлюється їхньою універсальністю і порівняно простою реалізацією на ЕОМ (див. *Скінченно-різничні методи*).

Суть різницевих методів полягає ось у чому: для функції неперервної зміни аргументів заміняють дискретною множиною точок (вузлів), яку наз. сіткою; замість ф-ції неперервного аргументу розглядають ф-ції дискретного аргументу, що їх визначають у вузлах сітки і наз. сітковою функцією. Похідні, які входять у дифер. рівняння, і граничні умови апроксимують різницевими відношеннями; при цьому крайову задачу для дифер. рівняння замінює система алгебр. рівнянь (різницєва схема). Якщо початкова задача лінійна, то різницєва схема є системою лінійних алгебр. рівнянь. Якщо так одержана різницєва крайова задача розв'язка (може, лише на достатньо дрібній сітці, тобто сітці з густо розміщеними вузлами) і її розв'язок за безмежного здрібнювання сітки наближається (збігається) до розв'язку початкової задачі для диференціального рівняння, то одержаний на будь-якій фіксованій сітці розв'язок різницєвої задачі й беруть за наближений розв'язок початкової задачі.

Класичними представниками еліптичних рівнянь (див. *Диференціальні лінійні рівняння в частинних похідних класифікація*)

2-го порядку є: 1) рівняння Пуассона (Лапласа, коли  $f = 0$ )

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f;$$

2) рівняння з самоспрямленим оператором і змінними коеф.

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = -f.$$

Тут  $u \equiv u(x_1, x_2)$  — шуканий розв'язок,  $f \equiv f(x_1, x_2)$  — задані ф-ції (праві частини),  $k_1(x_1, x_2) \geq 0$ ,  $k_2(x_1, x_2) \geq 0$  — задані коеф. рівняння. Типовими крайовими задачами для еліптичних рівнянь 2-го порядку в обмеженій області  $G$  з границею  $\Gamma$  є: 1) перша крайова задача (задача з крайовими умовами Діріхле), коли на границі  $\Gamma$  задано шуканий розв'язок  $u(x_1, x_2)|_{\Gamma} = g(x_1, x_2)$ ; 2) друга крайова задача, коли на границі  $\Gamma$  задано лінійну комбінацію похідної шуканого розв'язку по кон-

нормалі і самого розв'язку  $\left( \frac{\partial u}{\partial N} - \mu u \right)|_{\Gamma} = -g$ , де оператор похідної по конормалі задано

$$\frac{\partial}{\partial N} = k_1 \cos(\mu, x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + k_2 \cos(\mu, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}, \text{ а } \mu \text{ — напрям внутр. нормалі до } \Gamma, \mu(x_1, x_2) \text{ — заданий коеф. Якщо } k_1 \equiv k_2 \equiv 1, \text{ то похідна по конормалі збігається з похідною по нормалі. Коли } \mu = 0, \text{ то граничні умови наз. умовами 2-го роду (умовами Неймана), а саму задачу — другою крайовою задачею.}$$

Якщо область  $G$ , в якій треба знайти розв'язок рівняння, є прямокутником із сторонами, паралельними координатним осям, то сітку на  $G$  найприродніше взяти множиною точок перетину двох сім'ей прямих  $x_1 = x_1^{(i)}$  і  $x_2 = x_2^{(j)}$ , де  $i_1$  набуває всіх цілочисельних значень від 0 до  $N_1$ , а  $i_2$  — від 0 до  $N_2$ . Числа  $x_1^{(i)}$  підпорядковані умові  $x_1^{(i)} < x_1^{(j)}$  при  $i_1 < i_2$ ,  $x_2^{(i)} = 0$  і  $x_2^{(N_2)} = l_2$  (зважаємо, що прямокутник обмежено прямими  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = l_2$ ). Множину точок перетину зазначених прямих, розташованих всередині прямокутника  $G$ , наз. множиною внутр. вузлів і позначають через  $\omega$ . Множину точок перетину, розміщених на границі  $\Gamma$  прямокутника  $G$ , наз. множиною граничних вузлів і позначають через  $\gamma$ . Об'єднання  $\omega$  й  $\gamma$  позначають  $\omega$ . Якщо в області  $G$  границя  $\Gamma$  криволінійна, то сітку на ній можна ввести тим самим способом, але подія множини вузлів на внутрішній й граничній став менш очевидною і залежить від наступних способів апроксимації рівняння й граничних умов. Як сітку на  $G$  можна взяти й довільну скінченну множину точок в  $G$ , але тоді в подальшому при



апроксимації рівняння й граничних умов виникнуть додаткові труднощі. У випадку описаної вище прямокутної сітки  $\omega$  сіткову функцію  $h_{\alpha}^{(i_{\alpha})} = h_{\alpha}(x_{\alpha}^{(i_{\alpha})})$ , задану співвідношенням  $h_{\alpha}^{(i_{\alpha})} = x_{\alpha}^{(i_{\alpha})} - x_{\alpha}^{(i_{\alpha}-1)}$ , наз. кроком сітки  $\omega$  в напрямі  $x_{\alpha}$  в точці  $x_{\alpha}^{(i_{\alpha})}$ . Ф-ція

$$h_{\alpha}^{(i_{\alpha})} = \frac{h_{\alpha}^{(i_{\alpha})} + h_{\alpha}^{(i_{\alpha}+1)}}{2} \text{ задає середній крок}$$

сітки в напрямі  $x_{\alpha}$ . Якщо  $h_1^{(i_1)} \equiv h_1$  і  $h_2^{(i_2)} \equiv h_2$ , тобто якщо кроки сітки не залежать від координат, то сітку наз. рівномірною.

Найуживанішою апроксимацією рівняння Пуассона на рівномірній сітці є п'ятиточкова апроксимація виду  $\Delta_{hy} = y_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2} = -f(x_1, x_2)$ , де  $y_{x_1} = [y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2)]/h_1$  — ліве різницеве відношення в напрямі  $x_1$ ,  $y_{x_1} = [y(x_1 + h_1, x_2) - y(x_1, x_2)]/h_1$  — праве різницеве відношення в напрямі  $x_1$ , а  $y_{x_1 x_1} = (y_{x_1})_{x_1} = 2$ -е симетричне різницеве відношення в напрямі  $x_1$ ;  $y_{x_2}$ ,  $y_{x_2 x_2}$  визначаються аналогічно. При такій апроксимації можна рівняння містить значення шуканого розв'язку в п'яти вузлах сітки  $\omega$ . Коли шуканий розв'язок рівняння Пуассона має неперервні частинні похідні по  $x_1$  і  $x_2$  до 4-го порядку, то похибка зазначеної апроксимації  $\psi = \Delta_{hy} + f$  є величиною  $O(h_1^2 + h_2^2)$ . Для рівняння Пуассона на рівномірній сітці часто використовують дев'ятиточкову апроксимацію виду  $\Delta_{hy} = \Delta_{hy} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{x_1 x_1 x_1} = -\psi$ , де  $\psi(x_1, x_2) =$

$$= f(x_1, x_2) + \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} + \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}. \text{ Якщо}$$

шуканий розв'язок має неперервні похідні до 6-го порядку, то похибка апроксимації цієї схеми на розв'язках рівняння Пуассона  $\psi' = \Delta_{hy} + \psi$  є величиною  $O(h_1^4 + h_2^4)$ . Коли до того ж сітка  $\omega$  квадратна, тобто  $h_1 = h_2 = h$ , і шуканий розв'язок має неперервні похідні до 8-го порядку, то схема  $\Delta_{hy} = -\psi'$ , де  $\psi'(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) + h^4 \times (\Delta^2 f + 28 f / \partial x_1^2 \partial x_2^2) / 360$  має похибку апроксимації  $O(h^4)$ . На нерівномірній сітці  $\omega$  апроксимація рівняння Пуассона має вигляд  $\Delta_{hy} = y_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2} = -f$ , де  $y_{x_1} =$

$= [y(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}) - y(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})] / h_1^{(i_1)}$  є лівим різницевою відношенням у напрямі  $x_1$  з поділом на середній крок. Рівняння зі змінними коеф. зазначеного вище виду на нерівномірній сітці  $\omega$  апроксимують так:  $\Delta y = (a_1 y_{x_1})_{x_1} + (a_2 y_{x_2})_{x_2} = -f$ , де коеф.

$a_1$  і  $a_2$  різницевої схеми виражено через відповідні коеф. диф. рівняння за ф-лами  $a_1(x_1, x_2) = h_1 \left( x_1 - \frac{h_1(x_1)}{2}, x_2 \right)$ ,  $a_2(x_1, x_2) =$

$= h_2(x_1, x_2 - \frac{h_2(x_2)}{2})$ . Граничні умови 1-го роду в розгляданому випадку прямокутної області, коли границі  $\Gamma$  сітки належить границі  $\Gamma$  відправної області  $G$ , можна апроксимувати точно:  $y(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$ . Апроксимація граничних умов 3-го роду для рівнянь Пуассона у випадку рівномірної сітки  $\omega$  виглядає так: а) якщо гранична точка  $(x_1, x_2)$  сітки не кутова й міститься на лівій границі прямокутника, то

$y_{x_1} + \frac{h_1 y_{x_1 x_1}}{2} - y_{x_2} = -g - \frac{h_1 f}{2}$ ; б) якщо гранична точка міститься на верхній границі прямокутника, то  $-y_{x_1} + \frac{h_1 y_{x_1 x_1}}{2} - y_{x_2} =$

$= -g + \frac{h_2 f}{2}$ ; в) якщо гранична точка міститься в лівому верхньому куті прямокутника, то  $(h_1 y_{x_1} - h_1 y_{x_1 x_1}) / (h_1 + h_2) - y_{x_2} = -g - \frac{h_1 h_2 f}{2(h_1 + h_2)}$ . На решті ділянок границі  $\Gamma$

граничні умови записують аналогічно. Відзначимо, що зазначена апроксимація граничних умов 3-го роду узгоджена з п'ятиточковою апроксимацією рівняння Пуассона, тобто має похибку  $O(h_1^2 + h_2^2)$ . Можна побудувати апроксимації зазначених граничних умов, узгоджені з дев'ятиточковими апроксимаціями рівняння Пуассона.

Для того, щоб записати різницеву апроксимацію 3-ї крайової задачі для рівняння Пуассона на нерівномірній сітці, використаємо оператори  $\Lambda_{\alpha}$ , які задає співвідношення

$$\Lambda_{\alpha} y = \begin{cases} y_{x_{\alpha} x_{\alpha}} & \text{у внутр. вузлах сітки в напрямі } x_{\alpha}; \\ 2y_{x_{\alpha}} / h_{\alpha}^{(i_{\alpha})} & \text{при } x_{\alpha} = 0; \\ -2y_{x_{\alpha}} / h_{\alpha}^{(N_{\alpha})} & \text{при } x_{\alpha} = l_{\alpha}. \end{cases}$$

Зазначена апроксимація має вигляд  $\Delta y = (A_1 + A_2)y = F$  для всіх точок сітки  $\omega$ . При цьому  $F = f$ , коли точка внутр.,  $F = f + 2g h_1^{(1)}$ , коли точка не кутова і міститься на лівій границі прямокутника і т. д.

Як уже відзначалося, різницевої схеми являють собою не що інше, як системи лінійних алгебр. рівнянь. Порядком системи тим вищий, чим дрібніша (густіша) сітка. Але точність схем залежить від величини кроків сітки, і вона тим більша, чим дрібніші кроки. Тому одержувані алгебр. системи звичайно

мають досить високий порядок. Для знаходження розв'язку цих систем, як правило, використовують ітераційні методи. Щоб успішно застосовувати їх, корисно знати мінім. й макс. власні значення матриці системи (див. *Власні значення і власні вектори матриць способи обчислення*) або оцінки їх знизу ( $\delta$ ) й зверху ( $\Delta$ ) відповідно. Наведемо означення оцінок для деяких задач, причому  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ ,  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ . В задачі на власні значення  $A_1 u(x_1) + A_2 u(x_2) = 0$ ,  $u(0) = u(l_1) = 0$ , де  $A_1$  — зазначений вище оператор зі змінним коеф.  $a_1$ , при будь-якому фіксованому  $x_2$  мінім. власне значення не менше від  $\delta = 8c_1/l_1^2$ , а макс. власне значення — не більше від  $\Delta_1 = 4C_1/\min_{x_1} A_1^2(x_1)$ .

Тут  $c_1$  — мінім. значення коеф.  $a_1$ , а  $C_1$  — макс. значення цього коеф. Аналогічні оцінки правильні і для власних значень оператора  $A_2$ . Якщо, зокрема,  $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$ , то  $\delta_1 = 8/l_1^2$ ,  $\Delta_1 = 4/\min_{x_1} A_1^2(x_1)$ . Якщо до того ж сітка за  $x_1$  рівномірна, то  $\Delta_1 = 4 \cos^2(\frac{\pi h_1}{2l_1})/h_1^2$ .

Оцінки для власних значень у випадку 3-ї крайової задачі виглядають істотно громіздкішими й тут їх не наведено.

Найпростішим ітераційним методом розв'язування задачі  $Au = -f$ ,  $u|_{\Gamma} = g$  є метод простої ітерації. Він полягає ось у чому беруть довільне початкове наближення  $y^0$ , яке задовольняє граничні умови  $y^0|_{\Gamma} = g$ , наступні наближення знаходять за ф-лою  $(y^{j+1} - y^j)/\tau = A y^j + f$ ,  $y^{j+1}|_{\Gamma} = g$ , де  $\tau = \frac{1}{\delta + \Delta}$  — ітераційний параметр. Щоб за допомогою цього методу зменшити початкову похибку в  $1/e$  раз, досить виконати  $j(e) = -\ln(1/e)/\ln[(\Delta + \delta)/\delta]$  ітерацій. Коли в задачі  $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$ ,  $l_1 = l_2 = 1$ ,  $A_1 = A_2 = A$ , то  $\tau = \frac{h^2}{4}$ ,  $j(e) = \frac{2}{\pi^2} \frac{\ln 1/e}{h^2}$ . Для задачі  $Au = -f$  метод — аналогічний. Швидкість збіжності цього методу дуже мала й зі зменшенням кроку сітки  $h$  швидко зменшується.

Узагальненням методу простої ітерації, який збільшує швидкість збіжності його, є ітераційний метод Річардсона (метод простої ітерації з чебишовським набором параметрів). Цей метод відрізняється від методу простої ітерації лише тим, що ітераційний параметр залежить від номера ітерації  $(y^{j+1} - y^j)/\tau_j = A y^j + f$ ,  $y^{j+1}|_{\Gamma} = g$ . Кількість ітерацій заздалегідь фіксована й дорівнює  $n$ . Ітераційний параметр  $\tau_j = \frac{2j+1}{2(\Delta + \delta) + (\Delta - \delta)\lambda_j}$ , де  $\lambda_j = \cos \frac{2j+1}{2n} \pi$ .

Щоб зменшити початкову похибку в  $1/e$  раз, досить виконати  $n \geq n_0(e) = \ln(2/e)/\ln(\sqrt{\Delta + \delta} + \sqrt{\delta})/\ln(\sqrt{\Delta - \delta})$  ітерацій. Коли  $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$ ,  $l_1 = l_2 = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$ , то  $n_0(e) \approx$

$\approx 21n(2e)/\pi h$ . Щоб обчислення були стійкими, необхідно змінити природний порядок використання ітераційних параметрів на такий ( $n = 2^p$ ,  $p$  — ціле);

а)  $n = 8$ : 0, 7, 3, 4, 1, 6, 2, 5;  
б)  $n = 16$ : 0, 15, 7, 8, 3, 12, 4, 11, 1, 14, 6, 9, 2, 13, 5, 10.

а)  $n = 32$ : 0, 31, 15, 16, 7, 24, 8, 23, 3, 28, 12, 19, 4, 27, 11, 20, 1, 30, 14, 17, 6, 25, 9, 22, 2, 29, 13, 18, 5, 26, 10, 21 (порядок використання ітераційних параметрів при інших  $n$  див. бібліографію).

Коли оператор  $(A_1 + A_2)$  задачі  $(A_1 + A_2)u = -f$  припускає поділ змінних, то ще більшу швидкість збіжності має метод змінних напрямів. Обчислення за

цим методом виконують за ф-лами  $y^{j+1/2} = -y^j/\tau_{j+1} = A_1 y^{j+1/2} + A_2 y^j$ ,  $y^{j+1}|_{\Gamma} = g$ .

$(y^{j+1} - y^{j+1/2})/\tau_{j+1} = A_1 y^{j+1/2} + A_2 y^j$ ,  $y^{j+1}|_{\Gamma} = g$ , де  $y^0$  — задане початкове наближення,  $y^{j+1/2}$  — допоміжне (проміжне) значення,  $\tau_{j+1} > 0$  — ітераційні параметри, від добору яких істотно залежить швидкість збіжності.

Коли, напри., нижні й верхні оцінки власних значень операторів  $A_1$  і  $A_2$  збігаються, тобто  $\delta_1 = \delta_2$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2$ , то ітераційні параметри  $\tau_j$  належить обчислювати за ф-лами  $\tau_j = 1/(V\delta_1\Delta_1\omega_j)$ , де при  $j=1, 2, \dots, [(n+1)/2]$

$\omega_j = q^{\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}} [1 + q^\sigma + q^{2\sigma}]/[1 + q^{1-\sigma} + q^{1+\sigma}]$ , а при  $j > [(n+1)/2]$   $\omega_j = \delta_1/\Delta_1$ .

Параметри  $\sigma$  і  $q$ , які входять у ф-ли, задаються співвідношеннями  $\sigma = (2j-1)/2n$ ,  $q = [1 - \sqrt{1 - \delta_1^2/\Delta_1^2}]/[2(1 + \sqrt{1 - \delta_1^2/\Delta_1^2})]$ . Для зменшення початкової похибки в  $1/e$  раз за допомогою цього методу достатньо виконати

$n > n(e) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{e} \ln \frac{4\Delta_1}{\delta_1}$  ітерацій. Коли, напри.,  $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$ ,  $l_1 = l_2 = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$ ,

то  $\frac{\delta_1}{\Delta_1} = \lg^2 \frac{\pi h}{2}$ . Метод змінних напрямів в описаному вигляді є одним з найшвидше збіжних ітераційних методів.

Щоб розв'язувати алгебр. системи, які одержують при застосуванні методу сіток, використовують і інші ітераційні методи, такі, як метод послідовної верхньої релаксації, двохступінчастий ітераційний метод, метод мінім. поправок у тій чи ін. формі тощо.

Лит. Канторович Л. В., Крилов В. И. Приближенные методы высшего анализа М., Л., 1962 [бібл.огр с. 698—708], Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем М., 1971 [бібл.огр с. 538—550], Назов В. Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пер. с англ. М., 1983 [бібл.огр с. 456—470]. В. Б. Амброс.

«ЭМИК-1» (электронна машина для вимірювання та обліковування твердих шкір) — перша в СРСР спеціалізована машина-автомат для вимірювання площі й товщини шкір. Створив її 1954 Укр. н.-д. ін-т шкіряно-взуттєвої пром-сті разом з Київським держ. ун-том. У ній дискретні елементи  $\Delta z$  і  $\Delta d$  вимірюваних величин площі  $z$  і товщини  $d$  перетворюються на електр. імпульси за допомогою електромагнітного генератора й мех. шупів, які взаємодіють з контактами. Машина складається з електромех. і лічильно-електронної частини, з'єднаних між собою кабелем. Вимірювання шкіри провадиться в процесі переміщення її транспортувальним механізмом, що складається з валів і роликів, які обертаються. «Э-1» виконує такі операції: вимірює площу й середню товщину шкіри, підраховує кількість і суму площ виміряних шкір, друкує на кожній шкірі й контрольний паперовий стрічку наслідки вимірювання й показники обліку (порядковий номер, площу, середню товщину, сорт, заводську марку, дату випуску та ін. дані).

Електронну частину машини побудовано на типових комірках цифрової обчисл. машини «Урал». Осн. характеристики машини: ширина робочого проходу — 1800 мм, швидкість транспортування шкіри — 350 мм/сек, межі вимірювання площі — 30 — 300 дм<sup>2</sup>, межі вимірювання товщини — 1 — 8 мм, похибка вимірювання товщини —  $\pm 0,1$  мм, продуктивність — 2500 шкір за 8 годин, споживана потужність — 1,5 кет. Серійно випускаються площевимірні машини IBM, які в варіанті «ЭМИК-1».

Літ. Патлюк Ю. С., Танцюра Н. А. Автомат для вимірювання площі й товщини кож. «Легкая промышленность», 1957, № 3.

М. А. Танцюра, Ю. С. Патлюк.  
**ЕМПІРИЧНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ** — наближене представлення функції розподілу ймовірностей випадкової величини, побудоване на основі вибірки скінченного обсягу. Е. ф. р. — це ф-ція розподілу  $F_n(x)$ , що визначається за допомогою *варіаційного ряду*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  вибірки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  незалежних спостережень випадкової величини з ф-цією розподілу  $F(x)$ , як

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_1^* \\ k/n & \text{при } x_k^* < x \leq x_{k+1}^* \\ 1 & \text{при } x > x_n^* \end{cases}$$

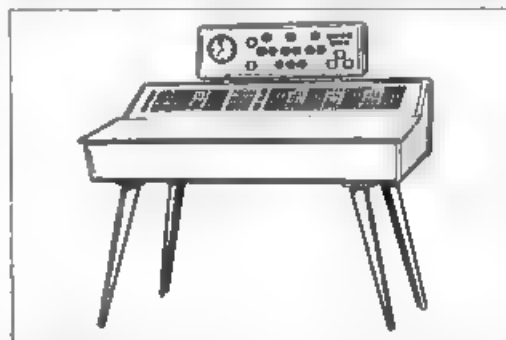
Е. ф. р. — проста оцінка ф-ції  $F(x)$ , вона має такі важливі властивості. Величина  $\Delta_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$  в імовірності 1 абігається до 0 при  $n \rightarrow \infty$  (теорема Гливенка). Якщо  $F(x)$  неперервна, то при відповідному нормуванні граничний розподіл величини  $\Delta_n$  має певний вигляд, не залежний від ф-ції

$F(x)$ , точніше  $P\left\{k\sqrt{\Delta_n} < x\right\} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \times$

$\times e^{-2k^2 x^2} = K(x)$ ,  $x > 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (теорема А. М. Колмогорова). Незалежність граничного розподілу від невідомої ф-ції  $F(x)$  дає змогу використовувати результат А. М. Колмогорова, перевіряючи гіпотези про те, що спостереження  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — це спостереження *випадкової величини* з ф-цією розподілу  $F(x)$  (див. *Статистична перевірка гіпотез*). Моменти Е. ф. р.  $F_n(x)$  наз. вибірковими моментами. Вони є незміщеними або асимптотично незміщеними й асимптотично нормальними оцінками відповідних моментів розподілу  $F(x)$ . Вибіркове математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ . Величини  $\bar{x}$  і  $s^2$  є часто використовуваними оцінками матем. сподівання і дисперсії розподілу  $F(x)$ .

А. Я. Дороговцев.

«ЭМРТ» (електронна машина для розрахунку тканин) — спеціалізована обчислювальна машина для визначення оптимального варіанту розкрою тканини на полотнища заданої довжини. Її створили Обчислювальний центр Київського держ. ун-ту й дослідно-конструкторське бюро Київського тресту швейної пром-сті. На базі експериментального зразка «ЭМРТ-1» в 1963 Київський а-д обчислювальних керуючих машин розробив серійний зразок «ЭМРТ-2» на напівпровідникових елементах (див. мал.). Особливістю алгоритму, що його реалізує машина, є те, що всю обчислювальну роботу зведено до алгебричного складання чисел у нагромаджувавальному суматорі без запам'ятовування проміжних результатів і одержаних раніше розв'язків. Розрахунок кусків тканини на полотнища заданої довжини



Спеціалізована обчислювальна машина «ЭМРТ-2».

ни для вистилів описує система діофантових рівнянь, які розв'язуються методом спрямованого перебору. В кожне рівняння підставляють усі величини й перевіряють, чи задовольняють вони рівняння. Машина автоматично відшукує найраціональніше поєднан-

ня довжини полотнищ настилів, які складаються ціле число разів у довжину куска, який треба розкрити. Розрахунок можна провадити одночасно на 8 осей і 3 додаткові настили. Кожен кусок тканини можна розрахувати не більше як на 3 осей настилів, і додатковий, що вводиться до розрахунку автоматично, й 3 додаткові, що їх вводить людина-оператор. Макс. довжина куска тканини, який треба розкрити — 199,99 м, осей настилів — 19,99 м, додаткових — 9,99 м. Введення й записування вихідних даних здійснюється за допомогою повноклавішної клавіатури. Результати розрахунку виводяться на панель сигналізації й фіксуються лампами цифрової індикації. Швидкість машини — 100 000 опер./сек (операції додавання), продуктивність під час розрахунку тканини на полотнищах (настилі) — не менш як 1000 м/год. Споживана потужність — 170 Вт. Економічна ефективність однієї машини становить 8—20 тис. крб. на рік.

Лит.: П а л а т о в Ю. С. Электронная вычислительная машина ЭМРТ-2 для расчета тканей в настильных «Двойная промышленность», 1984, № 4.

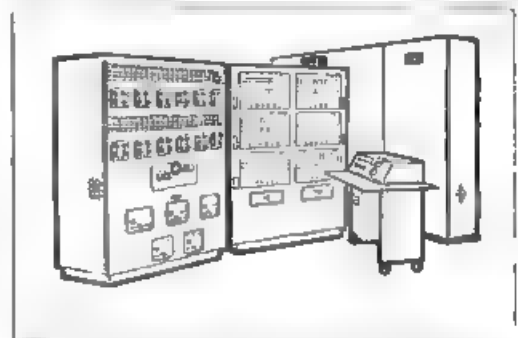
М. А. Танзоро, Ю. С. Палатого.

«ЭМСС» — электрическая либо электронная модель стрижневых систем, струн и пауз, в которой распределяются подобно до того, как распределяются звуки та переключения в первичной механической системе. Першу модель «ЭМСС-1» створено в СРСР 1958. У 1961—62 розроблено квазіаналогові електр. моделі «ЭМСС-7» та «ЭМСС-7М», які виготовляли серийно, а в 1964—65 — електронну модель «ЭМСС-8» («Альфа»), в якій використано метод моделювання по ділянках. Як схему-аналог ділянок в «ЭМСС-8» використано найпростішу й найекономічнішу альфа-аналогову модель стрижня з автомат. зрівноважуванням. При цьому частину невідомих моделюють струмами, завдяки чому істотно економляться під-

ування систем три- і п'ятичленних рівнянь буд. механіки та систем алгебр. рівнянь з довільною неособливою матрицею коеф. рівнянь Лапласа і Пуассона в скінченнорозмірній постановці. Короткі тех. характеристики моделей «ЭМСС» дано в табл.

Лит.: Пухов Г. Е. [та ін.]. Электрическое моделирование задач строительной механики. К., 1963 [Библиогр. с. 265—271]. Степалов А. Е., Токарева О. Н. Специализированная электронная вычислительная машина «Альфа» (ЭМСС-8). В кн. Аналоговая и аналого-цифровая вычислительная техника, в 2 т. М., 1968.

В. В. Брамской.



Специализированная аналоговая вычислительная машина «ЭМСС-8».

«ЭМУ», електронні моделюючі установки — сімейство установок, які призначено для розв'язування звичайних лінійних («ЭМУ-2», «ЭМУ-3») і нелінійних («ЭМУ-4», «ЭМУ-5», «ЭМУ-6», «ЭМУ-8», «ЭМУ-8а», «ЭМУ-10») диференціальних рівнянь до 24-го порядку, що описують процеси, які відбуваються в різних системах автоматичного регулювання й керування. Розроблено їх в Ін-ті автоматики й телемеханіки (Ін-т проблем керування) АН СРСР. «ЭМУ» — установи структурного типу, конструктивно оформлені у вигляді стондів або настільних портативних приладів (крім «ЭМУ-8» та «ЭМУ-8а», виконаних у вигляді окремих базових блоків, призначених для розв'язування дифер. рівнянь 2-го порядку). Перші 5 моделей «ЭМУ» можуть розв'язувати дифер. рівняння невисоких порядків, допускають спряження з апаратурою автомат. регулювання, живлення їх здійснюється від стабілізованих джерел. Допустима тривалість інтегрування для «ЭМУ-2» — 150 сек, «ЭМУ-8, -8а, -10» — 2000 сек. Споживана потужність становить відповідно 1,5 і 3,5 кка на один блок.

В «ЭМУ-8» та «ЭМУ-8а» лінійні розв'язуючі підсилювачі мають і нелінійні кола зворотного зв'язку для виконання нелінійних операцій. Така конструкція установок дає змогу при найменшій кількості типорозмірів блоків задовольняти різноманітні вимоги, не фіксуючи жорстко весь склад розв'язуючих елементів моделі. Комбінуючи кілька блоків, можна розв'язувати складні задачі з будь-яким співвідношенням лінійних і нелінійних розв'язуючих елементів. В установ-

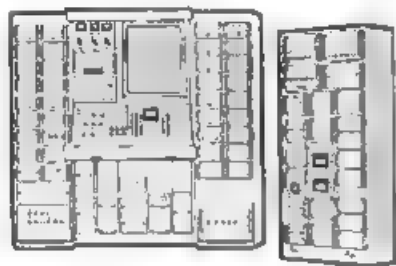
| Блоки й технічні характеристики    | «ЭМСС-7» | «ЭМСС-7М» | «ЭМСС-8» |
|------------------------------------|----------|-----------|----------|
| Схем-аналогів стрижнів             | 50       | 75        | 85       |
| Джерел струму                      | 50       | 50        | 106      |
| Джерел ерс                         | —        | 23        | 24       |
| Оперативних підсилювачів           | —        | —         | 48       |
| Похибка відносно помилки виміру, % | 5        | 8         | —        |
| Діапазон вимірювання:              |          |           |          |
| а) струм В, мА                     | ±1       | ±1        | ±1       |
| б) напруга, В                      | ±10      | ±10       | ±100     |
| Споживана потужність, кат          | 0,4      | 0,4       | 2,8      |

силювачі. «ЭМСС-8» побудовано за функціонально-блоковою ознакою. Складається вона із стояка моделювання стрижнів, стояка операційних підсилювачів та вимірювального блоку (мал.).

«ЭМСС-8» призначено для розв'язування задач статички, стійкості й динаміки різних конструкцій, її можна застосовувати й для розв'я-

ках використано розв'язуючі підсилювачі, які не потребують стабілізованого живлення, і напівпровідникові елементи (германієві діоди й тиритові опори).

«ЗМУ-10» (див. мал.) — багатосекційна установка, призначена для розв'язування задач, що трапляються при дослідженні складних систем автоматич. керування, в тому числі ядерних енергетичних установок, літаючих об'єктів та виробничих процесів. У ній є пристрій, який дає змогу розв'язувати задачі



Електронний моделюючий пристрій «ЗМУ-10».

в широкому діапазоні зміни величин і виконувати розв'язування в двох різних масштабах часу. В універсальному стояку є 48 розв'язуючих підсилювачів, електронні функціональні перетворювачі, електромеханічні можливники, стаціонарні напруг і часу, вузли контролю й керування, змінне навірне поле й необхідні блоки живлення. В спеціалізованому стояку, крім розв'язуючих підсилювачів, є ще блоки керування, запізнення, оптимізатор, блоки керування й блоки живлення. Встановлювання коефіцієнтів здійснюється автоматично. Коли викидається спеціалізований стояк, «ЗМУ-10» розв'язує задачі з змінним і постійним запізнюючим аргументом та задачі оптимізації. «ЗМУ-10» має широкий діапазон допусків основних розв'язуючих елементів. У ній є розв'язуючі підсилювачі з трьома паралельними каналами підсилювання з малим дрейфом нульового рівня й смугою пропускання в межах 50 кГц.

Лит.: Коган В. И. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., 1963 (68 стр. в. 494—505); Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1963 (Бібліотр. с. 179—181).

ЕНТРОПИЯ (грец. *en* — в і тропі — перетворення) — кількісна міра невизначеності ситуації. Термін і поняття Е. по-різному вводять і використовують у фізиці (термодинаміка) й кібернетичній (теорія інформації). У фізиці поняття Е. ввів Р. Клаузус (1822—88). В подальшому поняття Е. широко використовували в термодинаміці, зокрема для відкритих систем. Протікання реальних процесів завжди відбувається в бік збільшення Е. системи. Р. Больцман (1844—1906) дав, відповідно до статистичного трактування фізич-

них явищ, вираз для Е. ідеального газу через імовірності  $p_i$  знаходження молекули в  $i$ -й комірці фазового простору ( $H$  — функція Больцмана,  $k$  — стала Больцмана):

$$H = -k \sum p_i \log p_i; \quad \sum p_i = 1. \quad (1)$$

В інформаційній теорії поняття Е. ввів американський математик-інженер К. Шеннон (н. 1916). Тут Е. розглядають як міру невизначеності випадкової величини. Якщо задано скінченну множину символів  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  — значень випадкової величини  $\xi$  (повідомлень) з розподілом імовірностей  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , то Е.  $\xi$  (або Е. розподілу  $(p_i)$ , або Е. стаціонарного джерела повідомлень  $\xi$  як символ наз. величину:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \quad (2)$$

Основа логарифму визначає одиницю замірювання величини  $H$ . У теорії інформації прийнято одиницю біт, що відповідає величині  $H$  при  $n = 2$  і  $p_1 = p_2 = 1/2$  (рівноімовірний вибір з двох символів); це відповідає основі логарифму 2 в (2). В разі, коли  $n = 2$ , Е.  $H(\xi)$   $H(p, 1-p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$ , де  $p$  — ймовірність одного з двох значень випадкової величини  $\xi$ . Поведінку  $H(p, 1-p)$  як ф-ції  $p$  показано на мал. Величина  $H(p, 1-p)$  набуває макс. значення, що дорівнює одному бітові при  $p=1-p=0,5$ . Крива  $H(p, 1-p)$  симетрична відносно  $p=0,5$ .

Е. має такі властивості: 1)  $H$  — величина дійсна, повідомля; 2)  $H$  — величина, яка залежить від розподілу  $(p_i)$  і не залежить від алфавіту  $\{x_i\}$  (змісту повідомлень); 3)  $H$  — величина мінім. й дорівнює нулеві, якщо  $\xi = \text{const}$ , тобто всі значення  $p_i$  дорівнюють нулеві, крім одного, що дорівнює 1; 4)  $H$  — величина макс. й дорівнює  $\log n$ , якщо всі  $p_i = 1/n$ ; 5) для двох випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$  випадкової пари  $(\xi, \eta)$

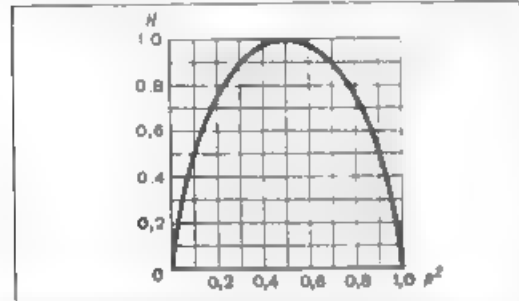
$$H(\xi, \eta) = H(\eta) + MH(\xi|\eta) = \\ = H(\xi) + MH(\eta|\xi) \leq H(\xi) + H(\eta), \quad (3)$$

де  $M$  — матем. сподівання;  $H(\alpha|\beta)$  — умовна Е.;  $H(\alpha|\beta) = - \sum p_{ij} \log p_{ij}$ ,  $(p_{ij})$  — умовний розподіл  $\alpha$  при фіксованому  $\beta$ . Рівності в (3) досягають лише в разі статистичної незалежності  $\xi$  і  $\eta$ .

Поняття умовної Е. використовують у теорії інформації, щоб визначати міру кількості інформації (або реальної швидкості передавання на символ). При цьому умовну ймовірність  $p_{ij}$  визначають як ймовірність того, що було передано символ  $i$ , якщо прийнято символ  $j$ . Умова Е.  $H(\xi|\eta)$  виявляється при цьому мірою залишкової невизначеності після одержання повідомлення  $\eta$  відносно значення переданого символу  $\xi$ . Рівня

$H = H(\xi) - H(\xi, \eta)$  (зменшення  $E$  за рахунок передавання, тобто від'єма  $E$  або негентропія) є мірою кількості інформації на символ під час передавання повідомлення.

Для поняття  $E$  немає прямого аналога у випадку недискретних випадкових величин. Справді, для будь-якої недискретної випадкової величини  $\xi$  легко побудувати при будь-якому  $\lambda$  дискретну величину  $\varphi(\xi)$ , яка є функцією від  $\xi$  так, щоб  $\varphi(\xi)$  набувала  $\lambda$  різних значень з однаковими ймовірностями, а тоді  $H(\varphi(\xi)) = \log \lambda$ . Якщо тепер визначити



Ентропія у випадку двох можливостей з ймовірностями  $p$  і  $(1-p)$

$E$  недискретної випадкової величини  $\xi$  так, щоб вона мала ось. властивості  $E$  дискретних випадкових величин (і навіть лише одну властивість  $g$ ), то з цього випливає, що  $H(\xi) = +\infty$ , бо при будь-якому  $\lambda$  повинна виконуватися нерівність  $H(\xi) \geq H(\varphi(\xi))$ . А при формальному узагальненні  $H$ -функції (2) для неперервної випадкової величини  $\xi$ , яка має щільність  $p(x)$  і набуває значення у  $n$ -мірному просторі  $X$ , приходять до величини  $h(\xi) = - \int_X p(x) \log p(x) dx$ , що й наз. диференціальною  $E$ .

У зарубіжній літературі величину  $h(\xi)$  часто наз.  $E$  неперервної величини  $\xi$ . Поняття диференціальної  $E$  необхідне при обчислюванні різних інформаційних характеристик (напр., таких, як інформаційна кількість, канали зв'язку, пропускна здатність, передавання інформації швидкість). Проте формальна подібність виразів  $E$  у дискретному випадку й диференціальної  $E$  у неперервному випадку часто призводить до того, що поняття дифер.  $E$  приписують фіз. зміст невизначеності випадкової величини, розподіл якої задається щільністю. Таке автоматичне перенесення властивостей неправомірне, це видно хоч би з того, що дифер.  $E$  деяких випадкових величин може бути від'ємною і навіть набувати значення як  $+\infty$ , так і  $-\infty$  (напр.,  $h(\xi) = \log(b/a)$  для величини  $\xi$ , рівномірно розподіленої на відрізку  $[a, b]$ , і тому  $h(\xi) < 0$ , якщо  $b - a < 1$ ). Кількість інформації та  $E$  мають ту властивість, що вони не змінюються при взаємно однозначному відображенні простору значень випадкових величин на деякі інші простори, бо ці величини є мірами невизначеності випадкових величин, які

не залежать від конкретної природи значень випадкових величин. Для дифер.  $E$  це не так. Можна показати, що коли функція  $\varphi(\cdot)$  задає взаємно однозначне відображення простору  $X$  значень випадкової величини  $\xi$  у якийсь простір  $Z$ , то

$$h(\varphi(\xi)) = h(\xi) + \int_X p(x) \log D(x) dx,$$

де  $p(x)$  — щільність розподілу  $\xi$ , а  $D(x)$  — якобіан перетворення. Зокрема, якщо перетворення  $\varphi(\cdot)$  є лінійним, то  $D(x) = D = \text{const}$ , і  $h(\varphi(\xi)) = h(\xi) + \log D$ . Використання дифер.  $E$  для обчислення зазначених вище інформаційних характеристик ґрунтується на тому, що всі вони є різницею диференціальних  $E$  відповідних величин, а ця різниця вже не змінюється при взаємно однозначних відображеннях просторів. Якщо  $\xi$  є  $n$ -вимірною випадковою величиною певної щільності розподілу, а  $\varphi(\xi)$  — її дискретизація з кроком  $\Delta x$ , то  $H(\varphi(\xi)) = -n \log \Delta x + h(\xi) + o(1)$  при  $|\Delta x| \rightarrow 0$ . Отже, величина  $H(\varphi(\xi))$  при  $|\Delta x| \rightarrow 0$  прямує до нескінченності. Це цілком узгоджується з тим, що  $H(\xi) = +\infty$ , однак  $h(\varphi(\xi)) \rightarrow \infty$  повільно і лише логарифмічно. Голов. член асимптотичного розширення залежить від розмірності простору  $n$ . Дифер.  $E$  задає наступний по порядку член асимптотичного розширення, що не залежить від  $\Delta x$ , причому тільки в цьому члені виявляється залежність від конкретного виду розподілу випадкової величини  $\xi$ . Тільки в цьому досягн. обмеженому значенні дифер.  $E$  можна трактувати як міру невизначеності випадкової величини  $\xi$ .

З інших властивостей диференціальної  $E$  можна відзначити те, що коли щільність  $p(x)$  величини  $\xi$  відрізняється від нуля в якійсь області обмеженого об'єму  $V$ , то  $h(\xi)$  буде максимальною і дорівнюватиме  $\log V$ , якщо

$$p(x) \text{ дорівнюватиме константі } \frac{1}{V} \text{ у цій області. Дифер. } E \text{ } n\text{-вимірною гауссівського розподілу з матрицею коваріації } [a_{ij}] \text{ дорівнює}$$

$$h(\xi) = \log(2\pi e)^{n/2} |a_{ij}|^{-1/2};$$

в одновимірному випадку  $h(\xi) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2}$ , де  $\sigma^2$  — дисперсія. При цьому з усіх розподілів з фіксованими моментами другого порядку гауссівський розподіл має максимальну дифер. ентропію.

Поняття  $E$  відіграє фундаментальну роль у теоремах Шеннона, які встановлюють осн. закономірності опт. кодування інформації реальних повідомлень під час передавання їх каналами зв'язку.

Лит. Хвицький А. Я. Поняття ентропії в теорії ймовірностей. «Збірник математических наук», 1953, т. 8, а з Гельфанд І. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М. Количество информации и энтропия для непрерывных распределений В. : Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958; Шеннон К. Математическая теория связи. В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М. 1963; Шамбатур П. Развитие и приложения понятия энтропии. Пер. с франц. М., 1967.

Р. Л. Добрушин, Л. І. Ожиганов, В. Н. Пряхин, О. М. Ракін.

**ЕНТРОПІЯ ЖИВІХ СИСТЕМ** — міра невизначеності розподілу станів біологічної системи, що визначається як

$$H = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i),$$

де  $H$  — ентропія,  $p(x_i)$  — ймовірність прийняття системою  $i$ -го стану з області  $x$ ,  $n$  — кількість станів системи. Е. ж. с. можна визначити відносно розподілу за будь-якими структурними чи функціональними показниками. Е. ж. с. використовують для розрахунку біологічних систем організації. Важливою характеристикою живої системи є умовна ентропія, що характеризує невизначеність розподілу станів біологічної системи відносно відомого розподілу:

$$H(x|y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log \left[ \frac{p(x_i, y_j)}{\sum_{j=1}^m p(x_i, y_j)} \right].$$

де  $p(x_i, y_j)$  — ймовірність прийняття системою стану з області  $x$  за умови, що еталонна система, відносно якої вимірюється невизначеність, приймає стан з області  $y$ , а  $m$  — кількість станів еталонної системи. За параметри еталонних систем для біосистем можуть виступати найрізноманітніші чинники й засамперед система змінних зовнішнього середовища (ресурсних, енергетичних чи організаційних умов). Міру умовної ентропії, так само, як і міру організації біосистем можна застосовувати для оцінювання еволюції живої системи в часі. В цьому разі еталонним є розподіл ймовірностей прийняття системою своїх станів у деякі попередні моменти часу. І якщо кількість станів системи при цьому лишатиметься незмінною, то умовна ентропія поточного розподілу  $p_t$  відносно еталонного розподілу  $p_0$  визначається так:

$$H(p_t/p_0) = - \sum_{i=1}^n p_t(x_i) \log \frac{p_t(x_i)}{p_0(x_i)}.$$

Е. ж. с., так само, як і ентропія термодинамічних процесів, тісно пов'язана з енергетичним станом елементів. У разі біосистем цей зв'язок є багатостороннім і важковиразуванним. Загалом зміни ентропії супроводять усі процеси життєдіяльності і є однією з характеристик при аналізі біолог. закономірностей.

**ЕНТРОПІЯ ПОВІДОМЛЕННЯ** за заданих умов точності — числова міра складності передавання повідомлення за заданих умов щодо якості його відтворення. В. п.  $H_W(\xi)$  за заданих умов точності відтворення повідомлення  $W$  наз. число

$$H_W(\xi) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}), \quad (1)$$

де  $\xi \in X$  — повідомлення, яке виробляє джерело повідомлень,  $\tilde{\xi} \in \tilde{X}$  — відтворюване повідомлення,  $I(\xi, \tilde{\xi})$  — інформації кількість,

що міститься в  $\tilde{\xi}$  відносно  $\xi$ . Нижню грань у  $\phi$ -і (1) беруть за всіма можливими парами випадкових величин  $\xi$  та  $\tilde{\xi}$ , що задовольняють задані умови точності  $W$  відтворення повідомлення. В найважливішому окремому випадку, коли умови точності  $W$  задають за доногого

$\phi$ -ції втрат  $\rho(x, \tilde{x})$  і вони полягають у вимові, щоб математичне сподівання максимальної або середньої втрати не перевищувало якоїсь константи  $\varepsilon > 0$ , Е. п.  $H_W(\xi)$  позначають  $H_\varepsilon(\xi)$  і називають  $\varepsilon$ -ентропією (або епсилон-ентропією) повідомлення (в американській літературі  $\varepsilon$ -ентропію часто наз. швидкістю створення повідомлення за заданою точністю  $\varepsilon$ ). Обчислювання Е. п.  $H_W(\xi)$  за заданих умов точності  $W$  є складною матем. задачею, який розв'язок якої в заг. випадку одержати не вдалося. Для деяких окремих дискретн. повідомлень (при деяких спец. способах задавання  $\phi$ -ції втрат  $\rho(x, \tilde{x})$ ) вдається точно обчислити  $\varepsilon$ -ентропію. Напр., для дискретних джерел, що виробляють повідомлення раз за одиницю часу,  $\varepsilon$ -ентропію  $H_\varepsilon$  за одиницю часу визначають як  $H_\varepsilon = -\inf I(\xi, \tilde{\xi})$ , де  $I(\xi, \tilde{\xi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(\xi_1, \dots, \xi_n, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$ , а  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  та  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots)$  — відповідно повідомлення, що його виробляє джерело, та відтворюване повідомлення, а нижню грань беруть за всіма можливими парами  $(\xi, \tilde{\xi})$  при всіх  $k$ , що задовольняють нерівності  $P(\xi_k \neq \tilde{\xi}_k) \leq \varepsilon$ .

Для дискретного стаціонарного джерела з незалежними компонентами  $\xi_1, \xi_2, \dots$  й однаково ймовірними значеннями (тобто для випадку, коли кожна компонента повідомлення  $\xi_k$  може набувати будь-якого з  $M$  можливих значень з однаковими ймовірностями  $\frac{1}{M}$ ) епсилон-ентропія

$$H_\varepsilon = \begin{cases} \log M + \\ + (1 - \varepsilon) \log(1 - \varepsilon) + \varepsilon \log \frac{\varepsilon}{M - 1}, \\ \text{якщо } 0 < \varepsilon < \frac{M - 1}{M}; \\ 0, \text{ якщо } \varepsilon > \frac{M - 1}{M}. \end{cases}$$

При  $\varepsilon = 0$   $\phi$ -ція  $H_\varepsilon$  набуває макс. значення  $\log M$  (що збігається з запальною ентропією будь-якої з випадкових величин  $\xi_k$ ) та, монотонно спадаючи зі зростанням  $\varepsilon$ , перетворюється на нуль при  $\varepsilon = \frac{M - 1}{M}$ . Для дискретного стаціонарного гауссівського джерела  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  при середньоквадратичному критерії точності  $\sup_k M(\xi_k - \tilde{\xi}_k)^2 \leq \varepsilon$

епсидов-ентропія

$$H_{\varepsilon}(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \log \max \left( \mu_{\xi}(\lambda), 1 \right) d\lambda,$$

де  $\mu_{\xi}(\lambda)$  — спектральна щільність стаціонарної гауссівської послідовності  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ , а  $\mu$  — корінь рівняння  $\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \min \left\{ \frac{1}{\mu}, \mu_{\xi}(\lambda) \right\} d\lambda = \varepsilon$ .

Оскільки точно обчислити  $\varepsilon$ -ентропію досить важко, істотний інтерес становить і одержання асимптотичних ф-л для неї при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , бо випадок малого  $\varepsilon$  відповідає більшій точності відтворення. Напр., рад. математик А. М. Колмогоров (в. 1903) запропонував ф-лу для  $\varepsilon$ -ентропії  $H_{\varepsilon}(\xi)$   $n$ -вимірної випадкової величини  $\xi$  з досить гладенькою щільністю розподілу  $p_{\xi}(x)$  при середньоквадратичному критерії точності  $M \left\{ \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \xi_k - \tilde{\xi}_k \right\}^2 < \varepsilon$ . Ця ф-ла має вигляд

$$H_{\varepsilon}(\xi) = -\frac{n}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + |h(\xi) - n \log \sqrt{2\pi e}| + o(1),$$

де  $h(\xi)$  — дифер. ентропія  $\xi$ ,  $o(1) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для пуассонівського процесу на відрізку  $[0, T]$  з параметром  $\lambda$  епсидов-ентропію  $H_{\varepsilon}(\xi)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  задають виразом  $H_{\varepsilon}(\xi) = -\lambda T \log \frac{T}{2\varepsilon} + o(1)$ , де  $o(1) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

при цьому умови точності задають вимогою  $Mp(\xi, \tilde{\xi}) \leq \varepsilon$ , де

$$p(\xi, \tilde{\xi}) = \int_0^T |f(\xi_t, \tilde{\xi}_t)| dt, \text{ а } f(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & x = \tilde{x} \\ 1, & x \neq \tilde{x} \end{cases}$$

Р. Л. Добрушин, В. В. Пролов.

**ЕПСИЛОН** — машинно-орієнтована мова програмування, призначена для обробки символічної інформації. Розроблено її 1967. Мову Е. найчастіше використовують у системному програмуванні, формульних перетвореннях, а також розв'язуючи завдання, пов'язані з компактним зберіганням і обробкою великої кількості даних. Мова Е. дає змогу обробляти окремі одиниці інформації (слова і речення) та їхні списки. Розрядність елементів кожного списку задають його описом, елементи щільно укладаються в комірки пам'яті. Розміри списків визначають динамічно; є змога керувати не тільки автомат. розмішуванням списків у пам'яті, а й розміщенням їх одиниць одного і сумішувати їх. Скаляр можна описувати як слово зі складовою структурою, це дає змогу працювати й з окремими частинами його. Істотною особливістю мови Е. є механізм *кодія*, за допомогою якого мож-

на задавати для об'єктів мови довільне двійкове кодування, класифікувати об'єкти відповідно до відображених у кодуванні ознак і розгалужувати процес залежно від належності того чи іншого значення до якогось із заданих класів. Мова Е. допускає в кожній реалізації використання відповідних машинних команд, у ній є засоби для динамічної модифікації їх. У реалізаціях мови Е. для машини типу «М-220», «БЭСМ-6» і «Мінск-22» передбачено певний налаштовувальний механізм. Відомості про пам'яті розподілу доступні програмістові, і він може певною мірою впливати на цей розподіл.

Лит. Катков В. Л., Рязань А. Ф. Программирование на языке ЭПСИЛОН. Новосибирск, 1972. ЭПСИЛОН — система автоматизации программирования задач символьной обработки. Новосибирск, 1972. [Облито, с. 128]. О. Ф. Рязань.

**ЕПСИЛОН-ЕНТРОПІЯ** — міра незначущості неперервного розподілу. Нехай, напр.,  $p(x)$  — щільність імовірності випадкової величини  $\xi$ , яка набуває значення на  $[0, 1]$ . Розб'ємо  $[0, 1]$  на відрізки  $\Delta_i$  завдовжки  $\varepsilon$  і визначимо  $p_i = \int_{\Delta_i} p(x) dx$ . Тоді Е.-е. визначають як  $H_{\varepsilon} = -\sum p_i \log p_i$ . З наближеного представлення інтеграла видно, що  $H_{\varepsilon} \approx$

$$-\int_0^1 p(x) \log p(x) dx - \log \varepsilon.$$

Це визначення легко можна перенести на розподіл величин на метричних просторах, які можна розбити на скінченну кількість відножних діаметром  $\varepsilon$  (скінченні  $\varepsilon$ -сітки). Становить інтерес асимптотика Е.-е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (див. також *Ентропія повідомлення за заданих умов точності*). Ю. А. Шрейдер.

**ЕРГАТИЧНА СИСТЕМА** (від грец. *ἐργατή* — робочий) — система, складовим елементом якої є *людина-оператор* (або кілька людей-операторів). Залежно від того, скільки людей входить до Е. с., ці системи поділяють на моно- й поліергатичні. У заг. випадку Е. с. — це складні *ієрархічні системи керування*, в яких людина може брати участь на будь-якому рівні. Е. с. є, напр., ручне керування автомобілем і літаком, диспетчерська служба вокзалів, аеропортів і заводів. Досліджуючи Е. с., процеси їхнього функціонування описують на різних рівнях абстракції, залежно від типу елементів, з яких складається система, зручності описування й дослідження процесів на даному рівні й від суто суб'єктивних факторів, пов'язаних зі специфічними особливостями групи людей, які проводять це дослідження. Рівні абстракції бувають, напр., такі: інформаційний, логічний, абстрактно-алгоритмічний, динамічний та евристичний (див. *Систем загальної теорії*). Оскільки людина-оператор є невід'ємним елементом Е. с., її характеристики при дослідженні системи доцільно описувати на рівні абстракції, який прийнято для описування всієї Е. с. в цілому. Якщо необхідні характеристики людини-оператора вже одержано,



аналіз і синтез Е. с. можна виконувати звичайними для теорії систем методами. А коли необхідних характеристик людини-оператора нема зовсім або частково, Е. с. доцільно досліджувати ін. методами, бо внаслідок специфіки людських факторів (різноманітність і мінливість динамічних особливостей, фізіол. обмеження тощо) теор. підхід до дослідження Е. с. буде надзвичайно утруднений. Використання аналітичних методів приводить до правильних результатів, як правило, тільки в тривіальних випадках. Одним з адекватних методів дослідження Е. с. є метод, який названо теоретико-експериментальним. Цей метод передбачає таке поєднання теор. і експериментальних процедур, коли в заданій системі Е. с. виділяють два етапи. На 1-му етапі теоретично визначають функціональну структуру, яка забезпечує виконання поставленого завдання, не враховуючи конкретних засобів її реалізації. Одночасно здійснюють попередній розподіл функцій між людиною-оператором і тех. пристроями. На 2-му етапі здійснюють експериментальну оптимізацію, щоб уточнити місце й функціональні обов'язки людини-оператора в синтезованій структурі й визначити оптим. значення параметрів тех. пристроїв.

А. М. Воронін, А. М. Мелешко, В. В. Павлов

**ЕРГОДИЧНА ТЕОРІЯ** — теорія, що виражає певну регулярність граничних (при  $t \rightarrow \infty$ ) поведінки траєкторій  $y(t)$  механічних систем і деяких випадкових процесів. Е. т. належить до області граничних теорем, що їх вивчають в *імовірнісній теорії*, функціональному аналізі й теорії дифер. рівнянь; має застосування в статистичній фізиці та ін.

Так, для консервативної механіч. системи у фазовому просторі  $S$  (див. *Фазово-просторовий метод*), розглядають в моменті часу  $t = 0, 1, 2, \dots$  для довільної множини  $E$  (вмірної за Лебегом, тобто  $E \in \sigma(S)$ ) серед точок  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$  частки тих, які опинилися в  $E$ , при  $n \rightarrow \infty$  має границю найменше для кожного початкового стану  $y(0)$ . Точкам простору  $S$  можна приписати різну (інтегровну в  $S$ ) додатну вагу  $f(x)$  (інакше кажучи, розглядають якусь числову величину  $f(x)$ , визначаючи її середнім положенням системи). В цьому разі в границі відпо-

відних зважених середніх  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y(k))$

Цікавим є випадок, коли границя не залежить від початкового стану  $y(0)$ . В цьому (ергодичному) випадку адекватна границя дорівнює фазовому середньому  $\frac{1}{\mu(S)} \int_S f(x) \mu(dx)$  ( $\mu$  — Лебегова міра в  $S$ ).

Для марковських процесів  $\xi(t)$  ергодична теорема визначає умови існування гранич. розподілу  $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) < x | \xi(0) = x_0\}$ . Процес наз. ергодичним, якщо ця границя існує й не залежить від початкового стану  $x_0$ .

Відправним моментом в Е. т. є напівагрупова властивість траєкторій  $y(t) = \varphi_t(y(0))$  консервативної мех. системи:  $\varphi_t \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x)$  для всіх  $x \in S$  і всіх моментів часу  $t, s$ ; і теорема Ліувілля, яка стверджує, що міра  $\mu$  такої системи інваріантна:  $\mu(\varphi_t^{-1}(E)) = \mu(E)$  для всіх  $E \in \sigma(S)$  ( $t \in (0, \infty)$ ) або дискретно:  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Отже, проблема зводиться до вивчення напівагруп перетворень  $\varphi_t$  простору  $(S, \sigma(S))$  на себе, що зберігають міру (або груп, якщо задача допускає обернення в часі).

Множину  $E \in \sigma(S)$  наз. *інваріантною*, коли для будь-якого  $t$   $\varphi_t^{-1}(E)$  майже всюди збігається з  $E$ . Сукупність інваріантних множин утворює  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{M}$ . Перетворення  $\varphi_t$  наз. *метрично транзитивним*, якщо  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{M}$  тривіальна.

Перший осн. результат (теорема Віргофа — Хінчина) стверджує, що у фазовому просторі  $S$  зі скінченною мірою  $\mu$  для довільної інтегровної  $f(x)$  для майже всіх  $x$

існує  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt = f^*(x)$  (відповідно

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} f(\varphi_k(x)) = f^*(x)$  для дискретного  $T$ )

й  $\int_S f^*(x) dx = \int_S f(x) dx$ . Для метрично транзитивних перетворень  $\varphi_t$  (і лише для них)

$f^*(x) = \text{const} = \frac{1}{\mu(S)} \int_S f(x) \mu(dx)$ . Якщо міру  $\mu(E)$  нормовано (тобто  $\mu(S) = 1$ ), то в імовірнісному просторі  $(S, \sigma(S), \mu)$  підгрупа  $\varphi_t$  породжує *стаціонарний випадливий процес*

у вузькому розумінні  $y(t) = \varphi_t(x)$ , для якого наведена теорема належить до класу підсилюваних *слабких чисел законів*. Границя цієї величини в умові математичне сподівання  $M(x/\eta)$  або  $Mx$  — фазове середнє, якщо  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{M}$  тривіальна. В останньому випадку процес наз. *ергодичним*, або метрично транзитивним. Ергодичність стаціонарного процесу еквівалентна тому, що

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu((\varphi_t^{-1} E_1) E_2) dt = \mu(E_1) \cdot \mu(E_2)$ .

Це співвідношення здійснюється, якщо процесові властиве перемішування  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu((\varphi_t^{-1} E_1) E_2) = \mu(E_1) \cdot \mu(E_2)$ . Якщо процес не є ергодичним, але міра  $\mu$  досконала й  $\sigma(S)$  сепарабельна, то існує розбиття  $S$  на неперетинні інваріантні множини  $E_\alpha \in \sigma(S) : S = \bigcup E_\alpha$ , і таке сімейство імовірнісних мір  $\mu_\alpha$ , що  $\mu_\alpha(E_\alpha) = 1$ ,  $\mu(E) =$

$= \int_S \mu_\alpha(x) \mu(dx)$  для будь-якого  $E \in \sigma(S)$  ( $\alpha(x) = \{\alpha : x \in E_\alpha\}$ ) і  $y(t)$  по відношенню до кожної з імовірнісних мір  $\mu_\alpha$  являє собою стаціонарний ергодичний процес.

Характерно, що якщо випадковий процес  $y(t)$  є ергодичним, то будь-яка  $\Phi$ -ціл від цього процесу теж має властивість ергодичності, тобто має рівні часові й фазові середні.

Зокрема,  $M_y(t)^h = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y^h(t) dt$ . Якщо за всіх  $t$  виконати лінійне перетворення  $U_t$  рівністю  $(U_t f)(x) = f(\varphi_t(x))$  і  $f \in L_p(S, \sigma(S), \mu)$ , то  $U_t$  є (лінійна) група унітарних (що зберігають норму) перетворень у  $L_p$ , і границя часових середніх у термінах операторів  $U_t$  виражається так

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T U_t f dt \right\} (x).$$

Другий осн. результат (теорема Неймана):

для  $f \in L_2(S, \sigma(S), \mu)$  і  $\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T U_t f dt \right\} (x) = f^*(x)$  існує і  $f^*$  є проекція  $f$  на підпростір інваріантних  $\Phi$ -цій (пів) групи  $U_t$ . Для  $f \in L_p$  має місце збіжність у просторі  $L_p$ . В термінах випадкових процесів теорема Неймана означає, що для стаціонарного в широкому розумінні процесу  $y(t)$  існує

л. і. м.  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$ , що дорівнює приросту

в нулі спектральної функції процесу  $y(t)$ . За природне узагальнення поняття підгрупи перетворень  $\Phi_t$ , що зберігають міру, у випадку марковського процесу з перехідною  $\Phi$ -цією  $P(t, x, E)$ , править підгрупа операторів лінійних  $(\Phi_t f)(x) = \int f(y) P(t, x, dy)$ ,

якщо припустити, що для цього процесу існує інваріантна міра

$$Q(dx) : Q(E) = \int_E Q(dx) P(t, x, E).$$

Для таких перетворень  $\Phi_t$  справджуються обидві ергодичні теореми в дискретному формулюванні, а також у неперервному випадку за додаткової умови суворої неперервності  $\Phi_t$  по  $t$ . Щоб існувала інваріантна міра  $Q(dx)$  для процесу з дискретним часом і перехідною  $\Phi$ -цією  $P(1, x, E)$ , абсолютно неперервна відносно якоїсь міри  $m(E)$ , необхідно й достатньо, щоб при кожному

$B$ ,  $m(B) > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(k, x, B) > 0$

для всіх  $x \in B_0$ ,  $m(B_0) > 0$ . При цьому, якщо  $m(S) = 1$ , то

$$Q(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_E P(k, x, E) m(dx).$$

Якщо для певної скінченної міри  $m(E)$  цілого  $n \geq 1$  і  $\epsilon > 0$   $P(n, x, E) < 1 - \epsilon$  тільки на  $m(E) \leq \epsilon$  (умова Дебніна), то

інваріантна міра  $Q(x, E) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t$

$P(k, x, E)$  існує для будь-якого  $x \in E$ . Множину  $E \in \sigma(S)$  наз. інваріантною, якщо  $P(1, x, E) = 1$  для всіх  $x \in E$ . Для марковського процесу  $y(t)$ , для якого виконано умову Дебніна, існує не більше як  $m(S)/\epsilon$  різних міним. інваріантних множин фазового простору  $S$ . Якщо  $E_1, E_2, \dots, E_N$  — система неперетинних інваріантних множин простору  $S$ ,

то для будь-якого  $x \in S$   $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x, U E_k) = 1$ , тобто виходячи з будь-якої точки  $x \in S$ , будь-яка частинка в ймовірності 1 переа скінченне число кроків потрапить до однієї з інваріантних множин і залишиться там. Граничний стаціонарний розподіл  $Q(x, E)$  однаковий для всіх  $x$ , що належать до однієї інваріантної множини  $E_k$  ( $Q(x, E) = Q_k(E)$ ,  $x \in E_k$ ). Будь-яка інваріантна міра  $Q(E)$  у фазовому просторі  $(S, \sigma(S))$  надале собою лінійну комбінацію взаємно перпендикулярних стаціонарних ймовірностей  $Q_k(E)$ .

Для певного класу Маркова ланцюгів  $\xi(t)$  з неперервним часом, дискретною множиною станів і перехідною  $\Phi$ -цією  $p_{ij}(t)$  (що задає ймовірності переходу із стану  $E_i$  в стан  $E_j$  за час  $t$ ) існують  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j$  — фінальні ймовірності перебувати в стані  $E_j$ .

При цьому  $p_j = \frac{1}{R_j}$ , де  $R_j$  — середній час повернення до стану  $E_j$ ; для часу  $T_A$  перебування в множині станів  $A$  за проміжок часу

$T$  з ймовірністю 1  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_A}{T} = \sum_{i \in A} p_i$  (див. також Ергодичний стан).

Приклад. Для системи, стан якої визначається числом частинок у певній області простору, і за одиничний проміжок часу з ймовірністю  $q$  кожна з частинок якої може покинути область, а  $n$  нових частинок з'являються з ймовірністю  $e^{-\lambda} \lambda^n / n!$ , перехідна ймовірність  $p_{ik}(t)$ , коли  $t \rightarrow \infty$ , збігається до  $\frac{1}{k!} e^{-\lambda/q} \left( \frac{\lambda}{q} \right)^k$ .

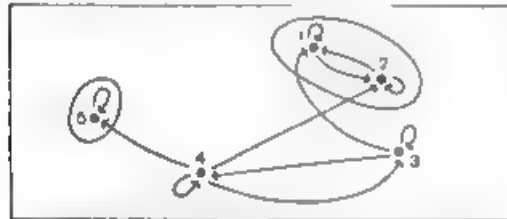
Якщо  $\xi(t)$  — зворотний дифузійний процес у відкритому інтервалі  $(r_1, r_2)$  (обидві граничні точки якого є відсітовжувачими) і для  $t$  — часу повернення процесу до вихідної точки  $x$   $Mt < \infty$ , то існує стаціонарний розподіл  $P(B) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, x, B)$ .

Лит.: Хитчин А. Я. Математические основания статистической механики. М.—Л., 1943. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., 1967 [бібліогр. с. 481—487]. Туб Дж. Т. Вероятностные процессы. Пер. с англ. М.—Л., 1956 [бібліогр. с. 589—598]. Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории. Пер. с англ. М., 1959 [бібліогр. с. 143]. Данфорд Н. Шварц Дж. Линейные операторы. Пер. с англ., ч. 1. М., 1962. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полу группы. Пер. с англ. М., 1962 [бібліогр.

в. 787—8043; Морен К. Методи гильбертова пространства. Пер. з російськ. М., 1965 (бібліогр. с. 558, 563); Носова К. Функциональный анализ. Пер. с англ. М., 1967 (бібліогр. с. 597—612). Р. М. Симо.

**ЕРГОДИЧНИЙ СТАН** — неперіодичний стан Маркова ланцюга, для якого ймовірність повернення в цей самий стан дорівнює 1 й середній час цього повернення є скінченним.

Сукупність усіх Е.с. ланцюга Маркова розбивають на класи еквівалентностей, що їх назв. ергодичними класами. Для будь-якої пари станів, що належать до того самого



Ергодичні класи станів

ергодичного класу, існує позитивна ймовірність переходу з одного стану в інший за певне число кроків, вихід з ергодичного класу неможливий. Якщо неперіодичний стан не належить до жодного ергодичного класу, його назв. вестійним. З ймовірністю 1 система залишатиметься в вестійних станах лише протягом скінченного числа кроків. Розглянемо скінченний ланцюг Маркова з матрицею ймовірностей переходів

$$P = \begin{vmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Множина станів цього ланцюга включає два ергодичні класи, один з яких складається з 1-го й 2-го станів, а другий — із самого лише 5-го стану. 3-й і 4-й стани — вестійні (мал.). Стан, який сам утворює ергодичний клас, назв. поглядним (5 стан).

Якщо стани  $i$  та  $k$  належать до того самого ергодичного класу, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = \pi_k > 0$ , де

$P_{ik}^{(n)}$  — ймовірність переходу з  $i$ -го в  $k$ -й стан за  $n$  кроків,  $\pi_k$  — величина, яка є оберненою середньому часові повернення в  $k$ -й стан. Див. також *Ергодична теорія*. Т. І. Фурсова.

**ЕРЛАНГА ФОРМУЛИ** — формули, що виражають для систем зі втратами стаціонарну ймовірність того, що з  $n$  обслуговуваних приладів обслуговуванням зайнято лише  $k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Докладніше про це див. *Масово обслуговування теорія*.

**ЕТАЛОН** у розпізнаванні образів — ідеалізований сигнал, з яким так чи інакше порівнюють розпізнаваний сигнал для класифікації його. Таким чином, Е. використовують як один з можливих засобів для

задавання інформації про клас сигналів (див. *Моделі об'єктів розпізнавання*). Термін «Е.» застосовують у різних значеннях, тому можуть бути різні шляхи формалізації цього поняття. Один з них ґрунтується на статистичному підході до розпізнавання образів. При цьому підході множина сигналів одного класу описується відповідним розподілом ймовірностей, а Е. є найімовірнішим значенням сигналу. Отже, Е. можна розглядати як багатовимірний параметр зазначеного розподілу, що залежить, у свою чергу, від шуканого параметра  $i$ , зокрема, від номера класу. Проте Е. може залежати не лише від номера класу, а й від інших параметрів; у цьому разі клас характеризується не одним Е., а множиною їх (або областю Е.). Процес порівняння поданого сигналу з даним Е. полягає в обчислюванні величини, яка характеризує їхню схожість. Множину Е. даного класу описують аналітично або шляхом зазначення правил складання Е. з елементарних частин.

У розпізнавальних системах і читачих автоматах Е. використовують як форму абригації інформації про клас зображень або про різні пари класів. В останньому випадку до Е. включають лише ті елементи (ознаки), якими один клас відрізняється від іншого. Цей спосіб підвищує завадостійкість апаратури при розпізнаванні дуже схожих класів (так, напр., як букви «Ш» і «Щ», «О» і «Ф» тощо). Е. технічно реалізується у вигляді фотографічної маски чи набору резисторів або ж записується на стрічці магнітній чи на інших носіях запису інформації.

**ЕТАЛОННА НАПРґГА** — напруга, використовувана як зразкова величина для порівняння при вимірюваннях або як задавальна напруга для формування робочих напруг електр. і електронних кід. При вимірюваннях треба, щоб величина Е. н. була відома з необхідною точністю й лишалася певною мірою незмінною в часі (стабільною). В цьому разі за джерела Е. н. правлять звичайно батареї акумуляторів чи сухих елементів, перевірені за допомогою первинного еталона. При використанні Е. н. як задавальної напруги точне значення її може бути невідоме, потрібна лише стабільність. У цьому разі за джерела Е. н. можуть правити стабілітрони.

**ЕФЕКТИВНІСТЬ ІНФОРМАЦІЙНОГО ПОШУКУ** технічна — оцінка якості інформаційного пошуку в інформаційно-пошуковій системі. Е. і. п. характеризується абсолютним коефіцієнтом повноти пошуку й коефіцієнтом точності пошуку або коефіцієнтами втрат інформації під час пошуку й шуканого пошукового. Найпоширеніший спосіб оцінки Е. і. п. ґрунтується на зіставленні автомат. видавання інформаційно-пошукової системи (ІПС) з результатами визначення релевантності документа, яке провадить спеціаліст. Незважаючи на неоднозначність результатів визначення релевантності, пов'язаної з елементами суб'єктивності при такій

експертній оцінці, більшість відомих методів оцінки втрат інформації при пошуку й пошукового шуму аналогічні згаданому вище. Ідеальною вважають ІПС, що характеризується нульовими значеннями коеф. втрат інформації при пошуку й пошукового шуму. В реальних ІПС таких показників не можна досягти, зокрема коеф. втрат інформації при пошуку звичайно коливається в межах 10—30%, а коеф. пошукового шуму — в дуже широких межах (до 90%). Величини коефіцієнтів втрат інформації при пошуку й пошукового шуму в ІПС залежать від властивостей застосовуваної в ній мови інформаційно-пошукової, при цьому осн. способом зменшення втрат інформації при пошуку є введення відношень парадигматичних між термінами мови, осн. способом зменшення пошукового шуму є введення відношень синтагматичних між термінами мови в пошукових образах документів і пошукових приписах з урахуванням зазначених типів відношень у критерії семантичної відповідності. Оскільки зменшення втрат інформації в ІПС здебільшого зв'язане зі збільшенням пошукового шуму, застосовують інформаційно-пошукові мови з різними засобами вираження, щоб досягти прийнятних з точки зору споживачів ІПС значень коеф. втрат інформації при пошуку й пошукового шуму.

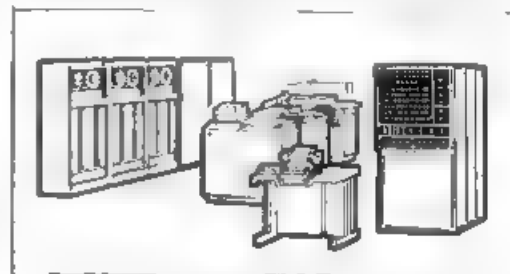
Н. О. Столяков.

**ЕШБІ ГОМЕОСТАТ** — самонастроювана кібернетична система, яка моделює гомеостазис — властивість живих організмів зберігати свій стан у допустимих межах при значних змінах умов їхнього існування. Див. *Гомеостатична система*.

**ЄДИНА СИСТЕМА ЕЛЕКТРОННИХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МАШИН (ЄС ЕОМ)** — сімейство цифрових обчислювальних машин, що має широкий діапазон продуктивності й характеризується програмною сумішуваністю машин сімейства знизу вгору (тобто програми, складені для машин з меншою продуктивністю, можна виконувати на машинах з більшою продуктивністю). За конструктивно-технологічним виконанням, логічною структурою, номенклатурою пристроїв введення-виведення й рівнем програмного забезпечення ЄС ЕОМ належить до 3-го покоління обчислювальних машин. ЄС ЕОМ створює колектив спеціалістів в-д. установ і підприємств країн-учасниць РЕВ — Болгарії, Угорщини, НДР, Польщі, СРСР і Чехословаччини. Промисловий випуск перших машин «ЕС-1020» і «ЕС-1030» розпочато 1972 (мал.).

Ядром Єдиної системи є 7 процесорів, які охоплюють діапазон швидкостей обчислювань від кількох тисяч до 2 млн. операцій за 1 сек. В процесорі реалізуються операції з фіксованою й плаваючою комами й операції над десятковими числами. Для даних та інструкцій прийнято кілька форматів, в основі яких лежить байт і слово з 4 байт. Операції можна виконувати над половинними, цілими й подвійними словами, а також над полями змінної довжини. Система адресації в ЄС ЕОМ забезпечує формування при-

мої адреси для звертання до оперативного запам'ятовувального пристрою (ОЗП) ємністю до 16 Мбайт. Із ЗП дані також можна вибирати різними форматами: цілословом, словом, подвійним словом і полем змінної довжини в межах  $t \rightarrow 256$  байт. Для зручності складання програм зі змінною адресою за двома параметрами передбачено інструкції з подвійною модифікацією адреси. Пам'ять усіх машин має захист пам'яті по записуванню і зчитуванню, організований перевіркою належності кожного з блоків по 2048 байт до од-



Цифрова обчислювальна машина «ЕС-1020».

ного з 16 можливих ключів захисту, які можна міняти за допомогою програм.

В процесорах є розвинена система переривань, яка забезпечує зв'язок між апаратними засобами й керуючою програмою, швидкий перехід від однієї програми до іншої й ефективну суміщену роботу зовн. пристроїв. Структура процесора теж має деякі особливості, які дають змогу будувати багатомашинні комплекси, взаємодіяти з зовн. об'єктами й працювати в реальному масштабі часу. Однотипність структури (архітектури) ЄС ЕОМ, зокрема складу інструкцій (команд) і системи кодування даних, забезпечує програмну сумісність; це дає змогу розробляти програми, незалежні від конкретної моделі й, отже, мати спільну (для більшості машин) операційну систему і прикладні програми. Внутрішня логічна структура й тех. реалізація машин сімейства різна, а це призводить до відмінності у продуктивності й вартості їх. В машинах з малою продуктивністю ф-ції кількох блоків зовн. структури, як правило, реалізують один апаратний блок. Напр., формування адреси виконується в блоці операцій з фіксованою комою, функції блоків для операцій з фіксованою й плаваючою комами і для операцій над полями змінної довжини об'єднуються в одному апаратному блоці.

В ЄС ЕОМ використовують ще й паралельно-последовний принцип виконання операцій, напр., одлгобайтову обробку даних при двобайтовому вибранні їх з ОЗП в машині «ЕС-1020». У всіх випадках, коли це допускають швидкості, використовують мікропрограмне керування. При побайтовому виконуванні простих мікрооперацій, вибір яких невеликий, процесор спрощується, одночасно забезпечується повна програмна сумісність завдяки мікропрограмній інтер-

претації повного набору операцій, зв'язування складом інструкцій. Мікропрограми постійно записані в спец. швидкодіючому ЗП, з якого можна лише зчитувати дані. У найменшій за продуктивністю моделі «ЕС-1010» застосовано програмну інтерпретацію складних операцій.

Обмін даними між процесором і зовнішніми пристроями здійснюється через канали й систему стандартного спраження з зовн. пристроями. Ця система містить логіч. й апаратні засоби, які забезпечують стандартну сис-

Технічні характеристики ЄС ЕОМ.

| Модель    | Час виконання основних операцій, мксек   |  |          |                                | Принцип керування                 | Склад основного обл. кода    | Канали          |             | Тип інтегральних схем |
|-----------|--|--|----------|--------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|-----------------|-------------|-----------------------|
|           | зчитування операцій  | додавання (адаптивний) з плаваючою комою | множення | виконання для подвійного слова |                                   |                              | мультимплексний | селекторний |                       |
|           |  |  |          |                                |                                   |                              |                 |             |                       |
| «ЕС-1010» | Програма і мікропрограма інтерпретації стандартних інструкцій. Час додавання для чиселів 2,4+3,6 мксек |  |          |                                | спец. склад пристроїв керування   | в 16 раз меншістю розширення | 160             | 1           | TTL                   |
| «ЕС-1020» | 20+30  | 50+70                                    | 400      | 1200                           | повна система пристроїв керування | 84+750                       | 25              | 2           | TTL                   |
| «ЕС-1030» | 3+8  | 7+11                                     | 30       | 61                             |                                   | 12+112                       | 10              | 3           | TTL                   |
| «ЕС-1040» | 0,9+1,8  | 2,5+1,5                                  | 7        | 12                             |                                   | 125+1024                     | 50+200          | 6           | TTL                   |
| «ЕС-1050» | 1,65   | 1,4                                      | 2        | 3,2                            | жорстка керування                 | 125+1024                     | 170+150         | 6           | ECL                   |
| «ЕС-1060» | 0,5  | 0,5                                      | 1        | 1,5                            |                                   | 258+2048                     | 100+150         | 6           | ECL                   |

тему зв'язків з чітко сформульованими функціями й сигналами з уніфікованими електр. параметрами. Після одержання від процесора команди початку обміну канали виконують основний обсяг робіт по керуванню обміном між зовн. пристроями і процесором: прийом команд процесора й адресацію зовн. пристроїв, вибір, розшифрування й перевірку керуючої інформації, посилення керуючих і прийнятих підтверджувальних сигналів, забезпечення активних зовн. пристроїв буферною пам'яттю, перевірку правильності передачі, керування запитами на переривання тощо. Існуючі два типи каналів — селекторний (СК) і мультимплексний (МПК) — відрізняються внутрішньою структурою, режимами роботи та призначенням (див. *Пристрій обміну*). СК здійснює обмін даними процесора по чергово лише з одним із підключених до нього зовн. пристроїв, який працює з відносно високою швидкістю передавання даних (магн. стрічки, диски або барабани). МПК забезпечує одночасний обмін даними з кількома зовн. пристроями (орієнтовно бл. 200), які працюють з відносно малою або середньою швид-

кістю (напр., перфокарткові, перфострічкові й друкувальні пристрої).

Обчисл. машини Єдиної системи побудовано на уніфікованій конструктивно-технологічній базі з широким застосуванням монолітних інтегральних схем, які розміщуються як типових елементах замін (ТЕЗак), що являють собою друковані плати стандартних розмірів. Рівні уніфікованої конструкції — панелі, які несуть до 40 ТЕЗів, рами й, нарешті, стійки з трьома рамами; рама може містити бл. 50 тис. інтегральних схем, тобто

забезпечується дуже велика щільність конструкції.

До складу зовн. пристроїв ЄС ЕОМ входить комплект нагромаджувачів на магн. стрічках, дисках і барабанах, комплект перфокарткового й перфострічкового обладнання введення — виведення, пристрої порядкового друкування, друкарські машинки, *якрані пульти* й графопобудовники різного типу. Передбачено й засоби передавання даних з різною швидкістю по телефонних і телеграфних лініях зв'язку (див. *Пристрій введення та виведення інформації*).

Операційні системи ЄС ЕОМ, які забезпечують автоматизацію підготовки й виконання програм, велику продуктивність праці програмістів, операторів і обслуговуючого персоналу, складаються з керуючих і обслуговуючих програм, трансляторів з мов програмування і засобів генерації системи для конкретного комплексу тех. засобів, встановлених у споживача. Керуючі програми здійснюють початкове завантаження основного ОЗП й керування обчисл. процесом, включно й обробку переривань, розподіл каналів, завантаження програм з бібліотеки, паралельне ви-

ковання програм і зв'язок з оператором, а також надають користувачеві широкі можливості в керуванні масивами даних. Обслуговуючі програми здійснюють об'єднання окремо трансльованих модулів в одну або кілька програм, складають перекриваючі програмні фази і роботу з бібліотеками програм (копіювання, оновлювання, стискування й поповнювання). Як вхідні мови ЄС ЕОМ прийнято *автокод* (мова *асемблера*), АЛГОЛ і ФОРТРАН. Системи програмування надають засоби відладжування й редагування програм. Програмне забезпечення містить і пакети різних прикладних програм.

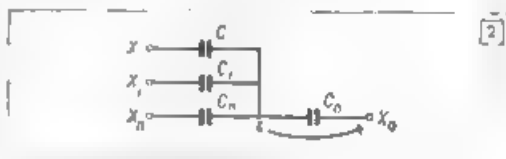
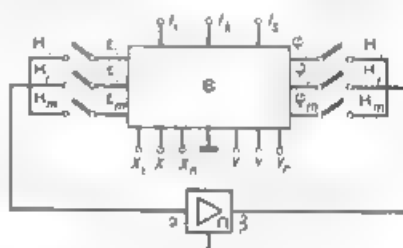
Основні технічні характеристики ЄС ЕОМ подано в таблиці.

О. М. Даринюк, В. Н. Лисенко, Ю. П. Соловйов.  
**ЕМІСІЙНА МОДЕЛЬ** — пристрій, що складається з емісійного багатополіусника, елементів якого є лише лінійні й нелінійні ємності, і одного підсилювача постійного струму, що перемикається за допомогою ключів, або *перетворювача функціонального*. На мал. 1 наведено схему 6. м., на якій 6 — емісійний багатополіусник,  $K_1, \dots, K_m$  — ключі, керувані так, щоб вхід  $\alpha$  і вихід  $\beta$  електропотоку підсилювача (П) з едіним від'ємним коеф. підсилення по черзі підключалися до полюсів багатополіусника з номерами 1, 2, ...,  $m$ . Внутрішню схему багатополіусника й параметри його елементів треба вибирати так, щоб при нульових значеннях напруг  $e_1, \dots, e_m$  напруги  $X_1, \dots, X_n$  задовольняли задану матем. залежність. Полюси  $f_1, \dots, f_n$  призначені для введення в багатополіусник певних потенціалів, а полюси з напругами  $\phi_1, \dots, \phi_m$  — для введення зарядів з виходу П. У заг. випадку треба, щоб у багатополіуснику були ще й полюси для одержання деяких допоміжних напруг  $U_1, \dots, U_r$ . Оскільки елементами багатополіусника 6 є тільки ємності, то він одночасно виконує функції й розв'язувальної, й запам'ятовувальної систем. Схему багатополіусника треба вибирати так, щоб процес його зрівноважування, тобто процес перетворювання напруг  $e_1, \dots, e_m$  на машинні нулі, збігався (див. *Зрівноважування методи*). На основі розглянутої схеми можна побудувати різноманітні матем. прилади й пристрої для розв'язування скінченних і дифер. рівнянь, а також пристрої для виконання деяких матем. операцій (суматори, інтегратори, функціональні перетворювачі та ін.). Усі такі пристрої є напівааналоговими.

На мал. 2 наведено схему емісійного суматора. У зрівноваженому стані напруги  $X_0$ , якщо власний заряд вузла є дорівнює нулеві, виражається через напруги  $X_1, \dots, X_n$  як

$$X_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{C_0} X_i. \text{ Стрілкою показано точки,}$$

до яких у процесі зрівноважування треба підключати вхід  $\alpha$  і вихід  $\beta$  підсилювача відпрацьовуючого для перетворення напруги в на машинний нуль. Система таких простих суматорів становить пристрій для підсумовування багатовимірних векторів. На основі ф-л чисельного інтегрування система суматорів може реалізувати операцію інтегрування графічних ф-цій. Якщо кулонно-вольтні харак-



1. Схема емісійної моделі  
2. Схема емісійного суматора

теристики нелінійних ємностей такі, що дають змогу сформувати на виході напругу  $X_0$ , яка відповідає бажаному матем. зв'язкам її з вхідними напругами  $X_1, \dots, X_n$ , то можна одержати емісійний функціональний перетворювач. Універсальніший спосіб одержання потрібних функціональних перетворювачів ґрунтується на сумісному використанні ємнісних ланцюгів і стандартних, напр., діодних, перетворювачів. 6. м. можна застосовувати і для множення. Щоб одержати універсальну ємнісну машину, досить мати три електронні підсилювачі, одну множильну ланку, набір ємностей і ключі.

Подібно до напівааналогових моделей алгебр. рівнянь  $\alpha, \rho, \sigma$  та інших типів можна одержати аналогічні ємнісні схеми, замінюючи омичні провідності ємностями, а систему одночасно працюючих підсилювачів — одним перемикальним. У практиці моделювання 6. м. застосовують поки що незначною мірою, бо точність одержуваних результатів надто мала. Див.: Пухов Г. Е. Теорія ємнісних математических машин. «Математическое моделирование и теория электрических цепей», 1965, в. 3.

В. К. Білик.

# ЖЗ

**ЖЕГАЛКІНА АЛГЕБРА** — один з різновидів алгебри логіки, названий за ім'ям рад. математика І. І. Жегалкіна. У Ж. а. використовуються такі теоретико-висловлювальні зв'язки: логічне множення (кон'юнкція, знак  $\cdot$ ), додавання за модулем 2 (виключальне «або», знак  $+$ ) і константа 1 («істина»). Набір цих операцій повний, тобто будь-яка ф-ція алгебри логіки може бути представлена суперпозицією визначених операцій. Більше того, в Ж. а. будь-яка ф-ція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  алгебри логіки однозначно зображується як многочлен, у якому кожна змінна  $x_i$  входить не вище як у першому степені, а коеф. є елементами поля з двох елементів, тобто або нулем, або одиницею. Можливість такого зображення «зведеними» многочленами випливає з існування інтерполяційної формули Лагранжа, яка в цьому разі набуває простого вигляду  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_n} f(a_1, a_2, \dots, a_n) (x_1 + a_1 + 1) \dots (x_n + a_n + 1)$ . Булеві зв'язки «вишлюкція» та «заперечення» в Ж. а. виписують як  $x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2$ ;  $\bar{x} = x + 1$ .

Ж. а. наз. інколи булевим кільцем (не плутати з терміном «булева алгебра»). Операції над зведеними многочленами проводять як над звичайними многочленами з цілочисловими коеф., потім в одержаному результаті всі змінні  $x_i^m$ , у яких  $m > 0$ , замінюються на  $x_i$ , а коеф. при одночленах замінюються їхніми найменшими лишками за модулем 2. Саме ця близькість Ж. а. до звичайної елементарної алгебри многочленів пояснює її перевагу з методичної точки зору. Дяки автору використали Ж. а. в дослідженнях з матем. логіки та в обчисл. техніці. Зокрема, І. І. Жегалкін застосував Ж. а. в дослідженнях чисельних предикатів «узв'язков». Він поширив положення цієї алгебри на числення матриць з коеф. 0, 1 і знайшов ширішення проблеми розв'язування на скінченних класах для деяких типів формул «узв'язкового» числення предикатів. Ж. а. з успіхом застосовують у релейно-контактних схем теорії. Ж. а. допускає природне узагальшення на випадок  $k$ -значних логік, якщо  $k$  — степінь простого числа. Справді, в цьому разі функції відповідної алгебри логіки агідно з інтерполяційною формулою Лагранжа допускають однозначне зображення зведеними поліномами (тобто такими, в яких кожна змінна входить у степінь, не вищому від  $k-1$ ) з коефіцієнтами із скінченного поля (поля Галуа) з  $k$  елементами. Це дає змогу застосувати апарат теорії поліномів над скінченними полями до досліджень з логіки багатозначних.

Лит. Жегалкин И. И. Арифметизация символической логики «Математический сборник Московского математического общества», 1929, т. 36, в. 3—4; Жегалкин И. И. К проблеме разрешимости, «Математический сборник. Новая серия», 1939, т. 6, в. 2; Жегалкин И. И. Проблема разрешимости на конечных классах. Ученые записки Московского государственного университета, 1946, т. 1, в. 100.

Л. А. Назаркин.

**ЗАВАДИ** — сигнали або дії, що спотворюють корисний сигнал, який несе основну інформацію (у пристроях вимірювання, телезв'язку, навігації та ін.) або визначає поведінку різних пристроїв (систем автоматичного регулювання, телекерування, цифрових та обчислювальних пристроїв тощо). Вплив З. у деяких випадках може призвести до значних помилок систем вимірювання, до порушення функціонування систем керування, а іноді й до катастрофічних наслідків. З. за своєю природою можуть бути детермінованими і випадковими. Приклад детермінованої З. — фон від джерела живлення змінного струму. За допомогою спец. конструктивних заходів вплив детермінованих З. можна усунути. Вплив детермінованих З. на результати вимірювання враховують як систематичну похибку.

Джерелами випадкових З. є теплові шуми напіпровідникових приладів, опорів та електронних ламп, а також похибки, що виникають під час перетворювання сигналів (у датчиках, аналого-цифрових і цифро-аналогових перетворювачах, кодуючих пристроях та ін.). Випадкову З. можна описати як якусь випадкову функцію часу. Дуже поширене представлення З. як випадкової, не корельованої з осн. сигналом, функції типу «білого шуму». Найпоширенішим є дві схеми, за допомогою яких враховують вплив З.: 1) З. підсумовують за осн. сигналом (адитивна З.); 2) З. помножують за осн. сигналом (мультиплікативна З.). Приклади адитивних З. — похибки вимірювання та заокруглення, мультиплікативної — процес загасання радіосигналу (фаддинг). Вплив З. (з при великій кількості їхніх джерел) можна дослідити іноді за допомогою однієї так званої еквівалентної завади, дія якої ідентична дії всіх реальних завад.

Властивість пристроїв протистояти шкідливому впливові завад наз. в а в а д с т і й к і с т ь ю. Найширшого практичного застосування набули такі способи боротьби з З., які підлискують завадостійкість: 1) спец. конструктивні вирішення вузлів і систем загалом, що виключають можливість виникнення З.; 2) представлення корисних сигналів у такому вигляді, коли дія З. мінімальна (кодування); 3) створення спец. коректувальних пристроїв, які усувають або зменшують дію З. (фільтрація, пагромадження інформації тощо).

Б. Ю. Мандровський-Солов.

**ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ** — властивість систем автоматичного керування (САК) протистояти діянню *завад*. Під завадами або шумами в САК розуміють здебільшого *збурювальні* дії, що спотворюють дійсні значення вихідних сигналів системи. З. с. к. — важлива властивість системи, яку можна оцінювати, напр., процентом прирощування величини середньоквадратичної похибки або відношенням умовної ймовірності появи певного значення вихідного сигналу системи під час дії завади статистично заданої завади і т. д.

З. с. к. можна підвищувати і здійснюючи відповідні заходи, передбачені під час її конструювання, і раціональною добором параметрів вже сконструйованої системи. Конструктивними заходами є передусім вибір найефективнішого виду передавання сигналів (система з неперервними, дискретними сигналами, сигналами на змінному струмі, кодування сигналів тощо), використання найрозумніших інтеграторів, нагромаджувачів тощо. Ці заходи збільшують *відношення сигнал/завада*. Підвищення завадостійкості пов'язане з ускладненням системи, збільшенням її вартості, а це може призвести до зменшення надійності. Розв'язати задачу макс. підвищення З. с. к. можна, напр., при синтезі структури системи керування за умов мінімізації показника якості її роботи або шляхом відповідного вибору параметрів системи з заданою структурою.

Особливо загострюються питання З. с. к. при створенні та налаштуванні самонастроюваних, екстрем., самонавчальних та ін. систем. Завади в таких випадках можуть не тільки різко погіршити якість роботи системи, а й призвести до того, що вона цілком втрапить працездатність.

Лит.: Фельдбаум А. А. [та ін.]. Теоретические основы и управления. М., 1963. Харченко А. А. Борьба с помехами. М., 1963 [бібл. стр. с. 273—275].

В. Ю. Митрофанов, С. С. Соловьев.

**ЗАВАНТАЖУВАЧ** у програмуванні — програма, що об'єднує одержані в результаті трансляції модулі, розміщує їх у пам'яті, настроює адреси команд і реалізує зв'язки між цими модулями. Складаючи програми, виділяють логічно самостійні блоки. Кожен з них виконує якусь ф-цію чи ряд взаємопов'язаних ф-цій. Блоки можна програмувати й транслювати окремо й незалежно, при цьому утворюються модулі. Модуль, одержаний після трансляції, крім команд і даних, містить і додаткову інформацію, потрібну для реалізації зв'язків між модулями й налаштування адрес команд під час розміщення програм в пам'яті. Мову представлення програм у вигляді модулів завантаження наз. мовою завантаження; вона, як правило, є вихідною мовою асемблера й компіляторів. Її використовують, щоб об'єднати блоки програм, написаних, можливо, різними мовами, для програм сегментації та щоб включити програми в бібліотеки. Об'єднання програм на рівні мови завантаження дає змогу уникнути повторної трансляції на-

перед складених і наладжених блоків програм.

З. іноді виконує дві ф-ції — редагування зв'язків і розміщування програм у пам'яті ЦОМ. В ін. випадках розрізняють дві самостійні програми — редактор зв'язків і власне З. Редактор зв'язків об'єднує незалежно одержані модулі в один модуль завантаження. Коли редагують зв'язки, реалізуються міжмодульні зв'язки й, крім того, до програм підключаються потрібні модулі з заг. бібліотеки чи особистих бібліотек (за запитом чи автоматично). З метою економії пам'яті машини редактор зв'язків може конструювати й сегменти, які завантажують динамічно й які замінюють один одного в її пам'яті. З. працює в складі керуючої програми операційної системи. Його ф-ції зводяться до розміщення підредагованого модуля в пам'яті й налаштування адрес, які залягають від місця розташування програми. Поділ ф-цій редактора зв'язків і З. не потребує повторного редагування зв'язків, якщо програму використовувати багато разів.

Ю. М. Балакоуский.

## ЗАВБЯЧЕННЯ ВПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

**ТЕОРІЯ** — розділ випадкових процесів теорії, в якому за спостереженнями над одним процесом визначають методи завбачення перебігу якогось іншого процесу, статистично пов'язаного з спостережуваним. Припустимо, що випадковий процес  $\xi(t)$  спостерігається на якійсь множині  $E$ . Треба на основі спостережень якнайкраще завбачити значення випадкової величини  $\zeta$ , статистично пов'язаної з  $\xi(t)$ , тобто треба знайти випадкову величину  $\hat{\zeta}$ , яка залежить від результатів спостереження і яку можна з найбільшою підставою прийняти до  $\zeta$ . Нехай для кожної пари випадкових величин  $\eta_1$  і  $\eta_2$  визначено відстань

$\rho(\eta_1, \eta_2)$  між цими величинами, тоді  $\rho(\hat{\zeta}, \zeta)$  характеризує похибку, що виникає від замі-

ни  $\hat{\zeta}$  на  $\zeta$ . Осн. задачу З. в. п. т. можна сформулювати так: потрібно знати такий функціонал  $\zeta = f(\xi(t), t \in E)$ , від спостережуваних величин  $\xi(t)$ ,  $t \in E$ , для якого

$\rho(\hat{\zeta}, \zeta)$  набуває найменшого значення. Як можливий спосіб вибору відстані (метрики) між  $\eta_1$  і  $\eta_2$  можна розглядати  $\rho(\eta_1, \eta_2) = P\{|\eta_1 - \eta_2| > \varepsilon\}$  при якомусь  $\varepsilon > 0$ ,

$$\rho(\eta_1, \eta_2) = M|\eta_1 - \eta_2|, \quad \rho(\eta_1, \eta_2) = M \frac{|\eta_1 - \eta_2|}{1 + |\eta_1 - \eta_2|},$$

де  $M$  — символ математичного сподівання. З. в. п. т. найдокладніше розроблено для випадку середньоквадратичної метрики  $\rho(\eta_1, \eta_2) = \{M|\eta_1 - \eta_2|^2\}^{1/2}$ . Цю метрику ми й розглядатимемо далі. Заг. задача включає в себе як окремі випадки задачі екстраполяції випадкового процесу (спостерігається  $\xi(t)$  на  $E$ , треба оцінити  $\zeta = \xi(t_0)$ ,  $t_0 \in E$ ), фільтрації випадкового процесу (спостерігається на  $E$   $\xi(t) = x(t) + \eta(t)$ , де  $x(t)$  — корисний сигнал,  $\eta(t)$  — шум, а треба завбачати  $\hat{\zeta} = x(t_0)$ ), інтерполяції випадкового процесу (спостерігається  $\xi(t)$  на  $-\infty, 0) \cup (T, +\infty)$ ,



треба завбачати  $\zeta = \xi(\tau)$ ,  $0 < \tau < T$ . Оцінка величини  $\zeta$  з найменшою середньоквадратичною похибкою має вигляд

$$\hat{\zeta} = M\{\zeta/\xi(t), t \in E\}. \quad (1)$$

Формула (1) визначає умовне матем. сподівання випадкової величини  $\hat{\zeta}$ , якщо відомі  $\xi(t)$ ,  $t \in E$ . Використати рівність (1), щоб одержати ф-ли, які явно виражають  $\hat{\zeta}$  через  $\xi(t)$ , можна тільки в деяких спец. випадках (напр., якщо є досить прості явні формули умовного розподілу  $\zeta$  при відомих  $\xi(t)$ ,  $t \in E$ ).

**Приклад.** Нехай на інтервалі  $E = [0, T]$  спостерігається випадковий процес  $\xi(t) = \nu\eta(t) + \eta(t)$ , де  $\eta(t)$  — відома ф-ція,  $\eta(t)$  — гауссівський випадковий процес з відомою кореляційною функцією  $R_\eta(t, x)$  і  $M\eta(t) = 0$ ,  $\nu$  — випадкова величина з відомою щільністю розподілу  $\lambda(x)$ . Припустимо також, що  $\eta(t)$  і  $\nu$  незалежні. Потрібно знайти оцінку  $\hat{\nu}$  величини  $\nu$  з найменшою середньоквадратичною похибкою. Оптим. оцінку  $\hat{\nu} = M\{\nu/\xi(t), t \in E\}$  можна обчислити, припустивши додатково, що інтегр.

рівняння  $\int_0^T R_\eta(t, x) p(t) dt = g(t)$  має розв'язок  $p_0(x)$ , інтегрований зі своїм квадратом на відрізьку  $[0, T]$ . Тоді

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= M\{\nu/\xi(t), 0 < t < T\} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x h(x) \exp \left\{ x \int_0^T \xi(t) p(t) dt - \frac{x^2}{2} \int_0^T g(t) p(t) dt \right\} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp \left\{ x \int_0^T \xi(t) p(t) dt - \frac{x^2}{2} \int_0^T g(t) p(t) dt \right\} dx}. \end{aligned}$$

Зокрема, якщо  $\nu$  має нормальний розподіл і  $M\nu = 0$ ,  $M\nu^2 = \sigma^2$ , то

$$\hat{\nu} = \frac{\sigma^2 \int_0^T p(t) \xi(t) dt}{1 + \sigma^2 \int_0^T p(t) g(t) dt}$$

лінійно виражають через результати спостереження  $\xi(t)$ .

Обмеження класу розглядуваних функціоналів тільки лінійними або поліноміальними призводить до збільшення середньоквадратичної похибки, але дає змогу частіше одержувати явний розв'язок, зручний для практичного використання.

Задача лінійного завбачення полягає в знаходженні випадкової вели-

чини  $\tilde{\zeta}$ , яку лінійно виражають через  $\xi(t)$ ,  $t \in E$  і яка мінімізує середньоквадратичну похибку  $M\{\zeta - \tilde{\zeta}\}^2$ . Задачу лінійного завбачення для випадкових процесів уперше розглядав А. М. Колмогоров. Він цю задачу сформулював геометрично так. Множину  $H$  усіх випадкових величин зі скінченною дисперсією можна розглядати як гільбертів простір (див. *Простір абстрактний у функціональному аналізі*), якщо під скалярним добутком двох випадкових величин  $\eta_1$  і  $\eta_2$  розуміти  $(\eta_1, \eta_2) = M\eta_1\eta_2$ . При такому виборі скалярного добутку  $\{M\{\eta_1 - \eta_2\}^2\}^{1/2}$  — відстань між  $\eta_1$  і  $\eta_2$ . Нехай  $H_E$  — сукупність найрізноманітніших комбінацій випадкових величин  $\xi(t)$ ,  $t \in E$  та їхніх границь у розумінні середньоквадратичної збіжності;  $H_E$  — підпростір у  $H$ . Будь-який лінійний функціонал  $\zeta$  від результатів спостереження являє собою випадкову величину з  $H_E$ . Отже, задачу лінійного завбачення можна інтерпретувати як задачу знаходження в  $H_E$  випадкової величини  $\tilde{\zeta}$ , найближчої до  $\zeta$ . Таку випадкову величину однозначно визначають із

$$M\{\zeta - \tilde{\zeta}\}\xi(t) = 0 \text{ при всіх } t \in E. \quad (2)$$

Рівняння (2) означає, що  $\tilde{\zeta}$  є проєкція  $\zeta$  на  $H_E$ , а  $\zeta - \tilde{\zeta}$  — перпендикуляр з точки  $\zeta$  на  $H_E$ . Похибка завбачення  $\sigma = \sqrt{M\{\zeta - \tilde{\zeta}\}^2}$  дорівнює довжині цього перпендикуляра. Співвідношення (2) показує, що осн. характеристики, які потрібно знати, щоб розв'язати задачу лінійного завбачення, є кореляційна ф-ція  $B(t, x) = M\xi(t)\xi(x)$  процесу  $\xi(t)$  і ф-ція  $B_{\zeta\zeta}(t) = M\zeta(t)\zeta(t)$ . Істинним достоїнством лінійної теорії є те, що вона може обмежитися цими порівняно простими характеристиками. У широкому класі випадків (напр., тоді, коли всі скінченновимірні розподіли системи випадкових величин  $\{\xi(t), t \in E\}$  гауссівські) розв'язок лінійної задачі збігається з опт. завбаченням, обчисленим за ф-лою (1). Рівняння (2) для визначення  $\tilde{\zeta}$  є основним у теорії лінійного завбачення і в різних конкретних задачах набуває спец. вигляду.

**Приклад 1.** (Екстраполяція за скінченною кількістю спостережень). Припустимо, що процес  $\xi(t)$  з відомою кореляційною ф-цією  $B_\xi(t, x) = M\xi(t)\xi(x)$  спостерігають у скінченній кількості точок  $t_1, \dots, t_n$ . Нехай відомі й ф-ція  $B_{\zeta\zeta}(t) = M\zeta(t)\zeta(t)$ . Лінійний функціонал від спостережуваних величин у цьому разі можна записати у вигляді  $\tilde{\zeta} = \sum_{k=1}^n c_k \xi(t_k)$ , де  $c_k$  потрібно знайти з умов (2), яка перетворюється на систему

$$\sum_{k=1}^n c_k B_\xi(t_i, t_k) = B_{\zeta\zeta}(t_i), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

**Приклад 2.** Припустимо, що процес  $\xi(t)$  з відомою кореляційною функцією  $B_{\xi}(t, s)$  спостерігається на інтервалі  $E = [0, T]$ . Нехай  $\lambda_k$  і  $\varphi_k(t)$  — послідовності власних значень і власних функцій інтегр. рівняння 
$$\varphi(t) = \lambda \int_0^T B_{\xi}(t, s) \varphi(s) ds.$$
 Тоді на інтервалі  $[0, T]$  процес  $\xi(t)$  можна подати у вигляді

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad (4)$$

де  $M\xi_k \xi_r = 0$ , якщо  $k \neq r$ ,  $M\xi_k^2 = 1$ . Із (4) випливає, що  $\xi$  треба шукати у вигляді 
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$$
, а використовуючи (2), одержимо

$$c_k = \sqrt{\lambda_k} \int_0^T B_{\xi\xi}(t) \varphi_k(t) dt.$$

**Приклад 3.** Нехай  $\xi(t)$  і  $\zeta(t)$  — випадкові процеси з відомими функціями  $B_{\xi\xi}(t, s)$  і  $B_{\xi\zeta}(t, s) = M\xi(t)\zeta(s)$ . Процес  $\xi(t)$  спостерігають на множині  $E$ . Якщо найкращу лінійну оцінку  $\hat{\zeta}(t_0)$  величини  $\zeta(t_0)$  шукати у вигляді  $\int_E c(t, t_0) \xi(t) m(dt)$ , де  $c(t, t_0)$  — невідома вагова функція, а  $m(\cdot)$  — відома міра на  $E$ , то з співвідношення (2) одержимо інтегр. рівняння для функції  $c(t, t_0)$ :

$$\int_E c(t, t_0) B_{\xi}(t, s) m(dt) = B_{\xi\zeta}(t_0, s), \quad (s \in E). \quad (5)$$

що є інтегр. рівнянням Фредгольма 1-го роду. Її аналітичні труднощі при розв'язуванні цього рівняння. Якщо

$$B_{\xi\xi}(t, s) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \varphi_j(s), \quad t, s \in E,$$

$$B_{\xi\zeta}(t, s) = \sum_{j=1}^n \chi_j(t) \varphi_j(s), \quad t \in E, \quad s \in E,$$

де  $\varphi_j(t)$ ,  $\varphi_j(s)$ ,  $\chi_j(t)$  — деякі відомі функції,  $E = [0, T]$ ,  $m(\cdot)$  — міра Лебега на відрізку  $[0, T]$ , то є метод, що зводить розв'язування рівняння (5) до розв'язування системи лінійних алгебр. рівнянь. Якщо процеси  $\xi(t)$  і  $\zeta(t)$  — стаціонарні й стаціонарно пов'язані, процес  $\xi(t)$  спостерігають на  $E = (-\infty, s)$  і найкращу оцінку  $\hat{\zeta}(s + T)$  шукають у вигляді 
$$\int_{-\infty}^s c(\tau) \xi(s - \tau) d\tau,$$
 то рівняння (5) набуває вигляду

$$\int_0^{\infty} c(\tau) B_{\xi}(v - \tau) d\tau = B_{\xi\zeta}(T + v), \quad v > 0. \quad (6)$$

Рівняння (6) наз. рівнянням Вінера — Хопфа. Амер. математик Н. Вінер (1894—1964), який уперше розглядав задачі забачення для випадкових процесів з неперервним часом, розробив метод розв'язування цього рівняння. Якщо  $B_{\xi}(u)$  і  $B_{\xi\zeta}(u)$  є перетвореннями Фур'є дробово-раціональних функцій, то для  $c(t)$  можна одержати явні вирази.

Якщо відмовитися від вимоги лінійності алгоритму обробки спостережуваної реалізації, то можна одержати оцінки, що мають меншу середньоквадратичну похибку, ніж лінійні оцінки. Зокрема, якщо розглядати для  $\xi$  оцінки виду

$$c + \sum_{n=1}^N \int_0^T \dots \int_0^T c_n(t_1, \dots, t_n) \xi(t_1) \dots \dots \xi(t_n) dt_1 \dots dt_n,$$

де  $c_n(t_1, \dots, t_n)$  — невідомі вагові функції, то з умов мінімуму середньоквадратичної похибки для вагових функцій можна одержати систему лінійних рівнянь. Щоб побудувати такі оцінки, треба знати моментні функції розглядуваних процесів до порядку  $2N$  включно. З величезного використання в автоматичного керування теорії, розроблення обробки, радіотехніки, метеорології.

Лит. 1. Готтман А. М. Введення в теорію стаціонарних випадкових функцій. Успехи математических наук, 1952, т. 7, в. 3; Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., 1960; Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965 [6 бл. стр. с. 649—654]; Савостников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., 1974 [6 бл. стр. с. 458—460]; Мясделтон Д. Очерки теории сыан Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 142—145].

Ч. Я. Яворенко.  
**ЗАБЕБІЛЮВАЛЬНИЙ ФІЛЬТР** — пристрій, що обробляє якийсь вхідний сигнал так, щоб у кожний поточний момент часу на виході цього пристрою одержувати найімовірніші з розуміння прийнятого критерію майбутні значення цього сигналу. Див. також Вінера — Хопфа рівняння першого роду, Фільтр.

Б. Ю. Мандроський-Соколов.  
**ЗАДАЧА З РУХОМИМИ КІНЦЯМИ** — одна з задач варіаційного числення. Формулюється так: нехай у  $(n+1)$ -вимірному просторі змінних  $(x, y) = (x, y_1, \dots, y_n)$  задано поверхні  $S_1$  і  $S_2$  відповідно до рівнянь

$$\varphi_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad k \leq n+1 \quad (1)$$

$$\eta_j(x, y) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad m \leq n+1 \quad (2)$$

і функціонал

$$I = g_1(x_1, y(x_1)) + g_2(x_2, y(x_2)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx. \quad (3)$$

Назвемо криву  $y(x)$  допустимою, якщо кінці її лежать на поверхнях  $S_1$  і  $S_2$ . З. з. р. к. полягає у відшукуванні серед усіх допустимих кривих такої, що забезпечує мінімум функціоналові  $I$ .

Для одержання тих чи тих умов, що характеризують цю криву, на ф-ції  $g_1, g_2, f, y, \varphi_1, \eta_j$  (як звичайно у варіаційному численні) накладаються певні обмеження (неперервність, диференційовність і т. д.). У випадку, коли одна з поверхонь  $S_1$  або  $S_2$  вироджується в точку простору  $(x, y)$ , одержуємо задачу з одним рухомих і одним фіксованим кінцем; коли обидві поверхні  $S_1$  і  $S_2$  вироджуються в точки, одержуємо задачу з фіксованими кінцями.

Оскільки задача з фіксованими кінцями в окремим випадком 3. з р. к., то крива, що надає мінімуму функціоналові  $I$  в задачі (1—3), повинна задовольняти всі відомі для задачі з фіксованими кінцями необхідні умови мінімуму. Зокрема, у випадку достатньої гладкості, вона повинна задовольняти рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Інтегральні криві системи (4) наз. екстремальми. Проте в розглядуваній задачі треба додатково означити положення кінців кривої на поверхнях  $S_1$  і  $S_2$ . Це досягається за допомогою умов трансверсальності. Кажуть, що допустима крива задовольняє умови трансверсальності, якщо для будь-яких векторів  $(dx_\alpha, dy(z_\alpha))$ ,  $\alpha = 1, 2$ , дотичних до поверхонь  $S_\alpha$ , виконуються умови

$$\left[ \left( f - \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) dx + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y'_i} dy_i \right]_{x=x_\alpha} + d g_\alpha|_{x=x_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

Для того, щоб крива  $y(x)$  надавала мінімуму функціоналові  $I$ , треба, щоб вона задовольняла умови трансверсальності.

Кожна точка поверхні  $S_1$  характеризується  $n+1-k$  параметрами. Отже, якщо в рівняння (5) при  $\alpha=1$  підставити  $(n+1-k)$  лінійно незалежних векторів  $(dx_1, dy(z_1))$ , дотичних до поверхні  $S_1$ , то одержана система рівнянь дасть змогу визначити положення кінця кривої  $(x_1, y(z_1))$ , що надає мінімуму функціоналові  $I$ . Аналогічно визначають положення кінця мінімізуючої кривої на поверхні  $S_2$ .

Наведемо деякі окремі випадки умов трансверсальності. Нехай у 3-вимірному просторі поверхні  $S_\alpha$  задано рівняннями  $x = \varphi_\alpha(y, z)$ ,  $g_\alpha = 0$ ,  $f = f(y, z, y', z')$ . Тоді, якщо вбрати як лінійно незалежні вектори, дотичні до поверхонь  $S_\alpha$ , вектори  $\left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y}, 1, 0 \right)$  і  $\left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z}, 0, 1 \right)$ , умови трансверсальності матимуть вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - z' \frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - z' \frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0.$$

Якщо  $x_1 = \text{const}$ ,  $x_2 = \text{const}$ , а  $g_\alpha \equiv 0$ , умови трансверсальності набувають вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial y'_i} \Big|_{x=x_\alpha} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Літ. дит. до ст. Варіаційне числення.

Ю. М. Данилін.  
**ЗАДАЧА З ФІКСОВАНИМ ЧАСОМ** — задача теорії оптимального керування, в якій моменти початку  $t_0$  та кінця  $t_1$  процесу зафіксовано. Виваши допоміжну змінну  $x_{n+1}$ , що

задовольняє рівняння  $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$  та граничні

умови  $x_{n+1}(t_0) = t_0$ ,  $x_{n+1}(t_1) = t_1$ . В. в. ф. ч. зводять до заг. задачі оптимального керування теорії.

В. М. Пшеничний.  
**ЗАДАЧА ПРО ВУЗЬКІ МІСЦЯ** — задача про виявлення найдуше перевантажених ресурсів, яка передбачає розробку способів усунення такого перевантаження. Такими ресурсами можуть бути устаткування, оснастка, людські резерви тощо. Оскільки виробнича програма підприємства змінюється в часі як за обсягом, так і за якістю, то змінюється й потреба в ресурсах кожного виду. При цьому може різко збільшуватися потреба в окремому виді ресурсів і перевантаження їх. Найчастіше ресурсом буває устаткування. При цьому перевантаження виявляються, як правило, найдефіцитніше устаткування — те, яке дороге коштує, великогабаритне, те, яке виробляють у невеликій кількості, тощо. В цьому разі для усунення вузького місця збільшують кількість одиниць устаткування «вузького місця», переміщують (якщо це не порушує технології) частину операцій в вузького місця на роботу місця менш завантажених груп устаткування (напр., на штампувальних ділянках — на преси більшої потужності), впроваджують понаднормові роботи і т. д. Вузьким місцем на підприємстві можуть виявитися й людські резерви — люди певної професії або розряду. Виявлення заздалегідь вузьких місць такого роду дає змогу своєчасно вжити потрібних організаційних заходів для усунення їх.

З. про в. м. належить до задач календарного планування. Її розв'язують як складову частину ширшої проблеми — оцінки й порівняння наявних ресурсів і ресурсів, необхідних для виконання фіксованої (заданої) виробничої програми. Розв'язання цієї задачі необхідне й при побудові календарного плану графіка роботи цеху (ділянки).

Т. П. Подчасова.  
**ЗАДАЧА ПРО КОМІВΟΥЖЕРА** — одна з поширених комбінаторних задач дискретного програмування. Заг. формулювання 3. про к.: торговець, що відвідує якесь місто, повинен відвідати кожне з  $(n-1)$  інших міст лише раз і повернутися у вихідне місто. Матриця відстаней  $A = \{a_{ij}\}$  ( $i, j =$

$= 1, 2, \dots, n)$  відома. Треба визначити, в якому порядку торговець має відвідувати міста, щоб заг. пройдена відстань була мінімальною. Якщо  $a_{ij}$  розглядати як час, витрати чи інший показник, то до З. про к. зводяться чимало прикладних задач, пов'язаних з обходом ряду пунктів, прокладанням комунікацій між ними, складанням розкладу виконання робіт, оптимізацією програм для ЕОМ тощо. Розв'язок З. про к. можна знайти, перебираючи ( $n-1$ )! можливих маршрутів. Проте зі зростанням  $n$  кількість варіантів швидко досягає астрономічних цифр, що змушує відмовитися від прямого переборування їх.

Один із способів розв'язування З. про к. полягає в зведенні її до задачі цілочислового програмування лінійного, яка полягає в мінімізації лінійної форми витрат  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$  при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

$$0 \leq x_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$(n-1)x_{ij} + u_i - u_j \leq n-2, \quad (3)$$

$$(i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n-1),$$

де  $u_i$  — деякі спеціально дібрані допоміжні цілі числа. Умова (1) виражає одноразовість відвідування міст, (2) — невід'ємність змінних, (3) — однозначність маршруту.

Використання ідеї програмування динамічного полягає в тому, що З. про к. подають у вигляді багатокрокового процесу нарощування ланок шляху, мінімізуючи витрати. Основне рівняння при цьому має вигляд:

$$f_i(e_1, e_2, \dots, e_k) = \min_{1 \leq m \leq n} \{c_{im} + f_m(e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e_{m+1}, \dots, e_k)\},$$

де  $f_i(e_1, e_2, \dots, e_k)$  — довжина оптим. шляху повернення від  $i$ -го до вихідного міста через міста  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , що залишилися,  $e_m$  — наступне за  $i$  місто шляху. Розв'язку досягають, перебираючи  $n \cdot 2^{n-1}$  варіантів. Найефективнішим з відомих способів одержання точного розв'язку З. про к. вважають *алгоритм границь метод.* Д. Д. Засманський.

**ЗАДАЧА ПРО НАЙКОРОТШИЙ ШЛЯХ** — задача про відшукування на напрямленому графі шляху найменшої довжини між двома заданими його вершинами. Нехай задано напрямлений граф, кожній дузі якого поставлено у відповідність невід'ємне число, яке наз. довжиною дуги. Довжиною шляху такого графа наз. суму довжин дуг, з яких складається цей шлях.

З. про к. ш. виникає в багатьох прикладних задачах, особливо під час розв'язування транспортних задач, дискретних задач про-

грамування динамічного тощо. В задачах сіткового планування й управління алгоритми розв'язування З. про к. ш. використовують для знаходження критичного шляху. Відомо кілька ефективних методів розв'язування З. про к. ш. Найчастіше вдаються до алгоритмів Мінті, Беллмана — Шимбела й Форда. В СРСР для аналізу транспортних мереж широко застосовують алгоритм, оснований на методі послідовного аналізу варіантів і близький до алгоритму Форда.

**ЗАДАЧА ПРО ОПТИМАЛЬНУ ШВИДКОСТІ** — одна з основних задач теорії оптимального керування, в якій критерієм якості керування є час переходу з однієї точки в іншу. Формально відповідає випадковій в загальній задачі оптимального керування теорії, коли  $f_0(x, u) \equiv 1$ . Загальна постановка З. про о. ш. така. Є об'єкт керування, закон руху якого описується системою диф. рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u), \quad i = 1, \dots, n,$$

де  $x = (x_1, \dots, x_n)$  —  $n$ -вимірний вектор фазових координат,  $u$  — керування, що є  $r$ -вимірним вектором, який вимірюється в якійсь множині  $U$   $r$ -вимірного простору. Ф-ції  $f_i(x, u)$  неперервні й неперервно диференційовні за  $x$ . Задано точки  $x^0$  і  $x^1$ . Потрібно вибрати таку вимірну обмежену ф-цію  $u(t)$  й момент часу  $t_0$  і  $t_1$ , що  $u(t) \in U$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , траєкторія  $x(t)$  систем (1.), яка відповідає керуванню  $u(t)$  й точці  $x^0$ , проходить у момент  $t_1$  через точку  $x^1$ , тобто задовольняю-

ться співвідношення  $\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t), u(t))$ ,

$t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $x(t_0) = x^0$ ,  $x(t_1) = x^1$  і різниця  $t_1 - t_0$  — мінімальна. Принцип максимуму (див. *Понтрягін принцип максимуму*) для цієї задачі формулюється так. Нехай  $u^0(t)$  — оптим. керування, що є розв'язком поставленої задачі оптим. швидкості, а  $x^0(t)$  — відповідна йому траєкторія. Тоді знайдеться така  $n$ -вимірна вектор-функція  $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t))$ , що:

а) справджується система рівнянь

$$\frac{d\Psi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(x^0(t), u^0(t))}{\partial x_i} \Psi_j(t);$$

$$b) H(\Psi(t), x^0(t), u^0(t)) = M(\Psi(t), x^0(t)),$$

$$\text{де } H(\Psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \Psi_i f_i(x, u), \quad M(\Psi, x) = \sup_{u \in U} H(\Psi, x, u);$$

в) ф-ція  $M(\Psi(t), x^0(t))$  — постійна на відрізьку  $t_0 \leq t \leq t_1$  і невід'ємна.

Найкраще розвинута теорія З. про о. ш. для лінійних систем дифер. рівнянь, тобто для випадку, коли ф-ції  $f_i(x, u)$  — лінійні

за  $x$  і за  $u$ . У цьому випадку систему (1) можна записати у векторній формі  $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ ,

де  $A$  — матриця з елементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , а  $B$  — матриця з елементами  $b_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Для лінійної З. про 0. ш. принцип максимуму набуває такого вигляду: для того, щоб керування  $u^0(t)$  було оптимальним, необхідно, щоб існувала така вектор-функція  $\Psi(t) = [\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)]$ , яка так задовольняє систему дифер. рівнянь

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -A^* \Psi(t),$$

що  $(\Psi(t), Bu^0(t)) = \sup_{u \in U} (\Psi(t), Bu)$ ,

де  $A^*$  — матриця, транспонована до  $A$ , а  $(x, y)$  — скалярний добуток векторів  $x$  та  $y$ . Припустимо, що ділянка  $U$  — паралелепіпед, тобто визначається нерівностями  $|u_i| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Вважається, що умову спільності положення виконано, якщо для всіх  $j = 1, \dots, r$  системи векторів  $b^1, b^2, \dots, b^{n-1}, b^j$  — лінійно незалежні. Тут вектор  $b^j$  має компоненти  $b_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Всі наведені вище результати справджуються при виконанні цього припущення. Нехай  $u^0(t)$  — розв'язок задачі лінійної оптим. швидкодії. Тоді кожна з функцій  $u_j^0(t)$ ,  $j = 1, \dots, r$  — кусково постійна, має лише скінченне число розривів і  $u_j^0(t)$  дорівнює  $+1$  або  $-1$ . Моменти часу  $t$ , в які відбувається зміна значення  $u_j^0(t)$  з  $+1$  на  $-1$  або навпаки, наз. моментами перемикання. Таким чином, оптим. керування має лише скінченне число моментів перемикання. Якщо всі власні значення матриці  $A$  дійсні, то число моментів перемикання кожної з компонент  $u_j^0(t)$  в оптим. керуванні не перевищує  $n-1$ . Останнє твердження має назву теореми про  $n$  інтервалів.

Лит. див. до ст. Оптимізація керування теорія. В. М. Понягин

**ЗАДАЧА ПРО ПЕРЕВЕЗЕННЯ З ПРОМІЖНИМИ ПУНКТАМИ** — узагальнена транспортна задача, коли для кожного пункту споживання складають рівняння матеріального балансу. Це рівняння відображує той факт, що для кожного пункту обсяг вивезеного продукту мінус кількість завезеного продукту дорівнює чистому обсягові продукту, виробленого в цьому пункті (якщо різниця додатна) або чистому обсягові споживаного в ньому продукту (якщо різниця від'ємна).

Рівняння матеріального балансу для кожного пункту має вигляд:

$$\sum_{i \neq j} x_{ij} + a_j^* = \sum_{k \neq j} x_{kj} + b_j^*, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

де  $x_{ij}$  — загальний обсяг перевезень з  $i$  в  $j$ ,  $i \neq j$ ,  $a_j^*$  — виробництво в пункті  $j$ ,  $b_j^*$  —

споживання в пункті  $j$ . Частку продукту місцевого виробництва, призначену для внутр. споживання, можна виключити з моделі. При цьому сумами  $a_j^*$  і  $b_j^*$  замінюють на суми  $a_j$  і  $b_j$  (чисте споживання), які визначають так:  $a_j = a_j^* - \min(a_j^*, b_j^*)$ ,  $b_j = b_j^* - \min(a_j^*, b_j^*)$ . 3. про п. з п. п. полягає у відшукуванні часів  $x_{ij}$ ,  $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ , що задовольняють рівняння матеріального балансу й мінімізують цільову

функцію  $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ ,  $(i \neq j)$ , де  $c_{ij}$  — втрати на транспортування одиниці продукту з пункту  $i$  в пункт  $j$ . Задачу можна подати у стислому вигляді (див. Сіткові методи планування в управлінні).

3. про п. з п. п. в прикладній задачі програмування лінійного. Для її розв'язування застосовують симплекс-метод, методи графічного розв'язування й інші.

У деяких окремих випадках розв'язування її можна звести до розв'язування транспортної задачі. 3. про п. з п. п. застосовують при розв'язуванні задач транспортування вантажів через проміжні бази або транспортування сировини з проміжною переробкою, напр. заготівля металобрухту в постачальників, перевезення, переробка його на пунктах проміжної обробки (пресування й зливення споживачам — металургійним заводам).

О. О. Баклан  
**ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ** — задача про найкращий розподіл  $n$  робіт між  $n$  виконавцями за припущенням, що кожного виконавця призначають лише на одну роботу, а кожна робота призначена тільки для одного виконавця. Виконавців розрізняють за їхніми здібностями до виконання тієї чи іншої роботи. Нехай  $c_{ij} > 0$  — продуктивність  $i$ -го виконавця на  $j$ -й роботі. Найкращим вважають розподіл робіт, який максимізує ефективність, що виражається сумою продуктивностей всіх виконавців. Позначимо через  $x_{ij}$  зміну, яка дорівнює одиниці, якщо  $i$ -го виконавця призначено на  $j$ -у роботу, й нулеві, якщо для  $j$ -ї роботи обрано ін. виконавця. Задача зводиться до задачі програмування лінійного, яка полягає в знаходженні  $x_{ij}$ , що максимізують

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Задача максимізації лінійної форми (1) за умов (2–4) завжди має цілочислові

розв'язки, тому за умов (2—3) кожен  $x_j$  буде нулем або одиницею. З. про п. становить окремий випадок транспортної задачі. Найефективнішим для розв'язування З. про п. є угорський метод. Ін. прикладами можуть бути задачі розподілу робіт між механізмами, розподіл цілей між збройними засобами тощо.

Літ. див. до ст. Програмування лінійне.

П. М. Колетков.

**ЗАДАЧА ПРО РОЗПОДІЛ ПОСТАВОК** — одна з задач оперативного оптимального керування в системах, пов'язаних з нагромадженням запасів на складах та витрачанням їх. Нехай на всіх  $n$  складах системи створюється запас однорідного товару. Товар періодично замовляють у виготовлювачів централізовано та одночасно для всіх складів системи. Припускають, що замовлена кількість товару  $Q$  відома. Замовлення може виконуватись із затримкою в часі. Наявність товару на кожному складі в момент виконання замовлення також відома. Треба вирішити, як розподілити кількість товару  $Q$  між  $n$  складами після того, як замовлення виконано. Припускають, що протягом часу  $T$  до реалізації наступного замовлення склади зізвідкіля товар не одержують. Треба, щоб замовлення розподіляла між складами так, щоб мінімізувалася сума витрат на перевезення й очікуваних штрафних витрат, зумовлених незадоволенням попиту протягом часу  $T$ . Нехай  $C_j(x_j)$  — транспортні витрати на перевезення  $x_j$  одиниць продукту відправника до  $j$ -го складу;  $v_j$  — величина запасу цього продукту в  $j$ -му складі в момент, коли здійснюється розподіл;  $y_j$  — віднесені до одиниць потрібного продукту штрафні витрати, коли запасу в  $j$ -му складі немає;  $p_j(v_j)$  — ймовірність того, що на  $j$ -му складі протягом часу  $T$  виникає попит на  $v_j$  одиниць продукту. Тоді, виходячи часом транспортування, функцію витрат для  $j$ -го складу можна визначити як

$$f_j(x_j) = c_j(x_j) + p_j \sum_{v_j = v_j + x_j}^{\infty} (v_j - y_j - x_j) p_j(v_j).$$

Задача полягає у визначенні невід'ємних цілих чисел  $x_j$ , що задовольняють умову  $\sum_{j=1}^n x_j =$

$$= Q \text{ і мінімізують функцію } z = \sum_{j=1}^n f_j(x_j).$$

З. про р. п. є задачею програмування математичного, розв'язувати її доводиться при оперативному керуванні на транспорті, в сфері матеріально-тех. постачання та в різних виробничих системах.

О. О. Вакаш.

**ЗАДАЧА ПРО РЮКЗАК** — задача про найкращий вибір предметів з загальної кількості  $n$  предметів так, щоб сумарна вага (об'єм, габарит тощо) вибраних предметів не виходила за зазначену межу  $b$ , а сумарна корис-

ність їх була максимальна. Кожен предмет має вагу  $a_j$  й характеризується коеф. корисності  $c_j$ . Нехай  $x_j$  дорівнює одиниці, якщо  $j$ -й предмет приймають до укладання, і нулеві в протилежному разі. Тоді задача є задачею цілочислового програмування лінійного, яка полягає в знаходженні цілих  $x_j$ , що мак-

симізують  $\sum_{j=1}^n c_j x_j$  за умов:

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad (1) \\ 0 \leq x_j \leq 1.$$

До З. про р. зводиться багато задач про розміщення устаткування на літаку чи ракеті, завантаження суден, компактного укладання устаткування тощо. В різних конкретних задачах коеф. корисності може описувати різні якості предметів — вартість, ефективність, надійність тощо. Нерівність (1) може означати обмеження на вагу, об'єм, деякі розміри тощо. З. про р. як задачу цілочислового програмування можна розв'язати *Гоморі методами*, але для розв'язування її найефективнішими є *алгор. і границь метод* і *метод функціональних рівнянь програмування динамічного*.

Літ. див. до ст. Програмування лінійне.

П. М. Колетков.

**ЗАДАЧА ПРО СКЛАД** — одна з задач оптимального планування в системах, пов'язаних з закупівлею та збутом однорідного продукту. З. про с. є прикладною задачею програмування лінійного. Нехай у початковий момент часу на складі, місткості якого  $k$  одиниць продукту, є  $k_0$  таких одиниць. У кожен з  $n$  дискретних моментів часу (1, 2, 3, ...,  $n$ ) відбувається закупівля й продаж деякої кількості одиниць продукту. В момент часу  $i$  наявний запас його повинен дорівнювати  $k_i$ . Заг. кількість продукту, яку можна закупити за всі  $n$  одиниць часу, дорівнює  $M$ . Вихідними даними є такі величини: витрати  $p_i$  на продаж одиниці продукту, реалізованого в момент часу  $i$ , витрати  $q_i$  на купівлю одиниці продукту, закупленого в момент часу  $i$ , вартості  $c_i$  зберігання одиниці продукту протягом проміжку часу  $(i-1, i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Позначимо через  $\alpha_i$  кількість продукту, реалізованого в момент часу  $i$ ,  $\beta_i$  — кількість продукту, закупленого в момент часу  $i$ ,  $\gamma_i$  — залишок продукту, що зберігався на складі у проміжок  $(i-1, i)$  і не реалізований у момент часу  $i$ ,  $\delta_i$  — заг. кількість продукту на складі після закупівлі у момент часу  $i$ . В результаті розв'язання задачі повинні бути одержані такі значення  $\alpha_i$  і  $\beta_i$ , при яких заг. прибуток

$$\sum_{i=1}^n (p_i \alpha_i - q_i \beta_i - c_i \delta_{i-1})$$

виявляється максимальним при обмеженнях:  $\gamma_i + \beta_i = \delta_i$ ,

$$\delta_{i-1} - \alpha_i = \gamma_i, \sum_{i=1}^n \beta_i \leq R, 0 \leq \delta_i \leq k, \alpha_i > 0, \beta_i > 0, \gamma_i > 0, \delta_0 = k_0, \delta_n = k_1, i = 1, \dots, n.$$

Розв'язування задачі зводиться до визначення оптимального однорідного потоку в мережі.

**ЗАМИКАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ** — упорядкована множина співвідношень, що її одержують граничним переходом із співвідношень, які утворюють обчислювальний алгоритм. Поняття З. о. а. запровадив акад. АН СРСР С. Л. Соболев. Нехай потрібно розв'язати рівняння

$$L u = f, \quad (1)$$

де  $u \in U$ ,  $f \in F$ ;  $U$ ,  $F$  — функціональні простори, а  $L$  — оператор, що переводить  $U$  в  $F$ . Замінівши рівняння (1) наближеними рівняннями

$$L^{(h,q)} u^{(h,q)} = f^{(h,q)}, \quad (2)$$

заданим у скінченновимірному просторі, де  $h = (h_1, \dots, h_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$  — параметри, що означають якість наближення (розміри сітки, кількість ітерацій, число відомих, величину допустимої похибки обчислення тощо). Нехай  $u^{(h,q)}$  — розв'язки відповідно рівнянь (1) та (2) і нехай  $u^{(h,q)} \rightarrow u$  в певній звичайній нормі, коли ці параметри прямують до граничних значень, які, не змінюючи логічності, можна вважати за такі, що дорівнюють нулеві. Обчисл. алгоритм розв'язування рівняння (2) полягає в послідовному одержанні сукупості співвідношень

$$L_m^{(h,q)} u^{(h,q)} = \varphi_m^{(h,q)}, \quad \varphi_m^{(h,q)} = D_m^{(h,q)} f^{(h,q)}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad M = M(h, q), \quad (3)$$

в якій  $L_m^{(h,q)} = I$  — тотожний оператор. Це означає, що на  $M$ -му кроці перетворень (3) одержимо точний розв'язок рівняння (2):  $u^{(h,q)} = D_M^{(h,q)} f^{(h,q)}$ . Сукупність (3) разом із способом апроксимації (2) і становить обчисл. алгоритм  $T$  розв'язування рівняння (1). Нехай можна виставити параметр  $z = z(m, h, q)$ , монотонно залежний від  $m$  і такий, що при фіксованому  $z$ ,  $0 < z < z_0 = \lim_{h \rightarrow \infty} z(m, h, q)$

і якомусь способі прямування до нуля параметрів  $h$  співвідношення (3) переходять у

$$L_2^z u^z = \varphi_2^z, \quad \varphi_2^z = D_2^z f^{(0,q)}. \quad (4)$$

при цьому  $L_2^z = I$ ; тоді  $u^z = \varphi_2^z$ . Співвідношення (4), якщо вони мають зміст, наз. З. о. а.  $T$ . Якщо оператори  $L_2^z$ ,  $D_2^z$  та  $\varphi_2^z$  рівномірно за  $z$  обмежені в певній звичайній нормі, то вважають, що алгоритм  $T$  має регулярне замикання. У протилежному випадку вважають, що алгоритм  $T$  має нерегулярне замикання (тоді при підвищенні точності дослідження рівняння (1)

в реалізації алгоритму  $T$  можуть виникнути труднощі, пов'язані або з втратою знаків в обчисленнях, або з виходом за розрядну сітку ЕОМ). Елементи матриць систем типу (2), що виникли з апроксимації задачі матем. аналізу, побудовано здебільшого якимсь регулярним чином. Тому можна припускати, що такі системи з багатьма невідомими можуть іноді за своїми властивостями бути близькими до свого замикання, ніж до своїх скінченновимірних аналогів. Завдяки цьому властивості обчисл. алгоритмів можна вивчати, досліджуючи властивості їхніх замикань способами й методами матем. аналізу. Приклад З. о. а. рівняння (1) — крайова задача для лінійного звичайного дифер. рівняння 2-го порядку; рівняння (2) — різницеве апроксимація рівняння (1) на сітці з кроком  $h$ ; сукупність (3) — формули прогонки, одержані на основі застосування методу Гаусса до системи (2). Тоді співвідношення (4) з крайовою задачею для систем трьох звичайних нелінійних дифер. рівнянь 1-го порядку, оператори якої факторизують оператор задачі (1).

В. І. Лебедєв.

**ЗАКРУГЛЕННЯ ПОХИБКА** — похибка, яка виникає при реалізації арифметичних операцій на ЦОМ із заокругленням результату до фіксованої кількості розрядів. Розрізняють два режими роботи ЦОМ — з фіксованою комою (ф. к.) і плаваючою комою (п. к.). При обчисленнях з ф. к. кожне число  $x$  перебуває в інтервалі  $-1 \leq x \leq 1$ , до якого початкові числа зводяться масштабуванням. При обчисленнях з п. к. кожне число  $x$  подають у вигляді  $x = 2^b \cdot a$ , де  $b$  — ціле додатне або від'ємне число, яке наз. порядком, і  $a$  (мантіса) — число, яке задовольняє одну з нерівностей:  $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$  або  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ . Припускають, що обчисл. машини оперують з числами, які мають у  $p$ -му (для простоти обмежимося  $p = 2$ ) представленні  $t$  розрядів після коми у випадку ф. к. і  $t$  розрядів у мантісі у випадку п. к.; такі числа називатимемо стандартними.

Рівність виду  $z = ft(x \overset{\times}{\times} y)$  означає, що  $x$ ,  $y$  та  $z$  — стандартні числа з ф. к. і що  $z$  одержано з  $x$  і  $y$  виконанням відповідної операції з ф. к. В цьому разі З. п. зумовлюватимуться тільки множенням і діленням. Припускають, що процес заокруглення такий, що  $z = ft(x \overset{\times}{\times} y) \equiv x \overset{\times}{\times} y + \varepsilon$ , де  $|\varepsilon| \leq 2^{-t-1}$ . Багато які ЦОМ у режимі ф. к. дають можливість точно обчислювати скалярний добуток  $x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \dots + x_n \times y_n$  без спец. програмування (якщо тільки не відбувається переповнення). В заг. випадку точне представлення такої суми вимагає  $2t$  розрядів після двійкової коми. Запис  $z = ft_2(x_1 \times y_1 + \dots + x_n \times y_n)$  означає, що  $z$  — число, одержане точним нагромадженням скалярного добутку і наступним заокругленням результату, на відміну від запису  $z = ft_2(x_1 \times$

$\times y_1 + \dots + x_n \times y_n$ ), який означає заокруглення на кожному кроці. Тоді  $z = f(x_1 \times y_1 + \dots + x_n \times y_n) \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i + \varepsilon$ ,

де  $|\varepsilon| < 2^{-t-1}$  на відміну від заокруглення на кожному кроці, коли  $|\varepsilon| < n \cdot 2^{-t-1}$ .

У режимі п. к. рівність  $z = f(x \times y)$  означає, що  $x, y$  і  $z$  — стандартні числа з в. к. і що  $z$  одержано з  $x$  і  $y$  виконанням відповідної операції в п. к. З. п. в цих операціях припускають таким, що

$$z = f(x \times y) \equiv (x \times y) (1 + \varepsilon), \quad (1)$$

де  $\varepsilon$  — відносна похибка і  $|\varepsilon| < 2^{-t}$ . Найрізноманітніші результати, які мають місце в режимі п. к., прямо випливають із співвідношень (1), що їх застосування приводить до оцінок виду  $(1 - 2^{-t})^r < 1 + \varepsilon < (1 + 2^{-t})^r$ ; їх можна спростити, припустивши, що виконується умова  $r \cdot 2^{-t} < 0.1$  (це цілком виправдано в практичних застосуваннях для будь-якого прийняттого  $t$ ). Тоді

$$(1 + 2^{-t})^r < 1 + 1.06 \cdot r \cdot 2^{-t}, \quad (1 - 2^{-t})^r > 1 - 1.06 \cdot r \cdot 2^{-t} \quad \text{і} \quad 1 - 1.06 \cdot r \cdot 2^{-t} < 1 + \varepsilon < 1 + 1.06 \cdot r \cdot 2^{-t}$$

звідки  $|\varepsilon| < 1.06 \cdot r \cdot 2^{-t}$ . Останнє співвідношення використовують у всіх таких оцінках:

$$1) \quad f(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) \equiv \prod_{i=1}^n x_i (1 + \varepsilon_i),$$

$$\text{де} \quad |\varepsilon_i| < (n-1) \cdot 1.06 \cdot 2^{-t},$$

$$2) \quad f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \equiv$$

$$\equiv x_1(1 + \varepsilon_1) + x_2(1 + \varepsilon_2) + \dots + x_n(1 + \varepsilon_n),$$

$$\text{де} \quad |\varepsilon_i| < (n-1) \cdot 1.06 \cdot 2^{-t}, \quad |\varepsilon_r| < (n-r+1) \times 1.06 \cdot 2^{-t}, \quad r = 2, \dots, n; \text{ тут припускалося, що } S_r = f(x_1 + x_2), \quad S_r = f(S_{r-1} + x_r), \quad r = 3, \dots, n; 3) \quad f(x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \dots + x_n \times y_n) = x_1 y_1 (1 + \varepsilon_1) + \dots + x_n y_n (1 + \varepsilon_n),$$

$$\text{де} \quad |\varepsilon_i| < n \cdot 1.06 \cdot 2^{-t}, \quad |\varepsilon_r| < (n-r+2) \times 1.06 \cdot 2^{-t}, \quad r = 2, \dots, n.$$

$$4) \quad f\left(\frac{x_1}{y_1} \frac{x_2}{y_2} \dots \frac{x_m}{y_n}\right) \equiv \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m}{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} \times (1 + \varepsilon),$$

$$\text{де} \quad |\varepsilon| < (m+n-1) \cdot 1.06 \cdot 2^{-t}.$$

Для операцій додавання й множення, які реалізують на ЦОМ у режимі п. к., справджуються нерівності  $|f(\alpha \times x_1) - f(\alpha \times x_2)| \leq 2|z| \cdot |x_1 - x_2|$ ,  $|f(\alpha + x_1) - f(\alpha + x_2)| \leq |z| \cdot |x_1 - x_2|$ . Стала  $z$  залежить від співвідношення порядків доданків і способу заокруглювання, зафіксованого в машині. Можна підібрати спосіб записування та заокруглювання такі, що  $z = 1$ . На основі зазначених результатів можна одержати мажорантні оцінки З. п. для багатьох обчисл. алгоритмів розв'язування прикладних задач (див. *Похибки обчислювань теорія*). Обчислювальні алгоритми, реалізовані на ЦОМ, називаються реальними.

Інший підхід до автомат аналізу й контролю похибок при обчислюванні на ЦОМ ґрунтується на інтервальному аналізі. Показано, що інтервальна арифметика є засобом для автомат. визначення верхніх границь нагромадженої З. п. при обчислюванні на будь-якій ЦОМ. Слід зазначити, що мажорантні оцінки, хоч і їх і широко використовують у практиці обчислень, є характеристичною рисою грубою, тому важливим є питання асимптотичного розподілу З. п.

Наведемо кілька результатів асимптотичного розподілу З. п. для перетворення векторів. Нехай в  $n$ -вимірному дійсному просторі  $R$  задано якусь опуклу одиницю зв'язану замкненою областю  $G$ , і вектори  $a \in G$  — випадкові величини, шільність розподілу яких є неперервною функцією  $P(z)$ , причому  $P(z \geq c) > 0$ . Припустимо, що над векторами  $a$  здійснюється послідовність  $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, k < \infty$  перетворень, матриці яких мають вигляд  $a_r = E - a_r \cdot b_r^T$ ,  $r = 1, \dots, k$ , де  $a_r$  та  $b_r^T$  — прямокутні матриці розміром  $n \times 1$  (вектор-стовпці),  $E$  — одинична матриця, знак штрих означає транспонування. Позначивши через  $z_r$  вектор, одержаний з вектора  $z \in G$  після перших  $r$  перетворень, одержимо  $a_r = z_{r-1} - (b_r^T z_{r-1}) a_r$ . Реально буде обчислено вектор

$$\begin{aligned} z_r^{(t)} &= z_{r-1}^{(t)} - (b_r^{(t)T} z_{r-1}^{(t)}) a_r^{(t)} + \varepsilon_r^{(t)} = \\ &= z_r^{(t)} z_{r-1}^{(t)} + \varepsilon_r^{(t)} = u_r^{(t)} u_{r-1}^{(t)} \dots u_1^{(t)} (z + \\ &+ \varepsilon_0^{(t)} + u_1^{(t)-1} \varepsilon_1^{(t)} + u_1^{(t)-1} u_2^{(t)-1} \varepsilon_2^{(t)} + \dots + \\ &+ u_1^{(t)-1} u_2^{(t)-1} \dots u_{r-1}^{(t)-1} \varepsilon_{r-1}^{(t)}), \end{aligned}$$

де  $u_r^{(t)} = E - a_r^{(t)} b_r^{(t)T}$ ,  $\varepsilon_0^{(t)}$  — похибка одержана від заокруглення компонент вектора  $z$  до  $t$  знаків після коми,  $\varepsilon_r^{(t)}$  — похибка, внесена на  $r$ -му кроці внаслідок неточної реалізації ф-ли обчислення  $z_r$ . З цієї ф-ли випливає, що вектор  $z_r^{(t)}$  можна розглядати як результат точного перетворення вектора, який стоїть у круглих дужках. Цей вектор відрізняється від вектора  $z$  на величину



$\eta_r^{(t)} = e_r^{(t)} + u_1^{(t-1)} e_1^{(t)} + \dots + u_1^{(t-1)} u_2^{(t-1)} \dots$   
 $\dots u_r^{(t-1)} e_r^{(t)}$ , яку називають еквівалентним збуренням і розглядають як ф-цію випадкового аргументу  $z$ . Припустимо, що при обчислюванні  $e_r^{(t)}$  скалярний добуток обчислюється в режимі нагромадження. Тоді  $e_r^{(t)} = \delta_r^{(t)} a_r^{(t)} + \sigma_r^{(t)}$ , де  $\delta_r^{(t)}$  — похибка від заокруглення скалярного добутку ( $\delta_r^{(t)}, \sigma_r^{(t)}$ ), а  $\sigma_r^{(t)}$  — похибка від заокруглення добутку заокругленого скалярного добутку на вектор  $a_r^{(t)}$ :  $v_r^{(t)} = x_r^{(t)} + v_r^{(t)}$ ,

де  
 $x_r^{(t)} = e_1^{(t)} + u_1^{(t-1)} \delta_1^{(t)} e_1^{(t)} + \dots + u_1^{(t-1)} u_2^{(t-1)} \dots$   
 $\dots u_r^{(t-1)} \delta_r^{(t)} e_r^{(t)}, v_r^{(t)} = u_1^{(t-1)} \sigma_1^{(t)} + \dots + u_1^{(t-1)} u_2^{(t-1)} \dots u_r^{(t-1)} \sigma_r^{(t)}.$

Щодо всіх похибок, які виникають при лінійних перетвореннях, справджується у випадку ф. м. таке твердження: всі похибки, що виникають при лінійних перетвореннях векторів, асимптотично незалежні між собою й розподілені рівномірно майже для всіх матриць перетворення куди  $E - \delta E'$  при будь-якому розподілі вхідних даних, який має відмінну від 0 майже всюди неперервну щільність розподілу.

Більшість сформульованих результатів переноситься на обчислення з п. м., але тут мають місце й деякі особливості. Як зазначено вище, в режимі ф. м. З. в. визначається переважно похибкою множення, яка асимптотично розподілена рівномірно й симетрично відносно 0. Симетрія похибок відносно 0 дає змогу одержати ймовірнісні оцінки для норм еквівалентного збурення значно кращі за мажорантні. Щодо додавання в режимі п. м. мають місце такі твердження: при будь-якому закріпленому способі заокруглювання, визначуваному лише відкинутими розрядами, похибка при додаванні випадкових чисел у режимі п. м. матиме систематичне зміщення при будь-якій системі числення з парною основою; класичний спосіб заокруглювання у будь-якій системі з непарною основою асимптотично приводить до незміщених похибок для додавання в режимі п. м. Отже, в обчисленнях з п. м. різні системи числення нерівноправні з погляду якості З. п.

Літ. Введення В. В. Осипина отримання з устійняття в прямых методах литейной алгебры. М., 1963 (библиогр. с. 148-153). Wilkerson J. H. Rounding errors in algebraic processes. London, 1963. Moore R. E. Interval analysis. Englewood Cliffs - New York, 1966. М. Д. Бабюк.

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ**  
 елемент автоматичних та обчислювальних пристроїв, який набуває різних станів, які характеризуються значеннями величин, що відображають інформацію, і зберігає ці стани певний час для дальшого використання в процесі переробки інформації.

Відповідно до форми представлення інформації З. е. можуть бути аналоговими й цифровими. Аналоговий З. е. набуває довільного стану в певному діапазоні запам'ятовуваних величин, напр., напруги на обкладках конденсатора, залишкової індукції магн. матеріалу тощо. Цифрові З. е. набувають фіксованої кількості станів, кожний з яких ставиться у відповідність певній цифрі. В обчислювальній техніці найпоширенішими є елементи з двома стійкими станами для представлення розряду двійкового числа — біта. З. е. застосовують переважно для побудови логіч. кіл та регістрів як складових частин процесорів машини (тригер) і побудови запам'ятовувальних пристроїв (ЗП).

За фіз. структуру З. е. для ЗП бувають дискретними або входять до складу запам'ятовувальних середовищ. Дискретні З. е. являють собою автономні фіз. одиниці (кріотрон, трансфлюксор), які конструктивно можна об'єднати в кодами запам'ятовувального пристрою або матрицю запам'ятовувальну чи виготовити як складову частину матриці методами групової технології (матриця феритова базисна, тонкоплівкова матриця). Запам'ятовувальні середовища відзначаються тим, що всі їхні ділянки мають рівноцінні властивості. За З. е. правлять ділянки, локалізовані за допомогою засобів зчитування — записування в просторі (стрічкові магніти, циліндричні тонкі магн. плівки) або в просторі й часі (магнітострижінні, акустичні ЗП).

За стійкість зберігання інформації розрізняють З. е. стійкі, тобто такі, які зберігають інформацію довільний час у процесі нормального експлуатації (ферит з прямокутним петлем гістерезису, сегнетоелектрик) і нестійкі — з самовільними стиранням інформації (конденсаторні ЗП, ЗП на електролізопроточних трубках). В останньому випадку інформацію треба періодично відновлювати. Найпоширенішими є стійкі З. е. Серед них розрізняють З. е., які зберігають записану інформацію при відмиканні живлення (магнітні елементи), і які не зберігають її (тригер, тунельний діод маліапроєкційний). Окрему групу становлять З. е. зі зчитуванням без руйнування інформації, стан яких не змінюється при багаторазовому зчитуванні. Частина З. е. цієї групи допускає зміну інформації в процесі роботи (біае, трансфлюксор, кріотрон, диски магнітні, магн. стрічки та ін.), їх широко застосовують для побудови адресних ЗП та запам'ятовувальних пристроїв асоціативних. Друга частина цієї групи З. е. допускає одноразове записування інформації, виконуване, як правило, під час виготовлення нагромаджувача встановленням елементів зв'язку (діодних, резистивних, індуктивних) у запам'ятовувальну матрицю, засвічуванням або перфорацією певних ділянок носія (оптичні ЗП, перфоровані носії) та ін. способами. Виготовлений один раз набір таких З. е. надалі використовують лише для зчитування з нього інформації й широко застосовують у довгочасних запам'ятовувальних пристроях.

Для побудови нагромаджувачів ЗП використовують З. е. з різними принципами роботи (від електромеханічних і пневматичних до електромагнітних та оптичних). Основними напрямками розвитку З. е. є підвищення швидкостей записування й зчитування інформації та поліпшування технологічності виготовлення З. е. в умовах масового виробництва. В обчисл. машинах найчастіше застосовують магнітні З. е. Так, більшість зовнішніх ЗП виконано на носіях з магнітним покриттям (барabanи магнітні, магнітні диски та стрічки). Виготовляючи швидкодіючі операційні за пам'ятю спеціальні пристрої, використовують феритові З. е. (феритові осердя з зовн. діаметром 0,3—2 мм і часом перемикання 0,2—0,4 мксек). Щоб збільшити швидкість роботи ЗП, застосовують З. е. на циліндричних і плоских тонких магн. дίσках з часом перемикання від одиниць до десятків наносекунд. Збільшення швидкості й щільності записування інформації та поліпшення технологічності виробництва ЗП досягають, застосовуючи напівпровідникові матриці в інтегральному виконанні та оптичні ЗП з використанням лазерного променя. ● Н. Н. Суворов

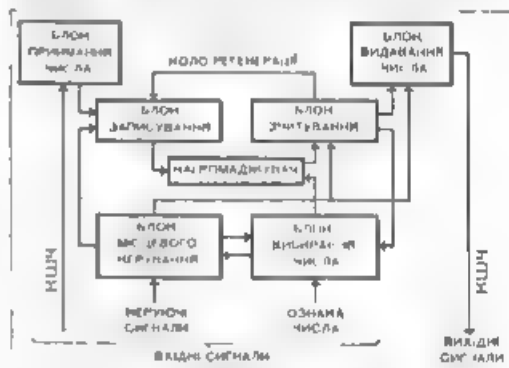
**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРЯСТРІЙ** — пристрій, що виконує функції приймання, зберігання та видавання закодованої інформації в системах з машинами, призначених для передавання й обробки її.

Перші тех. пристрої зберігали інформацію застосовували ще в 19 ст. телеграфну стрічку при прийманні на апараті Морзе можна розглядати як засіб зберігання інформації. Згодом було розроблено систему автоматичного телеграфування, при якій спочатку заготовляють стрічку, перфоруєть її, а потім швидко передають заготовлену на перфорацийній стрічці телеграму за допомогою трансмітера. Подібні ЗП на перфострічках і досі широко застосовують в обчислювальній техніці. Необхідність підвищення швидкості і надійності передачі у техніці зв'язку привела до створення ЗП з використанням запису на магнітній стрічці, які набули поширення і в зв'язку зі створенням верстатів з програмним керуванням з розвитком обчисл. техніки, яка спочатку використовувала наявні пристрої зберігання інформації (перфорацийні картки, перфострічки, стрічки магнітні, електро мех. реле тощо), почали розробляти ЗП з автомат. занесенням і видаванням інформації за адресою, що є закодованим номером запам'ятовувальної комірки, за дуже короткий час — від сотень до одиниць мікросекунд і менше. При цьому обсяг зберезуваної інформації становить десятки й сотні тисяч слів (чисел). Так з'явилися ЗП на ультразвукових трубках, а згодом на феритових осердях з прямокутним циклом гістерезису, феромagnetних джуйках тощо. Розширення асортименту і якісних показників ЗП, розроблених для потреб обчисл. техніки, привело до інтенсивного впровадження ЗП як автономного пристрою в інших галузях техніки (зв'я-

зок, автомат. керування, вимірювання тощо)  
і підвищення їхнього тех. рівня.

Оси показниками ЗП є: *задачі* «якомога більше пристрою змістять»; швидкодія, яка характеризується часом звертання до ЗП, надійність роботи, що визначається нечутливістю до змін умов навколишнього середовища та напруги живлення; економічність, яка характеризується відношенням витрат на виготовлення ЗП до ємності ЗП.

Вимоги обчисл. техніки до ЗП щодо підвищення швидкодії та ємності при мінім.



Блок-схема принципального устройства.

витратах мають суперечливий характер і, як правило, поєднують їх в одному пристрої не вдається. Пошуки приводять до використання багаторівневої пам'яті — ієрархії ЗП, в яку включають ЗП різних пристроїв і застосовують їх так, щоб можна було звести до мінімуму їхні входи й максимально використати переваги.

Розрізняють ЗП таких типів: за характером звертання до ЗП — *запам'ятовувальний пристрій адресний і запам'ятовувальний пристрій асоціативний* (у першому звертання провадиться до комірок, номер якої містить код адреси, тобто за адресою, у другому — за деякою інформацією, яка міститься в самому слові, числі, тобто за змістом); за способом вибирання інформації з окремих комірок — *запам'ятовувальні пристрої з довільним звертанням, запам'ятовувальні пристрої з послідовним звертанням і запам'ятовувальні пристрої з циклічним звертанням* (останні дві типи, як правило, пов'язані з застосуванням нагромаджувача з переміщенням інформації щодо її носія — різні лінії затримки, з переміщенням носія відносно засобів зчитування — стрічки, карти, барабан і т. в. або з необхідністю періодично відновлювати інформацію — електроннопроменеві трубки); за функціональними призначенням — *операційні запам'ятовувальні пристрої*, що безпосередньо зв'язані з арифм. пристроями, їх використовують для запам'ятовування проміжних результатів обчислень та інформації з зовнішнього ЗП для поточних обчислень, *довгочасні запам'ятовувальні пристрої*, які застосовують для тривалого зберігання незмінної з про-

цесі роботи ЦОМ інформації (програми, константи), звичайно записуваної поза машиною, *запам'ятовувальні пристрої зовнішні*, які призначені для зберігання всієї інформації, яку вводять у машину, відзначаються великою ємністю при порівняно невеликій швидкодії; *запам'ятовувальні пристрої буферні* — для узгодження швидкостей роботи окремих пристроїв в ЦОМ або зовні, об'єктів між собою та ЦОМ; і як різновид буферних ЗП — *запам'ятовувальні пристрої магазинні*, або *стекові*, — для узгодження швидкостей арифмет. пристрою та оперативного ЗП.

Вважаючи на різноманітність типів ЗП, їхні функціональні особливості можна відобразити узагальненою блок-схемою (див. мал. ), яка включає такі блоки: 1) *нагромаджувач* — призначений безпосередньо для зберігання задоволеної інформації; 2) блок приймання числа — призначений для приймання і, в разі потреби, короточасного зберігання коду числа; 3) блок записування — перетворює код числа на сигнали, здатні викликати відповідні зміни в стані запам'ятовувального середовища нагромаджувача; 4) блок вибирання — використовується для перетворення ознаки числа на сигнал зчитування його з нагромаджувача; 5) блок зчитування — перетворює сигнали нагромаджувача на сигнали, стандартні для машини; 6) блок видавання числа — призначений для короточасного зберігання коду числа; 7) блок місцевого керування — перетворює керувальні сигнали звертання до запам'ятовувального пристрою на послідовність сигналів, які керують роботою блоків ЗП. Залежно від типу ЗП ці принципи його побудови можуть бути й відхилення від наведеної схеми. Так, напр., у швидкодіючих ЗП іноді доцільно не застосовувати блоків приймання чи видавання числа, в довгочасних ЗП немає блоку записування тощо. ЗП працює в режимі зчитування певного числа або в режимі записування. Записується число поданням до ЗП по кодових *знаках* числа (КШЧ) коду числа, керуючого сигналу в блок місцевого керування. Ознаки числа що здебільшого є кодом адреси запам'ятовувальної комірки, в яку треба записати число. Координати цієї комірки знаходять блок вибирання числа методом розшифрування коду адреси, порівнянням коду заданої адреси з кодом номера комірки або виробленням ознаки вільної комірки. Цей же самий блок отищає комірку і — разом з блоком записування — записує код числа в нагромаджувач. Зчитування здійснюється від записування тм, що код числа зчитаний з комірки, передається через блок зчитування в блок видавання і, в разі потреби, в блок записування для відновлення зруйнованої при зчитуванні інформації. Фіз. адресу комірки знаходять або за кодом адреси, або за іншими ознаками, що є найчастіше кодом числа або його частиною — у випадку асоціативних ЗП.

Розвиток ЗП йде шляхом створення високо-економічних, надійних малогабаритних при-

строїв великої швидкодії та ємності. Звичайно, всі ці якості не поєднуються з одним ЗП. Наприклад, 60-х років виконувалися роботи щодо створення ЗП з матрицями на монолітних *інтегральних схемах* ємністю від 12 до 400 тис. біт в циклом 50 + 200 нсек. Розробляють ЗП на тонких феромагнітних плівках (плоских і циліндричних) ємністю від 25 тис. до 200 млн біт з часом звертання 75 нсек + 1 мксек. Розроблено зовнішні *запам'ятовувальні пристрої на дисках магнітних* з плаваючими голівками ємністю до 10 мільярдів біт.

Лит. Крайзер, Л. П. Інструментальні феромагнітні записуючі пристрої. М., 1964 [обдлогр. с. 349—371]; Котлянич, В. П. Оперативные запоминающие устройства на ферритовых сердечниках и тонких магнитных плівках. М. — Л., 1965 [обдлогр. с. 21, 246]. Записи на дисках устройств сверхмалых ЦОМ. Пер. с англ. М., 1966. Ф. П. Луко

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ АДРЕСНИЙ** — запам'ятовувальний пристрій, у якому запам'ятовувальні комірки або групи їх мають певний машинний номер (адресу), що відповідає їхньому розміщенню в запам'ятовувальному середовищі, а звертання до певної ділянки цього середовища проводиться відповідно до коду його адреси. При адресному звертанні код адреси точно вказує часово-просторові координати тієї частини запам'ятовувального середовища, в якій міститься інформація з цією адресою (або до якої треба записати її).

Характерною особливістю З. п. а. є наявність у них блоку перетворення коду адреси на сигнали вибирання. Цей блок виконують по-різному залежно від типу *нагромаджувача*. Якщо носій інформації переміщується відносно засобів зчитування або інформація переміщується відносно носія, то З. п. а. наз. *циклічним*, або з *послідовним вибиранням*. ЗП з дискретними *запам'ятовувальними елементами*, до яких доступ здійснюється за допомогою т. з. ліній вибирання наз. *запам'ятовувальними пристроями з довільним звертанням*. У ЗП з запам'ятовувальними елементами записану в нагромаджувач інформацію супроводжує особлива мітка — *маркер* (нагромаджувач на магнітному барабані) або свій номер (нагромаджувач на магн. стрічці). Момент вибирання інформації визначається збігом числового значення коду адреси з номером, який супроводить інформацію, що переміщується відносно засобів зчитування, або рівністю його значенню числа, яке є результатом підсумовування маркерних імпульсів. У ЗП з довільним звертанням код адреси за допомогою дешифраторів і формувальних пристроїв перетворюється на сигнали вибирання в певних лініях вибирання, які називають адресними. Т. ч., адресні лінії визначають фіз. адресу запам'ятовувальної комірки, призначеної для зберігання певного слова. Для записування коду слова до запам'ятовувальної комірки використовують розрядні лінії, що об'єднують елементи нагромаджувача, які належать до одного розряду. По розрядах ліній подаються сигнали.

що відповідають записуваному кодові. Вони ж призначені й для виведення інформації.

Щоб зменшити кількість обходження, лінії вибирання проводять у кількох вимірах — по кількох координатах. Відповідні лінії по кожній координаті збуджуються згідно з заданим кодом, а запам'ятовувальні елементи, що їх вибирають, визначаються збігом збуджених ліній.

Здебільшого застосовують дво- й трикоординатні системи вибирання. В двокоординатній (двовимірній) системі адресні лінії, які в цій системі називають числовими, керуються по одній координаті й можна з них проходити через одну запам'ятовувальну комірку. Керування по 2-й координаті здійснюється розрядними лініями. В трикоординатній (тривимірній) системі адресними діями керують по двох координатах. Розміщення вибраного слова визначається перетином адресних ліній, а розряди слова — розрядними лініями по 3-й координаті. Під час зчитування інформації запам'ятовувальні елементи можуть зберігати свій стан, встановлений внаслідок написування. Це ЗП з керуванням зчитуванням. Якщо ж при зчитуванні запам'ятовувальні елементи свого стану не зберігають, а встановлюються в певний початковий стан, то такий ЗП наз. ЗП з руйнівним зчитуванням. Саме запам'ятовувальні елементи пасамперед визначають тех. характеристики ЗП. Тому з назви ЗП зчитування є й інформація про використання запам'ятовувальних елементів: нагромаджувач на магн. стрічці чи на магн. барабані, дисковий ЗП, ЗП на феритах, на тонких плівках тощо. Здебільшого в З. п. а. використовують порівняно прості запам'ятовувальні елементи з руйнівним зчитуванням.

ЗП якого-небудь одного типу, як правило, не може мати характеристики, які задовольняли б усі вимоги до цих пристроїв при використанні їх у системах перетворення дискретної інформації. Напр., збільшити швидкодію ЗП можна лише за певного зменшення його ємності. Тому здебільшого ЗП в ЦОМ створюють певну ієрархічну структуру, на верхніх ступенях якої містяться ЗП з великою швидкодією й порівняно малою ємністю, а на нижніх — повільнодіючі ЗП великої ємності. Залежно від класу ЦОМ таких ступенів у них буває 2—4, а в обчислювальних системах — до 6—7.

Літ. Гутенкажер Л. Н. Электронные информационно-логические машины. М., 1982 [6161огр. с. 198]. Крайзер З. П. Быстродействующие ферромагнитные запоминающие устройства. М., 1984 [6161огр. с. 349, 371]. Ф. Н. Зинко.

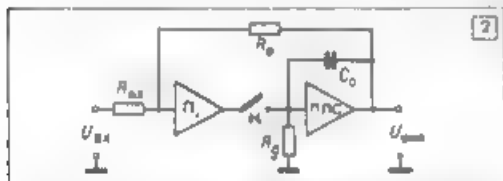
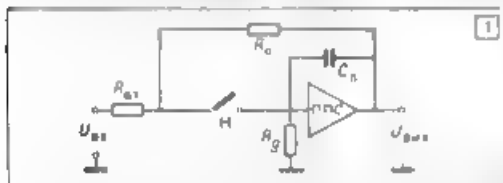
**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ АОМ (ЗП АОМ)** — комплекс технічних засобів аналогової обчислювальної машини для запам'ятовування та відтворення машинних змінних. ЗП АОМ бувають електромех., ємнісні (конденсаторні) та ЗП з магнітними носіями запису інформації.

В електромеханічних ЗП АОМ використовують подільники напруги (потенціометри), в яких запам'ятовуванням напругам

відповідають положення рухомого контакту (повзуна). Щоб привести в дію повзун подільника, застосовують неперервний слідкуючий системи та реверсивний кроковий двигун, який забезпечує тривале незмінне положення повзуна, коли немає імпульсів керування. З'єднання приводного двигуна слідкуючої системи з веденими осями потенціометрів здійснюється за сигналами керування через електромагнітні муфти. Для електромех. ЗП характерними є велика точність введення — виведення запам'ятовуваної інформації (близько сотих часток процента) й практично необмежений час запам'ятовування, якщо апаратуру відключено від джерел живлення. Такі ЗП з'єднують з АОМ, підмикаючи подільники напруги до розв'язувальних кіл без проміжних перетворювачів. Осн. вада цих ЗП — мала швидкодія та порівняно велика витрата апаратури на одиницю збережуваної інформації.

Найчастіше застосовують ємнісні ЗП, в яких використовують властивість конденсатора зберігати подану на нього напругу. Конденсаторні комірки пам'яті підмикають до розв'язувальних кіл АОМ через електромеханічні (релевні) або електронні комутатори. Щоб запобігти свотворенню збережуваної інформації, внаслідок розрядження конденсаторів на вони, завантаження, в ЗП АОМ вводять розв'язуючі електронні підсилювачі (потоворювачі) в великим входним і невеликим вихідним опорам. Для цього використовують розв'язувальні підсилювачі постійного струму (ППС). Комірки ЗП АОМ показані на мал. 1. Час зберігання конденсатором напруги  $U_{0\text{вх}}$  (ключ  $K$  розімкнено) забезпечується в цій схемі за рахунок значної ємності сталого часу розряду, яка дорівнює  $T_p = C_p R_p (1 + k)$ , де  $k$  — коеф. підсилення ППС без зворотного зв'язку. Час запам'ятовування напруги  $U_{0\text{вх}}$  залежить від сталого часу заряджання конденсатора  $T_z = C_p R_0$ , він обмежує швидкодію й точність роботи схеми. Введення підсилювача струму (потоворювача) ПП з коеф. підсилення за струмом  $k_1$  (мал. 2) зменшує сталу часу заряджання  $T_z$  і, отже, — час заряджання конденсатора в  $k_1$  разів, не знижуючи точності роботи схеми в режимі запам'ятовування й не зменшуючи часу зберігання. Така схема може забезпечити тривалість часу приймання інформації в кілька десятків мкс при похибці порядку десятків частот процента й тривалості часу зберігання порядку кількох десятків сек. Заг. вадою конденсаторних ЗП є обмежений час зберігання інформації та відносно велика витрата апаратури на одиницю інформації, яку зберігають. Інформаційну ємність комірки ЗП АОМ у двійкових одиницях ( $bitax$ ) можна оцінити за формулою  $C_0 = \log_2 1/\delta$ , де  $\delta$  — відносна похибка відтворення величини напруги, яку зберігають. Напр., коли  $\delta = 0,1\%$ ,  $1/\delta = 10^3$  і  $C = 10$  двійкових одиниць.

У ЗП АОМ з магнітним носієм запису інформації використовують властивості феромагнітизму з прямокутною петлею гістерезису зберігати стан намагніченості, що залежить від запам'ятовуваного електричного сигналу. У ЗП, призначених для запам'ятовування окремих рівнів напруг без проміжного перетворення (модуляції), застосовують феритові осердя. Запам'ятовування на таких елементах здійснюється безпосереднім перетворенням напруг постійного струму на пропорційні прирощування залиш-



1. Контрпа пам'яті запам'ятовувального пристрою АОМ  
2. Контрпа пам'яті запам'ятовувального пристрою АОМ з підсилювачем струму

кового магнітного потоку осердя, а зчитуванні спектр сигналу пропорційні рівню залишкової намагніченості осердя. Найменша похибка при запам'ятовуванні та зчитуванні в елементах з тороїдними осердями становить одиниці процентів. Похибки елементів пам'яті, побудованих на осердях з розгалуженими магнітопроводами (трансфлюксорах) із застосуванням схем зворотних зв'язків, становлять десятки частки процента.

ЗП АОМ на трансфлюксорах і тороїдних осердях з використанням методу ідеального намагнічування й негативних зворотних зв'язків характеризуються порівняно невеликою швидкістю: тривалість часу приймання інформації становить десятки частки — одиниці сек. Істотного збільшення точності та швидкості ЗП АОМ на магнітних носіях досягають за рахунок проміжного перетворення запам'ятовуваних сигналів за допомогою модуляції й демодуляції. Перетворення за системою двійкової кодово-імпульсної модуляції забезпечує можливість використовувати комплекс запам'ятовувальних елементів, які застосовують у цифровій обчисл. техніці: магнітні стрічки, диски, барабани, феритові матриці. Похибки таких ЗП становлять десятки й соті частки процентів, а їхня швидкодія забезпечує запам'ятовування й відтворювання сигналів з багаторазовим транспонуванням спектра сигналів у ділянці високих частот, що дає змогу використати в АОМ ЗП з швидкою періодизацією розв'язування. В спеціалізо-

ваних АОМ широко застосовують ЗП на магнітній стрічці (напр., для статистичної обробки інформації), в яких запам'ятовували сигнали спочатку перетворюють за допомогою якогось виду модуляції. Похибки цих ЗП становлять здебільшого десятки частки процента.

Літ. Вєрхляк А. Ф. Запоминающие устройства электронного моделирования. «Автоматика и приборостроение» 1983, № 3. Зинкевич Н. П. Идеальное намагничивание ферритовых сердечников с прямоугольной петлей гистерезиса, или, используемых в качестве элементов аналоговой памяти В кн. Вопросы технической кибернетики М, 1988. Роев И. Б. и т. М. А. Магнитная память для непрерывных вычислений. «Вестник АН СССР» 1984, № 11. Дамин Е. И. Организация информации в автоматизированных устройствах аналогового и аналого-цифрового вычислительной техники М, 1988.

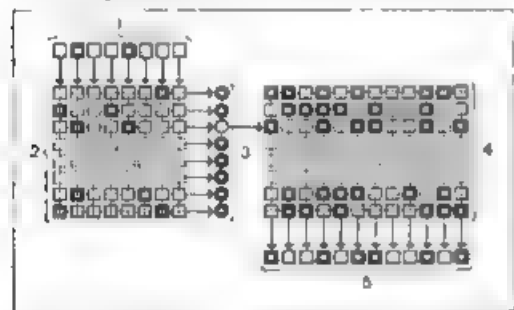
**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИБІР АСОЦІАТИВНИЙ** — запам'ятовувальний пристрій (ЗП), інформацію з якого видобувають не за адресою, а за певними ознаками цієї інформації внаслідок одночасного порівнювання всіх або групи зберезуваних слів з заданою ознакою. Ознаку, що належить слову в пам'яті, називають асоціативною, а ознаку, за якою проводиться пошук, — ознакою опиту (див. мал.). Принципи побудови З. п. а. визначаються видом пошуку інформації — простим чи складним. Простий пошук полягає у відшукуванні слова, асоціативна ознака якого збігається з ознакою опиту. Під складним пошуком розуміють відшукування екстремуму всіх чисел у середині або поза заданими межами, чисел, які порівнюють заданому або більшім за нього, дорівнюють заданому або меншім за нього, найближчих більших, найближчих менших і т. д. Якщо при простому пошуку ознаці опиту завжди відповідає тільки одне слово в пам'яті, причому опит завжди ведеться за тими самими розрядами, то такий пошук може здійснювати найпростіший З. п. а. Конструкція З. п. а. ускладнюється, якщо опит ведеться за будь-якими розрядами й якщо ознаці опиту відповідає одночасно кілька слів. Поділ багатозначної відповіді й послідовне видобування слів проводиться або апаратними методами, або алгоритмічними. Можливо й упорядковане видобування слів у порядку зростання або спадання їхніх величин.

Складний пошук можна здійснити в З. п. а., призначеному для простого пошуку з алгоритм. поділом багатозначної відповіді. Якщо в кожному запам'ятовувальну контрпа такого ЗП ввести ще додаткові логічні, арифм. й запам'ятовувальні елементи й забезпечити відповідні сполучення між ними не лише в межах запам'ятовувальної контрки, а й з сусідніми контрками, то, крім асоціативного пошуку, стане можливим здійснювати й груп. арифм. та логіч. операції.

Одочасний перегляд усієї інформації в З. п. а. потребує застосування запам'ятовувальних елементів з нерушливим зчитуванням, які реалізують логічні функції типу рівнозначності чи нерівнозначності. Найповніше ці вимоги задовольняють кріотрони (див. Кріотронні елементи обчислювальної тех-

к(и), але можна створювати З. п. а. й на ін. елементах — багатоотвірних феритових осердях, біаксах, тунельних діодах, магнітних плівках і транзисторних елементах.

Ємність розроблених З. п. а. — кілька тисяч слів в циклом звернення — від часток до одиниць мікросекунд. Через недостатню ємність З. п. а. їх використовують у сучасних машинах переважно як буферні ЗП. І вважають, що для того, щоб З. п. а. можна було використовувати як основний ЗП машини, треба, щоб він мав ємність  $10^2$  →



Спрощена блок-схема асоціативного запам'ятовувального пристрою: 1 — банківка опису; 2 — асоціативні описки слів; 3 — індикатори збігу; 4 — основна інформація; 5 — виходи основної інформації

$10^4$  біт. Таке застосування З. п. а. привело б до суттєвого спрощення організації обчисл. процесу й наблизило б його до звичайної мови матем. формул. З. п. а. ефективні при розв'язуванні інформаційно-довідкових завдань, завдань розпізнавання тощо, коли зберігається інформація чи запам'ятовується, що надходять, не в суворому впорядкованні й коли єдиним методом пошуку потрібної інформації в адресному ЗП є перебирання, тобто почерговий, слово за словом, перегляд усієї інформації або більшої частини її.

З. п. а. може дати помітний вииграш у продуктивності при розв'язуванні завдань, які потребують опрацювання в реальному масштабі часу дуже великих масивів неупорядкованої інформації та завдань, пов'язаних, напр., з телеметрією, з роботою систем зв'язку й радіолокаційних систем оповіщення й наведення, а також пов'язаних з керуванням повітряним транспортом тощо.

Лит. Краймер Л. П. (та ін.). Асоціативні елементами пристроїв. Л., 1967 (Бібліогр. с. 175—181); Хейлс Е. Асоціативні запам'ятовувальні пристрої. В кн. Запам'ятовувальні пристрої сучасних ЕЦМ. Пер. з англ. М., 1968.

І. Д. Войтович, Г. А. Михайлов.

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ БУФЕРНИЙ** — запам'ятовувальний пристрій для узгодження швидкостей роботи різних пристроїв ЦОМ чи зовнішніх об'єктів між собою та з ЦОМ. Окремі пристрої машини, а також зовнішні пристрої, що використовують різні принципи побудови (від електронних схем до електромеханічних), не можуть працювати з однаковою швидкістю. Щоб запобігти втратам часу через неузгоджену (в часі) роботу пристроїв, застосовують З. п. б.,

який нагромаджує інформацію в темпі повільнішого пристрою й видає її зі швидкістю швидкодіючого пристрою, або навпаки. Для узгодження швидкості роботи зовн. пристроїв з ЦОМ як буферні ЗП найчастіше застосовують ЗП на магнітних барабанах, дисках або на феритах, що обмінюються інформацією з оск. оперативним ЗП (ОЗП) машини. Щоб узгодити швидкість роботи окремих пристроїв машини (здебільшого ОЗП й арифметичного пристрою) як буферні застосовують дужче швидкодіючі ОЗП великої ємності та ЗП на тонких магнітних плівках, реєстрах різної модифікації тощо.

Ф. Н. Зиков.

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ ДОВГОЧАСНИЙ** — див. Довгочасний запам'ятовувальний пристрій.

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ З ДОВІЛЬНИМ ЗВЕРТАННЯМ** — запам'ятовувальний пристрій (ЗП), в якому час звертання за довільною адресою не залежить від взаємного розміщення запам'ятовувальних комірок у нагромаджувачі. З. п. з д. з., як правило, розробляють на базі нагромаджувачів, які за своєю природою не потребують циклічного або послідовного зчитування (записування).

Найхарактернішими рисами З. п. з д. з. є наявність у запам'ятовувальному середовищі ліній вибирання і формувачів сигналів вибирання, які приводять в дію відповідно до ознаки слова або коду її адреси. Звернення до запам'ятовувальної комірки (див. Комірка запам'ятовувального пристрою) здійснюється в них внаслідок збігу ліній вибирання й просторі й сигналів вибирання в них за часом.

Нагромаджувач З. п. з д. з. будують гол. чин, на основі дискретних запам'ятовувальних елементів, якими найчастіше бувають феритові осердя, монолітні ферити й феритові пластини та тонкі магнітні плівки й МОН-транзистори (метал — оксид — напівпровідникові транзистори).

В процесі роботи ЦОМ порядок звертання до ЗП значайно визначається результатами обчислювань на попередньому етапі, тобто не завжди можна використати природний порядок проходження не лише числової інформації, а й команд. За такої організації обчислювального процесу найефективнішим виявляється застосування З. п. з д. з. Тому як ЗП, що працює безпосередньо з арифметичним пристроєм або пристроєм керування, використовують, як правило, саме такі ЗП. А в тих випадках, коли в яких-небудь міркувань в оперативному ЗП застосовують нагромаджувач із циклічним вибиранням, роботу його організують так, щоб за один цикл провадилося вибирання тільки за однією адресою, тобто однакової доступності в цьому випадку досягають за рахунок втрати швидкості.

Ф. Н. Зиков.

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ З ПОСЛІДОВНИМ ЗВЕРТАННЯМ** — запам'ятовувальний пристрій (ЗП), в якому записування або зчитування слова (числа) здійснюється послідовно розряд за розрядом.

Послідовне звертання адебільшого зумовлене використанням у ЗП *нагромаджувачів* з переміщенням носія інформації й засобів зчитування — записування одного відносно одного (нагромаджувачі на картах, стрічках, барабанах, дисках, електроннопроменевих трубках та оптичні) або з переміщенням сигналів, які відображають зберігання інформації, відносно запам'ятовувального середовища (ризи ліній затримки). Здебільшого З. п. з в. п. будують за принципом адресної організації звертання (див. *Запам'ятовувальний пристрій адресний*) — пошук фіз. адреси місця розташування інформації провадиться відповідно до *моду* адреси. Для реалізації адресного шертання записування в нагромаджувач інформація супроводиться особливим міткою — маркером, яка заноситься в нагромаджувач при записуванні інформації (нагромаджувач на магн. стрічці) або попереднім розмичанням (нагромаджувач на магн. барабані). Інформація може супроводитися й своїм номером (розмічанням зовн. у нагромаджувача на стрічці). Момент знаходження фіз. адреси визначається збитом числового значення коду адреси в номером, що супроводить інформацію, або рівністю цього значення результатів підсумовування маркерних імпульсів.

Оскільки З. п. з в. п. з. працює в послідовному режимі, а більшість ЦОМ працює в паралельному режимі, то з'являється необхідність узгодити З. п. з в. п. з. з іншими пристроями ЦОМ. Це завдання розв'язують в основному двома способами: застосовуючи перетворювачі паралельного коду на послідовний і, навпаки, використовуючи кілька (за кількістю розрядів у машинному слові) частин нагромаджувача (доріжка барабана, електроннопроменева трубка тощо), кожна з яких призначена для зберігання одного розряду зберігання слів. Перший спосіб менш економічний і потребує великих затрат часу на звертання до ЗП. Другий економічніший, але вимагає наявності єдиної синхронізації для всіх частин нагромаджувача й певних співвідношень між швидкістю частин нагромаджувача й потрібною швидкістю всього ЗП. Можливий і компромісний варіант паралельно-послідовної організації роботи ЗП, при якому маш. слово передається послідовно групами розрядів, а група розрядів — паралельно (напр., у ЗП на магн. барабанах і стрічках). Швидкість роботи З. п. з в. п. з. визначається способом організації переміщення інформації або засобів зчитування однієї відносно одних (від мех. переміщення у нагромаджувача на перфострічці до нерухомих переміщень електронного променя). Найменшу швидкість мають ЗП, що використовують мех. переміщення. Проте такі ЗП поширені завдяки великій ємності й добрим економ. показникам. Практично в складі всіх обчисл. систем є ЗП з великою ємністю, що використовують нагромаджувачі на магн. стрічці, барабані чи дисках. За тех. даними (невелика швидкість, велика ємність) ці пристрої займають місце на нижчому ступені ієрар-

хії ЗП. Поява оптичних ЗП, що характеризуються підвищенням швидкостями, дає змогу використати З. п. з в. п. з. на вищих ступенях ієрархії.

Ф. Н. Зинюв.

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ ЗОВНІШНІЙ**, зовнішній нагромаджувач — запам'ятовувальний пристрій (ЗП) великої ємності, що обмінюється інформацією в ході розв'язування задач в дужче швидкодіючим внутрішнім запам'ятовувальним пристроєм цифрової обчислювальної машини (ЦОМ), напр. з *оперативним запам'ятовувальним пристроєм* (ОЗП). Збільшувати ємність шляхом розширення внутрішніх швидкодіючих ЗП ЦОМ недоцільно з огляду на їхню високу вартість і порівняну тех. складність, тому осн. обсяг інформації доцільно зберігати в З. п. з., у яких вартість зберігання одиниці інформації на один — кілька порядків нижча, ніж в ОЗП. З сучасних тех. засобів записування й зберігання інформації значущим вимогам відповідають і широко застосовуються як З. п. з. такі пристрої магнітного записування: *стрічка магнітна* (МС), *барабан магнітний* (МБ), *диск магнітний* (МД) і *карти магнітні* (МК). Ці пристрої належать до групи ЗП з рухомих носієм інформації. Наявність вузла, що механічно переміщується, — їхня основна вада. Зате принцип переміщення носія дає змогу (порівняно з нерухомих носієм) значно спростити систему вибирання інформації та, при великих ємностях ЗП, значаюто зменшити вартість зберігання одиниці інформації.

В ЗП на МБ і МД носій безперервно обертається (МБ — циліндрична поверхня, МД — плоска поверхня диска). Швидкість переміщення носія — порядку  $40 + 60$  м/сек. Спосіб записування — безконтактний, між облітаючою магн. головою (МГ) і носієм є зазор близько  $5 + 10$  мкм і  $20 + 30$  мкм — між нерухомою МГ і носієм. Наявність зазора забезпечує надійність і довговічність роботи ЗП. У ЗП на МС стрічкотротяжний механізм включається й переміщує стрічку біля блока МГ тільки на час записування (зчитування) інформації. Швидкість переміщення стрічки в робочому режимі — порядку  $1 + 4$  м/сек. Спосіб записування, як правило, контактний: стрічка доторкається до блока МГ. В ЗП на МК механізм переміщення карти вузла записування — зчитування перебуває в постійному русі, а комплект карт — у спокої. Під час вибирання карти вона транспортується до вузла записування — зчитування й переміщується біля блока МГ зі швидкістю від 1 до  $10$  м/сек залежно від типу МК. Спосіб записування адебільшого контактний. Такий спосіб записування є однією з вад МС і МК, бо носій і головка швидко спрацьовуються.

Осн. тех. характеристики З. п. з. такі: ємність пристрою — кількість двійкових знаків або символів (певної розрядності), яка одночасно може зберігатися у ЗП; час вибирання — час, потрібний для того, щоб знайти відповідну інформацію; швидкість обміну інформацією — к-сть двій-



кових знаків або символів, передає їх або приймає їх З. п. в. за 1 сек.

Щодо нагромадження інформації, то З. п. в. поділяють на ЗП з незмінним носієм або ЗП зі сталою ємністю (сюди належать МБ і МД зі стаціонарними дисками) та ЗП зі змінним носієм (це — МС, МК і МД зі змінними пакетами). ЗП зі змінним носієм інформації дає змогу створювати бібліотеки, картотеки й архиви та зберігати практично необмежені обсяги даних.

За способом вибирання інформації З. п. в.

Характеристики зовнішніх запам'ятовувальних пристроїв.

| Тип ЗП                                    | Ємність<br>для блоків<br>знаків | Середній час<br>вибирання,<br>сек | Швидкість<br>обміну,<br>рядків/сек          | Швидкість<br>обороти<br>об. в |
|---|---------------------------------|-----------------------------------|---|-------------------------------|
| Магнітні барабани                         | 0,17—200                        | 0,00125—0,385                     | 12 · 10 <sup>3</sup> —500 · 10 <sup>3</sup> | 470—24 000                    |
| Магнітні барабани кассетного              | до 7794                         | 0,00125—0,385                     | 12 · 10 <sup>3</sup> —500 · 10 <sup>3</sup> | 470—24 000                    |
| Магнітні диски                            | 0,6—12 500                      | 0,01—0,8                          | 60 · 10 <sup>3</sup> —180 · 10 <sup>3</sup> | 900—2400                      |
| Магнітні диски зі змінними<br>пакетами    | 4—70                            | 0,085—0,5                         | 60 · 10 <sup>3</sup> —80 · 10 <sup>3</sup>  | 2400                          |
| Магнітна стрічка                          | 200—400<br>(ємність обміну)     | від 10 сек до<br>нізкох хвилин    | 20 · 10 <sup>3</sup> —300 · 10 <sup>3</sup> | —                             |
| Магнітні картки з довільним<br>вибиранням | 5—5400                          | 0,1—0,7                           | 28 · 10 <sup>3</sup> —100 · 10 <sup>3</sup> | —                             |

поділяються на ЗП з послідовним вибиранням (сюди належать МС і деякі типи МК) та ЗП з довільним вибиранням (МБ, МД і МК).

Оскільки обмін З. п. в. з ОЗП завжди здійснюється нормованими порціями — блоками (напр. обсягом, достатнім для заповнення кубка ОЗП), поняття «послідовне вибирання» й «довільне вибирання» стосовно до З. п. в. відносять до вибирання блоку інформації. При послідовному вибиранні, коли треба знайти заданий блок інформації, послідовно перебирають адреси всіх блоків, аж до моменту збігу поточної адреси з заданою. Для цього способу вибирання характерним є великий діапазон часу вибирання. Для одного й того самого типу пристрою час вибирання може становити від кількох мілісекунд до кількох хвилин. При довільному вибиранні будь-який заданий блок інформації вибирається за сталій проміжок часу. При цьому час вибирання для різних типів З. п. в. — від кількох мсек до 0,8 сек (див. таблицю).

У великих системах обробки інформації одночасно застосовуються різні типи З. п. в. Послідування й використання їхніх особливостей дає змогу найоптимальніше організувати роботу ЗП системи. Напр., великі обсяги інформації вигідно зберігати на МС, а потім передавати інформацію в ЦОМ, спочатку перезаписуючи групу наступних блоків у дужче швидкодіючі ЗП на МБ або МД. Крім розглянутих, є й інші ЗП, що працюють на основі магнітного записування: ЗП на від-різках та магнітній стрічці. На поворотній турелі встановлено 64 касети (жотухи) з від-різком стрічки завширшки 16 мм і завдовжки 9 м. Механізм вибирання підводить потрібну касету й витягує з неї відрізок стрічки, який переміщується біля блока МГ. Після закінчення зчитування (записування) відрізок стрічки втягується назад у касету; ЗП із

замкнутими петлями магнітних стрічок. У контейнері пристрою вміщено 16 ведучих вузлів, кожен з яких переміщує петлю замкнутої МС. У робочому режимі здійснюється привод лише однієї, вибраної, петлі. Один блок МГ, що переміщується дискретним приводним механізмом, обслуговує всі петлі контейнера; ЗП на великих магніт-них картах. У поворотному циліндрич. магазині, що складається з 20 комірок, які також поділено на блоки, де зберігається по 10 карт, міститься 2000 карт. Повертаючи

магазин і подаючи по вертикалі відповідний блок, вибрані 10 карт підводять до виконавчого механізму, й він захоплює (за індивідуальним для кожної з 10 карт виступ) потрібну карту й переміщує її біля блока МГ, а після закінчення записування (зчитування) повертає її на своє місце.

Проводяться роботи над створенням ЗП за такими перспективними способами як фото-оптичний спосіб з високошвидкісним скануванням за допомогою безінерційного оптичного перетворювача; спосіб термопластичного записування з застосуванням лазерної техніки; фероелектричний спосіб записування; магнітне записування з оптичним відтворюванням та ін. Проте на шляху практичної побудови на їхній базі ЗП великої ємності випає кілька обмежень та істотних тех. труднощів. Для одних, напр., механізм з носієм інформації повинен перебувати у вакуумі, для інших потрібна складна оптична система й наявність точних вузлів мех. переміщування.

Лит. Каган Б. М., Адаєвський В. И., Пу-рє Р. Р. Запоминающие устройства большой ем-кости. М., 1968 (Бібліотеч. с. 314—317); Ма-куров Я. Г. Магнитная запись с накопительной тех-никой. М., 1968 (Бібліотеч. с. 166—187); Хо-велев А. И. Фероэлектрическая запись. Пер. с англ. М., 1967 (Бібліотеч. с. 270—273).

ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ МА-ГАЗИННИЙ — запам'ятовувальний пристрій, який складається з кількох, розміщених один під одним регістрів, з'єднаних послі-довно, і які працюють таким чином, що тільки верхній регістр має зв'язок з зовніш-ньою системою. При записуванні даних до З. п. в. кожне слово вводиться у верхній регістр, «проштовхуючи» вниз вміст усіх регістрів. При читанні слова з З. п. в. зчитується вміст лише верхнього регістру, причому вміст реш-ти регістрів переміщується вгору, заповнюючи звільнене місце. Принцип роботи магазинного



ЗП: «першим до З. п. м. — останнім із З. п. м.». Описаний режим роботи регістрів можна забезпечити апаратним або програмним шляхом. Важливо цей режим здійснюється не послідовними повторними передачами вмісту регістра, а переадресацією копірок, які використовують у звичайному ЗП як регістри З. п. м. В цьому випадку адреса останньої зайнятої (чи першої вільної) комірки наз. індикатором З. п. м. і зберігається в певному регістрі чи комірці ЗП.

З. п. м. широко використовують для обробки й теор. дослідження викладених один з одного процесів (трансляція дужкових записів, обчислювання виразів у бездужковій формі запису, обробка сигналів переривання, адрес повернення, циклів у циклі тощо).

Апаратно реалізований З. п. м. використовують, напр., в обчисл. машинах загального призначення «БЭСМ-6», «Днепр-2» та в ряді спеціалізованих машин.

Ближчий до З. п. м. запам'ятовувальний пристрій є також й відрізняється від З. п. м. тим, що в ньому кілька верхніх регістрів (у загальному випадку — всі регістри) мають зв'язок ззовні системою. Аналіз вмісту цих регістрів може передувати процесові записування й читання у стековому ЗП (який здійснюється так, як і для ЗП магазинного).

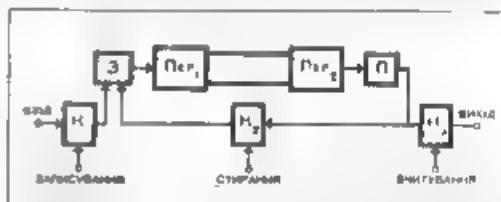
І. В. Вельбіничий.

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ НА ЛІНІЯХ ЗАТРИМКИ** — запам'ятовувальний пристрій (ЗП), зберігання інформації в якому здійснюється внаслідок циркуляції інформаційних сигналів по замкненому контуру, що містять у собі лінії затримки. Практично запам'ятовування в такому пристрої забезпечується відмиканням виходу лінії затримки через підсилювач на її вхід, і внаслідок цього інформаційні імпульсні сигнали, подані на вхід лінії, можуть циркулювати в ній як зовнішній долог. Завдяки властивості ліній затримки передавати сигнали зі входу на вхід із запізненням у часі, яке в багато разів перевищує тривалість сигналів, існує можливість зберігати в такому контурі великий обсяг інформації. Ємність З. п. на д. а. визначається кількістю імпульсів, які можуть одночасно циркулювати в лінії. Збільшення ємності такого ЗП пов'язане зі збільшенням часу затримки лінії й частоти проходження сигналів і практично обмежується величиною згасання сигналів та смугою пропускання лінії. Відповідно до цього для ЗП добирають і тип ліній затримки. У ЗП застосовують переважно ультразвукові лінії затримки, в яких для звукопроводів використовують ртуть, кварц, сплави магнію, нікелю та інші матеріали з малою швидкістю поширення сигналів  $(1-6) \cdot 10^3$  м/сек і порівняно невеликим ступенем згасання коливань.

Інформаційні сигнали подаються на вхід ключа  $K_1$  (мал.) і за наявності сигналу «записування» комутуються на вхід збуджувача З вхідного перетворювача Пер<sub>1</sub>, який перетворює електричні сигнали на ультразвукові. Вихідний перетворювач Пер<sub>2</sub> здійснює зворотно

перетворення. Сигнали з виходу лінії по коду *морганової за'явки*, яке складається з підсилювача П та ключа  $K_2$ , комутуються на вхід збуджувача З. Якщо треба повністю або частково очистити З. п. на д. а., на вхід ключа  $K_2$  подається на певний час заборонний сигнал «стирання», який закриває ключ і тим самим розриває коло зворотного зв'язку. Виводиться інформація з виходу  $K_2$  за наявності дозволяючого сигналу «зчитування».

В ультразвукових лініях затримки використовують два способи перетворення сигна-



Блок-схема запам'ятовувального пристрою на лінійних затримках.

лів — п'єзоелектричний і магнітострикційний. Застосування перетворювача того чи іншого типу залежить від того, чи можна його узгодити з звукопроводом лінії, щоб втрати потужності сигналів у ЗП були якнайменші. П'єзоелектричний перетворювач являє собою пластину з кварцу або іншого матеріалу з п'єзоелектричними властивостями; навколо пластини — металеві обкладки, на них подаються електричні сигнали. Такі перетворювачі використовують у ртутних і кварцових лінійних затримках. Магнітострикційний перетворювач — котушка на кінцях звукопроводу у вигляді дроту, тонкостінної трубки або стрижки з феромагнітного матеріалу з різким проявом магнітострикції. Ємність ЗП на ультразвукових лінійних затримках, як правило, становить від кількох сот до кількох тисяч бітів. Проте завдяки використанню нових матеріалів звукопроводів і нових конструкцій ліній ємність ЗП можна збільшити до кількох десятків тисяч бітів. Осв. вадю З. п. на д. а. є великий час вибирання (в середньому — половина часу затримки лінії).

Незважаючи на порівняно невеликий обсяг зберезуваної інформації та малу швидкість, З. п. на д. а. й досі застосовують завдяки їхній малій вартості, простоті експлуатації та надійності. Їх використовують у малих обчисл. машинах з послідовною обробкою інформації, в системах зв'язку, в телебаченні й радіолокаційних системах.

М. К. Вабенко.  
**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ ОПЕРАТИВНИЙ** — для оперативного запам'ятовувального пристрою

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНИЙ ПРИСТРОЙ ЄМНІСТЬ** — найбільша кількість закодованої інформації, яку можна одночасно зберігати в цьому пристрої (ЗП). Ємність виражають кількістю чисел або слів певної розрядності, а найчастіше — кількістю байтів. Через те, що в більшості цифрових обчислювальних

машин прийнято двійкове кодування інформації, в тому числі й адрес, то значаю кількість слів подають степенем двійки:  $2^{10}$ ,  $2^{11}$  і т. д. Кількість розрядів визначається розрядністю обчислювальної машини. Найчастіше використовують ЗП з розрядністю 18, 36 і 72. Смиість ЗП іноді характеризують числом збережуваних двійкових розрядів, або бітів. Для оперативних ЗП характерна ємність від 2 до 64 тис. слів, або бітів, що відповідає приблизно  $10^4$ – $2 \cdot 10^4$  біт/с. Смиість зовнішніх ЗП, як правило, більша і, в разі використання нагромаджувачів на магнітних дисках, становить  $10^6$ – $2 \cdot 10^6$  біт/с, а при використанні великої кількості стрічкових магнітів — ще більша.

Ф. Н. Зінов.

**ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНОГО ПРИСТРОЮ ЗОНА** — ділянка в ЗП, призначена для зберігання деякого обмеженого обсягу інформації (звичайно в пристрої на стрічкових магнітах). На магнітній стрічці розміщується від кількох десятків до кількох сотень зон (залежно від густоти запису, розмірів зон і стрічки) з невеликими проміжками між ними. Мехі зони позначають звичайно записом імпульсів на спец. доріжці стрічки. Зони розміщують або поперечно розміченими стрічку й записуючи їхні номери в проміжках, або без такої розмічання, послідовно заповнюючи стрічку в процесі записування. Відповідно, пошук здійснюється або зчитуваннями номерів, або послідовною лічбою зон; у цьому випадку номер поточної зони має зберігатися в ЦОМ. Групування інформації за зонами прискорює записування й вибирання її, оскільки, звертаючись до стрічки, шукають лише одну адресу, спільну не всю групу записаних у ній слів, номер зони.

І. Т. Погосенко.

**ЗАПАСІВ ТЕОРІЯ**, теорія керування запасами — розділ прикладної математики, що вивчає системи, пов'язані з нагромадженням, видаванням і поповненням запасів. З. т. органічно входить до операцій дослідження. Будучи математичною теорією, вона розв'язує насущні проблеми економіки та організації виробу. Спочатку розв'язувані задачі мали суто утилітарний характер, а постановка їх вкрай спрощувалась, застосовували матем. методи буди наближеними, а теор. узагальнене зовсім не було. У 50-х роках швидкий розвиток матем. методів (теорія ймовірнісних процесів, масового обслуговування теорія, лінійне й нелінійне програмування) і застосування ЕОМ спрямували розвиток З. т.

Відомо, що кожний виробничий процес пов'язаний з необхідністю нагромаджувати й витрачати запаси матеріалів, устаткування, запасних частин і готової продукції. Коли запасів немає або їх не вистачає, це призводить до непродуктивних витрат. З другого боку, надмірне нагромадження запасів пов'язано з омертвінням ресурсів, осуванням під час зберігання, переповнення складських приміщень. Через це ставиться задача визначити найраціональнішу кількість запасів, найвигіднішу стратегію поповнювання й вит-

рачання їх. З. т., спираючись на положення сучасної математики, а особливо таких її розділів, як імовірністна теорія, програмування математичне, обчислювальна математика та ін., розв'язує такі задачі й дає конкретні рекомендації щодо практичного застосування їх. Сфера застосування результатів, одержаних у З. т., вийшла далеко за межі задач, пов'язаних з організацією складського г-ва, відпусканням і зберіганням продукції. Ці результати успішно застосовують у різних задачах виробничої і тех. діяльності: при проектуванні електронної апаратури, в задачах оптич. транспортного забезпечення, в теорії надійності, в задачах експлуатації водосховищ і т. п.

Задачі З. т. можна класифікувати або за змістовими властивостями досліджуваних систем, або за методами дослідження. З цього погляду системи З. т. можна поділити на системи з простою структурою (один склад або база) і системи з складною структурою (мережа послідовних або паралельних баз). Задачі, розв'язувані в З. т., можуть бути однопонемклатурні (керування запасами однієї продукції) і багатопонемклатурні (взаємопов'язане постачання продукцією кількох різних видів). Кожна система З. т. може функціонувати в неперервному або в дискретному часі. Осн. часовою характеристикою системи З. т. є рівень запасу, тобто кількість продукції на складі в даний момент часу. Залежно від особливостей продукції рівень запасів може бути або дискретним, або неперервним. У деяких задачах рівень запасу може мати від'ємні значення — нагромаджується незадовольний попит. У багатопонемклатурних системах і системах із складною структурою рівень запасу — векторна величина, компоненти якої — це рівень запасів різних видів продукції на різних складах.

Осн. поняттями З. т., що характеризують кожну з розглянутих систем, є поняття поповнення запасів і замовлення на поповнення. Кожне з цих понять включає часові й кількісні показники. Перші з них характеризують множини моментів часу, коли виникає попит, відбувається поповнювання запасів та дається замовлення на поповнення. Другі — ставлять у відповідність кожному такому моменту часу певну кількість продукції. Кожне з показників може бути або строго детермінованим (вибирають його завжди за одними і тими самими наперед визначеним законом), або випадковим (має імовірнісний характер), або керованим (залежить від якихось миттєвих характеристик). Детермінованість часових і кількісних показників, їхня випадковість, способи здійснювання керування ними в різних системах можуть виявлятися по-різному. Так, детермінованість пошук за часом може мати безперервний характер (за однакової проміжної часу відпускають певну кількість продукції) або дискретний (продукцію відпускають лише в окремі моменти часу, що чергуються за певним законом). Випадковий попит може бути неперервним у часі, напр.,

описуватися якимсь відомим неперервним випадковим процесом. За дискретного випадкового попиту моменти відпускання продукції настають через випадкові проміжки часу, а поразку відпускається випадкова кількість продукції. Попит може мати й зливу інтенсивності, що змінюється залежно від наявності продукції на складі. В цьому випадку попит має керований характер, коли при нагромадженні незадоволеного попиту до певного рівня даліше надходження заявок припиняється. Величина попиту також може бути керованою, залежати або від наявності запасів, або від кількості продукції, яку вже замовлено, але вона ще не надійшла на склад. Приблизно так само можна охарактеризувати детерміновані, випадкові й керовані показники, що стосуються поповнення запасу й замовлення на поповнення. Мета дослідження систем З. т. — визначити оптим. режим роботи системи або визначити окремі невідповідні характеристики системи, що є показниками її ефективності. В задачах оптимізації оцінюють переважно затрати, пов'язані зі зберіганням продукції, затрати, що виникають, коли запаси вичерпуються й затрати на оформлення та одержання замовлення.

Розв'язуючи задачі З. т., застосовують різні матем. методи: матем. програмування, теорії масового обслуговування, кореляційні та методи статистичного моделювання. В З. т. досить повно вивчено однокланові системи з простою структурою, одержано деякі результати щодо дослідження систем зі складною структурою і багатоклановими системами. Схеми З. т., досліджувані аналітично, як правило, характеризуються марковським характером надходження заявок і поповнення запасів.

Лит. Рижиков Ю. П. Управление запасами. М., 1969 [бібліогр. с. 325—343]. Хансенсен Ф. Применение математических методов в управлении запасами и запасами. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 277—279]. Бунин Дж., Кейгсберг Э. Научное управление запасами. Пер. с англ. М., 1967 [бібліогр. с. 404—423]. Пирабуху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. Пер. с англ. М., 1969 [бібліогр. с. 352].

Т. І. Фурсова.

**ЗАПЕРЕЧЕННЯ в алгебрі логіки** — одна з логічних операцій. У природній мові відповідає частці *не*. В алгебрі логіки З. записують  $\neg A$  (або  $\bar{A}$ ).

**ЗАПИС** — у задачах автоматичної обробки даних — логічна порція інформації, що є об'єктом або наслідком одного кроку обробки. Аналогом З. при ручній обробці є документ. Звичайно споріднені за структурою і способом використання З. об'єднують у масиви.

Л. П. Бабенко.

**ЗАПИС БЕЗДУЖКОВИЙ, польський** **з а п и с** — представлення виразу, при якому порядок виконання операції визначається її контекстом і її позицією у формулі. З. б. запровадив польський логік Я. Лукасевич. При З. б. стають непотрібними дужки і не треба враховувати старшинство операцій. Є такі З. б.: прямий — операції виконують

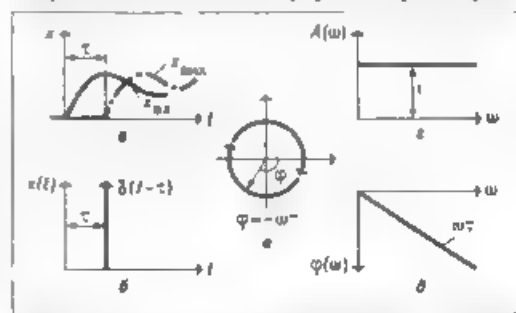
справа наліво, інверсний — операції виконують зліва направо та ін. Щоб перетворити арифм. вираз на прямий (інверсний) З. б., треба вписати в ньому зліва (справа) операції в тому порядку, в якому їх треба виконувати, а справа (зліва) — їхні операнди. Напр., перетворення виразу  $a + (b + c) \times d$  на З. б. можна представити в такому вигляді.

| справа                 | прямий запис       | інверсний запис    |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| $b + c$                | $+ bc$             | $bc +$             |
| $(b + c) \times d$     | $\times + bcd$     | $bc + d \times$    |
| $a + (b + c) \times d$ | $+ a \times + bcd$ | $abc + d \times +$ |

Виключення дужок та ігнорування старшинства операцій аначно спрощує обробку таких виразів *тренажерами*, тому З. б. широко використовують у мовях машинно-орієнтованих і в мовях проміжних.

С. М. Перстова.

**ЗАПІЗНЮВАННЯ БЛОК** — пристрій для відтворення функцій часу в запланованому аргументом. З. б. виконує таке часове перетворення сигналу:  $x_{\text{вих}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau)$ , де  $t$  — поточний час,  $\tau$  — час запізнювання,  $x_{\text{вх}}$ ,  $x_{\text{вих}}$  — відповідно вхідний і вихідний сигнали З. б. (мал., а). Розрізняють блоки постійного запізнювання, в яких у процесі роботи  $\tau = \text{const}$ , і блоки змінного запізнювання, в яких  $\tau = \text{вар}$ . У блоках змінного запізнювання  $\tau$  може бути ф-цією часу  $t$  або (і) якоїсь іншої змінної. Часові й частотні характеристики (див. *Імпульсна перетворення функція*, *Частотні характеристики систем автоматичного керування*) ідеального блоку запізнювання (для випадку  $\tau = \text{const}$ ) показано на мал. а — б. Як характером сигналів розрізняють З. б., призначені для відтворення неперервних (кусково-неперервних) сигналів, і З. б. для відтворення дискретних (імпульсних) сигналів. У З. б. для одержання часового асуву використовують



Характеристики блока запізнювання: а — часові, б —  $A(\omega) = 1$  — імпульсна перетворення функція ( $\delta(t - \tau)$  — дельта-функція); а — амплітудно-фазова характеристика  $\tau$  — амплітудно-частотна характеристика, б — фазо-частотна характеристика.

матн. стрічки, запам'ятовувальні конденсатори, лінії затримки, регістри асуву й фільтри, що апроксимують передавальну функцію ідеального З. б.  $e^{-s\tau}$ .

3. 6. застосовують у моделюючих установках, кореляторах і просторах, які використовують кореляційні методи визначення параметрів руху в системах автомат. керування й контролю тощо.

Лит., Жовниський В. Н. Системи запам'янування напруженої й блоку запам'янування М — Т, 1963 (бюлогр. с. 78-79). Догановський С. А. И в а н о в В. А. Устройства запамятывания их применение в автоматических системах М 1965 (бюлогр. с. 272-274). Косаубовський С. Ф. Хартеброт Г. Блок регульованого запам'янування для дискретних сигналів, «Автоматика», 1967, № 1.

Ю. В. Креминько.

**ЗАХИСТ ПАМ'ЯТІ** — див. *Пам'яті захист*. **ЗАЦИКЛЮВАННЯ** — нескінченно повторюване виконання якої-небудь ділянки програми. Причиною 3. є здебільшого помилка в програмі, а іноді його організують спеціально й потім використовують, напр., у тестах для ЕЦОМ.

**ЗБІВ ЦОМ** — короткочасне порушення нормальної роботи машини, яке спотворює результати обчислень. Збів може бути випадковим або систематичним. Причому в випадкових (поодиноких) збоїв є випадкові заводи в електр. колах, зумовлені флуктуаціями напруг живлення, порушеннями контактних з'єднань через мех. вібрації тощо. Такі збої призводять до спотворення однієї або кількох операцій ЦОМ. Виявляти їх можна спец. системним контролем або програмними засобами, напр., порівнюючи результати подвійного перерахування ділянки програми. Щоб усунути наслідки таких збоїв, треба повторно виконати окремі операції або всі їх обчислень, але при цьому не виникає потреби відновлювати працездатність ЦОМ. Причиною систематичних збоїв є критичний стан окремих елементів, робочі точки характеристик яких близькі до границь області працездатності. В таких умовах півність незначити, в межах допусків, коливання напруг, температури тощо або «важкі» комбінації *наві* можуть призводити до збоїв. Систематичні збої фіксуються спец. схематичним контролем або програмними засобами шляхом аналізу результатів обчислень. Якщо причину цих збоїв не усунуто, вони можуть призвести до відмови, тобто до сталого порушення працездатності ЦОМ. Відшуковують причину збоїв, ретельно перевіряючи всю машину і застосовуючи випробувальні програми в ускладнених режимах її роботи. Часто це буває трудомісткою операцією. Кількість і характер збоїв, а також час для виявлення їх означають надійність і ефективність ЦОМ.

А. Я. Зубатенко.

**ЗБУДЖЕННЯ КЛІТИНИ ТЕОРІЯ** — теорія процесів, що виникають у збудливих клітинах від дії певних подразників. Основою збудження є певні зміни фіз. хім. властивостей поверхневих структур м'язових і нервових клітин, які надають збудженню здатності самопоширюватися по клітині. Найкраще обґрунтовану 3. ж. т. розробили (1949) англ. фізіологи А. Ходжкін та А. Хакслі. За цією теорією, в поверхневій мембрані клітини, що перебуває в стані спокою, існує електр. поля-

ризація, зумовлена нерівномірним розподілом основних іонів натрію, калію та хлору між протоплазмою клітини та позаклітинним середовищем. Позаклітинне середовище містить переважно іони натрію та хлору, а протоплазма — іони калію. Електр. поля зарядів катіонів компенсуються полями зарядів аніонних груп амінокислот і білків. Оскільки в стані спокою поверхнева мембрана значно краще пропускає іони калію, ніж іони натрію, то внаслідок дифузії цих іонів зовн. поверхня мембрани заряджається позитивно щодо внутрішньої. Величина різниці потенціалів (мембранного потенціалу, або «потенціалу спокою») близька до потенціалу калієвого електрода  $E_K$

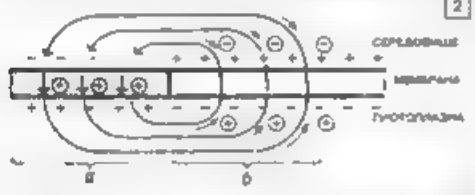
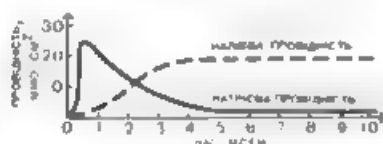
$$E_K = \frac{RT}{F} \ln \frac{[K]_{\text{вн}}}{[K]_{\text{зовн}}},$$

де  $R$  — універсальна газова стала,  $T$  — абсол. т-ра,  $F$  — число Фарадея,  $[K]_{\text{вн}}$  та  $[K]_{\text{зовн}}$  — активність іонів калію всередині та зовні клітини. Невелике постійне витікання іонів через мембрану компенсується особливими насосами, які переносять іони крізь неї проти градієнта потенціалу, використовуючи енергію обміну речовин. Неодмінною причиною виникнення збудження є зниження від дії певного подразника мембранного потенціалу до певного критичного рівня (порога). Це зниження потенціалу (деполяризація) мембрани зумовлене дією на поверхневу мембрану клітини або особливих речовин, що їх виділяють закінчення відростків інших клітин, які утворюють з нею синаптичні контакти, або надходженням анів. енергії від подразника; воно пов'язане зі зміною якоїсь проникності мембрани. Коли деполяризація досягає порога, в мембрані відбуваються структурні зміни (їхня природа не ясна поки що), які призводять до істотного підвищення її здатності пропускати іони натрію (в клітині відкриваються специфічні «натрієві» канали або пори). Внаслідок цього виникає істотний приплив іонів натрію через мембрану всередину клітини, що переносить певну кількість позитивних зарядів і деполяризує мембрану. Такий процес самопідтримується, бо виникаюча деполяризація щедалі збільшує натрієву проникність і т. п. Зрештою приплив іонів натрію не тільки знижує зумовлений іонами калію мембранний потенціал, а й створює різницю потенціалів протилежного напрямку, яка близька до потенціалу натрієвого електрода

$$E_{Na} = \frac{RT}{F} \ln \frac{[Na]_{\text{зовн}}}{[Na]_{\text{вн}}}.$$

Структурні зміни мембрани і зміни її потенціалу надзвичайно короткочасні. Структура мембрани та її потенціал зразу ж відновлюються, хоча діяння подразника й триває. Більше того, з певною затримкою розвивається підвищення проникності мембрани для іонів калію, надир яких є всередині клі-

тинія (відкриваються «калієві канали»), що створюєплив цих іонів з клітинні і сприяє відновленню початкової поляризації клітинної мембрани (мал. 1). Описана зміна електричного потенціалу мембрани («потенціал дії») є характерною рисою збудження; вона є й основою здатності збудження самопоширюватися. Поява на збудженій ділянці клітинної мембрани зміненої електр. поляризації призводить до виникнення на поверхні клітини поздовжньої різниці потенціалів — збуджена ділянка виявляється зарядженою негативно



1. Зміна натрієвої та калієвої провідності під час деполаризації мембрани (за Ходжікін, 1963).  
2. Схема поширення нервових імпульсів по поверхні мембрани: а — збуджена ділянка; б — нервова ділянка

щодо навколишніх незбуджених її ділянок (мал. 2). Оскільки позаклітинне середовище і протоплазма клітини є провідниками електрики другого роду, то між незбудженими і збудженими ділянками виникають електричні струми (струми дії), спрямовані зовні клітини від незбуджених ділянок до збудженої, а всередині клітини — в протилежному напрямі. Наявність цих струмів призводить до деполаризації незбуджених ділянок мембрани (т. з. електротонічна дія). Така деполаризація, досягши певного критичного рівня, спричинює в незбуджених ділянках активну зміну натрієвої провідності мембрани і весь ланцюг наступних явищ. Подразне ділення (гарантийний фактор) ділянки збудження на сусідні незбуджені ділянки клітини таке велике, що за нормальних умов процес збудження з великою швидкістю поширюється по клітині до кінцевих відгалужень її відростків. Ця швидкість залежить в основному від фіз. факторів — електр. опору відростка, середовища тощо.

Експериментальні докази правильності описаних уявлень досить ґрунтовні. Дослідами на гігантських нервових волокнах головоногих моллюсків було виявлено, що здатність до збудження і проведення імпульсу зберігається, якщо з них практично повністю видавити протоплазму й замінити її сольовим

розчином. Отже, процес збудження дійсно пов'язаний з поверхневою мембраною клітини, а не зі змістом її протоплазми. Усушення з навколишнього середовища іонів натрію в більшості збуджених клітин оборотно усуває початковий збуджувальний потік іонів і тим самим унеможливило виникнення збудження. Такий самий ефект можна одержати, штучно збільшуючи зміст іонів натрію всередині клітини і тим самим усуваючи градієнт потенціалу, що забезпечує їхній рух через мембрану наслідок збудження. Кількість іонів, що проникають під час генерації однічного імпульсу, надто мала для того, щоб її можна було визначити аналітично, але її можна визначити під час ритмічного подразнення і потім перерахувати на один імпульс, вона становить  $2,6 \cdot 10^{12}$  іонів  $\text{см}^2$ .

На основі експериментально одержаних даних про мембранні іонні потоки можна провести моделювання поширюваного потенціалу дії на теор. кабелі, властивості якого ідентичні фіз.-хім. властивостям клітини. Теоретично одержані криві поширюваного потенціалу дії в цьому випадку дуже добре збігаються з формою кривих потенціалу дії, що їх зареєстровано в природних умовах. (Л. М. Ходжікін А. Нервний імпульс Пер. с англ. М., 1965 [бібліогр. с. 113-123] Кат. Б. Нерв, мышца и синяпс Пер. с англ. М., 1968 [бібліогр. с. 203-217] П. Г. Костюк).

**ЗБУРЮВАЛЬНЕ ДІЯННЯ**, збурення — діяння, що порушує потрібний функціональний зв'язок (залежність) між вхідною і вихідною (контрольованою) координатами механізму, машини, процесу (системи). В. д. можуть бути як зовн., — зміни навантаження (струму, навантажувального моменту машини) і зовнішньої т-ри, різні порушення (наводки, ввічання, фони), так і внутрішні — зміни параметрів ланки системи внаслідок старіння, самонагрівання тощо.

Методи й засоби зменшення чи цілковитого усунення З. д. становлять осн. зміст теорії і практики автомат. регулювання й керування. Шкідливі З. д. компенсують, використовуючи системи керування замкнені зі зворотним зв'язком, що працюють за відхиленням (принцип Полазунова — Уатта), або системи керування розімкнені зі зв'язками за збуреннями (принцип Понселе). Найдосконалішими щодо цього є комбіновані системи автоматичного керування, які містять і коло зворотного зв'язку, і зв'язки за збуреннями. Питання цілковитого усунення дії З. д. розглядає теорія інваріантності (див. Інваріантність систем автоматичного керування) П. І. Дехтяренко.

**ЗВІДНІСТЬ у теорії алгоритмів** і в понятті, яке асоціюють для постановки та розв'язування питань «складності» рекурсивно перелічних множин. Принциповим результатом алгоритмів теорії є доведення існування рекурсивно перелічних, але не рекурсивних множин. Оскільки рекурсивно перелічні (ефективно породжувані) множини часто зустрічаються в матем. практиці, то, природно, постало питання, чи всі рекур-

сивно перелічні, але не рекурсивні множини мають однакову алгоритм. складність.

Найбільш значимим поняттям 3. є Тьюрінгова 3. (3. за Тьюрінгом,  $T$ -звідність). Множина  $A$  натуральних чисел  $T$  зводиться до множини натуральних чисел  $B$  (символічно  $A \leq T B$ ), якщо характеристична функція  $\chi_A$  множини  $A$  належить до найменшого класу функцій, який містить характеристичну функцію  $\chi_B$  множини  $B$ , всі частково рекурсивні функції і замкнутий щодо операцій підстановки, примітивної рекурсії та  $\mu$ -оператора. Наведемо ще одне означення 3. (т. з.  $m$ -звідність): множина  $A$   $m$ -зводиться до  $B$  ( $A \leq m B$ ), якщо існує одномісна загальнорекурсивна функція  $h$  така, що для всіх натуральних чисел  $n$ :  $n \in A$  тоді і тільки тоді, коли  $h(n) \in B$ . Крім понять  $T$ -звідності та  $m$ -звідності є ще звідності — таблицна ( $tbl$ -звідність), обмежена таблицна ( $tbl$ -звідність) та ін. Усі ці звідності є транзитивними, тобто з  $A \leq x B$  і  $B \leq x C$  випливає, що  $A \leq x C$  (тут і далі  $x$  набуває значень  $T, m, tbl$  і  $m$ ). Із цього відношення 3. дає змогу визначити відношення еквівалентності:  $A \equiv x B$  тоді і тільки тоді, коли  $A \leq x B$  і  $B \leq x A$ . Далі визначають відповідний ступінь розв'язності:  $x$ -ступенем множини  $A$  наз. родина  $d_x(A) = \{B \mid B \equiv x A\}$ . Множина всіх  $x$ -ступенів  $L_x$  частково впорядковується таким відношенням:  $d_x(A) \leq d_x(B)$  тоді і тільки тоді, коли  $A \leq x B$ . Якщо  $x$ -ступінь містить принаймні одну рекурсивно перелічну множину, то його наз. рекурсивно перелічним  $x$ -ступенем. Множину всіх рекурсивно перелічних  $x$ -ступенів позначають через  $L_x^0$ :  $L_x^0 \subseteq L_x$ .

Осн. дослідження ступенів стосуються питання будови частково впорядкованих множин  $L_x^0$  та  $L_x$ . Вкажемо на деякі важливі властивості цих частково впорядкованих множин: 1) Частково впорядковані множини  $L_x^0$  та  $L_x$  є верхніми пієгратками (пієструктурами), тобто для будь-яких двох елементів  $d_0$  і  $d_1$  з  $L_x^0(L_x)$  існує їхня точна верхня межа  $d_0 \oplus d_1 \in L_x^0(L_x)$ . Крім того,  $L_x^0$  є найменшою під пієгратками  $L_x$ . Це значить, що для  $d_0, d_1 \in L_x^0$  їхня точна верхня межа  $d_0 \oplus d_1$  лежить у  $L_x^0$ . 2) У пієгратці  $L_x$  немає найбільшого елемента, а в пієгратці  $L_x^0$  є найбільший елемент ( $1_x$ ). 3) У пієгратках  $L_x$  і  $L_x^0$  є найменший елемент ( $0_x$ ). 4) Пієгратка  $L_x$  — континуальна, а  $L_x^0$  — лічбова. 5) Пієгратки  $L_x^0(L_x)$  не є ґратками, тобто в  $L_x^0(L_x)$  є такі два елементи  $d_0, d_1$ , що для них не існує точної нижньої межі.

Перелічені властивості є спільними для всіх 3. Але є й відмінності. Вкажемо деякі власти-

вості пієграток  $L_T, L_T^0, L_m, L_m^0$ . 1) Пієгратка  $L_m^0$  є ідеалом пієгратки  $L_m$ , тобто з  $d_0 \in L_m^0, d_1 \in L_m$  і  $d_1 \leq d_0$  випливає, що  $d_1 \in L_m^0$ . 1') Пієгратка  $L_T^0$  не є ідеалом пієгратки  $L_T$ . 2) Пієгратка  $L_m^0$  містить атомів — мінім. елементи: такі елементи  $d \in L_m^0$ , що  $d \neq 0_m$  і з  $d_0 \leq d$  випливає, що  $d_0 = 0_m$  або  $d_0 = d$ . 2') Пієгратка  $L_T^0$  задовольняє таку властивість шільності: якщо  $d_0, d_1 \in L_T^0$  і  $d_0 < d_1$ , то існує  $d_2 \in L_T^0$  така, що  $d_0 < d_2 < d_1$ . Зокрема,  $L_T^0$  не містить атомів.

У дослідженнях з 3. часто розглядають ще одну операцію на  $L_T$  — операцію стрибку. Не даючи точного означення, можна сказати, що стрибком  $T$ -ступеня множини  $A$  є  $T$ -ступінь найбільшої щодо  $T$ -звідності множини, яка рекурсивно перелічна в  $A$ . Операцію стрибку використовують і при побудові ієрархій у теорії рекурсивних функцій.

Усі згадані поняття 3. запровадив Е. Пост. Слід відзначити, що це поняття в теорії алгоритмів застосовують не лише для 3. множин, як було розглянуто вище. Можна вказати ще на 3. нумерацій (див. *Нумераційна теорія*). 3. множини можна розглядати як 3. відповідний проблем розв'язування (проблема розв'язування для множини  $A$  полягає в обчислюванні характеристичної функції  $\chi_A$ ). Але в теорії алгоритмів виникають і інші проблеми, напр., проблема відокремлюваності (відокремлювання) для множин  $A$  та  $B$ , що полягає в обчислюванні хоча б однієї функції, що дорівнює 1 на  $A$  і 0 на  $B$ . Зазначені дві проблеми є окремими прикладами заг. поняття масової проблеми. Існує поняття 3. для масових проблем, у якому використовують поняття частково рекурсивного оператора. Відповідні ступені трудности масових проблем утворюють частково впорядковану множину  $M$ , яка є пієграткою. Пієгратка  $L_T$  має природне вкладення в ґратку  $M$ .

Лит.: Медведев Ю. Т. Степені трудности массовых проблем. Доклады АН СССР, 1953, т. 104, № 4; Post E. L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. «Bulletin of the American Mathematical Society», 1944, т. 50, N 5; Sacks G. E. Degrees of unsolvability. Princeton, 1963; Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Пер. с англ. М., 1972 (Библиогр. с. 587—599).

Ю. М. Брехов.

**ЗВОРОТНИЙ ЗВ'ЯЗОК** — діяння результатів функціонування якоїсь системи (об'єкта) на характер цього функціонування. Осн. ідея 3. з. полягає в тому, щоб використати самі відхилення системи (об'єкта) від певного стану для формування керуючого діяння. Блок-схему системи зі 3. з. наведено на мал. 1. Тут  $O$  — дійсна (реальна) система (об'єкт),  $O^*$  — друга (реальна чи гіпотетична, її часто називають еталонною) система, яка визначає мету керування,  $P$  — пристрій (орган) керування,  $y, y^*, z$  — оператори, які описують функціонування відповідних

елементів системи,  $L$  — неконтрольоване збурювальне діяння. Стає у системі  $O$  таким чи іншим способом порівнюється зі станом  $y^*$  системи  $O^*$ . Внаслідок цього  $O$  визначає діяння  $z = z(y, y^*)$ .

На відміну від систем керування розглянутих систем керування, які використовують З. з., нав. системами керування замкненими. При цьому зв'язок  $P$  з  $O$  наз. прямим (коло I), а зв'язок  $O$  з  $P$  — зворотним (коло II). Або інакше: в системах зі З. з. можна виділити замкнене коло причинно-наслідкових зв'язків. Коли від діяння З. з. початковий відхил стає ну (первинної, керованої координати), спричинений збурювальними діяннями, зменшується, то кажуть, що має місце негативний З. з., а в протилежному разі говорять про позитивний З. з. Звичайно позитивний З. з. приводить до нестійкості роботи системи в цілому. Залежно від виду оператора, що виробляють  $z$ , розрізняють неперервний і дискретний (епізодичний), лінійний і нелінійний, статичний і динамічний З. з.

З. з. у системах автоматичного керування. Принцип З. з. найповніше розроблено в автоматичного керування теорії. Вже в перших автомат. регуляторах стабілізації систем як керує діє діяння використовували відхилення початкової величини від заданого значення; у сучасних системах і системах програмного керування керує діяння формується на основі вимірювання й перетворення розбіжності розузгодження — різниці між заданим значенням керованої координати і її поточним значенням на виході системи, тобто в таких системах  $z = z(y^* - y)$ . Значну кількість систем автомат. керування створили й створюють на основі цієї ідеї.

Передавальна функція замкненої одноконтурної системи  $W_z(p)$  з негативним З. з. (мал. 2) виражається через передавальні ф-ції прямого кола керуючого пристрою (регулятора)  $W_K(p)$  і об'єкта  $W_O(p)$  та кола З. з.  $W_{zz}(p)$  так:

$$W_z(p) = \frac{y(p)}{y^*(p)} = \frac{W_K(p) W_O(p)}{1 + W_K(p) W_O(p) W_{zz}(p)} \quad (1)$$

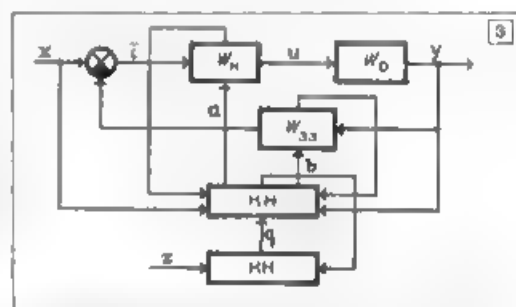
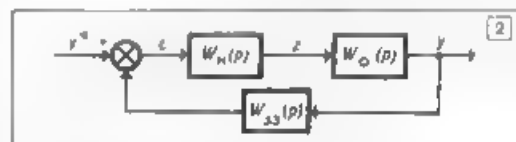
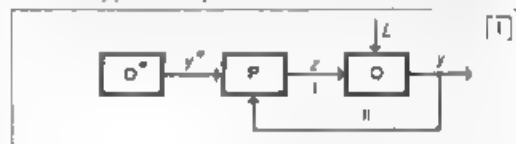
Введення З. з. дає змогу ускладнити керуючий сигнал у системах. Так, якщо в розглянутій системі вхідна величина  $y^*$  і є керуючим діянням, то в замкнених системах керує діяння  $z$  залежить від законів перетворення розбіжності  $z = y^* - y$  системи і для розглянутого вище випадку  $z$  визначають як

$$z = \frac{W_K(p)}{1 + W_{zz}(p) W_K(p) W_O(p)} y^*(p). \quad (2)$$

У багатоконтурних системах автоматичного керування можна використовувати й місцеві З. з., які охоплюють одну чи кілька ланок, і загальний (головний) З. з., який охоплює всю систему в цілому. При керуванні багатокординатними об'єктами (напр., у системах

програмного керування) використовують перекресні стабілізуючі зв'язки між двома чи кількома системами керування по окремих координатах. Складні багатоконтурні кола З. з. використовують для організації систем керування, оптич. за якимось критерієм. Ускладнення кіл З. з., пов'язане з задоволенням певного критерію якості керування, часто є еквівалентним перетворенню розузгодження, одержаного за допомогою загального З. з.

З. з. у кібернетичних системах. До кібернетичних систем належать



1. Блок-схема системи зі зворотним зв'язком
2. Блок-схема замкненої одноконтурної системи зі зворотним зв'язком
3. Трьохрівнева ієрархічна система керування зі зворотним зв'язком

систем керування, в яких є кілька рівнів за рівнем ієрархії контурів керування, а також системи класифікації, розпізнавання та прийняття рішень, адатні змінювати свою організацію в процесі навчання. На мал. 3 подано трьохрівневу ієрархічну систему керування. 1-й рівень (контур) керування будується з використанням неперервного З. з. на перетворенні сигналу з кола З. з. за  $W_{zz}$  і сигналу розузгоджування за  $W_K$ . Цей рівень безпосереднього керування об'єктом. Конкретні значення параметрів  $\alpha$  передавальної ф-ції  $W_K$  і  $b$  передавальної ф-ції  $W_{zz}$  задає контур настроювання (КН). У КН вводяться неперервно чи дискретно значення у З. з. та  $x$ . За значеннями координат об'єкта і вхідного сигналу, а також залежно від критерію керування  $q$ , КН виробляє і встановлює в  $W_K$  і  $W_{zz}$  значення параметрів  $\alpha$  і  $b$ . Цей рівень ієрархії має свої специфічні З. з. від ланок  $W_K$  і  $W_{zz}$  за параметрами  $\alpha$  і  $b$ . КН керує

адебільшого якоюсь множиною систем керування 3-й рівень ієрархії становить контур критеріїв — КК. Залежно від обставин, в якіх відбувається керування (напр., нормальній чи аварійній роботі об'єкта, діяння *аварії*), а також від зовн. показавь  $z$ , що враховують роботу суміжних систем, ти мети оператора, який керує комплексом систем, КК виробляє потрібний критерій якості керування  $q$  за набору критеріїв  $q_i$  і подає сигнал у КІІ про зміну алгоритму настроювання параметрів контура безпосереднього керування об'єктом. Тут вектори  $u$  і  $x$  вводять в основному для того, щоб інформувати КК про стан виходу і входу системи в якісь дискретні моменти часу. З. а., характерний для цього рівня ієрархічного керування, здійснюється з КН за критерієм  $q$ . КК керує якоюсь множиною контурів настроювання. Контур безпосереднього керування виконують адебільшого на елементах *аналогових обчислювальних машин*, а контур настроювання і вироблення критерію релізують за допомогою ЦОМ.

Важливу роль З. а. відіграє в системах класифікації, *розпізнавання образів* і прийняття рішень. Позитивний З. а. використовують, щоб реалізувати *заохочування*, напр., у системах типу *маршрутатора* при самонавчанні чи навчанні з допомогою вчителя. У системах *людина-машина* З. а., який замикається через оператора, можна використати для безпосереднього вироблення керуючого сигналу, для перевірки й вироблення критерію управління, а також як інформаційний зв'язок, який дає змогу операторові прийняти оптим. рішення.

З. а. у біологічних системах існує від клітини до цілісного організму. Сукупність клітин, що утворюють органи, мають здатність саморегуляції. Значимі ця здатність спрямована на підтримування постійного значення вихідної величини. Так, напр., серце має спец. автономний нервовий регулятор — синусний вузол, який керує послідовним скороченням різних відділів серця і підтримує постійність частоти скорочень серця. Система керування рівнем цукру в крові розв'язує завдання стабілізації біохім. процесів розпаду глікогену такий з виділенням цукру в кров і синтезу глікогену печінкою з вільного цукру в крові. При цьому керуючий сигнал, що становить різницю між заданим значенням рівня цукру, необхідного для організму в певний момент часу, і поточним значенням рівня цукру в крові, виробляється внаслідок діяння негативного З. а. Розвинений організм має великий набір систем регуляції, які забезпечують відносну постійність речовинних і енерг. витрат при взаємодії організму з середовищем. До параметрів організму, постійність яких підтримується в процесі його життєдіяльності, належать: температура й вага тіла, хвильний об'єм крові й ділянки, рівень цукру й гемоглобін та багато інших. Підтримування в потрібних межах кожної з цих величин здійснюється внаслідок взаємозв'язаної роботи

багатьох органів, які входять у конкретну систему регуляції. Характерними для біол. систем керування є складне перетворювання сигналів помилки і З. а. (мал. 2) та ієрархічна побудова з настроюванням від нервової системи й виробленням критеріїв за допомогою мозку (мал. 3). У біол. системах керування здійснюється адекватна взаємодія повільнодіючих систем (систем обміну, гуморальної) та швидкодіючих (нервової системи).

У системах керування рухами організму З. а. звичайно використовується через органи чуття. Приблизно 90% систем керування рухами використовують візуальний З. а., а решта 10% — слуховий, дотиковий та ін. З. а. Контроль над правильністю руху здійснюється ще й місцевими З. а. від рецепторів м'язів. Контроль над правильністю цілого комплексу складних рухів здійснюється за допомогою кіркового механізму віставлення, який працює на основі показавь складного алгоритмічного З. а. Мету комплексу рухів організму виробляє акцептор дії. Він же остаточно порівнює задану програму і результати дії організму. Роботу акцептора дії на основі механізму З. а. (аферентної) описав ще в 30-х рр. рад. фізіолог П. К. Анохін. Проте ідеї, закладені в поняття акцептора дії, були надто складні для подільного рівня розвитку теорії автомат. регулювання. Акцептор дії відіграє важливу роль у навчанні біосистем, у розпізнаванні образів і прийнятті рішень, замикаючи З. а. між організмом і середовищем на найвищому рівні ієрархічного керування за метою комплексу дій, кожне з яких виконується відповідно до певного критерію.

З. а. в економічних і соціальних системах. Простим регулятором осередку економ. системи, яка виробляє певний продукт, є ринок, тобто споживання цього продукту. Різниця між попитом на продукт і виходом економ. осередку (наявністю продукту в продажі), яка виникає внаслідок З. а., є керуючим сигналом для економ. осередку. В цьому разі З. а. може бути неперервним чи дискретним, але досить частим. Взаємозадовжена робота багатьох економ. осередків, які становлять галузь пром-сті, потребує впровадження координуючого й керуючого органу, що працює на основі дискретних З. а. від економ. осередків. З. а. дає змогу виробити потрібні оптим. настройки для кожного економ. осередку (контурів безпосереднього керування й настроювання показавь на мал. 3). Для управління пром-стю в цілому потрібен ще один рівень ієрархічного управління, який на основі З. а. виробляє критерії для галузей пром-сті (мал. 3). І, зрештою, визначення мети економіки країни в цілому покладено на органи політичного управління.

В соціальній сфері З. а. використовують для визначення політичних, моральних та ін. тенденцій, тут його здійснюють шляхом соціологічних досліджень і опитування. Цей З. а. від суспільства до органів влади необ-



хідний для вироблення правдивої (такої, яка відповідає запятам суспільства) пайбамачої й віддаленої політики, що її потім здійснюють за допомогою законодавства, засобів масової інформації (преса, радіо, телебачення) і т. ін. З. з. у дискретній формі виборів, які проводять періодично, дає змогу тримати в певному опт. стані державні та партійні органи безпосереднього управління суспільством.

Лит. А н т о н о в Ю. Г. Автоматическое управление с применением вычислительных машин. Л., 1962 (библиогр. с. 334—337). Х а м м о н с П. Теория обратной связи и ее приложения. Пер. с англ. М. 1961. Ю. Г. Антонович.

**ЗВ'ЯЗКИ ЛОГІЧНІ** — логічні операції над висловлюваннями.

**ЗГОРТКА РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН** — розподіл суми двох взаємно незалежних випадкових величин. Нехай  $\xi$  і  $\eta$  — незалежні дискретні випадкові величини з розподілами  $P\{\xi = k\} = a_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) і  $P\{\eta = l\} = b_l$  ( $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Сума  $\zeta = \xi + \eta$  має розподіл  $c_k =$

$$P\{\zeta = k\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Останній вираз називають згорткою розподілів  $\{a_k\}$  і  $\{b_l\}$  двох дискретних випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$ ; і позначають  $\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$ . Нехай тепер  $\xi$  і  $\eta$  — неперервні незалежні випадкові величини, задані щільністю ймовірності  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$  відповідно. Щільність ймовірності  $f(t)$  їхньої суми визначається інтегралом  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-u) \psi(u) du$ .

Інтеграл у правій частині наз. згорткою щільностей  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$  неперервних випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$ . У цьому випадку застосовують те саме позначення операції згортання  $f(t) = \varphi(t) * \psi(t)$ .

Якщо випадкові величини  $\xi$  і  $\eta$  задано своїми ф-ціями розподілу  $F(x)$  і  $G(x)$ , згортка  $H(x)$  їхніх розподілів визначається як  $H(x) = F(x) * G(x) = \int F(x-u) dG(u)$ , де інтеграл слід розуміти як інтеграл Стильєса. Операція згортки комутативна  $F(x) * G(x) = G(x) * F(x)$  й асоціативна:  $[F(x) * G(x)] * H(x) = F(x) * [G(x) * H(x)]$ .

Л. П. Петренко.

**ЗДІЙСНЕННОСТІ МЕТИ ПРИНЦИП** — принцип оптимальної поведінки, що має велике значення в теорії ігор безкоаліційних і полягає в прагненні гравців до ситуації рівноваги. Для антагоністичних ігор З. м. збігається з максиміну принципом.

М. М. Воробієв.

**ЗДІЙСНЕННОСТІ ФІЗИЧНОЇ КРИТЕРІЙ** — умови, за допомогою яких визначають принцип можливості створення деякої динамічної системи або її елементів. Необхідність застосування З. ф. н. виникає, зокрема, при систем автоматичного керування синтез, синтезі згладжувальних та випереджувальних фільтрів, розв'язуванні деяких задач

ідентифікації, побудові інваріантних систем керування тощо. В результаті різних процедур синтезу одержують вирази, що описують вагову функцію системи (ланки, фільтра) або її передавальну функцію:  $w(t)$  або  $W(s)$  ( $s$  — комплексна змінна). Для того, щоб стійкі пристрої, що їх синтезують, могли бути фізично здійсненними, необхідно, щоб  $w(t)$  або  $W(s)$  задовольняли З. ф. н., формульованій так: 1) пристрій буде фізично здійсненним, якщо

$$\begin{aligned} w(t) &= 0, \quad \text{при } t < 0, \\ w(t) &= 0, \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

тобто вихідний сигнал пристрою має дорівнювати нулю при відсутності вхідного сигналу, а реакція його на імпульсний вхідний сигнал повинна згасати в часом. Умова (1) є необхідною і достатньою; 2) якщо відома передавальна функція синтезованого пристрою, то для того, щоб він був фізично здійсненним, необхідно, щоб  $W(s)$  була аналітичною у правій півплощині комплексної змінної  $s$ , тобто якщо  $W(s)$  зображує відношення двох поліномів, то всі полюси  $W(s)$  повинні лежати в лівій півплощині, а область розташування нулів може бути необмеженою. Цей критерій є необхідним і достатнім, якщо  $|W(j\omega)|$  зменшується зі швидкістю  $\omega^{-n}$ ; 3) фіз. здійсненність можна перевірити за  $W(j\omega)$  за допомогою критерію Поля — Вінера:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log |W(j\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < c, \quad (2)$$

де  $c$  — скінченне дійсне число, якщо  $W(j\omega)$  є передавальною функцією фізично здійсненого пристрою. Критерії (1) і (2) еквівалентні. У цифрових та імпульсних системах З. ф. н. має вид, аналогічний (1), якщо розглядати імпульсну вагову функцію

$$w^*(iT) = 0, \quad t < 0, \quad (3)$$

де  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  — цілі числа. Якщо задана імпульсна передавальна функція

$$W^*(z) = \frac{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + \dots + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \dots + a_0}, \quad (4)$$

то З. ф. н. полягає в тому, що  $m \leq n$ . При цьому вважають, що  $a_n \neq 0$ . Лит. П у г а ч е в В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., 1962 (библиогр. с. 873-878). Цып л и н Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 (библиогр. с. 326-363).

В. Ю. Мандровський-Сотолов.

**ЗМІНИХ НАПРЯМІВ МЕТОД** — один з методів розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу. Див. Еліптичного типу диференціальних рівнянь у частинних похідних способи розв'язування.

**ЗНАКОВИЙ РОЗРЯД** — розряд регістра, суматора арифметичного пристрою або пам'ятки запам'ятовувального пристрою цифрової обчислювальної машини, у якому зберігається код знака подаваного числа. Приймає знак «+» позначати через «0», а знак «-» — через «1». У машинах з плануною комою, на відміну від машин з фіксованою комою, для подавання чисел потрібні два 3. р.: один — для подавання знака мантиси, другий — для подавання знака порядку. Крім того, застосовуючи в ЦОМ для подавання чисел з фіксованою комою модифікований, обернений і додатковий коди, знак числа також зображують як двоцифровий код «00» у випадку додатних чисел і як код «11» — у випадку від'ємних чисел. Це дає змогу легко визначати ситуацію, за якої сталося переповнення розрядної сітки машини (ознакою переповнення є наявність кодів «01» або «10» у 3. р.).

Під час виконання в ЦОМ операції додавання (віднімання) знак результату одержують автоматично, бо в операції беруть участь не самі числа, а їхні коди (включаючи й код знака). Якщо виконують операцію множення (ділення), знак результату визначають, підсумовуючи коди 3. р. множеного й множника (діленого й дільника) за мод 2. Див. також *Операції над числами*.

В. М. Монах.

**ЗНАЧУЩІ ЦИФРИ** — абб. з того числа — всі правильні цифри наблизеного числа, крім нуля, які стоять зліва від першої цифри, відмінної від нуля. Всі цифри якогось числа й вважають за правильні, якщо абс. помилка числа й не перебільшує половини одиниці розряду останньої цифри цього числа. Відносна помилка числа й, яке має  $n$  правильних цифр, дорівнює  $\delta_n =$

$$= \frac{1}{z \cdot a^{n-1}}, \text{ де } z — \text{перша 3. ц. числа } a,$$

$a$  — основна числення. Набл. числа слід записувати, зберігаючи лише правильні цифри.

Приклад. У числі 0,003070 перші три нулі не в 3. ц., бо вони служать лише для встановлення десяткових розрядів інших цифр. Інші два нулі в 3. ц., бо перший з них стоїть між 3. ц. «3» і «7», а другий нуль указує, що в набл. числі збережено десятковий розряд  $10^{-6}$ . А якщо в числі 0,003070 остання цифра не в значущому, то це число треба записувати у вигляді 0,00307. З цього погляду числа 0,003070 і 0,00307 не рівноцінні, бо в першому числі є чотири 3. ц., а в другому — три. У першому випадку набл. число в результаті викірвання або обчислень з помилкою 0,0000005, у другому — з помилкою 0,000005.

Поняття 3. ц. використовують у практичних розрахунках і в обчислюваннях на ЕОМ.

Т. В. Ристичак.

**ЗОВНІШНЄ ОБЛАДНАННЯ** — те саме, що й *зовнішні пристрої*.

**ЗОВНІШНІ ПРИСТРОЇ** — пристрої, що виконують зовнішні функції машинної обробки інформації, на відміну від перетворення інформації, що їх виконує центральний пристрій

електронної обчислювальної машини ЕОМ (процесор). За родом виконуваних операцій 3. п. поділяють на групи: пристрої підготовки інформації, які служать для занесення інформації вручну на перфолосі, пристрої записування на магнітні карти тощо; пристрої для контролю, друкування з перфокарт, розмноження, перенесення з одного виду носія на інший та для виконання інших допоміжних операцій; пристрої введення інформації — для введення в ЕОМ попередньо підготовленої інформації на перфолосіях і спец. бланках, і з первинних документів, графіків тощо; пристрої виведення інформації (див. *Пристрої введення та виведення інформації*), за допомогою яких інформація виводиться з ЕОМ у вигляді алфавітно-цифрового тексту, графіків і креслень та на перфолосіях (для зв'язку в ЕОМ без проміжних носіїв використовуються апаратура комбінованого призначення, напр., *телемайни*, виносні пульти з екраном і світловим олівцем); *назрозуміли* — для зберігання великих обсягів інформації (магнітні барабани, стрічки, диски); периферійне обладнання — апаратура, встановлена на робочих місцях для підготовки чи передавання даних в ЕОМ безпосередньо; апаратура передавання даних — комплекс технічних засобів для обміну інформацією в ЕОМ на великій відстані по лінії зв'язку. Тенденції розвитку 3. п. спрямовано на виключення трудомістких підготовчих операцій, підвищення зручності й оперативності в спілкуванні людини з машиною.

І. Т. Пархоменко

**ЗРІВНОВАЖУВАННЯ МЕТОДИ** методи введення до нуля або до певного значення, розузгодження в математичних машинах неперервної дії для досягнення еквівалентності між різними моделями об'єкта й моделюючої системи. Під різними моделями об'єкта розуміють залежності, які відображають матем. операції, включаючи функціональні залежності, системи лінійних і нелінійних алгебр і дифер. рівнянь і рівняння з частинних похідних. З. м. застосовують і для підвищення точності розв'язання задач на моделюючих машинах, усуваючи помилки, що виникають через неточність встановлення параметрів або зміну їх у процесі розв'язування. Зрівноважування контролюється досягненням нульових значень деяких фіз. величин. В електронних колах за такі величини найзручніше брати різницю потенціалів між вузлами схеми. Процес зрівноважування може відбуватись одночасно з різними діяннями моделюючої системи. Для цього застосовують *спідкуючі системи* або *підсилювачі операційні*, які відпрацьовують потенціально-нульові точки. Послідовне (по черзі) зрівноважування здійснюється або вручну, або для цього застосовують кодокеровані елементи чи перемикальні схеми. На однозначність розв'язку при одночасному зрівноважуванні впливає стійкість розв'язку з врахуванням впливу малих параметрів; при послідовному зрівноважуванні необхідно забезпечити збіжність ітераційного процесу. З. м.



ними в кожному рівнянні. Процес послідовного зрівноважування полягає в тому, що, змінюючи по черзі  $u_1, \dots, u_i, \dots, u_n$ , домагаються нульових значень  $\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_m$ . Цей спосіб еквівалентний методу повної релаксації, а при циклічному обході зрівноважуваних величин — методу Некрасова. В процесі зрівноважування значення  $\delta_j$  можна не доводити до нуля, а тільки зменшувати його. При цьому буде реалізовано метод неповної релаксації. Необхідною й достатньою умовою збіжності ітераційного методу для систем лінійних алгебр. рівнянь є умова, щоб усі корені характеристичного рівняння матриці в  $B$  були за модулем менші за одиницю, де  $B = E - A$ . Достатньою умовою збіжності для симетричних матриць є додатна визначеність матриці  $A$ . Практично при визначенні збіжності ітераційного процесу зручно користуватися умовою, щоб будь-яка норма матриці  $B$  була меншою за одиницю або умовою

$$a_{ij} > \sum_{k \neq j} a_{ik} \text{ або } a_{ij} > \sum_{k \neq i} a_{kj}.$$

Крім розглянутих методів, застосовують і метод мінімізації. Суть його полягає в тому, що виділяють величину  $S = \sum_i \delta_i^2$  або  $Q = \sum_i |\delta_i|$ , і на кожному кроці послідовного наближення цю величину зменшують. З методів, які мають неминучу збіжність, застосовують і метод найшвидшого спуску. Розглянуті З. м. можна узагальнити на системи нелінійних алгебр. рівнянь, на зокремі дифер. рівняння та системи рівнянь і на дифер. рівняння з частинних похідних. З. м. застосовують, розв'язуючи деякі задачі програмування лінійного, яким користуються, створюючи спеціалізовані обчислювальні машини неперервної дії.

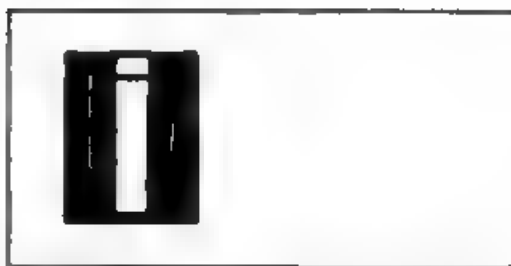
Лит.: Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., 1963 [Бібліогр. с. 677—736]; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза логических схем электронных цепей К., 1967 [Бібліогр. с. 560—564]; Я. М. Самусь. ЗСУВ — один із видів пороєдних логічних операцій, які виконують ЕЦОМ. Операція З. полягає в змусуванні машинного коду праворуч або ліворуч на задану кількість розрядів. Операція ця двомісна, одним з її операндів є асоційований код, а другим — число, яке вказує величину й напрям З. Зсув коду  $a = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$  на  $k$  розрядів ( $k$  — ціле) ліворуч замінює його на код  $a_{k+1} a_{k+2} \dots a_k \underbrace{0 \dots 0}_k$ , зсув на  $k$  розрядів

праворуч дає код  $\underbrace{0 \dots 0}_k a_0 a_1 \dots a_{n-k}$ . Розрізняють логічний З., при якому зсуваються всі розряди коду, включаючи знак, та арифм. З., при якому зсуваються лише цифрові розряди. В конкретних типах машин операції З. можуть мати свої особливості, зумовлені системою команд і прийнятими способами кодування чисел. У машинах з фіксованою комою, з  $p$ -ічною позиційною системою числення ( $p$  — основа системи числення) в певід'ємною базою операція З. еквівалентна множенню (при  $k > 0$ ) або діленню (при  $k < 0$ ) без заокруглення на  $p^k$ .

В. П. Сьомин.

ЗУПИН — припинення роботи ЦОМ (обчислюваль. за програмою) з одночасною фіксацією результатів. Залежно від причин, що зумовили З., розрізняють: програмний З., що залежить від спец. команди з програмі розв'язування задачі; З. за ознакою, яку видають з пульта; аварійний З.; З., який здійснює з пульта оператор. У однопрограмих ЦОМ зазначені причини зумовлюють З. ЦОМ, у мультипрограмих — З. програми, а ЦОМ переходить або до розв'язування наступних задач, або в режим контролю. В. П. Бонч.

**IBM (International Business Machines)** — див. «Інтернаціонал бізнес машина корпорейшен». «IBM-360» — сімейство цифрових обчислювальних машин з універсальною організацією. Розробила ці машини фірма «Інтернаціонал бізнес машина корпорейшен». У квітні 1964 було оголошено про випуск шести програмно сумісних моделей сімейства. Вони мали єдину систему команд і різнилися обсягом використовуваної пам'яті та продуктивністю. Перші зразки машин цього сімейства надійшли замовникам у 2-й половині 1965, а до 1970 було



| Пам'ять |                                      |                                   |             |
|---------|--------------------------------------|-----------------------------------|-------------|
| МОДЕЛЬ  | Ємність у вербальних байтах (8-1024) | Довжина слів за внутрішнім парком | Ціна за сеп |
| 30      | 8-64 K                               | 8                                 | 2.0         |
| 40      | 16-256 K                             | 16                                | 2.5         |
| 50      | 32-256 K                             | 32                                | 2.0         |
| 60      | 128-512 K                            | 64                                | 2.0         |
| 62      | 256-512 K                            | 64                                | 1.0         |
| 70      | 256-512 K                            | 64                                | 1.0         |

| Керування |                       |             |
|-----------|-----------------------|-------------|
| МОДЕЛЬ    | Тип                   | Ціна за сеп |
| 30        | Одностороння пам'ять  | 1.0         |
| 40        | "                     | 0.625       |
| 50        | "                     | 0.5         |
| 60        | "                     | 0.25        |
| 62        | "                     | 0.25        |
| 70        | СТАНДАРТНІ КОМПОНЕНТИ | -           |

| Потім, дані |   |             |
|-------------|---|-------------|
| МОДЕЛЬ      | Розмір даних, що передаються за внутрішнім парком | Ціна за сеп |
| 30          | 8   | 30          |
| 40          | 8   | 30          |
| 50          | 32  | 30          |
| 60          | 64  | 10          |
| 62          | 64  | 10          |
| 70          | 64  | 5           |

| Модель пам'яті |                       |             |
|----------------|-----------------------|-------------|
| МОДЕЛЬ         | Тип                   | Ціна за сеп |
| 30             | ОСНОВНА ПАМ'ЯТЬ       | 8           |
| 40             | РЕГІСТРИ НА ОБСЛУГ    | 16          |
| 50             | "                     | 32          |
| 60             | ТРАНСІЄКТОВІ РЕГІСТРИ | 64          |
| 62             | "                     | 64          |
| 70             | "                     | 64          |

#### 1. Логічна структура системи «IBM-360».

створено близько 15 моделей, з яких найменша («IBM-360-20-1») приблизно в 50 раз дешевша і в 100 раз менш продуктивна за найбільшу («IBM-360-195»). Кілька моделей фірма не довела до серійного виробництва.

«IBM-360» — сімейство обчисл. машин з єдиним комплексом принципів побудови, тех.

засобів, операційних програм і методів тех. обслуговування. В машини «IBM-360» закладено ряд нових принципів, що роблять їх універсальними й дають змогу однаково ефективно використовувати їх у різних галузях економіки, науки й техніки. Найважливіші з цих принципів такі: 1) нова елементна й технологічна база машин третього покоління (див. *Обчислювальна машина*), що забезпечує принципову реалізованість проекту «IBM-360»; 2) програмна сумісність усіх моделей сімейства — будь-яка з програм дає один і той самий результат на кожній з моделей, яка має відповідну пам'ять і пристрої введення — виведення. Мікропрограмний принцип керування забезпечує програмну сумісність деяких малих моделей «IBM-360» з ін. машинами фірми, випущеними раніше (режим емулявання); 3) універсальна операційна система (ОС), яка має для деяких моделей системи близько двох млн. команд. ОС «IBM-360» має транслятори для кількох найпоширеніших мов програмування і забезпечує різні швидкості й якості трансляції (вартість розробки ОС машин серії «IBM-360» майже дорівнює вартості виготовлення самої системи); 4) універсальність команд системи й організації, якої досягають таким способом. Оскільки, очевидно, можливості сімейства машин забезпечуються т. з. стандартною системою команд (86 команд). Доповнивши цей стандартний набір командами десятикової арифметики (8 команд), одержують систему команд для економ. розрахунків. При доповненні набору операційних з плаваючою комою (44 команди) одержують систему команд для наукових розрахунків. Якщо систему команд для економ. і наукових розрахунків доповнити засобами захисту пам'яті, то вийде універсальна система команд (близько 140 команд); 5) можливість підключення великої кількості різних *зовнішніх пристроїв* і стандартного членовування цих пристроїв з процесором через апаратуру каналів зв'язку. Організацію членовування пристроїв з процесором виконано так, що вона забезпечує єдиний спосіб керування ними незалежно від їхньої фіз. природи й кількості їх та дає змогу об'єднувати кілька машин в одну ієрархічну обчислювальну систему. Більшість моделей «IBM-360» — це, власне, не машини, а обчисл. системи; 6) організація пам'яті, яка, незалежно від її фіз. реалізації, забезпечує просте переміщення і гнучкий схемний захист програм, допускає нарощування пам'яті до великих обсягів та



осн. пам'яті. У будь-якому разі адреси й функції загальних регістрів однакові. Загальні регістри пронумеровано від 0 до 15, вони вибираються за допомогою 4-розрядного адресного поля, що позначається літерою *R* у команді. Команди «IBM-360» — змінної довжини 2, 4 й 6 байтів (дв. мал. 2). Залежно від способу формування адреси операцій розрізняють п'ять осн. форматів команд: *RR* — реєстр — реєстр, *RX* — ре-

єстр і мультиіндексний канал, що працюють незалежно один від одного (див. *Пристрій обміну*). Обмін здійснюється байтами й супроводжується контролем по парності. Швидкість обміну може досягати  $5 \times 10^6$  байт/сек.

За елементною базою «IBM-360» належить до машини 3-го покоління. Всі моделі побудовано на базі гібридних інтегральних схем. Осн. логічною схемою є інвертор з діодними логічними елементами на вході. При виготов-

Основні характеристики деяких моделей сімейства обчислювальних систем «IBM-360»

| Назва моделі | Рік виготовлення | Час додавання/множення, мсек | Смисловість ОЗП на машині, осердя, тис слів | Тривалість циклу, мсек | Тип і смисловість одного блоку зовнішнього ЗП, млн знаків | Введення — виведення                     |  |
|--------------|------------------|------------------------------|---|------------------------|---|--|--|
|              |                  |                              |   |                        |   | тип                                      | швидкість: карт/хв, літ/сек, рядків/хв |
| Модель 40    | 1965             | 11,88/77                     | 16—282                                      | 2,5                    | барабани 0,83, диски 7,25, картки 400                     | перфокарти, перфострічки, друку пристрої | 1000/300<br>1000<br>200; 1100          |
| Модель 30    | 1965             | 29/303 фінс, 39/312 плав.    | 8—64  | 1,5                    | барабани 0,83, диски 7,25, картки 400, стрічки            | перфокарти, перфострічки, друку пристрої | 1000/300<br>1000<br>200; 1100          |
| Модель 67    | 1966             | 1,3                          | 131—1048                                    | 0,75                   | барабани 4,1, диски 307, 7,3, 112, картки 400             | перфокарти, друку пристрої               | 1000/400<br>200; 1100                  |
| Модель 90    | 1967             | 0,18/0,27                    | 282—1048                                    | 0,75                   | барабани 4,1, диски 236, 7,3, 112, картки 400             | перфокарти, друку пристрої               | 1000/400<br>200; 1100                  |
| Модель 75    | 1969             | 70/225                       | 16—48                                       | 0,9                    | диски 7,25  | перфокарти, друку пристрої               | 1000<br>600; 1100                      |
| Модель 85    | 1969             | 0,08/0,5                     | 4—6; токні-платки                           | 1                      | стрічки   | перфокарти, перфострічки, друку пристрої |  |

єстр — пам'ять з індексацією адреси пам'яті, *RS* — реєстр — пам'ять без індексації адреси пам'яті, *SI* — безпосередній операнд — пам'ять, *SS* — пам'ять — пам'ять. Більшість команд системи «IBM-360» — двоадресні, проте є й одно- й трьоадресні. Адреса звертання до запам'ятовувального пристрою може модифікуватися (індексуватися) на вміст будь-якого з 16 загальних регістрів. У форматах *RS* і *SS* передбачено подвійну індексацію. Непрямої адресації нема. Керування порядком вибирання команд, а також фіксація й індикація стану системи по відношенню до виконуваної програми здійснюється словом стану програми — *PSW*, що займає 8 байтів пам'яті й має адресу команди, наступної за перериваною командою, ознаку результату раніше виконаної команди, код переривання, маску системи, маску програми, ключ захисту пам'яті й кілька службових розрядів для визначення режиму роботи. При перериванні поточною *PSW* замінюється новим, відповідно до причини переривання. Старе *PSW* запам'ятовується в окремій, що відповідає причині переривання, комірії пам'яті. В «IBM-360» можливі п'ять класів переривання (в порядку пріоритету обслуговування) — від схем контролю, від введення — виведення, при звертанні до супервізора, зовнішні та програмні.

Обмін інформацією між зовнішніми пристроями й пам'яттю здійснюється через селектор-

ний систем сімейства «IBM-360» застосовано новий спосіб автомат. компонування схеми використано багатопаровий друкований монтаж. Це дало змогу значно зменшити кількість розвінаних компонентів машини, збільшити її надійність, поліпшити характеристики й зменшити вартість.

Обчисл. система «IBM-360» має універсальну ОС, яка значно розширює можливості системи й програміста. Осн. призначення ОС — забезпечити користувачеві ефективне й оперативне використання ресурсів системи, добитися максимально можливого суміщення роботи пристроїв у часі, створити оптимальні умови проходження потоку задач при мінімальній участі оператора. ОС «IBM-360» складається з набору опрацюваних і керуючих програм. Опрацювальні програми підтримують відповідні блоки керуючих програм і призначені для перетворення вхідної інформації до вигляду, придатного для безпосередньої реалізації в системі. Керуюча програма має три сфери дії: керування даними, керування завданнями й керування задачами. У відповідності з цим ОС має супервізор введення — виведення, диспетчер завдань і диспетчер задач. Функції зв'язку оператора з системою і системи з оператором здійснює головний диспетчер. Опрацювальні програми ОС мають транслятори для найпоширеніших мов: *ФОРТРАН*, *КОБОЛ*, *RPG*, *АЛГОЛ 60* і *ПЛ-1*. Як мову

нижчого рівня використовують швидкокод «IBM-360». Передбачено можливість включати в систему транслятори й з інших мов. При цьому вирішальну роль відіграють як критерій повноти системи матем. забезпечення, так і економіч. доцільність і тех. реалізованість проєктів. Такі суперечності критеріїв призвели до того, що для мов ФОРТРАН і КОБОЛ використовують по три різні транслятори, кожен з яких накладає ті чи інші обмеження на використання мови й відрізняється швидкістю і якістю трансляції.

Архітектура машин «IBM-360» дуже вплинула на розробки багатьох зарубіжних фірм, які почали випускати об'єдн. машини й системи, повністю чи значною мірою сумісні з машинами «IBM-360», логічна структура машин цього сімейства стала найпоширенішою у світі.

В табл. подано осн. тех. характеристики деяких реальних моделей системи «IBM-360». Літ. Амідає Дж., Ідоу Дж., Брукс Ф. Архітектура системи IBM-360. В кн.: Інженерно-технічний збірник. Нью-Йорк, в. 1. М., 1965. Вичислювальна система IBM-360. Пер. з англ. М. 1969: Зейдлерберг Я. К., Матасенко Н. А., Тарасовата Е. П. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М. 1970. І. В. Вельбичий, П. В. Похобіло

**ІГОР ТЕОРІЯ** — теорія побудови математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. Оскільки сторони, що беруть участь у більшості конфліктів, зацікавлені в тому, щоб приховати від супротивника свої наміри, прийняття рішень в умовах конфлікту вивчається здебільшого з точки зору прийняття рішень в умовах невизначеності. Навпаки, фактор невизначеності можна інтерпретувати як супротивника суб'єкта, що приймає рішення (через це прийняття рішення в умовах невизначеності можна розуміти як прийняття рішення в умовах конфлікту). Зокрема, багато тверджень математичної статистики звичайно формують як теорію ігор. Логічною основою І. т. є формалізація трьох понять, що входять у її визначення і є фундаментальними для всієї теорії конфлікту, прийняття рішення в ньому та оптимальності цього рішення. Ці поняття розглядають в І. т. в якнайширшому розумінні. Їхні формалізації відповідають змістовим уявленням про відповідні об'єкти. За відсутності конфлікту вважають здебільшого будь-яке явище, щодо якого можна говорити про його учасників, про їхні дії, про наслідки явища, до яких ці дії приводять, про сторони, так чи інакше зацікавлені в цих наслідках, і про суть цієї зацікавленості. Якщо назвати учасників конфлікту коаліціями й дії (позначивши їхню множину через  $R_K$ ), можливі дії кожної з коаліцій дії — її стратегіями (множину всіх стратегій коаліції дії  $K$  позначають через  $S_K$ ), наслідки конфлікту — ситуаціями (множину всіх ситуацій позначають через  $S$ ) і вважають, що кожна ситуація складається з результатів вибору кожної з коаліцій дії якоїсь своєї стратегії, так що  $S \subseteq \prod_{K \in R_K} S_K$ .

стороня — коаліціями інтересів (множина їх —  $R_I$ ) і, нарешті, якщо говорити про можливу передачу для кожної коаліції інтересів  $K$  однієї ситуації  $s$  над іншою  $s'$  (цей факт позначають як  $s' >_K s$ ), то конфлікт загалом буде описано як систему

$$\Gamma = \langle R_I, \{S_K \mid K \in R_K\},$$

$$S, R_I \{>_K\} \mid K \in R_I \rangle.$$

Таку систему, яка передає конфлікт, наз. грою. Конкретизації компонент, що задають гру, приводять до різноманітних окремих класів ігор.

Якщо у грі є лише одна коаліція дії  $K$ , можна вважати, що множина ситуацій  $S$  збігається з множиною стратегій  $S_K$ . Одержувані так ігри наз. жестратегічними. До них відносять ігри без побічних платежів та класичні ігри кооперативні разом з їхніми різними різновидами. Якщо в грі множини коаліцій дії та коаліції інтересів збігаються ( $R_K = R_I = I$ ; у цьому випадку і ті й ті коаліції наз. гравцями),  $S = \prod_{i \in I} S_i$ , а від-

ношення переваг задають функціями виграшу, то одержують ігри безкоаліційні. Окремих класів їх є ігри аксіоматичні, в т. ч. ігри матричні та ігри на одиничному квадраті; ігри динамічні, в т. ч. ігри диференціальні, ігри рекурсивні, ігри стохастичні, ігри на виживання та інші також належать до безкоаліційних ігор.

І. т. широко використовує різні математичні методи й результати з імовірностей теорії, класичного аналізу, функціонального аналізу (особливо важливими є теореми про нерухомі точки), комбінаторної топології, теорії дифер. та інтегр. рівнянь тощо. Специфіка І. т. спирає розробляння для неї різних матем. напрямів (напр. теорії опуклих множин, вправування лінійного і т. ін.).

Прийняття рішення в І. т. вважають вибір коаліцій дії або, зокрема, вибір гравцем якоїсь своєї стратегії. Цей вибір можна уявляти собі у вигляді одноразової дії і вводити формально до вибору елемента з множини. Ігри з таким розумінням вибору стратегій наз. іграми в нормальній формі. Їм протиставляють динамічні ігри, в яких вибір стратегії є процесом, що розгортається у часі. Цей процес супроводиться розширенням і звуженням можливостей, одержанням і втратою інформації про поточний стан справ тощо. Формально стратегією в такій грі є функція, визначена на множині всіх інформаційних станів суб'єкта, що приймає рішення. Некритичне використання «свободи вибору» стратегій може приводити до парадоксальних явищ.

Питання про формалізацію поняття оптимальності є досить складним. Єдиного уявлення про оптимальність в І. т. немає, тому доводиться розглядати кілька різних оптимальностей принципів. Сфера застосовності кожного з уживаних в І. т. принципів оптимальності



обмежується порівняно вузькими класами ігор або стосується обмежених аспектів розгляду їх. В основі кожного з цих принципів лежать певні інтуїтивні уявлення про оптимум як про щось естійке або справедливе. Формалізація цих уявлень дає вимоги, які ставлять до оптимуму і мають характер аксіом. Поміж цих вимог можуть виявитися й такі, що суперечать одна одній (напр., можна вказати на конфлікти, в яких сторонам змушені задовольнятися скромними виграшами, бо великі виграші досягаються лише в нестійких ситуаціях); тому в і.т. і не можна сформулювати єдиного принципу оптимальності.

Ситуації (або множини ситуацій), що задовольняють у якійсь грі ті чи інші вимоги оптимальності, наз. розв'язками цієї гри. Оскільки уявлення про оптимальність не є однозначними, можна говорити про розв'язки ігор у різному розумінні. Вироблення визначень розв'язків ігор, доказів існування їх і розроблення способів фактичного знаходження їх — трояк. осн. питань сучасної і.т. Близькими до них є питання про єдиність розв'язків ігор, про існування в них або інших класах ігор розв'язків, що мають певні задані властивості.

І.т. як матем. дисципліна зародилася одночасно в теорію ймовірностей у середині 17 ст., але протягом майже 300 років практично не розвивалася. Першою istotною працею і.т. слід вважати статтю Дж. фон Неймана «До теорії стратегічних ігор» (1928), а після опублікування монографії амер. математиків Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна «Теорія ігор і економічна поведінка» (1944) і.т. сформувалася як самостійна матем. дисципліна. На відміну від інших галузей математики, що мають переважно фізичне або фізико-технічне походження, і.т. з самого початку свого розвитку була спрямована на розв'язування задач, що виникали в економіці (а саме: в конкурентній економіці). Згодом і.т. почали застосовувати, хоч і порівняно рідко, в інших галузях знань, що мають справу з конфліктами: у військовій справі, в питаннях моралі, при вивченні масової поведінки індивідів, наданих різними інтересами (напр., у питаннях міграції населення або при розгляді біол. боротьби за існування). Теоретико-ігрові методи прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності можна широко застосовувати в медицині, в економіч. й соціальному плануванні й прогнозуванні, при розробленні багатьох питань техніки тощо. Іноді і.т. відносять до матем. апарату кібернетики.

В і.т. використовують ті самі методи, що й у всіх інших галузях математики. Принципи оптимальності виробляють аксіоматично, існування розв'язків встановлюють шляхом абстрактних міркувань, а знаходять їх, застосовуючи аналітичний апарат (часто досить громіздкий і хитромудрий) чи наблизжені чисельні методи (іноді — при реалізації на ЕОМ). Крім того, в і.т. великого значення

набувають експериментальні методи, що полягають у багаторазовому відтворенні досліджуваної гри шляхом фактичного розігрування її людьми (експериментальні ігри, ділові ігри) чи шляхом цифрового моделювання. Цифрове моделювання особливо часто застосовують, досліджуючи ігри автоматів.

Наук. результати, що їх досягнуто в і.т., численні й різноманітні. Сформульовано багато принципів оптимальності, які можна застосовувати до різних класів ігор. Деякі з них (напр., *абсолютності мети принцип*, що приводить до т.з. ситуації рівноваги, індивідуальні відхилення від яких не можуть супроводитися збільшенням виграшу, його окремий випадок — максимуму принцип, характеристична функція в кооперативній грі, теорія Неймана — Моргенштерна, *Шенал екстер* тощо) відображують природні уявлення про оптимальне (справедливе), інші, поки що нечисленні (критерій Мілнора), задають вичерпно їхніми інтуїтивно ярозумними рисами, але вважалося вони мають «синтетичний» характер і не наочні. В і.т. доведено багато теорем існування, що встановлюють фактичну реалізованість принципів оптимальності для відповідних класів ігор. В стратегічних іграх ця здатність реалізуватися досягається не безпосередньо, а, як це типове для математики, за рахунок розширення наперед заданої множини стратегій. Саме на початкових множинах стратегій вводять для розгляду ймовірнісні міри, які оголошують «узгадальними» стратегіями мішаними. Коли й цього не досить, доводиться зводити скінченно-адитивні міри. Існування ситуацій рівноваги в мішаних стратегіях (і тим більше — в лінійно-адитивних стратегіях) задовольняє, по суті, всі практичні потреби. В нестратегічних іграх це можна сказати лише про вектор Шеналі, а також про *А-ядро* та *я-ядро*. Питання про те, чи має ця гра розв'язок за Нейманом — Моргенштерном, є одним з найскладніших: поряд з досить широкими класами розв'язаних ігор відомі й приклади нерозв'язаних ігор.

Задачу знаходження розв'язків ігор розв'язано лише для окремих вузьких, хоч і досить численних класів ігор. Немає єдиного способу знаходження розв'язків навіть для ігор на одиничному квадраті в неперервную ф-цією виграшу. Досягнуті успіхи одержано як результат використання складного матем. апарату. В теорії нестратегічних ігор лише намічається створення якоїсь єдиної матем. теорії, а більшість результатів одержано конкретними, шоразу індивідуальними, комбінованими міркуваннями. А загалом уся проблема ускладнюється тим, що часто розв'язок гри виявляється неоднозначним і вичерпний аналіз гри потребує, щоб було повністю перелічено всі її розв'язки. Лише в окремих, виключних випадках розв'язок гри піддається описові з допомогою ф-я. Здебільшого його формують у вигляді *алгоритмів* (напр., для матричних ігор це — алгоритм розв'язку стандартної задачі лінійного програмуван-

ня). Це утруднює оцінку залежності параметрів розв'язків гри від параметрів самої гри. Та ще й ця залежність, як правило, не є переривною.

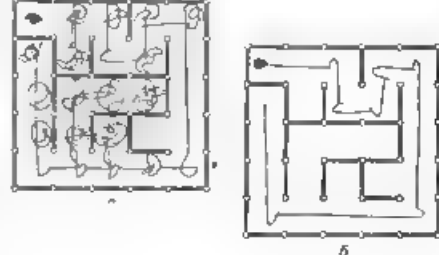
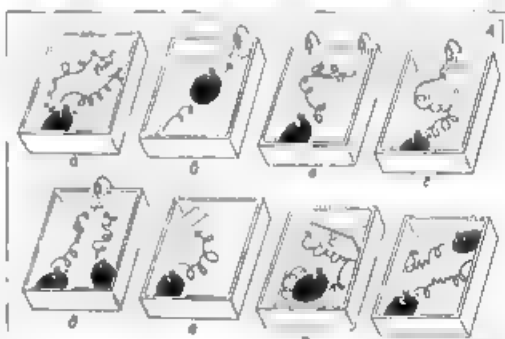
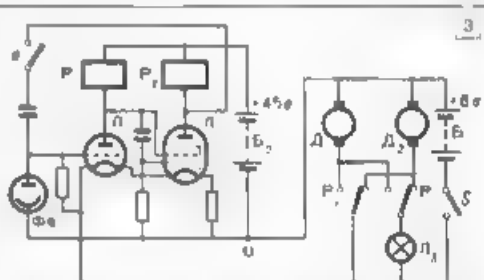
Останнім часом в і. т. дедалі більше займаються розроблянням різного роду обчислень ігор, алгебр ігор, просторів ігор тощо. Встановлюють закономірності, за допомогою яких аналіз одних ігор можна зводити до аналізу інших ігор, у тому або іншому розумінні простіше побудованих. Спрощення, яких при цьому досягають, мають здебільшого лише кількісний характер. Так, безкваліфічні ігри з великим числом гравців не вдається звести до послідовного аналізу системи ігор з меншим числом гравців кожна. Розробляють операції на ряді досить чітко окреслених класів ігор (напр., суми і добутку простих ігор). Розглядають випадкові ігри, тобто множини однотипових ігор з імовірнісними мірами на них. У випадкових іграх деякі властивості розв'язків (напр., існування у стратегіях чистих) виявляються випадковими подіями. Вимірності яких піддаються обчисленню. Досліджують топологічні простори ігор та підмножини їх, які відрізняються властивостями сукупості розв'язків гри (напр., єдиністю розв'язку).

Літ. Матричні ігри. М., 1961. Бескошечные антикоммутирующие игры. М., 1963. Позиционные игры. М., 1967. Первая Всесоюзная конференция по теории игр. Ереван, 1970. Воробьев Н. Н. Современное состояние теории игр. «Успехи математических наук», 1970, т. 25, № 2. Contributions to the theory of games v 1-3.8. Princeton, 1950-59. Дьюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. Пер. с англ. М., 1961 [Бібліогр. с. 606-625]. Карлик С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [56 т. стр. 794, 818]. Кляйн Г. Spieltheorie in philosophischer Sicht. Berlin 1968. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Пер. с англ. М., 1970 [Бібліогр. с. 695-702].

М. М. Воробьев.

**ІГРАШКИ КІБЕРНЕТИЧНІ** — кибернетичні пристрої (автомати), що наочно відтворюють ті чи інші властивості кибернетичних систем для проведення наукового експерименту або

мають демонстраційний, учбово-методичний чи розважальний характер. Як правило, вони є прикладами пристроїв, які відтворюють відносно простими засобами різноманітні форми доцільної поведінки. Найпростіші і. к. — автомати з жорсткою програмою, які набули поширення у 18 ст., напр., годинники, обладнані додатковими механізмами, які приводять у дію фігурки людини, тварин і т. ін. Так, відомий годинник яєчної фігури, що його виготовив видатний російський винахідник І. П. Кулібін, мистив усередині мініатюрний іграшковий театр з фігурками, що



1. Схематичний розріз Вокансонової «машини».

2. «Робот».

3. Принципова схема Уолтерової «черепашки» (D<sub>1</sub> — двигун стержневої колонки; D<sub>2</sub> — приводний двигун колеса).

4. Різні види поведінки Уолтерової «черепашки»: а — пошук на відсутності яскравого світла, б — припинення до не дуже сильного джерела світла, в — поведінка за наявності двох сильних джерел світла, г — обминання перешкоди при русі на світло, д — припинення до світла двох «черепашок», е — відбійна «роздільниця», ж — «черепашки» перед дзеркалом; 5 — «знайомство» двох «черепашок».

5. Шлях «машини» в Шенноновому лабіринті: а — до «назначення»; б — після «навчання».

рухалися злагоджено; в годиннику Кокса — «павич», багато рухомих фігур («сова» в клітці, «півень», «павич» тощо), які з настанням заздалегідь встановленого часу приводяться у рух. До іншого виду І. к. належать автоматичні (заводні) іграшки, здатні виконувати дуже складні послідовності фіксованих дій. Такими є, напр., дотепні Вокансові моделі: «флейтист» — фігура на зріст людини, що відтворювала на справжніх муз. інструментах 11 різних мелодій, та «кочка» (мал. 1), здатна відтворювати складний комплекс рухів. До цього ж класу І. к. належать і т. а. а ндроїди — автомати, що мають вигляд фігурок (ляльок) з збудованими всередину механізмами, які давали їм змогу виконувати фіксований набір дій. Перші андроїди виготовили швед. годинникар П'єр-Жак Дро та його син Адрі Дро (на їхню честь і запроваджено поняття «андроїди»). Найвідоміші андроїди — «шисар», «малювальник» і «музикантка».

Складнішим різновидом І. к. є іграшки, побудовані на базі т. а. рефлекторних автоматів. Як правило, це системи, здатні виконувати досить багато різних дій. Вибір необхідної в кожному конкретному випадку послідовності дій (керування автоматом) здійснюється на відстані за допомогою голосу, світлового або електричного (радіо) сигналу. Автомат розпізнає різні значення керуючого сигналу, напр., різні слова голосових команд, реагуючи на них відповідною послідовністю дій. Такі І. к. звичайно виконують у вигляді зовні стилізованих пристроїв, трохи схожих на людину, які наз. роботами (мал. 2). Різноманітні, часто дуже складні роботи будували й будують авради реклами, вони є й предметом творчості дитячих тех. станцій і гуртків. До цього ж класу рефлекторних автоматів належить і багато діючих моделей, керованих на відстані. Іграшки цього типу, напр., телекеровані моделі літаків, морських судів тощо, мають велике навчально-пізнавальне значення, вони дуже поширені.

Як моделі тропізмів. Широко відомі три «черепахи», які розробив англ. біофізик і нейрофізіолог Г. Уолтер у 1950-51. Вони являють собою саморухливі електромех. пристрої, здатні відтворювати такі види поведінки: прямувати на світло або рухатися від нього, обходити перешкоди, шукати що-небудь, заходити до «годиниці», щоб підзарядити розряджені акумулятори, і т. ін. «Черепашок» приводять у рух два електродвигуни, що живляться від акумулятора. Перший двигун забезпечує поступальний рух пристрою, другий, розміщений на стерновій колонці, повертає його, змінюючи тим самим напрям руху.

Чутливими елементами перших двох «черепашок» Г. Уолтера були фотоеlement, розміщений на стерновій колонці, і механічний контакт, що замикався при наїзді на перешкоду. Керування поведінкою здійснюється за допомогою нескладної електронної схеми зі зворотним зв'язком (мал. 3). Схему відрегульовано в такий спосіб, що низький потенціал анода лампи  $L_1$  замикає другу лампу  $L_2$ , перекидаючи при цьому реле  $P_2$ , так, щоб виключалася можливість перебування під струмом водночас обох реле  $P_1$  та  $P_2$ . Якщо фотоеlement  $Ф$  не освітлено, то лампу  $L_1$  замкнено, а  $L_2$  відкрито. При помірно освітленні фотоеlementа лампа  $L_1$  трохи відкривається, проте струму, який вона проводить, недостатньо для спрацювання реле  $P_1$ , хоч зменшення напруги на її аноді досить для відпускання реле  $P_2$ . Дальше збільшення освітленості  $Ф$  («засліплення») веде до спрацювання реле  $P_1$  при відпущеному  $P_2$ . Внаслідок замикання мех. контакту з схема перетворюється на мультивібратор, який поперемінно змикає й викидає реле  $P_1$  та  $P_2$ . Поводження «черепашки» залежно від зовнішньої дії  $Ф$ , отже, від станів реле  $P_1$  та  $P_2$  характеризується таблицею.

При русі з малою швидкістю у верхній частині «черепашки» засвічується лампочка  $L_3$ , яка може бути «принадою» для іншої «черепашки. При сумісному діянні двох под-

| Подраження                                | Стан реле                                    |  | Стан лампи  |   |
|---|--|--|---|---|
|   | $P_1$  | $P_2$  | $L_1$ (стерно)  | $L_2$ (прямод)  |
| Темрява<br>Світло<br>Засліплення<br>Дотик | Вимкнено<br>Вимкнено<br>Вимкнено<br>Вимкнено | Вимкнено<br>Вимкнено<br>Вимкнено<br>Вимкнено | Нормальна швидкість<br>Нерухомий<br>Мала швидкість<br>Нормальна швидкість<br>Мала швидкість | Мала швидкість<br>Нормальна швидкість<br>Нормальна швидкість<br>Мала швидкість<br>Нормальна швидкість |

Найвідомішими серед І. к. стали представники т. зв. «кібернетичного звіринця» — пристрої, що відтворюють різні форми поведінки певних тварин (черепах, жуків, білок, собак і ін.) і зовні трохи схожі на них. Перші найпростіші схеми таких пристроїв, здатні рухатися до світла («міля») або віддалятися від нього («кмоп»), розробив Н. Вінер

разників пристроїв реагує на сильніший. Різні види поведінки «черепашок» зображено на мал. 4.

Третя Уолтерова «черепашка» — «Кора» має трохи складнішу конструкцію. До її схеми додатково входить мікрофон та змінний елемент пам'яті з великою сталою часу забування. Схему зібрано так, що звуковий сиг-

нал, коли його сприймає мікрофон, спричинює короткотривалу зупинку «терепашки». Поява звукового сигналу водночас з наїздом на перешкоду спричинює короткотривалий заряд конденсатора пам'яті. Після кількох наїздів на перешкоду, що супроводилися звуковим сигналом, заряд конденсатора досягає певної величини, й звуковий сигнал починає спричинювати таку саму реакцію, як і наїзд на перешкоду. Зазначена поведінка аналогічна відомим моделям умовного рефлексу. Відомі різноманітні конструкції «терепашки» та інших «звірятко», як правило, відрізняються одна від одної лише конструктивними деталями. Так, у деяких пристроях «смісця пам'яті» замінено на термореле з великою інерційністю, в інших — керуючі схеми побудовано на самих тільки реле. І. н. описаного виду дають змогу демонструвати різні форми поведінки й найпростіші умовні рефлекси, одержувані в моделях за допомогою дуже простих засобів.

До І. н. можна віднести й кілька спеціалізованих пристроїв, призначених для розв'язування деяких задач. Відомі, наприклад, конструкція, яку запропонував К. Шеннон для «вивчання» розв'язувати лабіринти задачі. Цей пристрій, що має назву Шеннонського лабіринта («Шеннонська мишка»), являє собою спеціалізований релейний логіко-мех. пристрій з дошкою в  $5 \times 5$  клітинок, між якими можна довільно встановлювати перегородки — утворювати лабіринт. Щуп у вигляді невеликої металевий «смішки» вміщується в довільну клітку. Після численних спроб і блукання «мишка» потрапляє до заданої клітки — досягає мети. При цьому відбувається «запам'ятовування» правильного шляху. Тепер «мишка» потрапляє в клітку, з якої вона вже побувала, без блукання (мал. 5).

Іншими представниками пристроїв, що розв'язують деякі види розважальних задач, є автомат для гри з ним (де програє той, хто бере останній предмет із трьох купок), найпростішу модель якого розробив З. Хенікес, та кілька спеціалізованих пристроїв для гри в хрестики й нулики, розв'язування простих шахових задач тощо. Кількість «ігрових» задач, що їх розв'язують різні автоматичні пристрої з пізнавальною метою, тепер безперервно зростає, проте розвиток програмування дає змогу, не створюючи для кожної задачі спеціального пристрою, використовувати для розв'язування цих моделювання їх універсальну ЦОМ. Ідеї, що набули спочатку свого втілення в І. н., знаходять застосування у ряді практично важливих систем і пристроїв — автомат. маніпуляторах, роботах, роботах промислових, автомат. наукових лабораторіях тощо.

Лит.: Полетаєв К. А. Сигнал. М., 1958 [бібліогр. с. 401–402]; Крементуло Ю. В. Кібернетика «терепашки» «Тортіла-2». «Автоматизм», 1959, № 2. Гаагс-Рапопорт М. Г. Автоматизм і живі організми. М. 1961 [бібліогр. с. 210–219]. Шеннон К. Роботи по теорії інформації в кібернетикі. Пер. з англ. М., 1963 [бібліогр. с. 763–820].  
М. Г. Гаагс-Рапопорт.

**ІГРИ АНТАГОНІСТИЧНІ** ігри двох учасників з прямо протилежними інтересами. Формально ця протилежність (антагоністичність) інтересів виражається в тому, що при переході від однієї ситуації до іншої зі збільшенням (зменшенням) виграшу одного з гравців чисельно однаково зменшується (збільшується) виграш другого гравця. Отже сума виграшів гравців у будь-якій ситуації в І. а. є сталою (звичайно можна вважати, що вона дорівнює нулеві). Тому І. а. називають також іграми двох осіб з нульовою сумою (іноді — «нульовими іграми»). Матем. визначення поняття антагоністичності (рівність за величиною і протилежність за знаком виграшу функцій гравців) є формальним поняттям, яке відрізняється від змістового філософського поняття, але зберігає його осн. рису — непримиренність суперечності.

Для багатьох явищ І. а. є задовільною моделлю. До них належать деякі (але не всі) види операцій, спортивні та салонні ігри, прийняття ділових рішень в умовах конкуренції. Прийняття рішень в умовах невизначеності, напр., ігри проти природи, можна також моделювати як І. а., припустивши, що справжня, але невідома закономірність природи припадає до дій, найменш сприятливих для гравця. Це припущення не означає, проте, що природа наділена свідомістю, яка спрямована проти людини.

В І. а., за означенням, неможливі якісь переговори та угоди між гравцями. Справді, якщо з результату якихось переговорів або угод один з гравців зміг би збільшити свій виграш на якусь величину, то виграш другого гравця зменшився б на таку саму величину, тобто для цього ці угоди були б неважливими.

Г а у нормальній формі (див. *Ігор теорія*) задають системою  $\Gamma = \langle A, B, H \rangle$ , де  $A, B$  — множини стратегій відповідно 1-го і 2-го гравців,  $H$  — дійсна ф-ція, визначена на множині всіх ситуацій  $A \times B$ , яка в ф-цію виграшу 1-го гравця (ф-ція виграшу 2-го гравця дорівнює, за означенням  $\Gamma$  а., —  $H$ ). Процес розгравування І. а. полягає в тому, що гравці вибирають свої стратегії  $a \in A$ ,  $b \in B$ , після чого перший гравець одержує від другого суму  $H(a, b)$ . Розумна поведінка гравців в І. а. здійснюється на підставі *максиміну принципу*. Якщо

$$\max_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \min_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b), \quad (1)$$

то в кожного гравця існують *стратегії оптимальні*, тобто стратегії, на яких досягаються в (1) *зов. екстремуми*. Проте вже в найпростіших випадках рівність (1) може не мати місця. Напр., у *гр матричній* з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

виражається  $\max_i \min_j a_{ij} = -1$ ,  $\min_j \max_i a_{ij} = 1$ . Щоб забезпечити застосовність принципу максиміну, множини стратегій гравців розши-

рюють до множини стратегій мішаних, які полягають у випадковому виборі гравцями своїх початкових стратегій, що наз. частими, а ф-ція виграшу визначається як математичне сподівання виграшу в умовах застосування мішаних стратегій. У наведеному прикладі оптим. мішаними стратегіями гравців є вибори гравцями обох своїх стратегій з ймовірностями  $1/2$ , а гри значення дорівнює нулеві.

Якщо множини  $A$  та  $B$  скінченні, то г. а. наз. матричною грою, для неї завжди існують оптим. мішані стратегії в обох гравців. А якщо одна з множин  $A$  чи  $B$  нескінченна, то гру наз. нескінченною. Принципи максимуму для нескінченних і.а. може здійснюватись (якщо рівність (1) не має місця) у вигляді рівності

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b).$$

В цьому випадку оптим. стратегії гравців не існують, проте для будь-якого  $\epsilon > 0$  існують  $\epsilon$ -оптимальні стратегії (тобто стратегії, що забезпечують досягнення значення гри з заданою точністю  $\epsilon$ ) в обох гравців. Якщо обидві множини  $A$  та  $B$  нескінченні, то оптим. мішані стратегії (і навіть  $\epsilon$ -оптимальні) існують не завжди, напр., у грі з ф-цією виграшу

$$H(a, b) = \begin{cases} 1, & a > b; \\ 0, & a = b; \\ -1, & a < b \end{cases}$$

де стратегіями гравців є множини натуральних чисел. Див. також *Гра на одиничному квадраті*.

**ІГРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ** — напрям у теорії процесів, що їх описують диференціальними рівняннями. І. д. мають властивості характерні і для оптимального керування теорії, і для ігор теорії Безпосередньою причиною розвитку теорії І. д. були прикладні задачі, зокрема, військові.

Так, типовою задачею І. д. є, напр., задача про перехоплення винищувачем ворожого бомбардувальника. Обидва об'єкти (і винищувач, і бомбардувальник) керовані, і їхня поведінка залежить від того, як діють пілоти. Однак керування здійснюють різні особи з протилежними інтересами: бомбардувальник уникає аустричі, а винищувач переслідує його. Складність завдання керування для пілота винищувача полягає в тому, що йому бракує інформації про майбутнє керування ворога. Він знає тех. можливості літака, знає його положення в даний момент, але не може знати, яке рішення про своє керування прийме пілот бомбардувальника кожного наступного моменту часу. Тому його рішення базуються на інформації про ситуацію, яка склалася до даного моменту.

Формально в заг. вигляді І. д. можна сформулювати так. Є об'єкт керування, поведінку якого описують системою дифер. рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v), \quad (1)$$

де  $x$  —  $n$ -вимірний вектор з компонентами  $x_1, \dots, x_n$ , а  $f(x, u)$  —  $n$ -вимірний вектор-функція з компонентами  $f_i(x, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а  $u$  і  $v$  — керуючі параметри, що являють собою  $r$ -вимірний і  $s$ -вимірний вектори відповідно, які можуть змінюватися на множинах  $U$  і  $V$ . Крім того, задано термінальну множину  $M \subset E^n$ , де  $E^n$  —  $n$ -вимірний простір (див. *Простір абстрактний*). Нехай вибрано дві якісь ф-ції  $u(x)$  і  $v(x)$  так, що  $u(x) \in U$ ,  $v(x) \in V$  і рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(x), v(x)) \quad (2)$$

має розв'язок. Тоді для кожного початкового стану визначено траєкторію  $x(t)$  системи (2) і визначено функціонал

$$I(u(\cdot), v(\cdot); x^0) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(t), v(t)) dt,$$

де  $t_1$  — перший момент часу, коли  $x(t) \in M$ . Якщо такого моменту немає, то вважають, що  $t_1 = +\infty$ . Завдання теорії І. д. полягає тепер у в'ясуванні питання про те, за яких умов і для яких точок  $x^0$  можна знайти такі ф-ції  $u^0(x)$  і  $v^0(x)$ , що  $I(u^0(\cdot), v^0(\cdot); x^0) \leq I(u(\cdot), v(\cdot); x^0) \leq I(u^0(\cdot), v^0(\cdot); x^0)$ .

У такій постановці задачі розв'язано лише для небагатьох конкретних окремих прикладів. Для випадку, коли множина  $M$  співпадає з усім простором, а  $t_1$  — фіксована, доведено існування розв'язку гри в певному узагальненому розумінні. Для заг. випадку одержано результати, коли припустити певну дискримінацію другого гравця, який здійснює керування  $v$ . А саме: припускають, що приймаючи своє рішення, перший гравець знає майбутнє керування другого на певному малому відрізку часу. В цьому випадку вдається показати, що весь простір початкових положень можна поділити на дві області, так, що виходячи з першої області, перший гравець завжди може гарантувати собі закінчення гри зі скінченною ціною  $I$ , а той час як у точках другої області він не може гарантувати собі жодного скінченного значення ціни. Побудовано достатні умови можливості закінчення гри зі скінченною ціною. Ці умови можна застосовувати в основному для розв'язування задач з лінійними об'єктом керування.

Лит.: Коштрагія Л. С. К теория дифференциальных игр. «Успехи математических наук», 1966, т. 21, № 4, Красовский Н. И. Игры задачи о встрече движений М., 1970 (б. биогр. с. 413–420), Айвакинс Р. Дифференциальные игры. Пер. с англ. М., 1967 (б. биогр. с. 470–472).

**ІГРИ МАТРИЧНІ** — ігри антагоністичні, що в них обидва гравці мають скінченну кількість чистих стратегій. Якщо 1-й гравець має  $m$  стратегій, а 2-й гравець —  $n$  стратегій, то І. м. можна задати  $m \times n$ -матрицею  $A = \|a_{ij}\|$ , де  $a_{ij}$  — виграш 1-го гравця, якщо він обрав свою стратегію,  $i = 1, \dots, m$ , а гравець 2-й обрав свою стратегію  $j = 1, \dots, n$ .

..., л. Доцільно, щоб, вибираючи стратегію, гравці керувалися *максиміну принципом* І. м. завжди має розв'язок у стратегіях мішаних.

За приклад І. м. може правити гра в «хочання», яка полягає ось у чому. 2-й гравець ховається в одну з комірок, а 1-й обстежує одну з них. Якщо він обрав комірку і в 2-й гравець там, то 1-й гравець виявляє 2-го гравця з ймовірністю  $p_i$ ; в протилежному разі ймовірність знайдення дорівнює нулеві. Метою 1-го гравця є максимізація (метою 2-го — мінімізація) ймовірності знайдення. Цю гру описують діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Стратегії оптимальні гравців полягають в обиранні комірок з ймовірностями, обернено пропорційними відповідним ймовірностям виявлення.

І. м. моделюють широке коло антагоністичних конфліктних ситуацій з двома учасниками й скінченними множинами можливих дій у кожного з них. З цим пов'язане застосування І. м. під час вибору тактичних рішень. Іноді під одним із гравців розуміють «природу», тобто всю сукупність обставин, невідомих другому гравцеві, який приймає рішення. Такі ігри (іх часто називають іграми проти природи) виникають, напр., коли потрібно зважити на природні та ін. неконтрольовані фактори, що їх немає в розпорядженні якоїсь конкретної особи. При цьому природі приписують роль свідомого противника, антагоніста.

**ІГРИ НА ВИЖИВАННЯ** — різновид ігор динамічних двох осіб. У таких іграх кожного моменту часу гравці володіють відповідно ресурсами  $r$  і  $R - r$  ( $0 < r < R$ ) і грають у гру матричну. Виграші, одержані в цій грі, приписують до тих ресурсів гравців, з якими вони починають гру наступного моменту часу. Гра закінчується, коли вичерпуються всі ресурси одного з гравців, причому переможець одержує одиницю виграшу.

**ІГРИ РЕФЛЕКСИВНІ** — клас ігор, у яких гравці вибирають стратегії на основі інформації про ранги рефлексії супротивників і матрицю платежів на відміну від класичної теорії ігор, де супротивники знають тільки про матрицю платежів. Ранги рефлексії гравців визначають так. Гравець має нульовий ранг рефлексії, якщо він приймає рішення про вибір стратегії лише на основі знання матриці платежів, тобто так само, як і в класичній ігор теорії. Гравець має перший ранг рефлексії, коли він вважає, що в його супротивників — нульовий ранг рефлексії. Взагалі гравець з  $k$ -им рангом рефлексії припускає, що його супротивники мають  $k-1$ -ий ранг рефлексії. Він здійснює за них необхідні міркування щодо вибору стратегії і обирає свою стратегію на основі знань про матрицю пла-

тежів і екстраполяцію дій своїх противників. Відомо, що у випадку гри двох осіб доцільно розглядати лише гравців з нульовим, першим і другим рангом рефлексії. Дальше збільшення рангу рефлексії в грі двох осіб не дає нічого нового. В іграх з осіб проблему оцінки максимального доцільного рангу рефлексії ще не розв'язано.

Лит.: Лефевр В. А. Конфліктуючі структури М., 1967 [6 б. іл. іл. 84—85]. Д. О. Іванов.

**ІДЕНТИФІКАТОР** — позначення об'єктів (напр., змінних, масивів, структур, міток та ін.) у мові програмування.

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ** — процедура визначення оптимальної в певному розумінні математичної моделі об'єкта керування за реалізаціями його вхідних та вихідних сигналів. У заг. випадку І. о. к. передбачає розв'язання таких осн. задач: вибір класу моделі математичної, мови описання її, класу й типу вхідних сигналів, критерію відповідності (близькості) моделі й об'єкта, методу ідентифікації й розробку (або вибір) відповідних алгоритмів.

Вибір класу моделі й її провадять на основі теоретичного аналізу об'єкта керування ОК з використанням заг. закономірностей процесів (ф.з., хім. та ін.), які перебігають в ОК, і (або) на підставі апріорної інформації про подібні об'єкти. Найефективнішим підходом є поєднання теоретичного й експериментального аналізу ОК; при цьому за допомогою експериментального аналізу роблять кількісне оцінювання характеристик ОК й перевірку відповідності моделі реальному об'єкту. За способом одержання експериментальних даних про ОК розрізняють методи активного й пасивного експерименту. При активному експерименті на вхід ОК подають заздалегідь обране ділення (імпульсне, ступінчасте, гармонічне, псевдо випадкове та ін.), тоді як при пасивному експерименті використовують дані, одержані в процесі нормального функціонування ОК.

Як матем. моделі ОК використовують такі осн. характеристики ОК: статичну характеристику, імпульсну передаточну функцію, перехідну функцію, передавальну функцію, частотні характеристики (див. Частотні характеристики систем автоматичного керування), описувальні функції, дифер., різницеві, інтегральні й інтегро-дифер. рівняння, які зв'язують вхідні й вихідні сигнали ОК. Разом з цим широко застосовують представлення характеристик ОК у вигляді різних інтерполяційних рядів (Тейлора, Лягерра, Ерміта, Чебишова, Фур'є, Вольтерри та ін.).

При І. о. к. як критерії близькості ОК та його матем. моделі використовують: середньоквадратичну похибку, абсолютну похибку, максимум правдоподібності й інші оцінки.

Методи І. о. к. можна поділити на два великі класи: методи, за якими використовують досить заг. гіпотези про ОК (напр., лінійність, стаціонарність, детермінованість ОК) — т. з. методи непараметричні, або



нити коефіцієнти цього рівняння можна за розімкненою або замкненою схемою. При замкненій схемі використовують методи, аналогічні методам параметричної ідентифікації лінійних об'єктів.

Розглянуті постановки задач ідентифікації і методи розв'язування їх у багатьох випадках поширюють і на об'єкти керування зі змінними й розподіленими параметрами, а також на багатовимірні ОК. Проте ідентифікація об'єктів цих класів має специфічні особливості й часто пов'язана зі значними обчислювальними трудностями.

З математичного погляду І. о. к. належить до класу обернених задач, які в багатьох випадках є некоректними. В зв'язку з цим при І. о. к. використовують методи регуляризації розв'язувань некоректно поставлених задач (див. *Некоректно поставлені задачі способи розв'язування*).

При постановці та розв'язуванні задач І. о. к. важливе значення має область застосування (використання) одержуваних результатів. Так, основною метою дослідження об'єктів з одержання структури та оцінювання параметрів моделі, яка адекватно відбиває основні закономірності процесів, що перебігають в об'єкті. В задачах керування І. о. к. необхідна для того, щоб виробити стратегію керування, при цьому часто не потрібно строгої адекватності моделі й об'єкта керування. Наприклад, у системах *двухмольного керування* І. о. к. є невід'ємною частиною процесу керування.

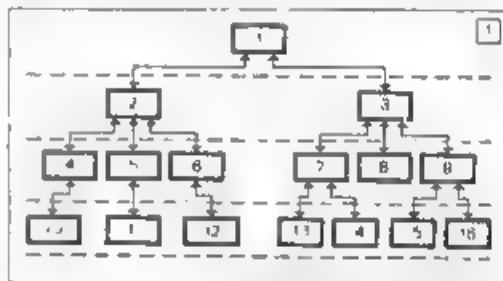
Методи І. о. к. є значною мірою універсальними, їх можна використати, щоб одержати матем. опис найрізноманітніших за своєю природою об'єктів у техніці, медицині, біології, геології, економіці та ін.

Літ.: Ордынец В. М. Математическое описание объектов автоматизации. М., 1965 [бібліогр. с. 333—337]. Кулик В. Т. Алгоритмизация систем управления. Справочник. К., 1969 [бібліогр. с. 333—343]. Рывкин Н. С. Что такое идентификация? М., 1970. Идентификация систем (обзор). «Экспресс-информация Системы автоматического управления», 1971, № 32; 1 и Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Пер. с англ. М., 1966 [бібліогр. с. 170—174].

Ю. В. Кремезило, В. П. Яковлев

**ІЕРАРХІЧНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ (ІСК)** — системи довільної природи (технічні, економічні, біологічні, соціальні) та призначення, які мають багаторівневу структуру у функціональному, організаційному або якому іншому плані. ІСК вивчають у *кібернетиці технічній, у системотехніці, кібернетиці економічній і кібернетиці біологічній*. ІСК дуже різноманітні, трапляються вони в багатьох галузях діяльності людини і в природі. Типовими прикладами тех. ІСК є об'єднані енерг. системи, транспортні системи, системи зв'язку, пром. комплекси типу нафтопереробних і хім. заводів, гірничопромислових підприємств, які включають у себе шахти, збагачувальні фабрики тощо. Широке використання електронних цифрових обчислювальних машин (ЕЦОМ) для керування виробом, особливо вплинуло на різноманітність ІСК,

в яким тепер доводиться стикатись (див. *Керуюча обчислювальна машина*). Класичним прикладом щодо цього може бути ІСК воляжних металург. підприємств. На мал. 1 наведено такого роду систему керування металург. комбінатом, яка має чотирирівневу ієрархію ЕЦОМ. До комбінату входять коксові печі й цехи — шихтовий, чавуно-плавильний, сталеплавильний, слябінговий, гарячої та холодної прокатки й обробки виробів. ЕЦОМ 4-го рівня (1) призначено розв'язувати генеральні завдання планування,



1. Ієрархічна система управління металургійним комбінатом

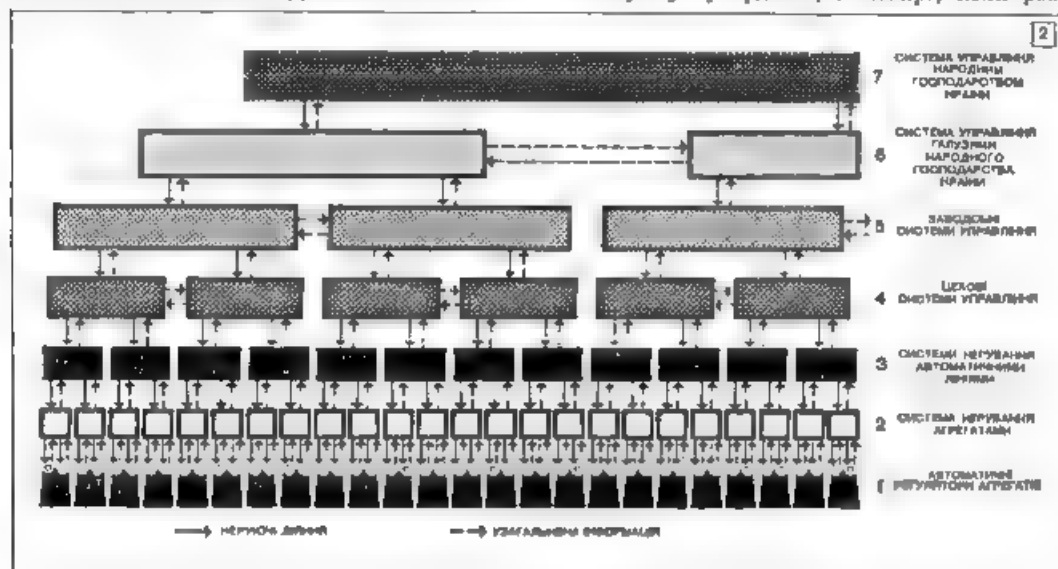
економ. прогнозування, регулювання запасів та інші завдання суто організаційного, а не технологічного характеру. ЕЦОМ 3-го рівня (2 і 3) використовують, щоб складати довгострокові календарні плани роботи комбінату, причому одну з них (2) призначено планувати роботу підготовчих цехів (коксового, чавунолварного і сталеливарного), а другу — (3) складати календарні плани роботи решти цехів і дільниць. За допомогою ЕЦОМ 2-го рівня ієрархії (4—9) здійснюється розробка короткострокових детальних календарних планів роботи кожного з цехів і проводиться збирання та обробка інформації, необхідної для проведення процесу автоматизованого керування роботою цехів та їхніх окремих дільниць. ЕЦОМ 1-го рівня (10—16) призначено для автомат. керування технологічними процесами й окремими агрегатами (шихтувальними машинами, доменами, конвертерами тощо).

Ієрархічні структури бувають і в найрізноманітніших системах адміністративного управління, системах управління військовими операціями, а також при зв'язненні різноманітних проблем економіки. Напр. систему управління нар. господарством СРСР можна представити у вигляді семірівневої ієрархічної структури (мал. 2). Перші три нижні рівні належать до проблематики, яка стосується розв'язування завдань автоматичного або автоматизованого (тобто з участю людини) керування виробом. На цих рівнях велику роль у процесі керування відіграють автомат. засоби, а не людина. На решті рівнів (верхніх) здійснюється адміністративне й організаційне (планування економіки) управління, в якому більше значення мають люди, а не автомат. пристрої.



Часто ієрархічні структури трапляються й при розв'язуванні різних обчисл. задач, у графіці теорії, в логіці математичній, ліквідації математичній, програмуванні еристичному й у багатьох інших випадках. Таке значне поширення ІСК та їхній універсальний характер зумовлені рядом перелічених, які вони мають порівняно з системами централізованого (радіального) управління. Осн. переваги: 1) свобода локальних дій (протягом інтервалів часу, зумовлених моментами надходження керуючих діянь з боку

Завдання структурного аналізу та синтезу ІСК дуже різноманітні. Багато що в цих питаннях залежить від тієї ознаки, яку покладено в основу поділу складної системи на відповідні рівні ієрархії. При цьому одні й ту саму систему можна розчленувати на різну кількість рівнів ієрархії залежно від того, яку ознаку покладено в основу при побудові структури ІСК. Найчастіше такою є організаційна ознака, і це дає можливість відображати фактично існуючу субординацію. Напр., коли роз-



2. Ієрархічна структура системи управління народним господарством СРСР (за В. О. Третьяковим).

вищого за ієрархією рівня); 2) можливість доцільно поєднувати рівні для кожного рівня системи локальних критеріїв оптимальності (глобальний критерій оптимальності системи в цілому); 3) відсутність необхідності пропускати дуже великі потоки інформації через один пункт керування, бо при використуванні ІСК інформація з нижчого рівня передається на верх. в усередненому (узагальненому) вигляді; 4) підвищена надійність системи керування й великі можливості введення елементної надлишковості до системи на необхідному рівні керування; 5) гнучкість системи керування й широкі можливості пристосування її до умов, що змінюються; 6) універсальність при розв'язуванні проблем керування, однотипних у цілому, але відрізняються у деталях; 7) у ряді випадків економічна доцільність порівняно з системами керування іншої структури. Тому ІСК приділяють велику увагу, роблять спроби побудувати теорію, яка б дала змогу раціонально проектувати ІСК для найрізноманітніших цілей. Осн. розділами теорії ІСК, що певною мірою вже розроблено, є: а) структурний аналіз і синтез ІСК, б) проблема координації дій в ІСК, в) оптимізація функціонування ІСК.

глядають адміністративні або виробничі проблеми, такий підхід є цілком природним, та й у більшості інших випадків є підставою взяти його за осн. організаційний принцип. Це твердження справджується, зокрема, й при виборі структури керування багатьма вироб. і в інших випадках. Кожний рівень можна поділити ще на ряд підрівнів уже за іншою ознакою. Як ознаку можна, зокрема, використати вибраний принцип керування: 1) з негативним зворотним зв'язком, 2) з самонастроюванням або взагалі адаптивний, 3) павчання, 4) самоорганізацію тощо. На мал. 3, а зображено схему, яка демонструє розчленування ІСК на осн. рівні за організаційною ознакою з подальшим розчленуванням кожного рівня на підрівні за вказаною ознакою — принципом керування. В інших випадках розчленування на осн. рівні або осн. рівнів на підрівні можна здійснювати за ознакою, яка характеризує певний аспект діяльності системи. Так, на мал. 3, б показано такого роду поділ на три рівні, які характеризують технологічний, інформаційний та економічний аспекти функціонування ІСК. Інші процеси членування на рівні за ознаками останнього роду наз. спец. терміном — **с т р а т и к**

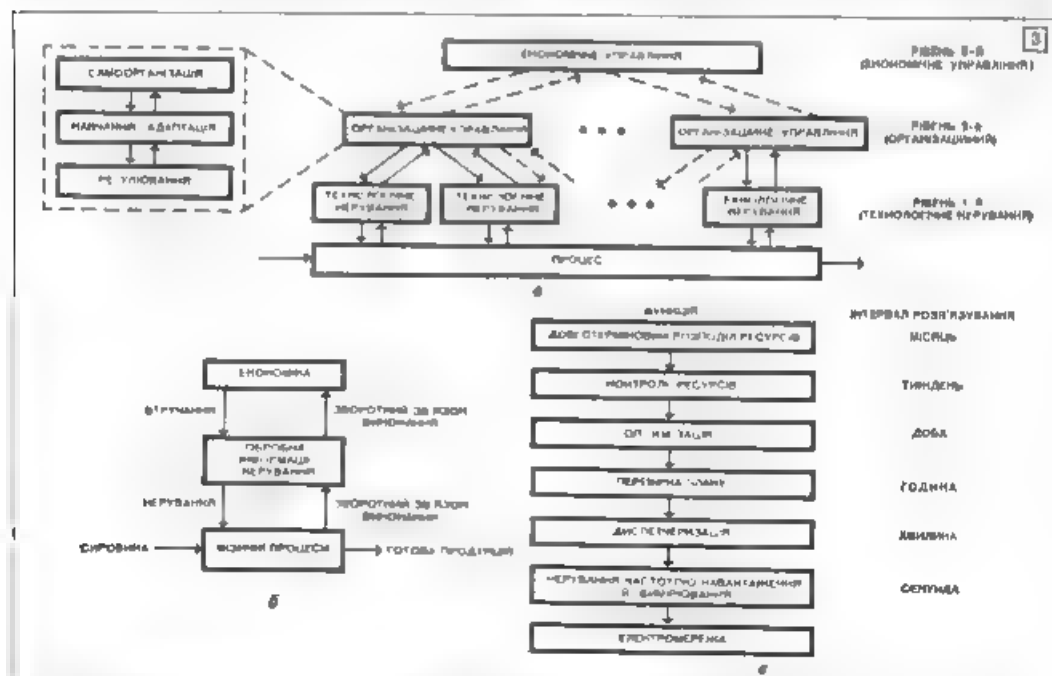
фігуванням систем, а самі різні — стратами.

Поділяють системи на ієрархічно зв'язані одні з одним рівні й за часовою ознакою. В цьому разі за основу віднесення елементів до того чи іншого рівня беруть величину інтервалу часу, через який необхідне втручання наступного рівня у процес керування попереднім рівнем, щоб забезпечити нормальне функціонування системи. На мал. 3, а наведено приклад поділу ІСК на рівні саме за такою ознакою щодо завдання керування екорг. системою. Поділ на рівні і за організаційною, і за часовою ознаками може приводити або до однієї й тієї самої структури, або до різних структур. Розчленування за часовою ознакою доцільне для проведення теоретичного дослідження ІСК, бо тоді кожний з рівнів можна вивчати незалежно від інших протягом проміжку часу, який минає від моменту подачі сигналу керування з верх. рівня на нижній до наступного такого моменту. Ця обставина й зумовлює відносну локальну незалежність підсистем, які входять до ІСК.

ІСК утворюється і в результаті розчленування якоїсь складної задачі на простіші підзадачі. Виважають, зокрема, що мозок людини

посередньо елементи або один з одним зв'язані, або не зв'язані. Проте й у другому випадку між ними буде непрямий зв'язок через верхній рівень. Напр., це може бути в тому разі, якщо критерій оптимальності наступного рівня функціонально залежить від локальних критеріїв підсистем попереднього рівня. Цим системам з ієрархічною структурою істотно відрізняються від звичайних багато-зв'язаних систем, бо, коли в останніх немає безпосереднього зв'язку між елементами, вони розпадаються на окремі, не зв'язані одна з одною, частини. Кожний з елементів, які входять до того чи іншого рівня ІСК, може сам по собі мати досить складну структуру. Напр., це може бути самонастроювана, самонавчувана або самокерована система автомат. регулювання. Так, на мал. 4, а зображено двохрівневу ІСК, яка складається з двох (може, й більше) самокерованих підсистем, а'єднаних у другому рівні ієрархії на принципом негативного зворотного зв'язку.

Всі ІСК, незалежно від їхньої природи, можна поділити на два великі класи: ІСК із зворотними зв'язками, коли інформація з нижнього рівня передається на найближчий верх. рівень (або кілька верхніх рівнів), та



3. Поділ ієрархічних систем управління. а — за організаційною ознакою і за принципами керування; б — за технологічною, інформаційною та економічною ознаками; в — за часовою ознакою.

побудований так, що в процесі прийняття рішення інтуїтивно складніша задача зводиться до ієрархії менш складних задач.

Наведени різні ознаки (або властивості) використовували для побудови ієрархічної структури «ве вертикалі». При цьому без-

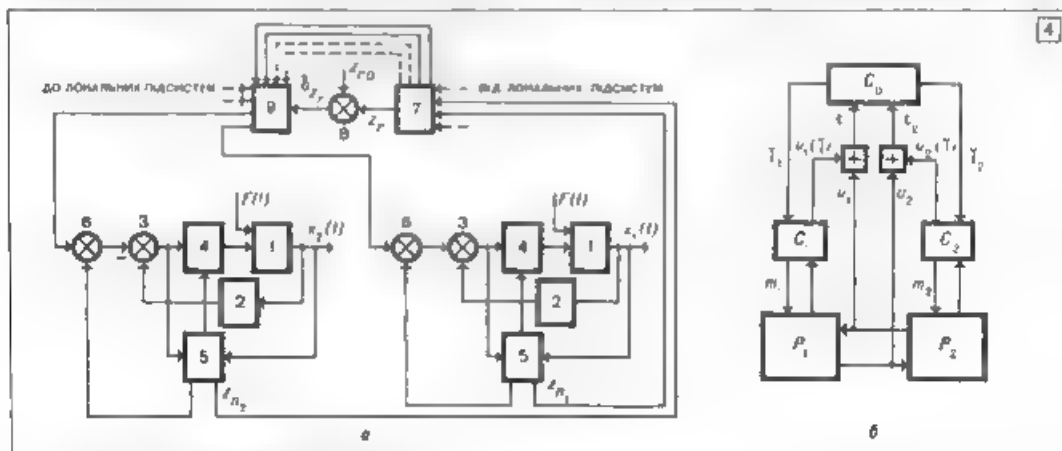
ІСК з прямими зв'язками керування, коли є лише сигнали керування, що йдуть в верх. рівня на найближчий нижній. У цьому разі структура ІСК має вигляд «дерева». ІСК із зворотними зв'язками мають істотні переваги порівняно з ІСК без них.

Осн. задачами, які виникають при дослідженні ІСК, є задачі аналізу й задачі синтезу ієрархічних систем. Задачі аналізу трапляються, коли вивчають існуючі вже об'єкти, а задачі синтезу — коли проектують нові системи. В останньому випадку доводиться розв'язувати питання про необхідну кількість рівнів ієрархії, а зв'язку з чим і адавалися до спроб розв'язати задачу про вибір оптимальної кількості рівнів ієрархії як задачу варіаційного характеру. Для розв'язування задач аналізу ІСК широко застосовують методи теорії графів.

Проблема координації керуючих діянь є специфічною для ІСК, хоч істотним є й стандартні задачі визначення стійкості руху і якості *перехідних процесів*, визначення умов автономності, інваріантності, чутливості та ін. (див. *Стійкості дискретних систем теорія. Інваріантність систем автоматичного керування*). Задача координації ІСК зводиться до відшукування тих принципів (законів керування), які можна покласти в основу при визначенні діянь, що передаються з кожного верхнього рівня на підсистему сусіднього нижнього рівня. Завжди також виникає необхідність шукати доцільний спосіб координації дій між підсистемами одного й того самого рівня в ІСК. Запропоновано кілька принципів, придатних для цієї мети. Один з них — принцип *забачень взаємодії* — полягає в тому, що керуючі діяння з якогось верх. рівня розподіляються між підсистемами сусіднього нижнього рівня так, що кожна з підсистем стає автономною відносно всіх інших підсистем цього самого рівня. Фактично цей принцип, як і інші, розроблено лише стосовно дворівневих сис-

тем *взаємодії*. На мал. 4, 6 зображено дворівневу ІСК з двома підсистемами на першому рівні, за допомогою якої можна наочно продемонструвати сутність принципів координації. Перший рівень (регулятори  $C_1$  та  $C_2$ ) керує об'єктами  $P_1$  та  $P_2$ , подаючи на їхній вхід відповідно керуючі діяння  $m_1$  та  $m_2$ . Другий рівень (координатор  $C_0$ ) керує регуляторами  $C_1$  та  $C_2$ , подаючи на них координуючі діяння — відповідно  $y_1$  і  $y_2$ . Втручання координатора проявляється в тому, що від значень  $y_1$  і  $y_2$  залежать керуючі діяння  $m_1$  і  $m_2$ , що залежність позначають у вигляді  $m_1(y_1)$  і  $m_2(y_2)$ . В загальному випадку  $m_1$  і  $m_2$  можуть залежати одночасно від  $y_1$  і  $y_2$ , що позначають як  $m_1(y_1)$  і  $m_2(y_2)$ , де  $y = (y_1, y_2)$ . Систему наз. *координатором*, якщо знайдено такі значення  $y$ , що

$m_1(y)$  і  $m_2(y)$  задовольняють загальну мету, поставлену перед системою. Значення керуючих дій  $m_1$  і  $m_2$ , що задовольняють умову координованості, позначають через  $\hat{m}_1(y)$  і  $\hat{m}_2(y)$ . Для здійснення процесу координації істотне значення мають величини  $u_1$  та  $u_2$ , які характеризують перехресні взаємодії між керованими об'єктами  $P_1$  і  $P_2$ . Поточні значення цих величин  $u_1$  і  $u_2$  передаються до координатора  $C_0$ , зіставляючи їх із значеннями  $y_1(y)$  й  $y_2(y)$ , які задовольняють умови координованості системи, визначають помилки розузгодження  $e_1 = u_1 - \hat{u}_1$  й  $e_2 = u_2 - \hat{u}_2$ , які й використовують для побудови алгоритму функціонування координатора. Стратегію координації, при якій значення керую-



4. Дворівневі ієрархічні системи керування

тем, але вважають, що можна багаторівневі системи поділити на дворівневі групи. І для кожної такої групи використати розроблений метод. Два інші відомі принципи координації наз. *принципом балансу взаємодій* і *принципом оцінювання*

чих діянь  $\hat{m}_1(y)$  і  $\hat{m}_2(y)$  задовольняють загальну мету системи, коли  $u_1(y) = \hat{u}_1(y)$  та  $u_2(y) = \hat{u}_2(y)$ , наз. *принципом балансу взаємодій*. Якщо ж останні співвідношення замінюються на  $u_1(y) \in U_1^y$  та  $u_2(y) \in$

є  $U_1^y$ , де  $U_1^y \in U_1^y$  — допустимий діапазон змін взаємодіянь  $u_1$  й  $u_2$ , то принцип координації наз. принципом однієї взаємодії.

Фактичний вибір тієї чи іншої стратегії координації провадиться як основі порівняння результатів теоретичних розрахунків, моделювання й експериментальних випробувань. Теоретичні розрахунки зводяться до побудови відповідної ітераційної процедури, що базується на одному з відомих, але спеціально для цієї мети модифікованому методі оптимального керування. Зокрема, розроблено різні градієнтні й інтегральні процедури (подача сигналу про інтегральне значення величин  $u_1$  до координатора) для забезпечення умови координації  $e_1 = 0$ . Розглядаючи також питання збіжності цих процедур, вибору моменту закінчення ітераційного процесу та ін.

Коли досліджують складніші ІСК (понад два рівні), характер задач при переході від рівня до рівня істотно змінюється. Так, якщо для нижніх рівнів характерні саме описані вище методи координації, то для середніх рівнів (проблеми інформаційного характеру, пов'язані з організаційним, і з адміністративним управлінням) задачі координації можуть бути вже іншими, а для верхніх рівнів, на яких розв'язують задачі суто економічного характеру й довготермінового планування та прогнозування, вони набувають ще й складнішого характеру. Вважають, що в міру переходу від нижніх рівнів до верх. розв'язування задач дедалі утруднюється, бо доводиться оперувати менш і менш вірогідною інформацією. Обсягу її звичайно не вистачає, щоб доброякісно здійснювати процес керування (див. *Керування з адаптацією*). Проте вже добре відомо, що тільки розв'язування задач для всіх рівнів, а не виключно для нижніх, дає змогу, використовуючи ІСК, досягти справді істотних економічних результатів.

Дім. Косенко А. Н. Оптимізація залежності в структурі ієрархічних систем управління «Автоматика і телемеханіка», 1985, т. 28, в. 11, Кухтенко А. Й. О теорії складних систем з ієрархічною структурою управління В кн. Сложные системы управления К., 1986; Кузнецовский Р. Оптимізація управління складними ієрархічними системами В кн. Труды III Международного конгресса Международной Федерации по автоматическому управлению т. 1 М. 1971; Мещеряков М. Мако Д. Ткачова И. Теория иерархических многоуровневых систем. Пер с англ. М. 1973.

О. І. Кухтенко.

## ІЕРАРХІЧНІСТЬ КЕРУВАННЯ — див.

*Ієрархічні системи керування.*

**ІМОВІРНІСПА МАШИНА** — математична модель обчислювального пристрою, в роботі якого бере участь деякий випадковий процес. Різні варіанти поняття «І. м.» є узагальненнями поняття *автомата детермінованого, Тьюрінга машини й автомата нескінченного*. Розглядаючи, напр., такі поняття І. м.: 1) Тьюрінга машина (або інший детермінований автомат) зі входом, до якого приєднано бернуллівський джерело, що видає символи 1 та 0 з ймовірністю  $p$  та  $1-p$  відповідно ( $0 < p < 1$ ); 2) І. м., яку одержують із Тьюрінга ма-

шиною, коли для оглядуваного символу і внутрішнього стану задають не єдину комбінацію «символ, стан, рух», а таблицю ймовірностей виконання машиною кожної такої комбінації (якщо Тьюрінга машина є скінченим автоматом, то відповідає І. м. — це скінченний ймовірнісний автомат. Такі автомати є найкраще вивченим класом І. м.); 3) нескінченний автомат з лічбовою множиною станів, для кожної пари станів якого зазначено ймовірність того, що автомат, перебуваючи в 1 му стані, перейде у 2-й. Різні варіанти поняття «І. м.» виражають різні рівні й мету абстракції. В наведених прикладах 2-е поняття є узагальненням 1-го, 3-є узагальнює 2-е. Можливі, звичайно, й інші поняття І. м., такі, напр., де використовують інші випадкові процеси або ж який-небудь із них використовують іншим способом.

І. м. можна використовувати для обчислення функцій. Результат обчислення на І. м. для аргумента  $x$  виражається не однозначно: він залежить від реалізації випадкового процесу, який використовує машина. Різним можливим результатам природно відповідують ймовірності того, що їх буде одержано в процесі роботи машини. Можна різними способами задавати ерівень ймовірності, що виділяє єдину функцію, яка й званимється функцією, яку можна обчислювати на цій машині. Наведемо двох визначень обчисленості функції, аргументами й значеннями якої є натуральні числа: а)  $\phi$ -ція  $f(x)$  обчислена на І. м.  $T$ , якщо для кожного  $x$  ймовірність того, що машина  $T$ , будучи запущена на аргументі  $x$ , зупиниться, записавши число  $f(x)$ , — більша за  $\alpha$  ( $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ ).

б)  $\phi$ -ція  $f(x)$  обчислена на І. м.  $T$ , якщо ймовірність того, що для всіх  $x$  машина  $T$  зупиниться, записавши  $f(x)$ , — більша за  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Роботу І. м. можна описувати й у термінах перелічності множин. Означення перелічності множини алогічні означенням обчисленості функцій. Означенню б) напр., відповідає таке множини  $D$  — перелічна на І. м.  $T$ , якщо ймовірність того, що всі елементи множини  $D$  і тільки вони з'являються на виході машини  $T$ , більша за  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Можна фіксувати як одну множину, а цілий клас множин і цілком визначити ймовірність того, що І. м. перелічить яку-небудь множину цього класу (для різних реалізацій випадкового процесу на виході машини можуть з'являтися різні множини).

В теорії І. м. вивчають такі осн. питання: 1) розширення класу обчислених функцій при переході від детермінованих машин до ймовірнісних (як саме цей клас залежить від ймовірнісних параметрів, що беруть участь в означенні І. м.), 2) наскільки простіше й економічніше можна одержати одні і той самий результат, використовуючи І. м. замість детермінованих машин; 3) встановлення взаємозв'язку між різними означеннями І. м. та обчисленості на ній. У цих напрямках одержано низку результатів.

Перелічимо деякі з них (факти, що стосуються скінченних імовірнісних автоматів, див. у ст. *Автоматів імовірнісних*): 1) означення обчислюваності а) та б) еквівалентні в тому розумінні, що коли існує 1 м і го типу, яка обчислює функцію в розумінні а), то існує й 1. м. того самого типу, яка обчислює ту саму функцію в розумінні б), і навпаки. Це справджується й для відповідних означень перелічності; 2) якщо на ймовірнісних параметри, які беруть участь в означенні 1. м., не накладати ніяких обмежень, то будь-яку функцію можна обчислити на підходящий 1. м. (перелічити будь-яку множину) Якщо ці параметри в обчисленнях дійсними числами, то функція, обчислена на 1. м., в обчисленню й на детермінованій машині (множина, перелічена на 1. м., в перелічності й на детермінованій машині); 3) існують рекурсивні функції, обчисленні на 1. м. у певному розумінні простіше, а меншою витратою часу (див. *Складність обчислювання*), ніж на будь-якій детермінованій машині; 4) існує така нескінченна множина, що детермінована машина не може перелічити нескінченну її підмножину, але підходяща 1. м. в якійсь завжди ймовірності видає нескінченну підмножину, змінену в кінці. Причому ймовірнісні параметри 1. м. є раціональними числами.

Теорія 1. м. є так само абстрактною, як і взагалі *автоматів теорія*, і має таке саме відношення до вивчення реальних об'єктів. машин та обчислювань, напр., обчислювань методом Монте-Карло (див. *Монте-Карло метод*). За аргументи й значення ф-ції, що її обчислює 1. м., можна брати не лише записи натуральних чисел, а й взагалі слова в скінченному алфавіті, й розглядати цю ф-цію в широкому розумінні як поведінку машини. Щодо цього 1. м. можуть прийняти за моделі при вивченні поведінки кібернетичних пристроїв та органів, напр., у теорії навчання й адаптації. Див. також *Поведінка автоматів у випадкових середовищах*.

Літ.: Бардін Я. М. О вычислимости на вероятностных машинах. Доклады АН СССР Серия математика, физика, 1969, т. 139 № 4, 379 у К. да (та ін.). Вычислимость на вероятностных машинах. В кн.: Автоматы. Пер. с англ. М., 1956. Рабін М. О. Вероятностные автоматы. В кн. Кибернетический сборник, № 9. М., 1964. P. 1. An Introduction to probabilistic automata. New York London, 1971. В. М. Алофан.

**ІМОВІРІСНИЙ ПРОЦЕС** — те саме, що й *випадковий процес*.

**ІМОВІРІСНІСТЬ** — числова характеристика ступеню можливості настання якоїсь певної події за тих чи інших певних умов, які можуть повторюватися необмежене число разів. Її в характеристикою об'єктивно існуючого зв'язку між наведеними умовами і подією. Числове значення І. в деяких випадках можна одержати в т. з. класичного значення І. Розгляньмо який-небудь дослід з  $n$  наслідками, — такими, що взаємно виключають один одного, й рівноможливими, тобто рівноправними по відношенню до умов дослід. Нехай  $A$  — подія, пов'язана з цим дослідом.

Тоді І.  $P(A)$  події  $A$  можна визначити за ф-лою:  $P(A) = n(A)/n$ , де  $n(A)$  — число наслідків, що єсприяють події  $A$ , тобто тих наслідків, які приводять до настання цієї події. Напр., при підкиданні гральної кості — кубика з однорідного матеріалу з номерованими від 1 до 6 гранями — з 6 рівноможливих наслідків, що взаємно виключають один одного (випадання 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок). І.  $P(A)$  події  $A$  — випадання парної кількості очок — дорівнює  $\frac{1}{2}$ , оскільки тут

$n(A) = 3$ . Нагромаджені практикою численні спостереження дають змогу таким чином охарактеризувати І. як у розглянутому вище досліді в рівноможливих (рівноможливими) результатах, так і в найзагалішньому випадку. Припустимо, що якийсь дослід можна повторити багато разів, так що в принципі серія однакових й незалежних один від одного дослідів, у кожному з яких залежно від випадку відбувається або не відбувається подія  $A$ , здійснюється. Нехай  $N$  — число всіх дослідів у серії,  $N(A)$  — число тих дослідів, у яких настала подія  $A$ . Відношення  $N(A)/N$  наз. частотою події  $A$  в цій серії дослідів. Як показує практика, при великих  $N$  частоти  $N(A)/N$  у різних серіях дослідів виявляються приблизно однаковими, групуючись біля якогось числа  $P(A)$ , яке й наз. І. події  $A$ :  $P(A) \sim N(A)/N$ . Згідно в цією емпірично встановленою закономірністю І.  $P(A)$  події  $A$  характеризує частку тих випадків у великій серії дослідів, у яких настане ця подія. Про аксіоматичний підхід до поняття І. див. у статті *Імовірностей теорія*.

М. П. Слободенюк.  
**ІМОВІРІСНІСТЬ УМОВНА** — одне з основних понять *імовірностей теорії* 1. у.  $P(A/B)$  події  $A$  за умов, що здійснилася подія  $B$  (припускається, що *імовірність* події  $B$   $P(B) > 0$ ), визначають за ф-лою:  $P(A/B) = P(AB)/P(B)$ . Якщо події  $A$  і  $B$  пов'язані з якимось дослідом із скінченим числом  $n$  рівноможливих наслідків, що взаємно виключають один одного, а  $n(A)$  і  $n(AB)$  означають число тих наслідків, що приводять до настання відповідно подій  $B$  і  $AB$ , то

$$P(A/B) = \frac{n(AB)}{n(B)} ; \quad \frac{n(B)}{n} = \frac{n(AB)}{n(B)} ,$$

тобто у «класичній» схемі 1. у.  $P(A/B)$  є відношення числа наслідків, що приводять до одночасного настання подій  $A$  і  $B$ , до числа тих наслідків, які приводять до настання події  $B$ .

На відміну від 1. у. імовірність  $P(A)$  події  $A$ , яку розглядають при фіксованому комплексі умов, наз. безумовною імовірністю.

М. П. Слободенюк.  
**ІМОВІРНОСТЕЙ РОЗПОДІЛ** — див. *Розподіл імовірностей*.

**ІМОВІРНОСТЕЙ ТЕОРІЯ** — математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ. Під випадковим розуміють таке явище, яке при багаторазовому відтворенні всіх доступних фіксації умов його появи (умов дослід) у

веде до різних результатів (наслідків дослідів). Ці відмінності в перебігу явища зумовлені впливом чисельних факторів, які не підлягають точному обліку.

Випадкові явища, як правило, мають масовий характер — багаторазово повторюються в незмінних чи майже незмінних умовах. Тому кажуть також, що І. т. є наука про закономірності в масових явищах. Практика свідчить, що в масових випадкових явищах проявляються цілком певні закономірності, свого роду усталеності, властиві саме масовим явищам. Напр., коли підкидають монету, неможливо заздалегідь передбачити, який бік  $\Pi$  (герб чи напис) випаде в цьому конкретному досліді. Однак зі збільшенням кількості кидань частота появи герба (тобто відношення числа появ герба до загального числа кидань) поступово стабілізується, наближаючись до числа  $1/2$ .

Центральним поняттям І. т. є поняття *імовірності*. Імовірність тієї або іншої події можна оцінити на підставі наслідків довгої серії дослідів (спостережень). І. т. дає змогу відшукувати значення ймовірностей одних подій за відомими ймовірностями інших подій, пов'язаних якимсь чином з першими.

Найпростіше означити осп. поняття І. т. як матем. науки в рамках т. з. елементарної І. т. В елементарній І. т. виходять з припущення, що кожний дослід  $S$  завершиться (залежно від випадку) однією й тільки однією з подій  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , які наз. *елементарними подіями* (або *наслідками*) дослідів. Множину  $\Omega$  всіх елементарних подій наз. *простором елементарних подій*. З кожною елементарною подією  $\omega_k$  пов'язане додатне число  $p_k$  — *імовірність* даного наслідку; при цьому  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ . Кож-

ну подію  $A$ , пов'язану з даним дослідом  $S$ , можна подати як подію, яка полягає в тому, що настане або  $\omega_1$ , або  $\omega_2$ , ... або  $\omega_m$ , де  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  — певні елементарні події (записуються так:  $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ ); про наслідки  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  кажуть, що вони *сприяють* події  $A$ . Отже, множина всіх подій, пов'язаних з дослідом  $S$ , ототожнюється з множиною  $\Omega$  всіх підмножин простору елементарних подій, зокрема, сама  $\Omega$  наз. *достовірною* подією (вона відбувається за будь-якого наслідку дослідів), а пуста підмножина  $\emptyset$  простору  $\Omega$  наз. *неможливою* подією (вона не відбувається ні за якого наслідку дослідів). Імовірність  $P(A)$  події  $A = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ , за означенням, дорівнює сумі ймовірностей усіх тих елементарних подій, які сприяють  $A$ , тобто

$$P(A) = \sum_{k=1}^m P(\omega_k) = \sum_{k=1}^m p_k. \quad (1)$$

З означення виходить, що  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(\emptyset) = 0$  і для будь-якої події  $A$   $0 \leq P(A) \leq 1$ . Зокрема, коли  $p_1 = p_2 = \dots = p_n =$

$= \frac{1}{n}$  (всі наслідки рівноможливі), одержуємо т. з. *класичне означення ймовірності*:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}. \quad (2)$$

де  $n(A)$  — число наслідків, які сприяють події  $A$ , а  $n$  — загальне число наслідків дослідів. Класичне визначення зводить поняття ймовірності до невизначеного поняття *рівноможливості*.

**Приклад.** При підкиданні двох гральних костей (кубиків з однорідного матеріалу із зашумованими від 1 до 6 гранями) можливими є 36 наслідків, які взаємно виключають один одного. Їх можна позначити  $(i, j)$ , де  $i$  — номер грані на першій кості,  $j$  — на другій. Природно вважати всі наслідки рівноймовірними. Подія  $A$  — «сума очок дорівнює 6» — сприяють 5 наслідків, а саме  $(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$ , тому  $P(A) = 5/36$ .

Питання про вибір ймовірностей  $p_k$  в кожній конкретній задачі лишається, власне, поза І. т. як матем. наукою. В одних випадках цей вибір можна зробити на основі обробки великої кількості спостережень, в інших (як, напр., у розглянутому прикладі з гральною костою) — на основі існуючої об'єктивної симетрії зв'язку між умовами дослідів та його наслідками тощо.

Об'єднанням (або сумою) подій  $A_1, A_2$  наз. подію  $A$ , яка полягає в настанні хоча б однієї з подій  $A_1$  і  $A_2$  (позначається  $A = A_1 \cup A_2$ ). *Перетином* (або *добутом*) подій  $A_1$  і  $A_2$  наз. подію  $A$ , яка полягає в одночасному настанні й подій  $A_1$  і  $A_2$  (позначається  $A = A_1 \cap A_2$ , або  $A = A_1 A_2$ ). Аналогічно означають об'єднання й перетин будь-якого числа подій  $A_1, A_2, \dots, A_m$

(позначаються  $\bigcup_{k=1}^m A_k, \bigcap_{k=1}^m A_k$ , або  $A_1 A_2 \dots A_m$ ).

Події  $A_1$  і  $A_2$  наз. *несумісними*, якщо настання однієї з них виключає настання іншої (тобто, якщо  $A_1$  і  $A_2$  не можуть відбутися одночасно). Подія, яка полягає в ненастанні події  $A$ , наз. *протилежною* до  $A$  і позначають  $\bar{A}$ .

Осп. положеним елементарної І. т. є *теорема додавання й множення ймовірностей та формула ймовірності формула*. *Теорема додавання ймовірностей* полягає ось у чому. Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_m$  є такими, що жодні дві з них несумісні, то ймовірність об'єднання їх дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто  $P(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \sum_{k=1}^m P(A_k)$ . Нехай проводиться  $N$  випробу-

вань і при цьому події  $A, B$  і  $A \cap B$  настануть відповідно  $N(A)$ ,  $N(B)$  і  $N(A \cap B)$  разів. Виділимо з загального числа випробувань  $n$ , в яких настання події  $B$ , і підрахуємо серед них частку тих, у яких настання й події  $A$ . Ця частка (умовна частота настання події

$A$  за умови  $B$  дорівнює

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)/N}{N(B)/N} =$$

$$= \frac{\text{частота } (A \cap B)}{\text{частота } B}.$$

Зі збільшенням числа випробувань відношення  $N(A \cap B) : N(B)$  наближатиметься до відношення  $P(A \cap B) : P(B)$ . Це останнє відношення й наз. умовною ймовірністю події  $A$  за умови  $B$  (позначається  $P(A/B)$ ), тобто покладають за означенням

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (3)$$

У випадку класичного означення ймовірності формула (3) веде до формули

$$P(A/B) = n(A \cap B)/n(B), \quad (4)$$

де  $n(B)$  — число наслідків, які сприяють події  $B$ , а  $n(A \cap B)$  — число наслідків, що сприяють сумісному настанню  $A$  і  $B$ . Відповідно до формул (2) рівність (4) визначає ймовірність події  $A$  в нових умовах, які виникають після настання події  $B$ . З (3) випливає т. з. теорема множення ймовірностей (для двох подій):  $P(A \cap B) = P(B) P(A/B) = P(A) P(B/A)$ . Теорема множення узагальнюється на будь-яке число подій  $A_1, A_2, \dots, A_m$ :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^m A_i\right) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots$$

$$\cdot P(A_m / \bigcap_{i=1}^{m-1} A_i). \text{ Події } A \text{ і } B \text{ наз. незалежними, якщо } P(A/B) = P(A) \text{ (звідси}$$

завдяки теоремі множення виходить, що й  $P(B/A) = P(B)$ ). Події  $A_1, A_2, \dots, A_m$  наз. незалежними (точніше: незалежними в сукупності), якщо умовна ймовірність будь-якої з них за умови, що настали якесь з решти подій, дорівнює безумовній ймовірності цієї події. Для незалежних подій теорема множення ймовірностей означає, що  $P\left(\bigcap_{i=1}^m A_i\right) =$

$$= \prod_{i=1}^m P(A_i), \text{ тобто ймовірність сумісного адій-$$

свення незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій. У практичних питаннях, щоб визначити незалежність даних подій, рідко вдаються до перевірки рівностей типу  $P(A/B) = P(A)$ . Звичайно для цього користуються інтуїтивними міркуваннями, які ґрунтуються на досвіді. Підставою для цього є концепція, згідно з якою події, що відбуваються в різних дослідах, мало пов'язаних у фіз. розумінні, є незалежними.

Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  є незалежними, а ймовірності настання їх однакові й дорівнюють  $p$ , то ймовірність  $P_n(k)$  настання точ-но  $k$  з них

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (5)$$

Ймовірність  $Q$  того, що число подій лежатиме у межах від  $k_1$  до  $k_2$ , становить

$$Q = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) =$$

$$= \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (6)$$

Для великих  $n$  наближене значення ймовірності  $Q$  можна одержати в т. з. граничної теоремі Лапласа

$$Q \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \quad (7)$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt =$$

нормальна функція розподілу (див. *Нормальний розподіл*).

Найважливішим поняттям і. т. є поняття про випадкову величину. Кажуть, що задано випадкову величину, якщо кожному наслідку  $\omega_k$  досліду поставлено у відповідність певне число  $p_k$ . Інакше кажучи, випадкова величина — це числова ф-ція, визначена на наслідках досліду. Якщо  $\xi$  — випадкова величина, то значення  $p_k = P(\xi = \omega_k)$ , яких вона набуває, наз. її можливими значеннями. Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_m$  — усі різні можливі значення  $\xi$ . Позначимо  $p_k = P(\xi = x_k)$ , тоді

$$\sum_{k=1}^m p_k = 1. \text{ Набір усіх можливих значень}$$

$x_1, x_2, \dots, x_m$  і відповідних їм ймовірностей  $p_1, p_2, \dots, p_m$  наз. розподілом випадкової величини. Розподіл ймовірностей випадкової величини дає її найповніший опис. Однак у ряді випадків про випадкову величину треба мати лише певне сумарне уявлення. Для цього використовують різні числові характеристики випадкової величини, в яких найпоширеніші математичне сподівання й дисперсія.

Схема досліду зі скінченним числом наслідків недостатня для застосувань і. т. У практиці досліджень дуже часто трапляються явища, які не можна з задовільною точністю описати цією схемою. Такі ситуації виникають, напр., коли досліджують час безвідмовної роботи приладу, або коли вивчають випадкові шуми в радіотех. пристроях. У першому випадку як множину наслідків «досліду» природно вважати множину всіх додатних чисел, у другому — множину ф-цій часу (графіків шумів). Тому дуже важливе значення має формально-логіч. побудова загальної схе-

ми І. т., придатної, щоб описати всі ситуації, які виникають у даний момент, і водночас такої, що задовольняє запити практики.

Загальновиголошеною є дедуктивна схема побудови основ І. т., яку запропонував 1933 рад. математик А. М. Колмогоров. Осн. риси цієї схеми такі. З кожним реальним дослідом (випробуванням, експериментом) пов'язується певна множина  $\Omega$  елементарних подій (наслідків досліду)  $\omega$ ; сама  $\Omega$  наз. простором елементарних подій. Будь-яку подію описують множиною елементарних подій, які супинють її, тобто розглядають як повну множину елементарних подій. Над подіями (підмножинами простору  $\Omega$ ) вводяться теоретико-множинні операції об'єднання, перетину та ін.; при цьому повністю зберігається термінологія елементарної І. т. Потім виділяють певний клас  $\mathcal{F}$  подій (клас спостережуваних у даному досліді подій), який утворює т. з.  $\sigma$ -алгебру (або борелівське поле) подій. В елементарній І. т. ймовірність визначалася формулою (1); при цьому за первинні правила ймовірності елементарних подій. У загальній схемі І. т. подія, кажучи взагалі, є нескінченною множиною елементарних подій, ймовірність кожної з яких може дорівнювати нулеві. Тому в загальній схемі, на означення, вважають заданими ймовірності всіх подій з  $\mathcal{F}$ , причому властивість ймовірності, яку в елементарній І. т. виражають теоремою додавання, тут не виводять з означення, а включають у неї. Точніше, припускають, що кожній події  $A$  з  $\mathcal{F}$  відповідає певне число  $P(A)$ , яке наз. ймовірністю події  $A$ , причому виконуються такі умови: 1)  $P(A) \geq 0$ ; 2)  $P(\Omega) = 1$ ; 3) якщо події

$A_1, A_2, \dots$  попарно несумісні, то  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ . Властивості незвідності (умова 1) й адитивності (умова 2) ймовірності є осн. властивості міри множини. Отже, ймовірність є нормована (умовою 2) цілком адитивна міра, визначена на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{F}$  підмножин простору  $\Omega$ ; тому з формального погляду І. т. можна розглядати як розділ теорії міри. За такого підходу осн. поняття І. т. набувають нового висвітлення; події з  $\mathcal{F}$  стають вимірними множинами простору  $\Omega$ , випадкові величини — аксіоматичними відносно  $\mathcal{F}$   $\phi$ -цілями, матем. сподівання випадкових величин — абстрактними інтегралами Лебега тощо. Виклад І. т., оснований на простій системі аксіом (типу 1), 2), 3)), вносить повну ясність у розуміння формальної побудови цієї теорії і сприяє розантковій не тільки самої І. т., а й схожих на неї формально побудованої матем. теорії

Осн. пізнавальну цінність І. т. розкривають граничні теореми. Найпростішим прикладом таких теорем є теорема (закон) Бернуллі, яка твердить, що за великої кількості незалежних випробувань частота появи якоїсь події  $A$  лише ненабагато відхиляється від

її ймовірності  $p = P(A)$ . Якщо  $\xi_n$  — число разів події  $A$  при  $n$ -му випробуванні, то загальною число разів цієї події при  $n$  випробуваннях дорівнює сумі  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ ; тут величини  $\xi_1, \dots, \xi_n$  є незалежними, кожна з них набуває лише двох значень: 1 з ймовірністю  $p$  і 0 з ймовірністю  $1 - p$ . В цих позначеннях теорема Бернуллі стверджує, що за будь-якого фіксованого  $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \rightarrow 1$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Теорема Бернуллі є найпростішим окремим випадком великих чисел закону. Прикладом граничної теореми іншого типу є вже згадана вище теорема Лапласа, яка в запроваджених тут позначеннях стверджує, що за  $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{x_1 < \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x_2\right\} \rightarrow \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де  $\Phi(x)$  — нормальна  $\phi$ -ція розподілу; теорема Лапласа оцінює ймовірність відхилення частоти частини події  $A$  від ймовірності її настання  $p$  і є найпростішим окремим випадком центральної граничної теореми.

Граничні теореми для сум випадкових величин тісно пов'язані з важливим розділом І. т. — випадковим процесам теорією. Ті закони розподілу, які виконують роль граничних для наростаючих сум випадкових величин, у теорії випадкових процесів є точними законами розподілу відповідних характеристик. Використовуючи це, за допомогою відповідних випадкових процесів вдається довести багато граничних теорем.

І т. широко використовують у багатьох розділах природознавства й техніки (переважно в теорії похибок спостережень); її покладено в основу теорії інформації, теорії масового обслуговування, теорії та математичної статистики.

І. т. як матем. наука виникла в середині 17 ст. Перші праці з І. т., які належать франц. ученим Б. Паскалю (1623—62) і П. Ферма (1601—65) і голл. вченому Х. Гюйгенсу (1629—95), з'явилися у зв'язку з підрахунком різних ймовірностей в азартних іграх. Значний вклад у І. т. зробив швейц. математик Я. Бернуллі (1654—1705), який сформулював закон великих чисел для схеми незалежних випробувань з двома наслідками (опубл. 1713). Дальший розвиток І. т. пов'язаний з іменами англ. матем. Муавра (1667—1754), франц. вченого П. Лапласа (1749—1827), нім. матем. К. Гауса (1777—1855), франц. матем. С. Пуассона (1781—1840). Наступний етап у розвитку І. т. пов'язаний переважно з іменами рос. математиків П. Л. Чебишова (1821—94), О. М. Ляпунова (1857—1918) та А. А. Маркова (1856—1922). Чебишов 1867 довів закон великих чисел при досить загальних припущеннях; він уперше сформулював центр. граничну теорему для



сум незалежних випадкових величин (1887) і розробив один з методів доведення П. Ляпунов іншим методом одержав (1901) розв'язок цього питання, близький до остаточного. Марков уперше розглянув (1907) один випадок залежних випробувань, який згодом назвали ланцюгами Маркова. І. т. стали однією з матем. наук, які швидко розвиваються і тісно пов'язані з потребами практики. Значний вклад у її розвиток зробили рад. математики С. П. Бернштейн (1880—1968), О. Я. Хінчин (1894—1959) і А. М. Колмогоров (н. 1903) *Лит.* Колмогоров А. М. Основные понятия теории вероятностей. М.—Л., 1936 (Білолор. с. 80); Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. М.—Л., 1946 (Білолор. с. 347—349); Прохоров Ю. В., Роканов Ю. А. Теория вероятностей. Основное понятие. Предельные теоремы. Случайные процессы. М. 1967 (Білолор. с. 481—487); Гисленко В. В. Курс теории вероятностей. М., 1963 (Білолор. с. 190—395); Гисленко В. В., Хинчин А. Я. Введение в теорию вероятностей. М., 1970; Феллер Н. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Пер. с англ. т. 1—2. М. 1967 *М. П. Свободный.*

**ИМПЛИКАЦИЯ** в алгебре логики — одна з логічних операцій, які в природній мові відповідає зв'язка «якщо... то» і яка утворює з двох висловлювань  $A$  і  $B$  умовне висловлювання «якщо  $A$ , то  $B$ ». В алгебрі логіки  $I$  записують  $A \rightarrow B$  (або  $A \supset B$ ).

**ИМПЛИКАЦИЯ СТРОГА** — імплікація, відома під так званих парадоксів матеріальної імплікації (м. і.): є хибністю впливає все що завгодно, істина випливає з чого завгодно. Найвідоміший вид і. с. — І. с. Льюїса, яку від запровадив 1932. У модальних численнях К. Льюїса І. с. виражається через м. і. і модальний оператор необхідності: якщо  $A$ , то  $B$  означає «неможливо, щоб  $A$  і не  $B$  виконувалися водночас». Проте в численнях Льюїса виникають «парадокси І. с.»: необхідне висловлювання випливає з будь-якого, є неможливого висловлювання випливає будь-яке. Числення І. с., у якому це можна вивести «парадоксом» як м. і. так і І. с. Льюїса, описан В. Аккерман 1956. У 1958 запропоновано деяку модифікацію числення Аккермана — еквівалентне числення  $E$ . Схеми аксіом і правила введення такі:

- (1)  $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B$ , (2)  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ , (3)  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ ,  
(4)  $A \& B \rightarrow A$ , (5)  $A \& B \rightarrow B$ , (6)  $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C)$ , (7)  $NA \& NB \rightarrow N(A \& B)$ , де  $NA = df ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ , (8)  $A \rightarrow A \vee B$ , (9)  $B \rightarrow A \vee B$ , (10)  $(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$ , (11)  $A \& (B \vee C) \rightarrow B \vee (A \& C)$ , (12)  $(A \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A}$ ,  
(13)  $(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (B \rightarrow \bar{A})$ , (14)  $\bar{\bar{A}} \rightarrow A$ ,  
(R1)  $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$ , (R2)  $\frac{A, B}{A \& B}$ .

У численні  $E$  для вивідності І. с.  $A \rightarrow B$  необхідним є певний зв'язок між  $A$  та  $B$ .

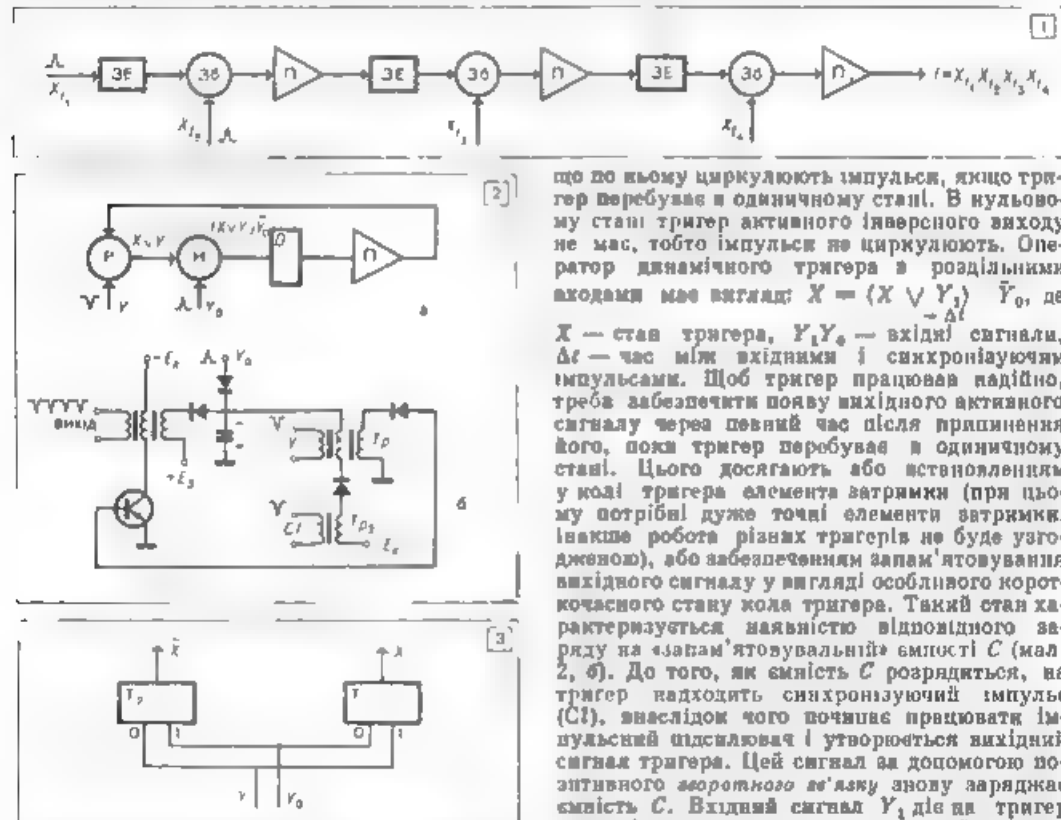
Напр., формула  $A \rightarrow B$  є невивідною, якщо  $A$  і  $B$  не мають спільної літери (теорема Беллава — Донченка). На відміну від м. і., для І. с. немає скінченної таблиці істинності. Важливим у численні  $E$  є числення 1-го ступеня, у формулах якого немає імплікації під знаком іншої імплікації. Такі формули допускають досить просте семантичне тлумачення. Крім того, побудовано алгоритм, який дає змогу для будь-якої формули 1-го ступеня визначити, чи вивідна вона в  $E$ . У зв'язку з труднощами семантичної інтерпретації і проблемою розв'язування для всього  $E$  було побудовано ще одне числення І. с. « $E$ ». Це числення, як слабше, ніж  $E$ , абстрактне в  $E$  на формулах 1-го ступеня. Крім того, воно є розв'язним. Знайдено алгоритм розпізнавання вивідності для деяких інших числень, подібних до  $E$ . Найцікавіше в них імплікативно-негативне числення  $E_1$  в аксіомах (1) — (3), (12) — (14) і правилом введення (R1).

**ИМПУЛЬСНА ЕЛЕМЕНТНА СТРУКТУРА** — структура елементів, яка забезпечує виконавчу логічних перетворень над інформаційними сигналами імпульсного вигляду. Імпульсний сигнал за відміну від потенціального характеризується відсутністю керування його спадом, що виникає без воли, діяння через певний час, який характеризує тривалість сигналу (див. *Елементна структура ЦОМ*). В основу побудови І. е. с. покладено два принципи: для першого з них характерним є використання тригерів динамічних та імпульсних нентилів, які не мають властивості запам'ятовувати, для другого — використання логічних затримувальних елементів (див. також *Елементні структури на логічних затримувальних елементах*). В І. е. с. першого типу утворення й передавання сигналів мають бути жорстко синхронізовані в межах частот тривалості сигналів, бо інакше порушується потрібна фіз. взаємодія сигналів у логічних елементах ЦОМ. Цього досягають утворенням інформаційних сигналів на входах тригерів за допомогою спец. синхронізуючих імпульсів, відсутність довгих комбінаційних кіл, застосуванням затримки сигналів та їхнього короткочасного запам'ятовування за миттєвостях та ін. способами. І. е. с. на логіч. затримувальних елементах відрізняються від І. е. с. на динаміч. тригерах тим, що в них синхронізація сигналами опитування провадиться на кожному логіч. елементі. Це майже зовсім усуває розузгодження інформаційних сигналів у часі, бо обмежує ділянки, де воно може виникнути, лише одним каскадом.

В І. е. с. на динамічних тригерах «1» кодується серією імпульсів, «0» — їхньою відсутністю. Як логічні елементи в цій І. е. с. застосовують імпульсні збіги, імпульсні незбіги й імпульсні розділювачі. Імпульсні збіги здебільшого застосовують двохходові та багатовходові. При цьому синтез багатовходових збігів за допомогою комбінації двох входових, як правило, утруднений, бо не збігається в часі надходження сигналів з виходу одних

логіч. елементів на вхід інших. Щоб реалізувати багатовходові збіги сигналів, які надходять у певній послідовності, проводяться короткочасне запам'ятовування інформації (напр., на елементах динаміч. тригерів), бо кожний сигнал окремо має зберігати стан «1» в елементі до приходу наступного сигналу (мал. 1). У більшості схем намагаються обійтися двохходовими імпульсними збігами. Імпульсні незбіги реалізує оператор типу  $X\bar{Y}$ . При цьому використовують різні (як правило, протилежні) способи відображення вихідної

З імпульсних логіч. елементів найпростішими й найнадійнішими є імпульсні розділювачі. В і. е. с. безпосередня азіяна одних логіч. елементів іншими за допомогою перетворень за відомими правилами не завжди можлива, бо в цій жемас елемента, що здійснює пряме інвертування, тобто елементного оператора  $X$ . Щоб виконати цю операцію, треба застосувати пристрій незбігу, підставивши замість неінвертованого аргументу константу «1», або використати тригер. Динамічний тригер в і. е. с. являє собою замкнене коло (мал. 2, а).



1. Блок-схема багатовходового імпульсного збігу  $ZE$  двохходовий збіг  $ZE$  — запам'ятовувальний елемент,  $\Pi$  — підсилювач.  
2. Тригер динамічний а. блок-схема, б. — принципова схема  $P$  — імпульсний поділ,  $H$  — імпульсний незбіг,  $D$  — затримка  $H$  підсилювач  $E_n$  — напруга колектора,  $E_p$  — напруга зміщення,  $T_p$  — трансформатор,  $CI$  — серія імпульсів.  
3. Тригерний каскад з прямими і інверсними виходами змінної величини, що стоїть під знаком інверсії  $\bar{Y}$ , і вхідної змінної  $X$ . Напр., одиничне значення змінної  $Y$  відображується імпульсом протилежної полярності щодо імпульсу, який представляв одиничне значення  $X$ . Такий спосіб кодування сприяє підвищенню надійності елемента, оскільки взаємодія (збіг) двох активних сигналів відбувається лише тоді, коли на виході не повинен з'явитися сигнал.

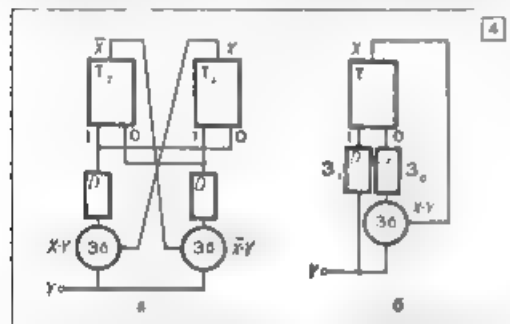
що по ньому циркулюють імпульси, якщо тригер перебуває в одиничному стані. В нульовому стані тригер активного інверсного виходу не має, тобто імпульси не циркулюють. Оператор динамічного тригера з розділними входами має вигляд:  $X = (X \vee Y_1) \bar{Y}_0$ , де

$X$  — стан тригера,  $Y_1, Y_0$  — вхідні сигнали,  $\Delta t$  — час між вхідними і синхронізуючими імпульсами. Щоб тригер працював надійно, треба забезпечити появу вихідного активного сигналу через певний час після припинення його, поки тригер перебуває в одиничному стані. Цього досягають або встановленням у коді тригера елемента затримки (при цьому потрібні дуже точні елементи затримки, інакше робота різних тригерів не буде узгодженою), або забезпеченням запам'ятовування вихідного сигналу у вигляді особливого короткочасного стану кода тригера. Такий стан характеризується наявністю відповідного заряду на «запам'ятовувальній» ємності  $C$  (мал. 2, б). До того, як ємність  $C$  розрядиться, на тригер надходить синхронізуючий імпульс ( $CI$ ), внаслідок чого починає працювати імпульсний підсилювач і утворюється вихідний сигнал тригера. Цей сигнал як допоміжний позитивного зворотного зв'язку знову заряджає ємність  $C$ . Вхідний сигнал  $Y_1$  діє на тригер аналогічно, внаслідок цього пристрій встановлюється в одиничний стан. Коли надходить вхідний сигнал  $Y_0$ , відображуваний імпульсом зворотної полярності, ємність розряджається. Внаслідок цього, коли надходить наступний  $CI$ , імпульсний підсилювач не спрацьовує і циркуляція імпульсів припиняється. Тригер переходить у нульовий стан.

Така організація нульового стану тригера утруднює побудову схем, бо часто потрібно мати не лише пряме, але й інверсне значення аргументу. Щоб адійснити це можливо, застосовують тригерний каскад, що складається з двох тригерів (мал. 3). В цьому каскаді тригер  $T_2$  перебуває в стані, інверсному стану тригера  $T_1$ , тобто фактично реалізує операцію інвертування. Певна модифікація цієї схеми приводить до реалізації лічильного

каскаду за мод 2 в прямий та інверсний виходах  $X$  і  $\bar{X}$  відповідно (мал. 4, а).

Якщо лінійний каскад побудовано на одному тригері, то треба застосовувати різночасові імпульсні затримки на його входах, щоб правильно відбувався обмін інформацією з тригером. Треба, щоб сигнал, який визначає потрібне діяння, надходив на вхід тригера останнім. Для цього затримка сигналу на нульовому вході  $3_0$  (мал. 4, б) має бути більшою від затримки  $3_1$  на одиничному вході. Коли тригер перебуває в нульовому стані, вентиль



4. Тригерний лічбовий каскад: а — на двоох тригерах; б — на одному тригері

не пропускає сигнал  $Y$  на нульовий вхід. На одиничний вхід сигнал проходить з затримкою, якої досить, щоб закінчити імпульс до того моменту, коли тригер перемикається й відкриває вентиль. Коли тригер перебуває в одиничному стані, то внаслідок зазначеної різної затримки вхідний сигнал  $Y$  спочатку пройде на одиничний вхід і лише підтвердить наявний стан, а потім уже перейде на нульовий вхід і перемикає тригер.

Перевагами і, в. с. розглянутого типу є: велика швидкодія елементів, велика потужність сигналу при відносно малій витраті потужності живлення. Проте в цій структурі стоять жорсткі вимоги до синхронізації сигналів, а це ускладнює забезпечення високої надійності.

Лит. Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библ.огр. с. 299-301]. В. М. Коваль.

**ІМПУЛЬСНА ПЕРЕХІДНА ФУНКЦІЯ** — реакція динамічної системи на діяння *дельта-функції*. Для систем, які описують звичайними лінійними дифер. рівняннями з змінними коефіцієнтами, і. п. ф.  $k(t, \tau)$  залежить від двох аргументів — поточного часу  $t$  і моменту  $\tau$  прикладення імпульсного діяння. І. п. ф. лінійних стаціонарних систем із зосередженими параметрами залежить тільки від різниці аргументів  $t - \tau$ . І. п. ф. реальних систем дорівнює нулеві при  $t < \tau$  (див. *Здійсненості фізичної критерії*).

Перетворення Лапласа і. п. ф. визначає *перетворення функції*, а перетворення Фур'є — частотну характеристику (див. *Частотні характеристики систем автоматичного керування*) і, навпаки, обернені перетворення цих характеристик дають і. п. ф. Реакція ліній-

ної системи  $y(t)$  на довільне діяння  $x(t)$ , прикладене в момент часу  $t = t_0$ , виражається через і. п. ф. так.

$$y(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Для стаціонарних систем, які описують дифер. рівняннями

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (2)$$

мають місце співвідношення

$$y(t) = \int_{t_0}^t k(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^{t-t_0} k(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau, \quad (4)$$

де  $h(t)$  — перехідна ф-ція (див. *Функція ступінчаста*).

І. п. ф. такого класу систем при  $m < n$  можна визначити ще й як

$$k(t) = \begin{cases} w(t) & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

де  $w(t)$  — ф-ція Гріна, що задовольняє одне з

різних дифер. рівнянь  $\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i w(t)}{dt^i} = 0$

з т. з. еквівалентними початковими умовами

$$y^{(n-m-1)}(0) = \frac{1}{a_n} b_n;$$

$$y^{(n-m)}(0) = \frac{1}{a_n} [b_{n-1} - a_{n-1} y^{(n-m-1)}(0)],$$

$$\dots, y^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n} [b_0 - a_n y^{(n-m-1)}(0) - \dots - a_{n-1} y^{(n-2)}(0)]$$

І. п. ф. широко використовують, досліджуючи системи автомат. керування, в теорії електр. кіл, радіотехніці тощо. Поняття і. п. ф. поширюється й на системи з розподіленими параметрами, імпульсні й нелінійні системи (Лит. Попов В. П. Динамика систем автоматического регулирования. М., 1954 [библ.огр. с. 796-798], Цыпкина Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [библ.огр. с. 926-928], Теория автоматического регулирования, кн. 1. М., 1967 [библ.огр. с. 743-748]; Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. Пер. с нем. М., 1971).

Ю. В. Краменчуко

**ІМПУЛЬСНА СИСТЕМА КЕРУВАННЯ** — один із різновидів дискретної системи керування.

**ІНВАРІАНТНІСТЬ ОЗНАК** — властивість ознак об'єкта розпізнавання не змінювати своїх значень при певних перетвореннях цього об'єкта. Припустимими вважають перетворення, що не впливають на належність об'єкта до заданого класу об'єктів (образу). Здебільшого ознаки, які мають властивість інваріантності, одержують у результаті певних матем. операцій над проміжними неінваріантними ознаками, які одержують прямим вимірюваннями. Вимірювання, що забезпечують І. о., можна проводити й безпосередньо на розпізнаваному об'єкті. Прикладом одержання ознак друкованого знака, інваріантних до переносів зображення знака в полі зору, є т. з. «центрування по краю знака», що його застосовують у ряді сучасних читачів *автоматів*. Проміжними ознаками є двійкові сигнали «чорне» (1) чи «біле» (0), які відповідають розрізняваним рівням ясності точок зображення. Центрування зображення полягає в переміщенні його в таке положення, при якому крайні вишки й лінії чорні точки суміщуються відповідно з нижньою й лівою межами поля зору. Ця операція забезпечує І. о. щодо будь-яких переносів зображення в полі зору. Другим прикладом одержання І. о. до переносів є двовимірний автокореляційний функція зображення. Проміжними ознаками тут є ясність точок зображення. Такі інваріантні ознаки, як автокореляційна функція, вимірюють безпосередньо на розпізнаваних зображеннях за допомогою, наприклад, оптичного корелятора. Властивість І. о. щодо використання, розв'язуючи задачу розпізнавання образів. Зокрема, при розпізнаванні зображень об'єктів стандартної конфігурації часто намагаються одержувати ознаки, інваріантні щодо перенесення, повертання, зміни масштабу тощо. Надто переважної більшості відомих способів досягнення І. о. є мала завадостійкість: навіть незначні випадкові спотворення розглядуваного зображення можуть спричинити великі відхилення значень його інваріантних ознак (наочний приклад розглянуте вище «центрування по краю знака» за умов, коли в полі зору з'являються окремі «шумові» чорні точки). Поки що невідомо жодної формальної постановки задачі розпізнавання, а якої б випливала потреба одержання І. о. Причиною цього є надмірна загальність поняття І. о., яке охоплює й самі шукані розв'язки задачі розпізнавання. Справді, найменування класів об'єктів, зазначені алгоритми розпізнавання, можна назвати й інваріантними ознаками цих об'єктів (і при цьому найкращими із можливих з погляду задачі розпізнавання загалом).

Г. Л. Гімелфарб.

**ІНВАРІАНТНІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ** — розділ *автоматичного керування теорії*, в якому вивчають методи й засоби досягнення незалежності (інваріантності) однієї чи кількох регульованих величин

від зовн. (непараметричних) збурень, які діють на систему. Проблема інваріантності полягає в синтезі систем автомат. керування за умови, коли похибка, зумовлена дією зовн. збурень, дорівнює нулеві (умови інваріантності).

За лінійного трактування задачі автомат. систему можна описати такою системою дифер. рівнянь  $A(p)x(t) = F(t)$ , де  $x(t)$  і  $F(t)$  — вектори-стовпці змінних відповідно системи й збурень,  $A(p)$  — матриця, елементи якої  $a_{ij}(p) = m_{ij}p^2 + l_{ij}p + k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ),  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $m_{ij}$ ,  $l_{ij}$ ,  $k_{ij}$  — сталі величини.

Необхідною й достатньою умовою незалежності, напр., величин  $x_1(t)$  від зовн. дії  $F_1(t)$  (умовою інваріантності  $x_1(t)$  щодо  $F_1(t)$ ) є тотожна рівність нулеві мінора визначника системи рівнянь, відповідного елементів  $a_{11}(p)$ :

$$A_{11}(p) = \begin{vmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(p) & a_{n2}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{vmatrix} = 0.$$

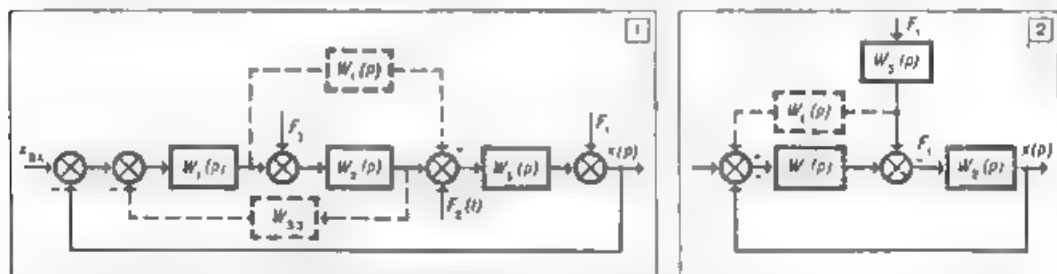
Умови інваріантності аналогічні й для інших змінних  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  ... щодо збурень  $F_2(t)$ ,  $F_3(t)$  ... Для методів теорії інваріантності, як відміну від інших методів, найважливішою і притаманною саме їм особливістю є те, що синтез незбурених систем можливий з майже повної відсутності інформації щодо зовнішніх збурень і непараметричних завад, які діють у системі. Осн. метою теорії інваріантності є визначення необхідної структури системи керування та її параметрів, при яких вплив збурень довший виду, але обмежених за модулем (за своїм макс. значенням), не позначатиметься на відхиленні регульованих величин від заданих задателів до нуля.

Ідею інваріантності вперше висловив 1939 рад. вчений Г. В. Шпанов. Потім рад. математик М. М. Лузін одержав необхідні й достатні умови інваріантності в найзагальнішому вигляді (умови інваріантності Шпанова — Лузіна).

Розв'язуючи задачу інваріантності, розрізняють системи, створені на основі принципу регулювання за відхиленням і принципу регулювання за збуренням, а також комбінованої принципу (на основі двох попередніх). Питання про фіз. здійсненість систем, які задовольняють умови інваріантності, є головним для всієї теорії інваріантності в цілому. В системах за відхиленням з однією регульованою координатою умову інваріантності в загальному випадку можна реалізувати не абсолютно точно, а лише з точністю до якоїсь величини  $\epsilon$ , бо для такого роду систем автомат. регулювання умова інваріантності суперечить умовам стійкості. Це дало привід деяким дослідникам взагалі заперечувати можливість реалізації умов абсолютної інваріантності. Питання реалізованості умов інваріантності вивчає та висвітлює у своїх працях рад. вче-

ний у галузі автомат. керування Б. М. Петров (ж. 1913). Він одержав необхідні умови реалізованості абсолютної інваріантності змінної  $x_i(t)$  щодо якогось збурення  $F_i(t)$ , в разі виконання яких має місце тотожний збіг множини розв'язків рівнянь початкової системи автомат. керування й системи, розмкненої на виході елемента, визначуваного змінною  $x_i(t)$ , при виконанні умов інваріантності і коли нулеві дорівнює решта діянь. Необхідною і достатньою умовою є, крім зазначеного

кількома регульованими змінними умови абсолютної інваріантності можна завжди реалізувати, якщо є два або більше паралельні канали для поширення одного й того самого збурення, щодо якого треба добитися інваріантності. Показаво, що умову інваріантності можна виконати принципово іншим шляхом, коли в системі впровадити додаткові зв'язки за збуренням, тобто в класі систем за збуренням і в комбінованих системах автоматичного керування. Принципових труднощів при розв'язуванні задачі інваріантності



1. Структурна схема інваріантної системи регулювання за відхиленням.  
2. Структурна схема комбінованої інваріантної системи.

виникає, що й вимога, щоб ланки, за допомогою яких досягається інваріантність, були фізично здійсненними. Петров встановив, що умови фіз. реалізованості виконуються в тих системах, де є принаймні два канали поширення діянь між точкою прикладення збурень і точкою вимірювання регульованої координати, яка має бути інваріантною щодо цього збурення. Напр., для системи (мал. 1) умову абсолютної інваріантності координати  $x(t)$  щодо збурення  $F_1(t)$  можна реалізувати, як що її структуру доповнити зв'язками, позначеними штриховою лінією, тобто якщо створити ще один канал поширення збурення  $F_1(t)$  відносно  $x(t)$ . Справді, в цьому разі при

$W_1(p) = \frac{1}{W_1(p)W_{32}(p)}$ ,  $x(t) = 0$ , тобто виконується умова абсолютної інваріантності, яка не суперечить критерію стійкості, бо характеристичне рівняння не вироджується.

У системах програмного керування іноді ставиться завдання передати програмне керування без спотворень та записання. Синтез такого виду систем здійснюється за умови, коли помилка відтворення дорівнює нулеві, і методи синтезу таких систем еквівалентні методам розв'язування задачі інваріантності для систем стабілізації, про які йшлося вище.

Проте два канали не завжди й не для всіх збурень, які діють на регульовану координату, можна створити в системах за відхиленням з однією регульованою координатою, напр., цього не можна зробити для  $F_1(t)$  і  $F_2(t)$  в системі, зображеній на мал. 1. І саме в цьому полягає складність, а подеколи й неможливість реалізації умов абсолютної інваріантності в такому класі систем.

У системах регулювання за відхиленням з

для таких класів систем не виникає, бо в цьому разі немає суперечності між вимогами, які висуваються з умов інваріантності й умов стійкості, тобто такі системи фізично реалізовані. В цьому — істотна перевага комбінованих систем керування. Вони є «грубими», і за невеликих відхилень від умов абсолютної інваріантності запас стійкості в них не зменшується. Але складність реалізації умов інваріантності в таких системах полягає в тому, що необхідно безперервно вимірювати величини збурень, а це досить часто є неможливим. Іноді застосовують непряме вимірювання збурень. Проте такі системи в більшості практично цікавих випадків належать до класу систем з принципом регулювання за відхиленням: їм тоді будуть властиві всі особливості систем цього класу, якщо виконано умови інваріантності.

На мал. 2 наведено структурну схему системи комбінованого регулювання, де штриховою лінією позначено зв'язок за збуренням

$F_1(t)$ . Якщо  $W_1(p) = \frac{1}{W_1(p)}$ , то  $x(t) = 0$ , тобто  $x(t)$  інваріантне щодо  $F_1(t)$ .

Для систем, параметри яких змінюються в часі, виникають певні труднощі, проте для цих систем умови інваріантності теж можна одержати на основі застосування операторного методу аналізу розв'язань дифер. рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Осн. положення, що належать до теорії інваріантності систем, описуваних дифер. рівняннями з постійними коефіцієнтами, поширено на системи зі змінними параметрами з використанням цього та інших методів.

М. М. Пулін ще 1940 вказував на можливість побудувати і для нелинійних дифер. рівнянь теорію інваріантності, цілком аналогіч-

ну тій, яку розроблено для лінійних рівнянь, якщо замість мови визначників користуватися мовою якобіанів. З'явилось багато різних праць, присвячених розв'язуванню задач інваріантності для нелінійних систем керування. Ці праці можна поділити на дві групи. До першої належать усі ті нелінійні задачі, які або можна звести до лінійних, або ж для вивчення їх можна використати ідею симетрування двох каналів з нелінійними ланками, по яких проходить одне й те саме збурення. У другій групі задачі поставлено в загальнішому вигляді, причому розглядалися й неперервні, і розривні нелінійності. Найзагальнішим є метод, який зводиться до дослідження приростів якогось функціоналу, напри-

виду  $I = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , що задовольняє задану систему нелінійних дифер. рівнянь  $\dot{x}_i = F_i(x, t, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , які описують досліджувану систему керування. Тут  $x$  — вектор фазових координат, який характеризує стан системи;  $t$  — вектор зовн. збурювальних дієнь;  $F_i$  — неперервно диференційовані (потрібну кількість разів) нелінійні функції;  $C_i$  — постійні коефіцієнти.

Постановка задачі при цьому полягає в тому, щоб функціонал  $I$  відповідно до рівнянь  $\dot{x}_i = F_i(x, t, u)$  був інваріантний щодо збурень  $t$ . У тому, що така постановка задачі інваріантності збігається із звичайною, незалежно переконатися, якщо взяти окремий вид наведеного вище функціоналу, коли всі  $C_i = 0$ , крім одного  $C_h = 1$ . В цьому разі матимемо  $I = x_h$ ,  $h = 1, 2, \dots, n$ , і, т. ч., ставиться звичайна вимога про незалежність однієї з координат системи  $x_h(t)$  щодо якогось асов. дієння  $f_m(t)$ . Запроваджено поняття про слабку та сильну інваріантність. Інваріантність наз. слабкою, якщо  $x_h(t)$  не залежить від  $f_m(t)$  тільки в якийсь заданий момент часу  $t = T$ , коли траєкторія руху зображає точки у фазовому багатовимірному просторі, відповідному розглядуваній системі рівнянь  $\dot{x}_i = F_i(x, t, u)$ , досягає заданої гіперповерхні  $M(x, t) = 0$ . Інваріантність наз. сильною, якщо незалежність  $x_h(t)$  від  $f_m(t)$  матиме місце на всьому інтервалі руху від  $t_0$  до  $t = T$ .

Розв'язують задачі для слабкої та сильної інваріантності по-різному. Різкими впадаються й умови слабкої та сильної інваріантності, коли рівняння нелінійні, і тільки для лінійних задач ці умови збігаються. Для сильної інваріантності необхідно й достатньо, щоб функції  $F_i(x, t, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , не залежали від  $t$  при будь-якому значенні  $x$ . Функції  $F_i$  при цьому визначаються так:  $F_0 = I$ ,  $F_1 = -D(F)F_0, \dots, F_s = D(F)F_{s-1}$ , де оператор

$$D(F) \text{ такий, що } D(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} F_i.$$

Загальність методу розв'язування задач інваріантності на основі дослідження прайоритетів відповідного функціоналу полягає в тому, що одним і тим самим шляхом можна розв'язати і лінійні задачі зі сталими й змінними в часі параметрами, і нелінійні. Цей же шлях дає змогу вивчати не тільки неперервні системи, а й дискретні — імпульсні та цифрові. При цьому для імпульсних систем задачі розглядали в двох постановках: 1) відліснювалися синтез систем за умови інваріантності для будь-яких моментів часу і 2) за умови інваріантності для дискретних моментів часу — моментів замикання імпульсного елемента.

Розглядали й задачі інваріантності для систем зі змінною структурою, для систем керування в розподілених параметрах, досліджували структурні властивості інваріантних систем, вивчали питання інваріантності для самонастроюваних систем, теоретико-інформаційне трактування задач інваріантності тощо. Використовуючи методи теорії інваріантності й теорії чутливості (див. *Динамічні системи теорія чутливості*), можна створити динамічні системи, інваріантні не лише щодо зовн. збурень, які діють на систему, а й щодо зміни її параметрів.

Теорія інваріантності вже набула широкого практичного застосування. Розроблено або перебувають у стадії розробки інваріантні системи керування різними технологічними процесами (хім., термічними, металург., нафтопереробними тощо), енерг. установками й тепловими двигунами. Досягнення теорії широко використовують, створюючи гіроскопічні прилади та ін. навігаційні системи керування рухомими об'єктами.

Лит. список: Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. «Автоматика и телемеханика», 1939, № 1; Жулия Н. Н. Исследование матричной теории дифференциальных уравнений. «Автоматика и телемеханика», 1943, № 5. Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. М., 1959; Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [Б.б.н.г.р. с. 364-371]. Теория инвариантности в системах автоматического управления. М., 1964. Чувствительность автоматических систем. М., 1968. Беличенко В. В. Вариационный метод и проблема инвариантности управляемых систем. «Автоматика и телемеханика», 1972, № 6; Теория инвариантности в теории чувствительности автоматических систем. Ч. 1-3. К., 1973.

О. І. Кухтенко, А. Г. Шевельов.

**ИНВЕРТОР** — логічний елемент, що реалізує логічне заперечення. Водночас І. посилює та формує електр. сигнали, які є носіями інформації в логіч. кодах пристроїв обчисл. техніки. І. виконують здебільшого на електронній лампі, транзисторі або на магн. елементі. За функціональною ознакою І. поділяють на потенціальні й імпульсні. В потенціальному І. високий рівень напруги на його вході відповідає низькому рівневі напруги на виході, і навпаки, в будь-який момент часу, крім моменту перемикання І. (мал., а). Залежність між вхідним сигналом, що подається на базу, і вихідним сигналом, що знімається з колектора, відповідає логічному перетворенню «НЕ». В імпульсному І. в момент надходження сигналу на його вхід (з врахуванням часу спра-

цювання схеми) з'являється сигнал протилежної полярності на його виході (мал., б), або в момент надходження імпульсу тактущої серії на виході І. з'являється сигнал лише тоді, коли немає сигналу на його вході (мал., в). При цьому після проходження сигналу І. повертається до вихідного стану.

У дискретному виконанні І.— один з осн. конструктивно самостійних елементів для побудови різних логіч. вузлів у засобах обчислювальної техніки. Після того, як почали застосовувати *інтегральні схеми* (особливо

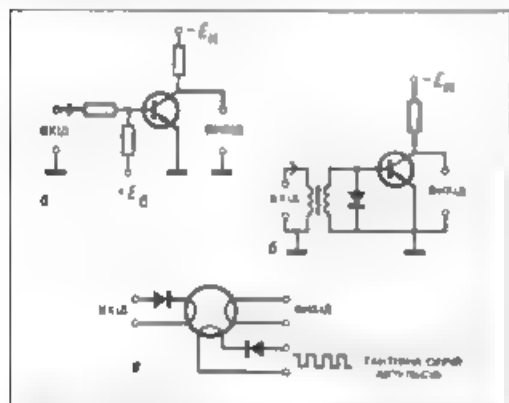


Схема інвертора: а — потенціальний інвертор на транзисторі; б — імпульсний інвертор на транзисторі; в — імпульсний інвертор на феритовому осерзі

великі), І. перестає бути самостійною одиницею і стає невід'ємною структурною частиною в реалізації складніших логіч. функцій.

В АОМ функцію І. виконує *відслідковуєч операційний*, що реалізує перетворення  $Y_{\text{вх}}(t) = -Y_{\text{вх}}(t)$ .

Лит., Вирмак Н. Я., Сидилевич Л. М. Електронні цифрові машини та програмування, ч. 2 М., 1966. Г. І. Корнелюк

**ІНГВЕ ГІПОТЕЗА**, гіпотеза глибини — гіпотеза, що пояснює одну кількісну закономірність, яка властива структурі речень багатьох природних мов. Ця закономірність стосується поняття глибини бінарного дерева складників — так зв. максимум числа лівих гілок дерева, які проходять від час руху від кореня до довільного вузла. Спостереження показують, що в ряді мов (у т. ч. в російській, англійській) глибина речення, як правило, не перевищує 7, тоді як довжина шляху по правих гілках у дереві складників теоретично необмежена. Амер. лінгвіст В. Інгле, який звернув увагу на цю закономірність, пояснює її заг. властивостями людської психіки. Легко переконатися, що глибина речення, яке будується зліва направо за допомогою правил безконтекстної граматики (див. *Грамматика породжувальна*), дорівнює макс. числу допоміжних символів, що їх слід пам'ятати в кожний момент побудови. І. г. полягає в тому, що процес побудови речення людиною аналогічний породжувальному речення зліва напра-

во в безконтекстній граматиці, а обсяг оперативної пам'яті, яка використовується при цьому, приблизно дорівнює 7 (за іншими даними — 9) символами. Це збігається з даними ряду психологічних експериментів, які приводять до висновку, що людина здатна миттю сприйняти й запам'ятати не більш як 7 (відповідно — 9) однорідних елементарних одиниць інформації (цифр, імен тощо). Дальшими дослідженнями в ряді мов (у т. ч. в російській) виявлено так і способи побудови речень, за яких глибина стає принципово неможливою. Одночасно зазначено деякі мови (напр., угорську), в яких необмеженість глибини є нормою. Виявлені факти спростовують І. г. В категоричній формі її постановки цю гіпотезу більшість дослідників приймають з певними застереженнями

Лит. Інгле В. Гіпотеза глибини. В кн.: Новое в лингвистике, в. 4. М., 1965.

**ИНДЕКСУВАННЯ** — присвоєння документів набору ключових слів чи кодів, які є показником змісту документа й які використовують для пошуку його (переважно для документів з науково-тех. інформацією). Можливі два способи І.— *вільне* (коли безпосередньо з тексту документа вибирають *ключові слова*, не зважаючи на всі відомі їхні форми і відношень між ними) та І. *контрольоване* (коли в пошуковий образ документа включають лише ті слова, які зафіксовано у словнику ключових слів, де зазначено їхні синонімічні, родовидові та асоціативні відношення). Як правило, І. здійснюють досвідчені бібліотекарі чи спеціалісти певної галузі науки. Щоб зменшити витрати часу й засобів, розробляють методи автоматизованого І.: статистичні, перmutаційні, бібліографічні й асоціативні. Статистичні методи І. ґрунтуються на гіпотезі про те, що частотаживання слова пов'язана з його значущістю для змісту документа. Здебільшого цей зв'язок занадто спрощують, зводять зростання інформаційної значущості слів зі збільшенням частоти їх. Проте вважають, що інформаційна цінність рідкісних слів вища за інформаційну цінність слів, які повторюються часто. Це враховують, застосовуючи метод статистичних відхилень, коли вимірюють відхилення частоти слів у документі, що його індексують, від теоретично очікуваної частоти цих слів. Щерм у та ці йде І.— І. словами з заголовка документа вміщенням їх до алфавітного словника стільки разів, скільки в ньому є різних слів; при цьому кожне ключове слово вмищують на своє місце алфавіту й супроводять усім контекстом заголовка. Перmutаційне І. широко застосовують в інформаційних службах.

Бібліографічне й асоціативне І. використовують ширше: бібліографічне — для І. документа посиланнями на ін. документи й публікації, що містяться в ньому (показник цитованої літератури дає змогу провадити пошук інформації і визначати закономірності розвитку науки); асоціативне — для І. в використанні карт асоціатив-

них зв'язків між ключовими словами, одержуваних за допомогою аналізу частоти повторення сполучень ключових слів у текстах. Залежно від інтервалу тексту, в якому реєструється ця частота, одержують різні карти асоціативних зв'язків. Див. також *Інформаційно-пошукова система документальна, Пошук інформації автоматичний, Анонування автоматичне*.

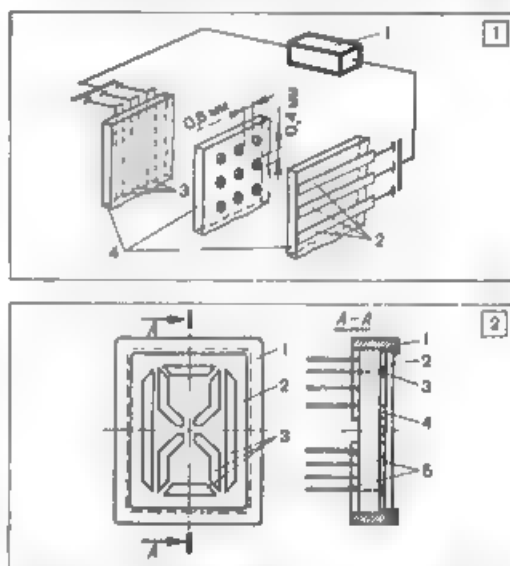
Літ. Михайлов А. И., Черный А. И., Гиларевский Р. С. Основы информатики. М., 1968 (Бібліогр. с. 728—733); Москвичев А. А. Статистика и семантика. М., 1969 (Бібліогр. с. 294—301); В. А. Москович.

**ІНДИКАТОРИ ІНФОРМАЦІЇ** — спеціалізовані елементи, які забезпечують яскраве (візуальне) відтворення даних, що їх виводять в системі чи пристрої. І. і. є частиною систем відображення інформації і їх діють на аналогові, дискретні та гібридні. А н а л о г о в і І. і. за принципом дії діють на механічні, гідравлічні, пневматичні, електромеханічні й електронні. Конструктивно оформляють їх у вигляді цитових зварювальних приладів в рухомому стрілоку або шкалою. Ці І. і. широко застосовують у пром-сті. З електронних І. і. перспективними є лінійні газорозрядні індикатори. Вони являють собою скляні балони, наповнені інертним газом. У середині балона міститься стражниковий катод і циліндричний анод. Площа світіння катода пропорційна силі струму, що протікає через І. і. Достоїнства індикаторів: яскравість, можливість групування їх у вигляді порівняльних діаграм (гістограм), малі габарити, вага таартість. Вад: велика сумарна похибка — близько 4%, короткий строк служби — до 1000 год, порівняно висока постійна напруга — 140 + 170 в і значні величини постійного струму — 0 + 10 ма.

У зв'язку з широким використанням ЦОМ особливого значення набувають д и с к р е т н і І. і. До них належать елементи, виконані на лампах розжарювання й газорозрядних лампах, а також плазмові панелі, електролюмінесцентні, електромагнітні, ферооптичні, рідиннокристалічні й електрохімічні елементи. Лампи можна використовувати як одиночні індикатори або сегменти (знакосинтезуючі) табло з 5—8 сегментів формуються будь-яка цифра від 0 до 9, з 14—19 сегментів — цифра або літера російського алфавіту, можлива також сегментна організація мнемосхем. За допомогою ламп здійснюють й почергове висвічування (вибір) знаків. Скляні пластини із знаками (кожний знак утворений групою отворів у пластині) розміщуються одна за одною (накетом до 10—12 пластин) і можуть підсвічуватись лампами у торець. Знак візуалізується внаслідок заломлення світла в отворах. У газорозрядному цифровому індикаторі знаки висвічуються крізь дво або крізь стінку колби індикатора. Їх багаторозрядні індикатори в конструктивних і схемних суміщеннях елементів.

Здійснюють розробку плазмових панелей (мал. 1). Панель складається з трьох скляних пластин, в середній з яких є отвори, заповнені

сумішшю неону й азоту, а на зовніш. нанесено напіпрозорі смужки золота (шпин керування). На шпин безперервно подається напруга підпору. Кожний газорозрядний елемент панелі розміщено на перетині двох взаємно перпендикулярних шпин. Напруга керування, яка подається на них, доходить до напруги підпору. Виникає світіння елемента, яке зберігається й після зняття керуючої напруги, бо на периферії елемента нагромаджуються заряд. Для гасіння елемента передається через відоміану пару шпин керуючий сигнал



1. Будова плазмової панелі: 1 — джерело напруги підпору; 3 — горизонтальні керуючі шпини; 4 — вертикальні керуючі шпини; 5 — скляні пластини. 2. Будова електролюмінесцентного індикатора (сегментний цифровий індикатор): 1 — рамка, 2 — скло в шарі люмінофору на внутрішній поверхні, 3 — сегменти зображення, 4 — компунд; 5 — електричні вводи.

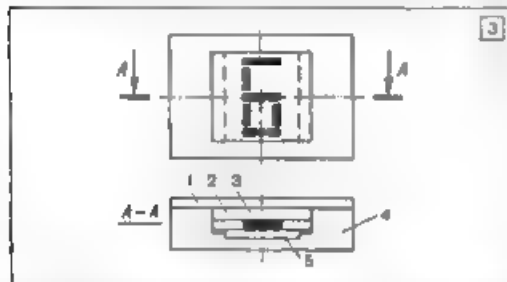
протилежної полярності. Достоїнства плазмових панелей — можливість запам'ятовувати інформацію, велика густина елементів зображення (80—100 елементів на 1 см<sup>2</sup>) і яскравість (2000—7000 кд), малий час повного записування або стирання (40—80 мсек); вада — висока напруга живлення (200—250 в) і частота (50—500 кГц), що й ускладнює узгодження їх з ЦОМ.

Перспективні електролюмінесцентні індикатори, основані на світінні спец. матеріалів (електролюмінофорів), яке виникає, коли до них прикладають напругу. Сегментний цифровий індикатор показано на мал. 2. Матричний люмінесцентний екран складається з шару електролюмінофору, який міститься між взаємно перпендикулярними системами керуючих електродів, одна з яких прозора. Як і для плазмових панелей, для живлення електролюмінесцентних індикаторів та екранів



потрібні високі напруга й частота (200—500 а, 0,4—10 кГц). Осн. вада таких індикаторів — відсутність внутр. запам'ятовування, необхідність частоті регенерації зображення. Завдяки компактності, універсальності й високій роздільній здатності екрани набувають дедалі більшого застосування в бортових системах.

У світловопроміньовальних діодах використовується ефект світіння р-п переходів у напівпровідниках (карбіді кремнію, фосфіді та арсеніді галію) при про-



2. Будова ферооптичного індикатора: 1 — скляний підклад (екран індикатора); 2 — шар алюмінію (фон); 3 — шар окису кремнію (сегменти зображення); 4 — композит; 5 — шар пермаю (провалення зображення).

пусканні через них струму. Світлові діоди придатні й для одиночних, і для сегментних індикаторів. З них також складають матриці густотою до 30—70 елементів на 1 см<sup>2</sup>. Достоїнства світловопроміньовальних діодів — низька напруга живлення (можливість узгодження в інтегральних схемах) і велика швидкість перемикання. Осн. вада — мала світлова віддача (2%).

До дискретних і. і. належать і електромагнітні елементи (напр., поворотні покажчики положення). Крім одиночних, можливі ще й сегментні, пакетні, стрічкові та книжкові конструкції. Розроблено й електромагн. екран-матрицю густотою 10—25 елементів на 1 см<sup>2</sup>. Елемент може мати форму кубика, диска, циліндра або кулі; його протилежні поверхні забарлюють у взаємно контрастні кольори. Елементи підв'язують на витках або розміщують у комірах, заповнених прозорою рідиною. Керують елементами індивідуальні електромагн. (запам'ятовувальні) комірки.

Суміщення в одному елементі запам'ятовувальних та індикаційних якостей досягнуто у ферооптичних елементах. Такий елемент (мал. 3) складається із скляної пластини, на яку наплавлено послідовно шар алюмінію (фон), окис кремнію (напр., сегменти для формування цифр) та пермаю (провалення зображення). Здатність пермаю відбивати світло зумовлюється його намагніченістю (ефект Керра), а коерцитивна сила залежить від підкладу (велика — на алюмінії і мала — на окисі кремнію). Матричне керування тут дає змогу намагнічувати ді-

лянки пермаю тільки над необхідними сегментами, після чого зображення стає видимим у відбитому світлі (темне на світлому фоні — мал. 3). Достоїнство ферооптичних елементів — зручність узгодження з ЦОМ, головна вада — низька контрастність (до 1:3).

При побудові систем відображення інформації дедалі ширше застосовують рідкі кристали — спец. органічні сполуки, які в нормальних умовах мають властивості і рідин, і твердих тіл. Тонкий шар рідинних кристалів (0,3 мм й менше) вміщують між двома скляними пластинами, де він знаєз впливу капілярних сил. Напруга керування (20—70 а, частота 10—100 кГц) передається через електроди відповідної форми (напр., у вигляді сегментів). Велика напруга змінює положення молекул рідкого кристала в зоні її прикладання, що зумовлює розсіювання світла (втрату прозорості) або зміну кольору на відповідних ділянках. Після зняття напруги прозорість (початковий колір) відновлюється (час перемикання — 10—100 мсек). Достоїнства і. і. на рідких кристалах — висока контрастність зображення (тільки вища, чим вища зовнішня освітленість), мале споживання енергії й довгий строк служби (10 000 год і більше).

Дискретні і. і. на основі ламп розжарювання й газорозрядних ламп, електролюмінесцентні й електромагн. індикатори випускає пром-сть, їх широко застосовують у практиці. Почали застосовувати й світловопроміньовальні діоди — як точкові та сегментні індикатори, а також електролюмінесцентні екрани — як універсальні засоби відображення.

Матричні плазмі, світлодіоди, ріднокристалічні виготовляють поки що у формі багаторозрядних цифрових і знакових індикаторів (звичайно з растром 5 × 7 точок на знак). Проведено успішні дослідження й випущено дослідні партії плазмових і ріднокристалічних екранів з роздільною здатністю до 512 × 512 точок. Проводять роботи по одержанню за допомогою цих екранів напівтонових і кольорових зображень. У стадії досліджень перебувають також ферооптичні екрани.

Електрохімічні елементи являють собою плоскі прозорі кювети, заповнені електролітом. Коло задньої стінки кювети розміщено індикаторні електроди, відповідні майбутньому зображенню (напр., сегменти для формування цифр), крім того, а кюветі є й спільний електрод. При подаванні напруги відбувається електрохім. реакція, під час якої змінюється забарвлення електроліту біля відповідних електродів, тобто зображення проявляється. Реакція є оборотною — заряд на індикаторних електродах поступово розсіюється; видиме зображення може зберігатися протягом кількох десятків хвилин, після чого потрібна його регенерація. Щоб стерти інформацію, через індикатор пропускають струм протилежної полярності. Осн. вади електрохім. елементів: індикаторні електроди з'єднані між собою електролітом, а це обмежує число їх в елементі (до 3—4 на

ем) і ускладнює схеми керування ними; в електроніці відбуваються необоротні зміни, час запам'ятовування інформації порівняно невеликий (десятки мілісекунд).

Дискретний та аналоговий методи формування зображення використовують також у різних комбінаціях; так утворюються гібриди 1, 1. Напр., послідовна матриця з світлових діодів з фотохромним носієм або люмінесцентних панелей з лазерним скануванням дає змогу одержати перспективні варіанти індикаторних пристроїв. Див. також *Пристрої зображення інформації*.

Лит.: Деркач В. П., Корсунский И. М. Электронные вычислительные устройства. К., 1968 (библиогр. с. 292-293); Агейкин Д. И. [и др.] Линейные программируемые вычислители. «Приборы и системы управления», 1969, № 2; Погосянчикова Г. (Реферативный обзор). «Радиотехника и электроника», 1969, в 41; Гачин А. Г. Методы преобразования информации для человека-оператора в сложных системах управления (на примере энергетических систем). «Известия АН СССР, Энергетика и транспорт», 1971, № 1. О. Г. Чачко.

**ИНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКІВ АВТОМАТИЗАЦІЇ** — розроблення й досліджування математичних методів і різних видів математичного та технічного забезпечення для проведення інженерних розрахунків на електронних обчислювальних машинах. У широкому розумінні — це автоматизація за допомогою обчислювальної техніки розрахунків для пром., підприємств, транспорту, будівництва та ін. галузей нар. г-ва, зокрема й розрахунків, пов'язаних з плануванням і організацією виробництва. У вузькому розумінні і р. а. мають на увазі автоматизацію розрахунків у конструкторських бюро й НДІ планом залучення широкого кола користувачів. І р. а. часто виконують в обчислювальних центрах, оснащених ЕОМ і обчислювальними системами колективного користування, в яких спеціалізовані й малі ЕОМ для інженерних розрахунків можна використовувати як термінали. І. р. а. з використанням ЕОМ, як правило, включає кілька етапів. 1-й етап — постановка задачі й визначення остаточної мети. На цьому етапі вибирають спільний підхід до розв'язання задачі й визначають сукупність критеріїв, що їх повинні задовольняти результати. 2-й етап — математичне описування. Цей етап вклучає вибір одного з відомих способів або розробку нового способу розв'язування задачі. Якщо використовувати матем. описування для постановки задачі на ЕОМ, то можна і, крім того, якщо необхідно оцінити повну похибку одержаного результату, застосовують чисельний аналіз. 3-й етап — програмування для ЕОМ. 4-й етап — налаштування програми. 5-й етап — обчислювання (лічба). Виконуються після усунення всіх помилок з використанням відповідних первісних даних. 6-й етап — аналіз результатів.

І. р. а. безпосередньо пов'язана з задачею взаємодії людини в обчислювальній машині, розв'язання якої сприяє використанню мож. програмування, трансляції, спеціалізованих ЕОМ і систем графічної оперативної взаємодії. Автоматизувати 1-й, 2-й і 6-й етапи

на сучасному рівні розвитку обчисл. техніки і науки досить важко. Найбільше розроблено методи автоматизації 3-го і частково 4-го етапів. У 2-й пол. 60-х років для І. р. а. почали застосовувати переважно малі ЕОМ. Це пояснюється рядом факторів, які полегшують спільну роботу людини з машиною, передбачених при конструюванні цих машин. В машині «Промінь», напр., до набору операцій вклучено обчислювальні елементарні ф-ції, множення векторів та розв'язування систем лінійних алгебр. рівнянь, у машині «МІР-1» відомою рисою є *мова процедурно-орієнтована*, яку оснований на АЛГОЛі й збагачено деякими символами та операторами, що часто трапляються в інженерних розрахунках; спрощення програмування передбачено і в ЕОМ «Нагір'я».

При І. р. а. зручно використовувати ЕОМ з десятковою системою числення і доволіною розрядністю (напр., «МІР»). Для ефективнішої організації роботи ЕОМ у *діалогов режимі* доцільно виводити інформацію на телевізор (див. *Екранний пульт*). Найбільше значення при автоматизації 3-го й 4-го етапів мають бібліотеки стандартних підпрограм і пакетів програм для ЕОМ Крим університетських ЕОМ для І. р. а. використовують проблемно-орієнтовані й спеціалізовані обчислювальні машини, пристосовані для розв'язування вузьких підкласів задач.

Великі можливості для І. р. а. відкривають системи з розподілом часу, які дають змогу одночасно розв'язувати багато задач на одній обчислювальній системі (див. *Режим розподілу часу, Обчислювальних робіт методи організації*).

Лит.: Каган Б. М., Тер-Микаелян Т. М. Решения инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. М., 1964 (библиогр. с. 589-592); Глушков В. М., Лещинский А. А., Стогний А. А. Вводный язык вычислительной машины для инженерных расчетов. «Кибернетика», 1967, № 1; Мандельштам В. Р., Попов В. А. Программирование в старших программах для ЭЦВМ «Промінь» и «Промінь-М». К., 1968 (библиогр. с. 114-117); Фальценов П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Изв. вузов. К., 1970 (библиогр. с. 785-793); Мак-Крэйвен Л., Лорн У. Численные методы в программировании на ФОРТРАНе. Пер. с англ. М., 1972. Б. О. Попов і В. Р. Стогний, Г. С. Тер-Микаелян.

**ИНЖЕНЕРНИ МЕТОДИ СИНТЕЗУ ДИСКРЕТНИХ АВТОМАТІВ** — сукупність прийомів і правил, що їх використовують в інженерній практиці при логічному синтезі схем дискретної автоматизації, телемеханіки та обчислювальної техніки, враховуючи реальні фізичні обмеження на елементи й структуру схем. Ці прийоми й правила можна поділити на три групи: задавання роботи майбутнього пристрою та абстрактний синтез, блок-схемний синтез і структурний синтез з урахуванням реальних обмежень.

Мова задавання роботи пристрою. Класичні способи задавання у вигляді автоматичних таблиць або таблиць істинності, коли проєктують складні пристрої, не можна застосовувати, бо вони громіздкі. Тому в інженерній практиці для задавання закону функціонування майбутнього пристрою використовують спец. стиснуті способи

записування. Найпоширеніші — мова секвенцій, мова логічних схем алгоритмів і мова технологіч. графів. Задавання мовою секвенцій являє собою сукупність виразів вигляду  $P \rightarrow Q$ . У лівій і правій частині цих виразів зазначено зміни або їхні заперечення, розділені комами чи об'єднані знаками кон'юнкції. Кожен вираз вигляду  $P \rightarrow Q$  має такий зміст: якщо в об'єкті відбувається змінування сигналів, яке перетворює хоча б один із виразів у лівій частині секвенції на одиницю, то відбувається відповідне змикнування і всіх сигналів, зазначених у правій частині секвенції. Напр.,  $x_1, x_2, x_3 \rightarrow y_1, y_2$  означає, що коли  $x_1$  набуває значення, умовно віставляного а 1, або  $x_2$  набуває значення, умовно віставляного з 0, а  $x_3 = 1$ , то  $y_1$  набуває значення 1, а  $y_2$  — нуля. Задавання мовою логіч. схем алгоритмів являє собою, по суті, сукупність мікропрограм, що їх має реалізувати пристрій, та інформацію про порядок виконання цих мікропрограм залежно від зовн. умов. Задавання у вигляді технологіч. графу являє собою графіч. зображення процесу перевірки допустимості того чи ін. технологіч. режиму й процесу змінювання цих режимів. Напр., задається пара технологіч. графів, які відповідають процесам пуску й зупинення гідроагрегату. І граф перевірки допустимості пуску чи зупинення. Такі інженерні мови задавання роботи пристроїв потребують спец. методів переходу від них до певних виразів функцій переходу й виходу автомата чи до таблиці істинності функцій. У зв'язку з вирощуванням автоматизації проектування за допомогою ЕОМ виникла потреба створювати спец. мови проектування. Прикладами мов такого типу можуть бути ЛНАС, АЛОС і АЛГОРИТМ.

**Блокний синтез.** Проектування складного пристрою неможливе практично, якщо попередньо не поділити його на частини (блоки). Поділ на блоки проектування проводить інтуїтивно. За критерії поділу правлять: функціональна єдність, типізація і конструктивна завершеність блока. Перший критерій потребує, щоб блок мав чітко виражену функцію. Виконання його забезпечує єдність заг. задуму пристрою й полегшує шукання пошкоджень у пристрої в процесі експлуатації його або під час модернізації та переробки. Типізація блока корисна з погляду удешевлення виробу й стандартизації контролю та діагностики в процесі експлуатації. Конструктивна завершеність блока дає змогу будувати пристрій за модульним принципом і полегшує експлуатацію. Поділ пристрою на блоки приводить до того, що описування роботи кожного блока відбувається незалежно від решти. Окремо відбувається й структурний синтез блоків. Тому з погляду кількості обладнання, витраченого на виготовлення пристрою, результат може бути дуже далекий від оптимального.

**Структурний синтез з урахуванням обмежень.** Після того,

як одержано функції переходу й виходу автомата, на етапі структурного синтезу (див. *Структурна теорія автоматів*), потрібно реалізувати ці функції на основі заданої сукупності елементів. Тому першим завданням, що виникає на інженерному етапі синтезу, є задача визначення аналітич. виразу ф-цій переходу й виходу через ф-ції, реалізовані заданим набором елементів. Найпоширеніші набори елементів реалізують, як правило, або повну систему, що складається з кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, або систему, що складається з ф-цій Шеффера й заперечення. Крім того, практично в будь-яку з систем елементів входить або затримка, або тригер, і завдяки цьому систему елементів можна вважати повною і в класі часових перемикальних функцій. Проте іноді обрана для проектування система елементів може відрізнятися від зазначених. Якщо, напр., реалізація базується на ферит-транзисторних елементах, то треба використати повну систему, що складається з ф-цій  $x_1 x_2$ , констант і тригера. Коли реалізують схему на параметронах чи мікротриах, зручно використати повну систему, що складається з ф-ції заперечення та мажоритарної ф-ції від трьох або п'ятих аргументів (для трьох аргументів ця ф-ція має вигляд  $y = (x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3)$ , і т. д. Визначення аналітичного виразу заданої ф-ції через ф-ції, реалізовані заданим набором елементів, може являти собою досить складне завдання. Напр., якщо базою складається з елемента, що реалізує порогову ф-цію, то перехід від таблиці задавання ф-ції переходів і виходів автомата до відповідної мережі з порогових елементів дуже трудомісткий. Другим завданням цього етапу синтезу є врахування тих реальних обмежень на можливість уміщення елементів у мережу, які визначаються специфікою цих елементів. За найважливіші обмеження такого роду правлять: кількість входів на елемент кожного типу, коефіцієнт розгалуження елемента, навантажувальна здатність елемента й часова затримка, яку вносить елемент. Кількість входів на елемент — це кількість аргументів у ф-ції, яку реалізує цей елемент. Коефіцієнт розгалуження показує, на скільки входів інших елементів можна приділити вихід цього елемента. Навантажувальна здатність елемента визначає кількість елементів, які утворюють ланцюжок, який можна навішати на вихід цього елемента так, щоб не було необхідності вводити в цей ланцюжок спец. підсилювачі. Врахування цих реальних обмежень в сукупності з мінімізацією схем — це дуже складне завдання, що призводить до нелінійної задачі цілочислового програмування великої розмірності. Розв'язувати такі задачі за існуючого рівня обчисл. техніки для скільки-небудь складних схем (напр., для автоматів, у яких входів більше як 20, а станів — більше як 10) поки що неможливо. Враховувати обмеження ізольовано (напр., лише враховувати обмеження за кількістю входів) — це істотно простіша справа. Такі задачі приводять

до задач лінійного цілочисельного програмування, розв'язування яких на ЦОМ відбувається ефективніше. Крім того, було запропоновано різні спеціальні методи розв'язування подібних задач, напр., побудова дужкових представлень *перемикальних функцій*, які мають глибину, не більшу за задану, в певнівальності врахуванню обмежень за навантажувальною здатністю елементів Т. ч. урахування додаткових обмежень дає змогу ставити не лише класичну задачу про мінімізацію логіч. елементів, а й задачу мінімізації додаткового обладнання, напр. підсилювачів і балансувальних елементів, потрібних, щоб вирівняти час проходження сигналів по різних колах схеми.

Використання замість окремих елементів цілих модулів, що реалізують досить складні перемикальні ф-ції, призводить до того, що коли синтезують схеми автоматів на таких модулях, то виникають задачі, відмінні від задач синтезу на базі окремих елементів. Окрім мінімізації заг. кількості модулів, втрачених на синтез, і врахування обмежень за входами модулів, їхньою навантажувальною здатністю та коеф. розгалуження, а також за часовими співвідношеннями, у цьому разі треба ще враховувати й коеф. використання модулів, тобто використовувальність його логіч. можливостей. Задачу синтезу схем на модулях ще не набули скільки небудь заг. розв'язань. Нова технологія виготовлення елементів приводить до того, що роль модулів починають відігравати цілі стандартні вузли автоматики та обчисл. техніки: *регістри, лічильники, дешифратори* тощо. Це висуває задачу синтезу дискретного автомата на рівні *блоків ЦОМ* *миллисек.* За приклад такого підходу можуть виступити методи синтезу ф-цій переходу й виходу автомата на зсувних регістрах. Окрім задач синтезу на реальних елементах, модулях чи вузлах, на етапі інженерного синтезу потрібно ще розв'язувати й задавання вибору структурного прийому реалізації автомата. Дискретний автомат можна реалізувати за класичною схемою, що складається з логіч. перетворювача й пам'яті, вписаної в *загрозний зв'язок*, яким охоплено цей логіч. перетворювач. Проте можливі й ін. реалізації, напр., реалізація дискретного автомата на основі схем мікропрограминого керування. Уліксє чи на основі природних часових затримок у елементах логіч. перетворювача. Вибір тієї чи ін. структурної реалізації поки що провадять лише на рівні інтуїтивного досвіду конструктора.

Важливими є й проблеми кодування входів і виходів автомата, вибору тактності його роботи й вибір синхронної чи асинхронної схеми його. *Кодування станів автомата* провадиться ще на етапі між абстрактним синтезом автомата й структурним синтезом. А кодування вхідних і вихідних сигналів можна провадити на етапі інженерного синтезу. Це кодування має враховувати вимоги реальних даних і виконавчих механізмів, з якими взаємо-

діє автомат. Як правило, в практичних задачах автомат є дуже недозначеним. Задача довизначення тісно пов'язана з задачею кодування вихідних сигналів, бо технологічні обмеження можуть, напр., не дати змоги довизначити ф-ції переходу й виходу значенням «одичицею», якщо з цим значенням при кодуванні зіставлено високий потенціал або імпульс струму. Вибір того чи ін. кодування пов'язаний і з характером використовуваних при реалізації елементів, які можуть бути потенціальними, імпульсними чи імпульсно-потенціальними (див. *Імпульсна елементна структура, Потенціальна елементна структура ЦОМ, Потенціально-імпульсна елементна структура*).

Вибір робочого такту автомата й визначення того, як відбувається змінювання тактів, — ще одна з задач інженерного етапу синтезу. Під тактом розуміють інтервал дискретного часу, протягом якого встановлюється новий внутр. стан і значення вихідних сигналів автомата. Змінювання тактів може відбуватися або від генератора стандартних сигналів, або від спец. схеми, яка визначає тривалість асинхронного такту. У першому випадку частоту сигналів від генератора вибирають такою, що часовий інтервал між двома сусідніми тактовими сигналами більший за макс. час перехідного процесу, потрібного для переходу автомата з одного внутр. стану в ін. Доведено, що, створюючи синхронні автомати, в багатьох випадках адається йотаво простіше реалізувати автомат і зробити його більш відповідним до вимог реальних систем керування. Для *автоматів асинхронних* акціякає багато проблем, невідомих для задач синтезу синхронних автоматів. Одна з центр. проблем асинхронного автомата — проблема усунення аматань при змінюванні внутр. станів автомата, яка розв'язується спеціальним кодуванням внутр. станів автомата.

Нарешті, на етапі інженерного синтезу розв'язують коло проблем, пов'язаних з підвищенням надійності схеми. Крім вибору системи елементів, яка задовольняє вимоги надійності, щодо синтезованого автомата, можна підвищити надійність автомата й внаслідок структурної надмірності. Методи введення структурної надмірності можуть бути дуже різноманітними: резервування всього автомата або його частини, мажорювання «найнебезпечніших» частин логіч. перетворювача або пам'яті, включення додаткових обхідних ланцюгів у логіч. схемі тощо. Є багато методів внесення структурної надмірності на основі аналізу й перетворення аналітич. виразів для ф-цій переходу й виходів автомата. Проте ці методи розроблено тільки для окремих випадків, коли накладено істотні обмеження на характер збоїв, що їх допускають у схемі: незалежність збоїв в окремих елементах, фіксований характер відмов та симетричний характер збоїв типу 0—1 і 1—0. Див. також *Автоматизація проектування ЦОМ*.

Літ.: Лазарев В. Г., Пийль В. И. Синтез асинхронных логических автоматов. М., 1964 [66б].

огр с. 252-257] Якубайтс В. А. Асинхронні логічні автомати Рига 1968, Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах К., 1968 [бібліогр с. 299-311] Попелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М., 1968 [бібліогр с. 324-328].

Д. О. Постолов.

**ІНСТИТУТ АВТОМАТИКИ АКАДЕМІЇ НАУК КИРГІЗЬКОЇ РСР** — науково-дослідна установа в Фрунзе; організований 1960. Осн. напрям досліджень — АСУП, комплексна автоматизація й телемеханізація зростаючих систем. Ведуться розроблення датчиків та різних приладів (для контролю, регулювання), пристроїв телемеханіки й диспетчеризації, дослідження з заг. теорії, синтезу й аналізу алгоритмів керування. При ін-ті є аспірантура.

К. С. Неболюбов.

**ІНСТИТУТ АВТОМАТИКИ І ТЕЛЕМЕХАНИКИ (ТЕХНІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ) АКАДЕМІЇ НАУК СРСР** — див. *Ордену Леніна Інститут проблем керування (автоматики й телемеханіки).*

**ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОНІКИ, АВТОМАТИКИ І ТЕЛЕМЕХАНИКИ АКАДЕМІЇ НАУК ГРУЗИНСЬКОЇ РСР** — науково-дослідна установа в Тбілісі. Створено його 1956. Осн. напрям роботи: дослідження стохастичних адаптивних систем; дослідження оптимальних систем; питання машинного перекладу, розроблення ітеративних методів ідентифікації багатовимірних процесів керування об'єктами зі змінними характеристиками; методи розпізнавання й перетворення мовних образів, розроблення гібридного обчислювального комплексу для дослідження систем автомат. керування; спеціалізовані обчислювальні машини; елементи й пристрої автоматики й телемеханіки тощо. При ін-ті є аспірантура. Видаються періодичні збірники.

Літ. Мусхелишвили Н. К. Наука в Советской Грузии. Тбилиси, 1961.

А. Г. Елещенко.

**ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОНІКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ АКАДЕМІЇ НАУК ЛАТВІЙСЬКОЇ РСР** — науково-дослідна установа в Ризі. Створено його 1960. Осн. напрям досліджень: теорія скінчених автоматів; теорія великих систем; теорія статистичної оптимізації; теорія моделювання дискретних пристроїв. Розв'язуються й завдання, що стосуються створення зиміровальних систем для автоматизації перевірки напівпровідникових приладів та інтегральних схем, розробляються різні автоматизовані системи обробки інформації. В експериментальному відділі виготовляються електронні пристрої, розроблені в ін-ті. Є аспірантура. Ін-т видає журнал «Автоматика та вичислительная техника».

Літ. Леонтьев Л. П. Институт электроники и вычислительной техники Академии наук Латвийской ССР, «Автоматика и вычислительная техника», 1967, № 6; Кибернетика в Латвии, «Автоматика и вычислительная техника», 1970, № 2.

Е. А. Якубайтс.

**ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ АКАДЕМІЇ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСЬКОЇ РСР** — науково-дослідна установа в Баку. Створена 1965 на базі Обчисл. центру АН Аз. РСР. Осн. напрям досліджень — розроблення й

застосування матем. методів і обчисл. техніки у нафтодобувній, нафтопереробній та нафтохім. пром-сті, в економіці й плануванні. В лабораторіях ін-ту розробляють числові методи розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь, задач відведеної гідрогазодинаміки, матем.-еком. задач планування й керування, матем. методи оптимізації технологіч. процесів, проводять дослідження щодо створення автоматизованих систем керування.

А. І. Гусейнов.

**ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ АКАДЕМІЇ НАУК ГРУЗИНСЬКОЇ РСР** — науково-дослідна установа в Тбілісі. Засновано її 1960. Осн. напрям досліджень: розроблення фіз. принципів створення кіберн. систем, теорія моделювання природних і штучних кіберн. процесів та структур. У відділах і лабораторіях ін-ту розробляють фіз., біологічні та функціонально-логічні основи створення кіберн. систем та імітаційних моделей у нових реалізаціях, теорію автоматів, теорію нейронних сіток, теорію великих систем, евристичне та психоевристичне програмування, моделювання інформаційних процесів тощо, застосовуючи досягнення оптикоелектроніки, голографії і квантової електроніки. При ін-ті є аспірантура. Ін-т видає випуски наук. праць.

В. В. Чакавадзе.

**ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ АКАДЕМІЇ НАУК ЕСТОНСЬКОЇ РСР** — науково-дослідна установа в Таллінні. Створено його 1960. Осн. науки напрям: дослідження й створення одно- й багатомісцевих систем, матем. моделювання виробничих процесів, проблем планування й керування, дослідження й побудова алгоритмічних мов і складання відповідних трансляторів; дослідження й розроблення спеціалізованих дискретних пристроїв на магнітних елементах; дослідження в теорії оболонок; дослідження процесів керування на молекулярному рівні в біології. Ін-т має обчислювальний центр і сектори: матем. методів, автоматики, дослідження операцій, механіки й прикладної математики, фізики, біохімії, наукової інформації, СКВ, бюро програмування. При ін-ті є аспірантура. Випускає збірники «Програми для ЭЦВМ Минск-2».

Літ. Наука Советской Эстонии. Таллин, 1965.

І. М. Вайсман.

**ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНСЬКОЇ РСР** — див. *Ордену Леніна Інститут кібернетики Академії наук Української РСР.*

**ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ І ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЦЕНТР АКАДЕМІЇ НАУК УЗБЕЦЬКОЇ РСР** — науково-дослідна установа в Ташкенті. Його створено 1966. Осн. напрям досліджень: обчисл. математика, економ. кібернетика, тех. кібернетика, загальна й матем. питання обчисл. техніки й теорії інформації. Ін-т є головним у республіці щодо розробки автоматизованих систем оптим. планування й керування. У 1969 ін-т нагороджено орденом Трудового Червоного Прапора. В ін-ті є аспірантура.

В. К. Кабиров.

**ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ АКАДЕМІЇ НАУК УРСР** — науково-дослідна установа в Донецьку. Організовано його 1970 на базі Донецького обчислювального центру Академії наук УРСР, створеного 1965. Осн. напрямки: нелінійні проблеми матем. фізики, що мають відні границі; заг. теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних та її застосування; стохастичні дифер. рівняння і проблеми теорії ймовірностей та матем. статистики; метричні властивості багатовимірних відображень, екстремальні проблеми теорії функцій та їх застосування; проблеми руху твердих тіл з порожнинами, заповненими рідиною; матем. проблеми пружності й пластичності; теоретичні проблеми напруження гірських порід; дослідження щодо створення автоматизованих систем планування та керування пром. підприємствами. Створено відділ експлуатації електронних обчислювальних машин. При ін-ті є аспірантура. Видає збірники наук. праць.

Лит. Давидюк І. І. Донецький обчислювальний центр. В кн. Історія Академії наук Української РСР, кн. 2, к., 1967. І. Давидюк.

**ІНСТИТУТ ТЕХНІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ АКАДЕМІЇ НАУК ВІЛОРУСЬКОЇ РСР** — науково-дослідна установа в Мінську. Створено його 1965. Осн. напрям досліджень — розроблення теорії і методів автоматизації процесів інженерної праці за допомогою засобів обчисл. техніки. В ін-ті для великої відділи — автоматизації інженерного проектування і тех. засобів автоматизації інженерного проектування. В лабораторіях відділів проводять дослідження в теорії автоматизації конструювання та технологічного проектування, автоматизації аналізу і синтезу схем керування, автоматизації проектування металорізального інструменту, оснащення та автоматизації нормативних розрахунків підготовки виробів, розробляють спеціалізовані прилади обчисл. техніки, інформаційно-довідкові системи, читачі й креслярські автомати тощо. Ін-т видає збірники праць.

Лит. Купрович В. Ф. Академія наук Білоруської РСР. Мінськ, 1968 [бібліогр. с. 234—237]. О. І. Селенков.

**ІНСТИТУТ ТОЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ АКАДЕМІЇ НАУК СРСР** — науково-дослідна установа в Москві. Організовано його 1948. Осн. напрямки робіт — створення та впровадження у пром. сучасних високопродуктивних універсальних електронних цифрових обчислювальних машин (ЕЦОМ). В ін-ті створено такі ЕЦОМ, як «БЭСМ», «М 20», «БЭСМ-2а», «БЭСМ-3М», «БЭСМ-4а», «БЭСМ-6». Лабораторії та відділи досліджують і розробляють самі ЕЦОМ, їхню матем. забезпечення, елементи й окремі пристрої і досліджують ряд технологічних і конструкторських питань, пов'язаних із створенням ЕЦОМ. При ін-ті є аспірантура й члена рада по захисту канд. і докторських дисертацій. Видаються збірники й випуски наук. праць.

І. В. Логинова.

**ІНСТРУМЕНТАЛЬНА ПОХИБКА**, *приладова похибка* — похибка, що виникає внаслідок недосконалості вимірних приладів, розв'язувальних елементів або складових частин обчислювальних машин (див. *Похибка розв'язувального елемента, Похибка обчислювальної теорії*).

**ІНТЕГРАЛІВ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ**. Для обчислювання визначених і невизначених інтегралів в точці й наближ. способи.

Визначеним інтегралом  $I = \int_a^b f(x) dx$ , що його

розуміють у звичайному для курсів математики значенні (в значенні Рімана), наз. границю інтегр. суми

$$I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \delta = \max \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

1. Способи точного обчислювання визначеного інтеграла. Наведене визначення інтеграла дає одночасно і спосіб обчислення його прямим знаходженням границі інтегр. суми. Але такий спосіб є складним, його майже не застосовують під час точних обчислювань. Частіше застосовують його для наближ. знаходження інтегралів. Велике значення мають способи, оснований на встановленні зв'язку між шуканим визначеним інтегралом та іншими величинами, значення яких часто можна обчислити простіше, ніж границю інтегр. суми. Такі способи різноманітні, бо інтеграл пов'язаний і між собою, і з багатьма іншими величинами. Наведемо лише кілька подібних прикладів. Якщо для інтегрованої функції  $f(x)$  існує первісна (примитивна) функція  $F(x)$ , то справедливою

рівністю  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , яка допо-

магає знати обчислювання інтеграла до відшукування первісної  $F(x)$  і знаходження двох її значень  $F(a)$  і  $F(b)$ .

В інших випадках використовують прості зв'язки між інтегралами від різних функцій. До такого виду зв'язків належить, напр., правило «інтегрування частинами»:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Цим допомагає інтеграл  $\int_a^b u(x) v'(x) dx$  замі-

нити інтегралом  $\int_a^b v(x) u'(x) dx$ . За другий

приклад може правити правило інтегрування суми  $\Phi$ -цій

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n u_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b u_i(x) dx.$$

Це правило часто дає можливість звести інтеграл від  $\Phi$ -ції, яка має складну будову, до кількох простіших інтегралів від окремих доданків. Особливо широко застосовують аналог цього правила для нескінченних рядів: якщо  $f(x)$  представлено у формі збіжного

на  $[a, b]$  ряду  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ , то при виконанні деяких умов щодо характеру збіжності справедливим є рівність

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

Використовування її пов'язано з тим, що  $\Phi$ -ції дуже широкої множини можна подати у формі суми ряду, члени якого є простими й легко інтегрованими  $\Phi$ -ціями, напри-

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = 1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \dots \end{aligned}$$

Під час розв'язування деяких теоретичних і практичних задач буває необхідно обчислювати інтеграли від однозначних аналітичних  $\Phi$ -цій по замкнених лініях  $\int f(z) dz$ . Відомо,

що такий контурний інтеграл дорівнює добутку числа  $2\pi i$  на суму лишків  $\Phi$ -ції  $f(z)$  в особливих точках  $\Pi$ , що лежать усередині контура  $\Gamma$ . Ця рівність дає змогу звести обчислення контурного інтеграла до знаходження лишків, а це часто буває значно простіше, ніж знайти границю інтегр. суми, що відповідає інтегралові  $\int f(x) dx$ .

2. Способи наближеного обчислювання визначеного інтеграла. Більшість застосовуваних тепер способів наближеного обчислювання визначених інтегралів ґрунтуються на заміні інтегрованої  $\Phi$ -ції  $f(x)$  простою й легко інтегрованою  $\Phi$ -цією, такою, наприклад, як алгебр. многочлен або раціональна  $\Phi$ -ція. Ця заміна, як правило, дає тим більшу точність, чим вищий буде порядок диференційовності  $\Phi$ -ції  $f(x)$  і чим «плавніше» її зміна. А коли  $f(x)$  — розривна  $\Phi$ -ція або має розривні похідні невисокого порядку, то заміна може дати невисоку точність обчислення інтеграла, або зумовити потребу введення многочленів високого ступеня, якщо цю точність збільшити. Тому при побудові правил обчислювання часто буває доцільно

розкласти інтегровану  $\Phi$ -цію на два множники  $p(x)$  і  $f(x)$  так, щоб  $p(x)$  уніфікував у себе всі особливості  $\Phi$ -ції, а  $f(x)$  мав достатньо високий порядок «плавності», і потім звести інте-

грал до виду  $\int_a^b p(x) f(x) dx$ . Множник  $p(x)$

вважають фіксованим, його називають вагою або *ваговою функцією* в інтегралі. А  $\Phi$ -ція  $f(x)$  може бути будь-якою з якоїсь широкої множини. Для обчислення інтеграла створюють правила виду

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = Q_n(f). \quad (1)$$

Такі правила залежать від  $2n+1$  параметрів: від  $n$  вузлів  $x_k$ ,  $n$  коеф.  $A_k$  і кількості  $n$  значень  $\Phi$ -ції  $f$ . Чим більше  $n$ , тим більшої точності можна досягти, використовуючи правило (1). Тому  $n$  вважають довільним, але фіксованим числом і розглядають задачу про вибір лише  $x_k$  і  $A_k$ . Їх намагаються вибирати так, щоб досягти можливо більшої точності правила (1).

Найпоширеніший і плідний принцип вибору  $x_k$  і  $A_k$  полягає в підвищенні ступеня точності правила. Розглянемо його ідею на окремому прикладі. Нехай відрізок  $[a, b]$  скінченний, і треба побудувати правило, яке забезпечувало б якомога більшу точність для будь-якої неперервної на  $[a, b]$   $\Phi$ -ції  $f$ . Відомо, що коли  $f(x)$  неперервна на  $[a, b]$ , то для будь-якої скільки завгодно малої наперед заданої границі похибки є існує такий алгебр. многочлен  $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ , який при всіх значеннях  $x$  в  $[a, b]$  відрізняється від  $f(x)$  за абс. значенням менше, ніж на  $\varepsilon$ . Це дає змогу сподіватися, що правило (1) даватиме задовільну точність для будь-якої неперервної  $\Phi$ -ції  $f(x)$ , якщо воно має малу похибку в тому разі, коли  $f(x)$  — многочлен. Тому правило інтегрування (1) часто будують так, щоб воно було точним для алгебр. многочленів якомога вищого ступеня. Звичайно кажуть, що рівність (1) має алгебр. ступінь точності  $m$ , якщо вона є точною для різних многочленів  $P_m(x)$  степеня  $m$  і не справджується точно для  $f(x) = x^{m+1}$ . Одночасно слід відзначити, що за інших умов доводиться мати справу з завданням досягнення високого ступеня точності для інших способів наближення. Так, якщо будують правила для інтегрування періодичних  $\Phi$ -цій, то прагнуть досягти можливо вищого тригонометричного ступеня точності і т. н. Параметри  $x_k$  і  $A_k$  правила (1) не завжди довільні. Напр., коли  $\Phi$ -ція  $f(x)$  задається таблично, то вибір  $x_k$  досить обмежений: можна взяти або всі табличні вузли, або частину їх опустити, але неможливо надавати  $x_k$  довільних значень.

У проблемі підвищення ступеня точності правила (1) розглядають такі три задачі.

а) Нехай всі  $2n$  параметрів  $x_k$  і  $A_k$  є довільними. Їх можна вибрати так, щоб правило стало точним для всіх алгебр. многочленів степеня  $2n-1$ . Можна показати, що коли вагова ф-ція  $p(x)$  знакопостійна на  $[a, b]$ , цього справді можна досягти, обравши належним чином  $x_k$  і  $A_k$ . Більше того, можна показати, що за цих умов  $x_k$  і  $A_k$  визначають єдиним способом і що ступінь точності  $2n-1$  є найвищим можливим. Вперше правило такого типу побудував нім. математик К.-Ф. Гаусс (1777-1855) для випадку скінченного відрізка  $[a, b]$  й постійної вагової ф-ції  $p(x) \equiv 1$ . Його засто-

совують, щоб обчислювати інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , коли ф-ція  $f(x)$  є достатньо гладкою.

б) Нехай узали  $x_k$  правила (1) обрані й фіксовані, а довільними є лише коеф.  $A_k$ . На такі умови побудови правила (1) награвляють, напр., у задачі інтегрування таблично заданих ф-цій. Один з можливих способів побудови правила (1) полягає в тому, що ф-цію  $f(x)$  інтерполюють за її значеннями  $f(x_k)$  за допомогою многочлена степеня  $n-1$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega = (x-x_1) \dots (x-x_n)$$

і потім замінюють в інтегралі  $\int_a^b p(x) f(x) dx$  ф-цію  $f(x)$  на многочлен  $P_{n-1}$ . Після почленного інтегрування одержують квадратурні формули виду

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad A_k = - \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx. \quad (2)$$

За способом одержання ці ф-ли наз. і н т е р п о л я ц і й н и м и. Їх цілком характеризує умова, що рівність (2) справджується точно кожного разу, коли  $f(x)$  є многочлен степеня  $n-1$ .

Особливо широко застосовують інтерполяційні ф-ли виду Котеса, в яких вузлах  $x_k$  вважають рівновіддалені точки відрізка  $[a, b]$ :

$$x_k = a + kh \left( h = \frac{b-a}{n}, k = 0, \dots, n \right).$$

В цьому разі коеф.  $A_k = (b-a)^{-1} B_k$ ,

$$\text{де } B_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n!k!(n-k)!} \int_a^b p(x) (x-a)^k (x-b)^{n-k} dx.$$

Котес обчислив коефіцієнти  $B_k$  для  $n=1, 2, \dots, 10$  при  $p(x) \equiv 1$ . Найпростіші ф-ли Котеса часто застосовують під час обчислень з невисокою точністю. При  $n=1$  інтерполяція виконується за двома значеннями  $f(x)$  на кінцях відрізка  $a$  і  $b$ . Рівність (2) веде до ф-ли трапецій

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (3)$$

При  $n=2$  ф-ція  $f(x)$  інтерполюється за значеннями в трьох вузлах  $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ . Ф-ла Котеса збігається з правилом парабол

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[ \frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]. \quad (4)$$

Рівності (3) і (4) мають невисоку точність і, щоб застосувати їх до обчислень, відрізок  $[a, b]$  звичайно ділять на досить велику кількість малих частин довжини  $h = \frac{b-a}{m}$ , до кож-

ної в яких застосовують правило (3) або (4) і потім складають результати по всіх відрізках. Одержані після цього «загальні правила» трапецій і парабол можна записати у вигляді

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{m} \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1} + \frac{1}{2} f_m \right], \quad f_k = f(a + kh),$$

$$h = \frac{b-a}{m};$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3m} \left[ f_0 + f_m + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{m-1}) \right].$$

в) В деяких випадках, напр., під час графічних розрахунків, доцільно користуватися правилами квадратур в рівнини коеф.

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx C_n \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (5)$$

Вони мають  $n+1$  параметрів  $C_n$  і  $x_k$  ( $k=1, \dots, n$ ). Якщо параметри вибрано так, що рівність (5) справджується точно для будь-яких многочленів степеня  $n$ , такі правила наз. квадратурними ф-лами Чебишова. Першу ф-лу такого роду знайдено в середині XIX ст.

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right). \quad (6)$$



Тут рівність справджується точно, якщо  $f(x)$  є довільний многочлен степеня  $2n-1$ . Ф-лу Чебишова можна побудувати за будь-якою  $n$  для якоїс-небудь ф-ції  $p(x)$ , для якої

$$\int_a^b p(x) dx \neq 0, \text{ але серед } n \text{ вузлів можуть}$$

опинитися вузли, що заходять за границю відрізка інтегрування  $[a, b]$  і навіть комплексні. Так, для випадку постійної вагової ф-ції

$$p(x) \equiv 1 \text{ у ф-лі Чебишова } \int_{-1}^1 f(x) dx \approx$$

$$\approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \text{ всі вузли будуть дійсними тіль-$$

ки за  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Для всіх інших значень  $n$  серед вузлів  $x_k$  будуть і комплексні.

До 1965 вважали, що ф-ла (6) — єдина ф-ла Чебишова, в якій при будь-яких  $n$  усі вузли  $x_k$  дійсні. І лише 1965 знайдено вагові ф-ції  $p(x)$ , для яких можна побудувати ф-лу Чебишова з дійсними вузлами  $x_k$  при будь-яких  $n$  або для нескінченної кількості значень  $n$ .

3. Обчислення певного інтеграла. В задачі обчислювання невизначеного інтеграла  $y(x) = y_0 +$

$$+ \int_{x_0}^x f(t) dt, \text{ як правило, буває потрібно знайти}$$

ф-цію  $y(x)$  для багатьох значень  $x$ , і не істотно відрізнити її від задачі обчислювання визначеного інтеграла. Нехай треба обчислити  $y(x)$  у рівновіддалених точках з кроком  $h$   $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ). Припустимо, що обчислення досягли точки  $x_n = x_0 + nh$  і складено таблицю значень:

| $x$       | $y$     |
|-----------|---------|
| $x_0$     | $y_0$   |
| $x_1$     | $y_1$   |
| $\dots$   | $\dots$ |
| $x_n$     | $y_n$   |
| $x_{n+1}$ |         |

Треба знайти  $y_{n+1}$ . Для цього можна використати кілька раніше знайдених значень  $y_k$  ( $k \leq n$ ) і ті значення  $f$ , які можна вводити в обчислення.

В загальній формі розрахункове правило можна записати у вигляді

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + h \sum_{j=1}^q B_j f(\xi_j). \quad (7)$$

При побудові цього правила істотне значення має таке.

а) Правило має  $p + 2q + 1$  параметрів  $A_i$ ,  $B_j$  і  $\xi_j$ . Їх вибирають так, щоб правило мало достатньо високий або навіть найвищий

можливий алгебр. ступінь точності. Ця умова така сама, як і в задачі обчислювання визначеного інтеграла. б) На кожному кроці обчислювання з'являється якась похибка. Від кроку до кроку похибка нагромаджується, і похибка обчислення зростає з збільшенням кількості кроків. Закон зростання залежатиме від вибору правила (7); при цьому зростання може виявитися таким швидким, що правило стане непридатним для лічби навіть на невелике число кроків. Будуючи правило (7), слід дбати про те, щоб відповідне йому зростання похибок було достатньо повільним, щоб можна було обчислити за малих  $h$  ф-цію  $y(x)$  з якою завгодно малою похибкою на всьому відрізку, де її треба знайти. Правило (7), що має цю властивість, часто наз. стійким щодо зростання похибки. Опанування стійкості було з'ясовано в середині ХХ ст. в) Під час обчислень за ф-лою (7) найважче знаходити значення ф-ції  $f(t)$ . Можна спростити розрахунки й зберегти машинний час, якщо правило (7) будувати так, щоб іножне значення  $f(t)$  застосовувалося для знаходження не одного, а кількох значень  $y(x)$ .

Нехай відома таблиця значень ф-ції  $f(t)$  у рівновіддалених точках  $x_0 + kh$ , ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) і треба знайти значення  $y(x)$  в тих самих точках. Для обчислень тут часто використовують правило

$$y_{n+1} \approx y_n + h \left\{ \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1}}{2} + \frac{\Delta^2 f_n}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{n-2}}{2} + \frac{\Delta^4 f_{n-1}}{2} - \dots + C_h \frac{\Delta^6 f_{n-4} + \Delta^6 f_{n-3}}{2} \right\},$$

$$C_h = \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 (u+k-1) \dots (u-k) du.$$

$$\Delta^2 f_j = \Delta^2 f_{j+1} - \Delta^2 f_j, \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Воно є інтерполяційним, точним для випадку, коли  $y(x)$  є довільним многочленом степеня  $2k+2$ , стійким щодо зростання похибки і кожне значення  $f$  використовують для знаходження  $2k+2$  значень  $y$ .

В 40–60-х роках ХХ ст. було запропоновано інші принципи побудови правил інтегрування. Опишемо деякі з них. 1) Правила з найменшою оцінкою похибок у заданих множинках ф-цій. Такі правила побудовано для невеликої кількості найпростіших випадків. 2) Правила з найшвидшим зменшенням похибок у заданому класі ф-цій при необмеженому зростанні числа доданків в інтегр. сумі. Побудовано детерміновані й недетерміновані ме-

тоди зі збіжністю порядку  $O(N^{-\frac{m}{a}})$  і недетерміновані методи зі збіжністю за ймо

вміст порядку  $O\left(\Delta N^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}\right)$  на азахі  $C_m^m(A)$  ф-цій  $\delta$  змінних ( $\delta > 1$ ), у яких усі похідні порядку  $m$  обмежені за модулем постійної  $A$ . Аналогічні результати одержано і в деяких інших класах ф-цій. 3) Метод статистичних випробувань або *Монте-Карло метод*, оснований на зведенні задачі обчислення потрібної величини до обчислення ймовірності в процесах з випадковими величинами. Найпростіший приклад методу дає задача

про обчислення інтеграла  $p = \int_0^1 f(x) dx$  ( $0 <$

$f(x) < 1$ ). Якщо в квадраті  $[0 < x < 1; 0 < y < 1]$  взяти випадкову точку  $M(\xi, \eta)$ , то ймовірність її попадання на площу  $S$  дорівнює інтегралові  $p$ . Нехай азато  $N$  випадкових точок  $M_i(\xi_i, \eta_i)$ , і нехай для  $L$  з них справджується рівність  $f(\xi_i) < \eta_i$ , тобто ці точки лежать на  $S$ . Тоді ймовірність  $p$  наба.

відшукують за ф-лою  $p = \int_0^1 f(x) dx = \frac{L}{N}$ .

Лит. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1986 (б.бюлг. с. 324, 384). Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967. Батталов Н. С. Об оптимальных методах решения задач «Application mathématique». 1978. т. 13. М. 1. Фикштейн Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. 2. М., 1970.

**ІНТЕГРАЛЬНА СХЕМА** функціональний вузол електронної апаратури, всі мікромініатюрні компоненти й з'єднувальні провідники якого виготовлено в об'ємі або на поверхні спільного підкладу з застосуванням групових операцій в єдиному технологічному циклі й герметизовано в одному корпусі як одне ціле. Перші І. с. з'явилися наприкінці 50-х рр. внаслідок пошуків, спрямованих на підвищення надійності, швидкодії, зниження вартості і на мініатюризацію електронних систем, які ускладнюються. За принципами побудови й особливостями технології розрізняють І. с. на активному й на пасивному підкладі.

рів, ліній затримки тощо, необхідних для одержання потрібної функціональної схеми. Всі вони мають вихід на поверхню кристалу, на якій понад окисним шаром створюють контакти площадки й внутрішньосхемні з'єднання у вигляді плавкових металізованих доріжок. Напівпровідникові І. с. за способом електр. ізоляції компонентів поділяють на І. с. з ізоляцією  $p-n$ -переходом, зміщеним у зворотному напрямі, та І. с. з діелектр. ізоляцією. Окремий клас напівпровідникових І. с. становлять схеми в транзисторних структурах метал діелектрик-напівпровідник (МДН-транзисторами). Характеристики таких І. с. наведено в табл.

До І. с. на активному підкладі відносять і т. з. суміщені І. с., які відрізняються від напівпровідникових тим, що на поверхні напівпровідника понад окисним шаром виконують у вигляді плавків не тільки контактні площадки й з'єднувальні провідники, але й більшість пасивних компонентів.

З І. с. на пасивному підкладі найпоширенішими є т. з. гібридно-плівкові І. с., виготовлявані на діелектричному підкладі, причому пасивну частину схеми формують з пливкових компонентів, а активну — всередині мініатюрних напівпровідникових кристалів з балковими чи кульковими виводами, що їх монтують на пливковій схемі у вигляді навесних деталей. Залежно від товщини робочих шарів гібридно-плівкові І. с. поділяють на тонко- й товстоплівкові. Щоб виготовити тонкоплівкові компоненти, використовують такі процеси, як напильовання у вакуумі (термічне або за допомогою іонного бомбардування), хім. та електрохім. осаджування та вирощування, реактивне розпилювання. Виготовляючи товстоплівкові компоненти, застосовують шовкографію, центрифугування тощо. Щоб надати пливковим компонентам потрібної конфігурації, використовують маскування й фотолітографію. Гібридно-плівкові І. с. дають змогу повністю використати переваги пасивних тонкоплівкових і активних твердотільних елементів. Усі технологічні операції виготовлення І. с. є груповими, тобто

| Характеристики                     | Тип схем      |         |                 |                   |                 |               |
|------------------------------------|---------------|---------|-----------------|-------------------|-----------------|---------------|
|                                    | Логічні копії | Тригери | Зсуви регістра  |                   | Лічильники      | Суматори      |
|                                    |               |         | статичні        | динамічні         |                 |               |
| Швидкодія, Мгц                     | 1-3           | 0,5-4   | —1              | 0,5-10            | 2-5             | ≤1            |
| Споживана потужність, мвт          | 1-3           | 2-5     | 0,5-6 на розряд | 0,02-30 на розряд | 20-40 на розряд | ~50 на розряд |
| Кількість транзисторів на кристалі | 5-20          | 10-30   | 100-500         | 300-800           | ≥100            | ≥100          |

До першого класу відносять т. з. напівпровідникові (твердотілі, тверді) І. с., які виготовляють на монокристалах напівпровідника (дебільшого кремнію) методами планарної технології. В процесі виготовлення в об'ємі кристалу утворюють спеціальні леговані мікроділянки й структури, що виконують роль транзисторів, діодів, резисторів, конденсаторів,

в процесі виконання їх одночасно формують цілі масиви мікроелектронних компонентів та схем і з'єднання між ними. Це дає змогу створювати дуже надійні й водночас дешеві І. с. і випускати їх у великій кількості. Надійність І. с. 1965 характеризувалася інтенсивністю відмов  $\sim 10^{-7}$  1/год, а пізніше збільшилася на порядок і дорівнює надійності

найкращих зразків дискретних кремнієвих транзисторів.

За функціональним призначенням І. с. поділяють на цифрові (логічні) та лінійні. Цифрові І. с. застосовують у логіч. і запам'ятовувальних вузлах ЦОМ, а лінійні — для підсилювання, перетворення і генерування радіо- та відчотигналів, струмів і напруг. Пром-сть випускає різні серії цифрових І. с., які виконують ф-ції інертора, тригера, схем «ІЕ — І», «ІЕ — АБО» тощо. За особливостями схемного вирішення розрізняють діодно-транзисторні, транзистор-транзисторні, логічні І. с., транзисторні схеми з безпосередніми зв'язками, з емітерними зв'язками тощо. Від схемного й конструктивного вирішення та рівня розвитку технології залежать основні характеристики цифрових І. с.: затримка поширення сигналу, споживана потужність, наявність здатності чи коеф. розгалуження, завадостійкість тощо. Напр., для діодно-транзисторної логіки, схеми затримка поширення сигналу — 8 + 50 нсек, споживана потужність 5 + 30 мвт, наявність здатності 4 + 20, завадостійкість 0,4 + 1.

В лінійних І. с. найпоширеніші операційні диференціальні підсилювачі постійного струму, стандартні низькочастотні й високочастотні підсилювачі, підсилювачі зчитування для ЗП та ін. За числом компонентів і складністю виконуваних ф-цій розрізняють І. с. з зв'язками (10 + 20 компонентів), середнім (50 + 100 компонентів) і високим (понад 100 компонентів) ступенем інтеграції. І. с., що мають тисячі компонентів і виконують ф-ції цілих вузлів електронної апаратури, називаються І. с. (ВІС). Збільшення ступеня інтеграції, перехід до ВІСів, підвищення надійності, зниження вартості, вдосконалювання й автоматизація технологічних процесів є основними тенденціями розвитку техніки І. с. Л.м. Наумов К. Р. Інтегральні логічні схеми. М., 1970 (бібліогр. с. 424-429). Валієв Н. А., Кармазієвський А. Н., Корольов М. А. Цифрові інтегральні схеми на МДП-транзисторах. М., 1971. В. М. Корсунський.

**ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** Багато задач матем. фізики та інженерної практики зводяться до розв'язування інтегр. рівнянь (і. р.) Фредгольма (1, 2) та інтегр. рівнянь Вольтери (3, 4) 2-го та 1-го роду відповідно

$$K_1 \varphi = \varphi(x) - \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = f(x); \quad (1)$$

$$K_2 \varphi \equiv \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = f(x); \quad (2)$$

$$K_3 \varphi \equiv \varphi(x) - \int_a^x k(x, y) \varphi(y) dy = f(x); \quad (3)$$

$$K_4 \varphi \equiv \int_a^x k(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (4)$$

з невідомою ф-цією  $\varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Рівняння (3) є окремим випадком (1), коли  $k(x, y) = 0$  для  $y > x$ ; шляхом диференціювання від рівняння (4) можна перейти до рівняння (3). Рівняння (2) докорінно відрізняється від рівняння (1); воно містить у собі істотні внутр. труднощі і вивчене ще недостатньо.

Знайти точний розв'язок і. р. у загальному вигляді вдається лише в окремих випадках. Для розв'язування рівняння (1) широко застосовують наближені методи (особливо в останні роки у зв'язку з використанням обчисл. техніки). Відомі такі методи наближеного розв'язування і. р., як метод простої ітерації, метод заміни ядра виродженим, метод скінченних різниць, варіаційні методи.

І. У методі простої ітерації за початкове наближення розв'язку рівняння (1) беруть довільну ф-цію  $\varphi_0(x)$ . Наступні наближення будуть за ф-лою

$$\varphi_r(x) = \int_a^b k(x, y) \varphi_{r-1}(y) dy + f(x), \quad r = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Коли цей процес збіжний, наближеним розв'язком вважають  $\varphi_n(x)$  при достатньо великому  $n$ , якщо всі інтеграли можна обчислити точно. Достатніми умовами застосовності методу

$$\text{простої ітерації є } q_1 = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x, y)| dy < 1$$

$$\text{або } q_1 = \left( \int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2} < 1. \quad \text{При}$$

цьому якості та кількісні оцінки похибки визначають за відповідними ф-лами.

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C < q_1^n \|\varphi - \varphi_0\|_C$$

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C < q_1^n \frac{\|\varphi_n - \varphi_0\|_C}{1 - q_1^n}, \quad \|\varphi - \varphi_1\|_C =$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x) - \varphi_1(x)|;$$

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{L_1} < q_1^n \|\varphi - \varphi_0\|_{L_1},$$

$$\text{та } \|\varphi - \varphi_n\|_{L_1} < \frac{q_1^n \|\varphi_n - \varphi_0\|_{L_1}}{1 - q_1^n},$$

$$\|\varphi - \varphi_1\|_{L_1} = \left( \int_a^b |\varphi(x) - \varphi_1(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

У випадку і. р. (2) доведено теорему: якщо і. р. (2) розв'язна, а його ядро симетричне, інтегроване з квадратом і додатно визначене, то послідовність ф-цій  $\varphi_r(x) = \varphi_{r-1}(x) +$

$$+ \lambda \left[ f(x) - \int_a^b k(x, y) \varphi_{r-1}(y) dy \right] \quad 0 < \lambda <$$

$< 2\lambda_1$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , де  $\lambda_1$  — найменше характеристичне число, а  $\varphi_0(x)$  — будь-яка інтегровна в квадраті функція, збігається в середньому до розв'язку рівняння (2).

Для рівняння (3) послідовні наближення у методі простої ітерації будуються за формулою

$$\varphi(x) = \int_a^b k(x, y) \varphi_{r-1}(y) dy + f(x),$$

$$r = 1, 2, \dots,$$

причому цей процес завжди збігається. Похибку оцінюють за нерівністю

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C \leq \frac{M^{n+1}(b-a)^{n+1} \|f\|_C}{(n+1)! \left(1 - \frac{M(b-a)}{n+2}\right)},$$

$$M = \max_{a \leq x, y \leq b} |k(x, y)|.$$

Якщо в (5) інтеграл не можна відшукати точно, то для обчислення їх застосовують ті чи інші квадратурні формули. Якщо в рівнянні

$$(1) \text{ ядро вироджене } (k(x, y) = \sum_{i=1}^n A_i(x) B_i(y)),$$

то розв'язок цього рівняння знаходять у явному вигляді

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i A_i(x),$$

де  $c_i$  — конст. — розв'язки системи лінійних алгебр. рівнянь

$$c_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} c_j = f_i; \quad \alpha_{ij} = \int_a^b A_j(y) B_i(y) dy;$$

$$f_i = \int_a^b f(y) B_i(y) dy;$$

$i = 1, 2, \dots, m$ , при умові, що визначник системи не дорівнює нулеві

2. У методі замінування ядра виродженням довільне ядро  $k(x, y)$  апроксимується виродженим ядром так, що

$$k(x, y) \approx K(x, y) = \sum_{i=1}^m A_i(x) B_i(y) \text{ і за набли-$$

жений розв'язок  $\tilde{\varphi}(x)$  рівняння (1) беруть розв'язок рівняння з виродженим ядром. Апроксимацію заданого ядра виродженим ядром здійснюють різними способами. Зокрема, за вироджене ядро можна взяти відрізок ряду Тейлора, або відрізок ряду Фур'є, або інтерполяційне ядро Бетмена. Оцінку похибки методу здійснюють за такою теоремою: якщо

$$\int_a^b |k(x, y) - K(x, y)| dy < h,$$

$$\int_a^b |f(x, y)| dy < B, \quad 1 - h(1+B) > 0,$$

де  $\Gamma(x, y)$  — розв'язок рівняння з ядром  $K(x, y)$ , то рівняння (1) має єдиний розв'язок,

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_C < \frac{1/\lambda_1^2 (1+B)^2}{1-h(1+B)}. \quad (6)$$

$\Gamma(x, y)$  задовольняє співвідношення  $f(x) =$

$$-\int_a^b \Gamma(x, y) f(y) dy = \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

При конструюванні виродженого ядра бажано одержати добре наближення при невеликій кількості доданків, бо збільшення числа доданків утруднює використання розв'язки.

3. У варіаційних методах наближений розв'язок рівняння (1) знаходять у вигляді апроксимуючої функції, що залежить від  $m$  параметрів

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x), \quad (7)$$

де  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , — лінійно незалежні координатні функції (здебільшого перші  $m$  функцій з повної системи функцій на відрізку  $[a, b]$ ). Визначивши прикладом таких функцій  $\varphi_j(x) = k_i^j \varphi_0 = k_i^j (k_i^{j-1} \varphi_0)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Підставивши рівняння (7) у рівняння (1), одержимо якусь величину  $\varepsilon(x, c_1, \dots, c_m)$ , що її наз. відхилом:

$$\varepsilon(x, c_1, \dots, c_m) = \tilde{\varphi}(x) - \int_a^b k(x, y) \tilde{\varphi}(y) dy - f(x). \quad (8)$$

Параметри  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  визначаються в таких умовах, за яких відхилення у повному розумінні був би найменшим. Залежно від способу мінімізації відхилення одержують той чи інший конкретний метод наближеного розв'язування рівняння (1). Але для кожного з них спільним буде те, що для визначення числових значень параметрів  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , одержують систему рівнянь. Так, за методом найменших квадратів невідомі  $c_i$  відшукують в умови мінімізації відхилення рівняння (1) у метриці простору  $L_2([a, b])$ . У методі Гальоркіна необхідно, щоб відхилення було ортогональним до координатних функцій  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  (або до функцій  $\Psi_i(x)$  в іншій повній системі координатних функцій). У методі збігу треба, щоб відхилення перетворювалося на нуль у точках  $x_i \in [a, b]$ , тобто, крім варіаційних ідей, використовують і ідеї методу скінченних різниць. У методі підобластей відрізок  $[a, b]$  поділяють точками  $a < x_0 < x_1 < \dots < x_m < b$  на  $m$  частин, при цьому необхідно, щоб

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(x, c_1, \dots, c_m) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Відомо, що більшість варіаційних методів зводиться до методу заміни ядра виродженням, тому на основі оцінки (8)  $\Phi_m(x) \rightarrow \Phi(x)$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Теоретичний і практичний інтерес до і. р. сприяв створенню нових методів наближеного розв'язування їх. До цих методів належать у певному розумінні універсальний метод послідовних наближень, метод усереднення функціональних поправок, метод смуг, метод моментів, метод заміни ядра кусково-виродженням, комбіновані методи, метод регуляризації при розв'язуванні і. р. (2) та інші. Ці методи у певних співвідношеннях комбінують з параметрами описаних вище класичних методів. Напр., комбінуючи методи заміни ядра виродженням і простої ітерації розв'язування рівняння (1), добирають такі ф-ції  $A_i(x), B_i(y)$  і таке  $m$ , щоб залишковий член  $r(x, y) = k(x, y) - K(x, y)$  мав властивість

$$q = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |r(x, y)| dy < 1. \quad (9)$$

Розв'язком рівняння (1) у цьому випадку буде ф-ція

$$\Phi(x) = \Psi_0(x) + \sum_{i=1}^m c_i \Psi_i(x), \quad (10)$$

де  $\Psi_i(x), i = 0, 1, \dots, m$  — розв'язки рівнянь  $\Psi_i(x) = A_i(x) + \int_a^b r(x, y) \Psi_i(y) dy$ ;  $A_0(x) = f(x)$ , які на основі умови (9) знаходять методом простої ітерації. Величини  $c_i$ , що виходять до рівняння (10), визначають із системою рівнянь

$$c_i = \int_a^b \Psi_0(x) B_i(x) dx + \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b \Psi_j(x) B_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

На практиці бажано мати якомога малі  $q$  і  $m$ . Ці суперечливі вимоги приводять до необхідності побудови алгоритмів, у певному розумінні оптимальних. Вводять величину, яка характеризує оптимальність

$$E(N, L_1, L_2, \gamma) = \inf_{M(N)} \|\Phi - \bar{\Phi}\|_C, \\ \|k(x, y)\|_C \leq L_1, \quad \|f\|_C \leq L_2$$

де  $\gamma > 0$  — мінім. відстань від 1 до власних значень ядра  $k(x, y)$ .  $M(N)$  — множина всіх методів наближеного розв'язування рівняння (1), при яких здійснюється не більше як  $N$  арифм. дій, норма  $\|\Psi\|_r$  для кожної  $r$  разів диференційованої ф-ції  $\Psi$  означає суму максимумів модулів  $\Psi$  і всіх її похідних аж до  $r$ -го порядку включно. Доводять, що

$M_1 \leq E(N, L_1, L_2, \gamma) N^{\frac{r}{2}} \leq M_2^r$ , де  $M_1, M_2$  — додатні сталі, що залежать лише від  $r, \gamma, L_1, L_2$ . Метод, для якого  $\|\Phi - \bar{\Phi}\|_C = E(N, L_1, L_2, \gamma)$  є оптимальним за числом арифм. дій, а метод, для якого  $\|\Phi - \bar{\Phi}\|_C \leq M_2 N^{-\frac{r}{2}}$  — оптимальним за порядком. Обчисл. схема оптимального за порядком методу полягає ось у чому. Нехай

$$K\Phi = \int_a^b k(x, y) \Phi(y) dy, \quad k_i \Phi \equiv \\ \equiv \sum_{j=1}^{m_1} A_j^{(1)} k(x, x_j^{(1)}) \Phi(x_j^{(1)}), \quad \bar{R}f = f(x) + \\ + \sum_{j=1}^{m_2} A_j^{(0)} k(x, x_j^{(0)}) \tilde{\Phi}(x_j^{(0)}),$$

де  $\tilde{\Phi}(x_j^{(0)})$  — розв'язки системи рівнянь  $\tilde{\Phi}(x_i^{(0)}) = f(x_i^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m_2} A_j^{(0)} k(x_i^{(0)}, x_j^{(0)}) \tilde{\Phi}(x_j^{(0)}), i = 1, 2, \dots, m_2$ , і квадратурні ф-ли вибрано так, що  $\|(K - k_i)\Phi\|_C \leq \frac{M_2}{m_1} \|\Phi\|_C$ . Послідовні наближені розв'язки рівняння (1) будуть ви ф-лами  $\Phi_i = R(k_i - k_0) \Phi_{i-1} + Rf, i = 1, 2, \dots$ , і, де  $i$  має порядок  $\ln N$ ,  $\Phi_0 = Rf$ . Числа  $m_i, i = 0, 1, \dots$  вибирають так, щоб  $\frac{M_2}{M_1} \frac{M_2^2 - 2M_2}{M_1} < q < 1, m_1 = [(m_0 - 1)q^{-\delta} + m_0' + 1, 0 < \delta < \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots, i$ , де  $\|\tilde{R}f\|_C \leq M_4 \|f\|_C, \|\tilde{R}f\|_r \leq M_4 \|f\|_r, \|K\Phi\|_r \leq M_5 \|k\|_r, \|k_i \Phi\|_C \leq M_5 \|\Phi\|_C, [\cdot] =$  ціла частина відповідного числа.

На основі розглянутих методів без принципових труднощів можна скласти алгоритми та програми розв'язування цих рівнянь на ЕОМ. У деяких випадках досить ефективною є реалізація цих методів з допомогою АОМ і гібридних обчисл. машин. Укажемо деякі особливості такої реалізації. Користуючись методом послідовних наближень, вибирають інтервал дискретизації  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , за змінною  $x$ . Рівняння (1) і (3) розв'язують відповідно за ф-лами

$$\Phi_r(x_i) = \int_a^b k(x_i, y) \Phi_{r-1}(y) dy + f(x_i), \quad (11)$$

$$\Phi_r(x_i) = \int_a^{x_i} k(x, y) \Phi_{r-1}(y) dy + f(x_i). \quad (12)$$

При цьому аналогові інтегратори обчислюють інтеграли за ф-лами (11) і (12) без похибок методу, які властиві квадратурним ф-лам, з точністю до інструментальної похибки (див. *Похибок обчислюваної теорії*). Інтервал  $[a, b]$  (або  $[a, x_1]$ ) представляють часом, за якого і визначають  $i$ -е значення нового ( $i$ -го) наближення. За таких циклів нове наближення визначають цілком. Наближення шуканого розв'язку, які надходять під інтеграли правих частин, одержують, проводячи якого-небудь вигляду інтерполяцію за окремими обчисленими раніше значеннями. Якщо, зокрема,

$$k(x, y) \approx \sum_{i=1}^m A_i(x) B_i(y), \text{ то для рівняння}$$

(1) одержують ф-лу послідовних наближень

$$c_{r,i} = \int_a^b B_i(y) U(y) dy + \sum_{j=1}^m c_{r-1,j} A_j(y) dy, \quad i =$$

$= 1, 2, \dots, m$ , для значень, а не для ф-цій, що дає змогу спростити обчисл. апаратуру. На кожному кроці ітерації одночасно визначають чергове наближення шуканого розв'язку

$$\varphi_r(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m c_{r-1,j} A_j(x). \text{ Для рівняння}$$

(3), замінивши ядро виродженням, одержують наближений розв'язок  $\varphi(x)$  з рівняння

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m A_i(x) \int_a^x B_i(y) \varphi(y) dy + f(x). \quad (13)$$

яке розв'язують протягом інтервалу часу  $[a, x]$  безпосереднім шляхом, тобто шляхом побудови електронного аналога рівняння

(13) та вимірювання в ньому напруги  $\tilde{\varphi}(x)$ . Реалізуючи метод скінченних різниць, систему (6) при невеликому  $m$  (15—20) можна ефективно розв'язати на АОМ тоді, коли задано одне й те саме рівняння з різними правими частинами  $f(x)$ . З допомогою варіаційних методів можна простими засобами реалізувати процес мінімізації відхилів (8) при апроксимації (7) з невеликим числом (до 4—8) координатних ф-цій. У комбінації з замкнутою ядра виродження одержують ефективні алгоритми, які полягають у мінімізації відхилів

$$\mu_{r,i} =$$

$$= c_{r,i} - \int_a^b B_i(y) \left[ f(y) + \sum_{j=1}^m c_{r-1,j} A_j(y) \right] dy$$

різними способами і в різних метриках.

Використання АОМ розширює можливості машинних методів при розв'язуванні рівнянь (3) і (4) в окремому, але важливому випадку, коли ядро залежить від різниці аргументів. Тоді рівняння

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x-y) \varphi(y) dy, \quad (14)$$

$$\int_a^x k(x-y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (15)$$

при звичайних обмеженнях розв'язують безпошуковим шляхом за час  $[a, x]$ . У деяких випадках необхідно з умов відтворюваності на АОМ апроксимувати різницеве ядро іншим  $k(x-y) \approx \tilde{k}(x-y)$ , якому відповідає наближений розв'язок  $\varphi(x)$ . Апроксимувати можна як шляхом обчислювання, так і добираючи параметри обчисл. блоків. При цьому потрібно враховувати можливість некоректності задачі розв'язування рівняння (15) в наближених даних. Розглянуті методи в невеликих видозмінах можна застосовувати для розв'язування багатомірних лінійних інтегральних рівнянь зазначеного типу та систем таких рівнянь. Про розв'язування особливих лінійних інтегр. рівнянь див. *Інтегральних лінійних сингулярних рівнянь способи розв'язування*.

Літ. Канторович Л. Н., Акилов Г. П. Функціональний аналіз в нормованих просторах. М., 1959 (бібліогр. с. 871) англ. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы линейного анализа. М., Л., 1962 (бібліогр. с. 898 704) Положий Г. Н., Чаломко И. И. Решение интегральных уравнений методом плос. Р. ки Вопросы математической физики и теории функций, ч. 1 К., 1964, Михли С. Г., Смолянский Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965 (бібліогр. с. 373 379), Емелянов Н. В., Ильин А. М. О числе арифметических действий необходимым для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1967, т. 7, № 4.

А. Ф. Верань, В. В. Іванов, П. Я. Чаломко.  
**ІНТЕГРАЛЬНІ ЛІНІЙНІ СИНГУЛЯРНІ РІВНЯННЯ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ**. Сингулярні інтегральні рівняння (с. і р.) виникають на основі інтегр. представлень розв'язань багатьох задач математичної фізики. Ці рівняння застосовують і в *автоматичному керуванні теорії* (Вінер — Холл рівняння), в теор. фізиці (теорія дисперсійних співвідношень) та інших галузях. Багато окремих типів с. і р. розв'язують у замкненій аналітичній формі. Як один з важливих прикладів розглянемо одержаний І. Н. Векуа розв'язок у замкненій формі т. а. характеристичного с. і. р.

$$K_0 \varphi \equiv a(t) \varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

в якому  $\varphi(t)$  — шукана ф-ція,  $\Gamma$  — замкнена гладка проста крива;  $a, b, f \in H(\alpha, \Gamma)$ , тобто неперервні за Гельдером на  $\Gamma$  з показником  $\alpha$  ( $\varphi \in H(\alpha, \Gamma)$ , якщо  $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \text{const} |t_1 - t_2|^\alpha$ ,  $t_1, t_2 \in \Gamma$ ), при цьому  $a^2 - b^2 \neq 0$  на  $\Gamma$ . Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що початок координат знаходиться всередині  $\Gamma$ . Вировнаємо інтеграл

$$\text{типу Коші } \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in \Gamma.$$

Граничні значення  $\Phi(z)$  ( $\Phi^+(t)$ , коли  $z \rightarrow t$ , залишаючись усередині  $\Gamma$ , і  $\Phi^-(t)$ , коли  $z \rightarrow t$ , залишаючись поза), поз'явані формулами Сохоцького — Племеля так:

$$\Phi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad S\Phi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(\tau) d\tau}{\tau - t} = -\Phi^+(t) + \Phi^-(t). \quad (2)$$

За цими ф-лами рівняння (1) перетворюють до вигляду

$$\Phi^+ = G\Phi^- + \varepsilon \left( G = \frac{a-b}{a+b}, \varepsilon = \frac{f}{a+b} \right). \quad (3)$$

Задача визначення  $\Phi(z)$  та  $\Phi^{\pm}(t)$  із співвідношення (3) наз. *крайовою задачею Рімана*. Заг. її розв'язок у замкненій формі вперше дали італ. математики І. Племель і рад. математики Ф. Д. Гахов. Введемо індекс

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d \ln G(t).$$

Тоді ф-ція  $\psi = \ln |G(t)| t^{-\kappa}$  буде однозначною на  $\Gamma$ . Застосувавши до неї ф-ли (2), одержимо

$$\begin{aligned} \psi^{\pm} &= \pm \frac{1}{2} \ln |G(t)| t^{-\kappa} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln |G(\tau)| \tau^{-\kappa} d\tau}{\tau - t}, \quad G(t) = \\ &= t^{\kappa} \frac{\exp \psi^+}{\exp \psi^-}. \end{aligned}$$

Підставивши в (3) замість  $G$  його представлення і здійснивши прості перетворення відповідно до відомих властивостей аналітичних ф-цій, матимемо

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^+}{\exp \psi^+} - \varepsilon_1^+ &= t^{\kappa} \frac{\Phi^-}{\exp \psi^-} - \varepsilon_1^- \equiv \\ &\equiv P_{\kappa-1}(t), \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\exp \psi^+}. \end{aligned} \quad (4)$$

де  $P_{\kappa-1}(t)$  — довільний многочлен степеня  $\kappa - 1$ ,  $P_{\kappa-1}(t) = 0$  при  $\kappa \leq 0$ . З ф-ли (4) одержимо

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \varepsilon_1^+(t) \exp \psi^+ + P_{\kappa-1}(t) \exp \psi^+, \\ \Phi^-(t) &= \varepsilon_1^-(t) \frac{\exp \psi^-}{t^{\kappa}} + \\ &+ P_{\kappa-1}(t) \frac{\exp \psi^-}{t^{\kappa}}, \quad \Phi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки  $\Phi(z)$  має перетворюватися на нуль на нескінченності, при  $\kappa < 0$  рівняння (5) буде шуканим розв'язком рівняння (1) лише

за умови, що  $\int_{\Gamma} \frac{\varepsilon_1(\tau) d\tau}{\tau - z}$  має на нескінченності

нуль порядку, не меншого як  $-\kappa + 1$ . При  $\kappa > 0$  (5) дає  $\kappa + 1$  лінійно незалежних розв'язків рівняння (1) і відповідної крайової задачі (3). З (5) випливає, що для доведення розв'язку до числа треба вжити обчислювати індекс  $\kappa$  та ряд сингулярних інтегралів. Нехай  $t = t_1(s) + it_2(s)$  ( $0 \leq s \leq \gamma$ ) — рівняння контура  $\Gamma$ . Тоді  $G(t) = G(t_1(s) + it_2(s)) = \xi(s) + i\eta(s)$ . Співвідношення  $\xi = \xi(s)$ ,  $\eta = \eta(s)$  являв собою параметричне рівняння якоїсь кривої  $L$ . Через те, що  $G(t)$  неперервна і  $\Gamma$  — замкнена, крива  $L$  буде замкненою. Кількість витків кривої  $L$  навколо початку координат (порядок кривої  $\Gamma$  відносно початку координат) буде індексом ф-ції  $G(t)$ . Якщо, напр.,  $G(t)$  — дійсна або суто уявна ф-ція, яка не перетворюється на нуль, то  $L$  — відрізок прямої (такий, що проходиться парне число разів), і індекс  $G(t)$  дорівнює нулеві. Якщо  $G(t)$  є аналітичною ф-цією усередині  $\Gamma$ , крім скінченного числа точок, де вона може мати полюси, то індекс дорівнює різниці між числом нулів і числом полюсів  $G(t)$  усередині  $\Gamma$ . У заг. випадку індекс можна обчислювати за ф-лою

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d \ln G(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\gamma} \frac{\xi(s) \eta'(s) - \eta(s) \xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} ds \end{aligned} \quad (6)$$

Оскільки  $\kappa$  є ціле число або нуль, то, щоб правильно визначити  $\kappa$  під час числового інтегрування (див. *Інтегральні способи обчислювання*) за ф-лою (6), досить забезпечити абсолютну обчисл. помилку  $\leq 1/2$ . Сингулярні інтеграли можна обчислити наближеними способами, що їх наведено нижче.

Рівняння Вінера — Хопфа 2-го роду

$$\hat{\Phi}(z) + \int_{\Gamma} K(z-y) \hat{\Phi}(y) dy = \hat{f}(z), \quad \kappa > 0, \quad (7)$$

продовживши на всю вісь ( $z \in (-\infty, +\infty)$ ), застосувавши перетворення Фур'є та замінивши аргумент, можна звести до рівняння виду (1), в якому  $a(t) = 1 + \sqrt{2\pi} k(\omega)$ ,  $b(t) =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2\pi} k(\omega), \quad f(t) = F(\omega) = \frac{1}{1-t}, \quad k(\omega) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{-ix\omega} dx, \quad \bar{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx, \quad \omega = i \frac{1+t}{1-t}. \end{aligned}$$

Застосувавши формули (5), одержимо замкнену форму розв'язку рівняння (7) у вигляді

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi| \frac{\omega - i}{\omega + i} \frac{2i}{\omega + i} e^{i\omega x} d\omega, x >$$

$> 0$ . Отже, щоб довести розв'язання рівняння (7) до числа, треба обчислити ще й інтеграли Фур'є (див. *Фур'є інтегральні способи обчислення*). Рівняння Вієра — Ховфа 1-го роду

$$\int_0^{\infty} K(x-y) \bar{\varphi}(y) dy = \bar{f}(x), x > 0, \text{ також зводиться до рівняння вигляду (1), але при цьому}$$

має місце т. з. винятковий випадок, коли  $a^2 - b^2$  з окремих точках  $\Gamma$  має нулі цілих порядків. Цей випадок також піддається розв'язуванню в замкненій формі, як і багато інших випадків ослаблення та поширення початкових вимог на  $\Gamma$ ,  $a$ ,  $b$  та  $f$ . Особливе значення в теорії пружності, гідро- та аеродинаміки має випадок, коли  $\Gamma$  є сукупністю розімкнених неперетинних дуг,  $a$ ,  $b$  — кусково-неперервні ф-ції

Повне лінійне с. і. р. вигляду

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + \lambda \int_{\Gamma} K(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau = f(t), t \in \Gamma, \quad (8)$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $f$  та  $\Gamma$  — ті самі, що й в (1),  $\lambda$  — комплексний параметр, а ядро  $K(\tau, t)$  — фредгольмівське (див. *Інтегральні рівняння*) взагалі кажучи, не можна розв'язати в замкненій аналітичній формі. Одні із способів розв'язування цього рівняння полягає в його регуляризації, тобто в зведенні його до випадку інтегр. рівняння Фредгольма 2-го роду. Це останні розв'язують багатьма способами (див. *Інтегральних лінійних рівнянь способи розв'язування*). Регуляризацію оператора  $K$  дає, наприр., оператор

$$K_0^0 \varphi = a_0(t)\varphi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b_0(\tau)\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t},$$

$$a_0(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, \quad b_0(t) = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)};$$

прості обчислення приводять до ф-л

$$K_0^0 K\varphi \equiv \varphi + T\varphi, \quad K K_0^0 \varphi \equiv \varphi + T\varphi,$$

$$T = -\frac{1}{\pi i} T_{ab} - \frac{1}{\pi i} T_{ba} S + K_0^0 K,$$

$$\bar{T} = -\frac{a}{\pi i} T_{ba} + \frac{b}{\pi i} T_{aa} + K K_0^0,$$

$$T_{\omega}\varphi = \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau,$$

$$S\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t},$$

$$K\varphi = \int_{\Gamma} K(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau$$

Проте регуляризація с. і. р. не завжди можлива. Крім того, вона може приводити до нееквівалентних рівнянь і до надто складних обчислень. Служить шукати наближений інтегр. розв'язок с. і. р. без їх регуляризації. Вибір способів розв'язування рівняння (8) без його регуляризації одержують, виходячи з таких міркувань. З одного боку, рівняння (8) є окремим випадком лінійних операторних рівнянь у гільбертовому чи банаховому просторах і тому до нього можна застосовувати методи розв'язування таких рівнянь (див. *Операторних рівнянь способи розв'язування*). Специфіка застосування заг. методів до рівняння (8) полягає в необхідності обчислювати ряд сингулярних інтегралів і враховувати деякі особливості теорії с. і. р. Зокрема, умова  $a^2 - b^2 \neq 0$  на  $\Gamma$  забезпечує коректність задачі розв'язування рівняння (8), якщо  $\lambda$  не є характеристичне число і  $m = 0$ ; якщо  $a^2 - b^2$  може перетворюватися на нуль на  $\Gamma$ , то задача розв'язання рівняння (8) є некоректно поставленою задачею і треба застосовувати методи розв'язування некоректних задач (див. *Некоректно поставлені задачі способи розв'язування*). Випадок будь-якого індекса  $m$  зводиться до випадку нульового індекса впровадженнями рівняння

$$K\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^+ + (a + b) - \bar{\varphi}^- - (a - b) t^{-m} + \lambda \int_{\Gamma} K(\tau, t) [\bar{\varphi}^+(\tau) - \bar{\varphi}^-(\tau) t^{-m}] d\tau = f(t),$$

$t \in \Gamma$ . Ф-ція  $\varphi = \bar{\varphi}^+ - t^{-m} \bar{\varphi}^-$  буде тим розв'язком рівняння (8) (якщо воно розв'язане), у якого  $\bar{\varphi}^-$  має найвищий можливий порядок нуля на нескінченності. Якщо  $\lambda$  не є характеристичне число і  $m > 0$ , то  $\varphi_v = \bar{\varphi}_v^+ - t^{-m} \bar{\varphi}_v^- - \frac{1}{t^v}$ ,  $v = 1, 2, \dots, m$ , де розв'язок  $\bar{\varphi}_v = \bar{\varphi}_v^+ -$

$\bar{\varphi}_v^-$  рівнянь  $K\bar{\varphi}_v = K t^{-v}$  — всі лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння  $K\varphi = 0$ . З другого боку, до рівняння (8), яке є узагальненням фредгольмівських рівнянь, формально можна застосовувати багато методів розв'язування таких рівнянь без регуляризації с. і. р. Детальне дослідження показує, що ряд методів: типу Рунца — Гальоркіна, абігу, заміни ядра на вироджене тощо (див. *Чисельні методи*) можна обґрунтувати щодо с. і. р. А дуже поширений метод розв'язування фредгольмівських рівнянь 2-го роду, що ґрунтується на апроксимації розв'язування у вигляді кусково-лінійної ф-ції, не можна обґрунтувати щодо с. і. р. у заг. випадку. При достатній гладкості розв'язання рівняння (8) дуже ефективним виявляється метод найменших квадратів, за яким наближений розв'язок шукають у вигляді  $\varphi_m = \sum_{j=0}^m \alpha_j t^j + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j t^{j-m}$ , причо-



му шукані  $\alpha_k$ , що мінімізують  $\int_{\Gamma} \left| \bar{K} \left( \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k \right) - f \right|^2 dt$ , знаходять як розв'язок алгебр. системи

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_k (\bar{y}_k, \bar{y}_j) = (f, \bar{y}_j), \quad j = -n, \dots, n, \quad (9)$$

$$\text{де } (\bar{y}_k, \bar{y}_j) = \int_0^{\tau} \bar{y}_k(t) \bar{y}_j(t) dt, \quad (f, \bar{y}_j) =$$

$$= \int_0^{\tau} f(t) \bar{y}_j(t) dt, \quad y_k = \bar{y}_k^* =$$

$$= \begin{cases} (a+b)t^k + \lambda \int_0^{\tau} K(\tau, t) t^k dt, & k > 0, \\ (a-b)t^{k-n} + \lambda \int_0^{\tau} K(\tau, t) t^{k-n} dt, & k \leq 0, \end{cases}$$

$\bar{y}_j$  — комплексно спряжена функція до  $\tilde{y}_j$ . Алгебр. систему (9) доцільно розв'язувати методом квадратного кореня (при заміні  $\lambda$  на  $\lambda + i$  вигідно застосовувати метод об'єднання). На практиці зручно, замінюючи змінну  $t$ , звести рівняння (8) до випадку, коли  $\Gamma$  є колом одиничного радіуса з центром у початку координат (про спосіб одержання апріорної оцінки похибки методу і похибки за рахунок неточності початкових даних див. у ст. *Наближені методи загальної теорії*; про оцінку похибки заокруглення при розв'язуванні алгебр. системи вигляду (9) див. у ст. *Лінійних алгебричних систем рівнянь способи розв'язування*). На практиці зручно ступінь похибки наближеного розв'язку оцінювати, обчислюючи норму відхилення  $\int_{\Gamma} \left| \bar{K} \left( \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k \right) - f \right|^2 dt$  або  $\max_t \left| \bar{K} \left( \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k \right) - f \right|$ . Із зростанням  $n$  перша норма завжди наближається до нуля, а друга наближається до нуля при достатній гладкості вихідних даних рівняння (8). У загальнішому випадку, коли про гладкість розв'язування рівнянь (8) нічого не відомо, доцільніше застосовувати ітеративні методи розв'язування с. і. р. *Обчислювальна схема* одного з завжди збіжних ітеративних методів типу найшвидшого спуску така:

$$\begin{aligned} \varphi^{j+1} &= \varphi^{(j)} + \\ &+ \frac{(f - K\varphi^{(j)})^*}{\|K^*(f - K\varphi^{(j)})\|^2} K^*(f - K\varphi^{(j)}), \\ i &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\varphi^{(0)}$  — довільна функція, спряжений опера-

$$\text{тор } K^* \varphi = a\bar{\varphi} + \frac{\overline{t'(s)}}{\pi i} \int_0^{\tau} \frac{\bar{b}(\tau) \varphi(\tau) d\tau}{\tau(u) - F(s)} + \\ + \int_0^{\tau} \bar{K}(t, \tau) t^{\tau}(s) \varphi(\tau) d\tau \text{ і знак нирки } (||) \text{ —}$$

означає  $\|\varphi\|^2 = \int_0^{\tau} \varphi(\tau)^2 d\tau$ . При цьому в разі

потреби інтеграл беруть числово. Зазначений ітеративний метод і метод найменших квадратів можна перенести на заг. випадок рівняння вигляду (8), коли коефіцієнти цього рівняння кусково-неперервні і  $\Gamma$  складається з скінченної кількості неперетинних гладких дуг. Тоді під нормою треба розуміти  $\|\varphi\|^2 =$

$= \int_0^{\tau} \rho \varphi^2 d\tau$ , де вага  $\rho$  має забезпечувати обмеженість  $\|\varphi\|$  для потрібного розв'язку  $\varphi$ . Цю умову буде, напри., виконано, якщо покласти, що  $\rho = \prod_{k=1}^n |t - d_k|^{-1}$  в достатньо малих  $\xi > 0$ , де  $d_k$  — всі точки розриву  $\varphi$ -ції  $a, b$  і всі кінці дуг, що входять до  $\Gamma$ . Значно ефективнішим щодо кількості операцій, потрібних для досягнення заданої точності, може бути комбінований метод, коли початкову  $\varphi$ -цію  $\varphi^{(0)}$  для ітеративного методу (10) знаходять за методом найменших квадратів. Щоб одержати наближений розв'язок з великою точністю, економічно вигідно застосовувати обчисл. схему ітеративного уточнення, за якою знову застосовується той самий наближений метод для відшукування поправки  $\delta$  до раніше одержаного розв'язку  $\varphi$ :  $K\delta = f(t) - K\varphi$ . При цьому треба подбати про зростаючу точність обчислення відхилення  $f(t) - K\varphi$ . Узагальненням рівнянь Вінера — Хопфа є повне с. і. р. типу згортки

$$\begin{aligned} \delta\varphi(x) + \eta \operatorname{sign} x\varphi(x) + \frac{1}{V2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x-y) \times \\ \times \varphi(y) dy + \frac{1}{V2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_2(x-y) \operatorname{sign} y\varphi(y) dy + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y) \varphi(y) dy = f(x), \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\delta$  та  $\eta$  — задані константи. Рівняння (11) перетворенням Фур'є і заміною аргумента зводять до рівняння вигляду (8). Рівняння (11) також є окремим випадком лінійних операторних рівнянь у гільбертовому чи банаховому просторі, і його можна розв'язувати заг. наближеними методами для таких рівнянь. На практиці, вкрай рідко трапляються системи рівнянь вигляду (1), (8) та (11). Теорія систем лінійних с. і. р. аналогічна теорії одного рівняння, тому до розв'язування систем можна застосовувати аналогічні способи наближеного розв'язування. Проте система

рівнянь вигляду (1) не завжди розв'язується в замкненій аналітичній формі. Причина цього полягає в тому, що для матриць  $a$  та  $b$  не завжди справджується властивість  $a \cdot b = b \cdot a$ . При розв'язуванні систем с. і. р. високого порядку наближеними методами мають справу з питаннями економії пам'яті й часу обчислювань на ЦОМ. З точки зору економії пам'яті ітеративному методу вигляду (10) слід віддати перевагу перед методом найменших квадратів. Проте в разі повільної збіжності ітерацій можна використати й метод найменших квадратів, знаходять шукані коефіцієнти  $a_n$  за алгоритм. Системи вигляду (9), а безпосередньо мінімізуючи норми відхилення рівняння одним з алгоритмів типу швидкого спуску (координатного спуску, найшвидшого спуску тощо). Сказано вище про системи с. і. р. значною мірою справджується й щодо лінійних багатовимірних с. і. р.

Літ. Векуа Я. Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959 (Библиогр. с. 416-424) Гатон Ф., Д. Красные задачи. М., 1963 (Библиогр. с. 624-636) Михлин С. Г. Смольский Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М. 1965 (Библиогр. с. 373-379) Мустелія И. И. Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968 (Библиогр. с. 488-511) Пиликов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению ряд удирных интегральных уравнений. К., 1968 (Библиогр. с. 281-284) Векуа Я. Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., 1970 (Библиогр. с. 372-374) В. В. Пиликов.

**ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ РІВНЯНЬ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** Задача відшукування числового розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (ш. і. р.) досі є однією з найскладніших задач обчислювальної математики. Багато які з найпоширеніших у практиці ш. і. р. та їхніх систем є окремими випадками рівняння типу Урісона (див. *Інтегральні рівняння*)

$$x(s) = \lambda \int_{\Omega} K[s, t, x(t)] dt, \quad s \in \Omega, \quad (1)$$

де  $x(s)$  — невідома ф-ція,  $\lambda$  — числовий параметр,  $\Omega$  — обмежена замкнена область у  $n$ -вимірному евклідовому просторі (див. *Простір абстрактний у функціональному аналізі*),  $K(s, t, x)$  — задана функція. Розв'язок цього рівняння, як правило, можна знайти лише наближено. Розглянемо методи розв'язування таких рівнянь.

Метод невизначених коефіцієнтів полягає в тому, що коли в рівнянні (1) ф-цію  $K(s, t, x)$  представлено рядом

$$K(s, t, x) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p(s, t) x^p. \quad (2)$$

де ф-ції  $K_p(s, t)$  — неперервні, то розв'язок рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду

$$x(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} x^{(1,n)}(s). \quad (3)$$

Підставимо цей ряд у рівняння (1), скориставшись розкладом (2), а також рядом для  $x^p(s)$  виду

$$x^p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+p} x^{(p,n)}(s),$$

коеф. якого визначено рекурентно ( $x^0 = x \cdot x^{(0,0)}$ )

$$x^{(p,n)}(s) = \sum_{q=0}^n x^{(1,q)}(s) x^{(p-1, n-q)}(s). \quad (4)$$

Прирівнюючи коеф. при однакових степенях  $\lambda$ , одержимо ф-ли для послідовного знаходження коеф. ряду (3)

$$x^{(1,0)}(s) = \int_{\Omega} K_0(s, t) dt, \quad x^{(1,n)}(s) = - \int_{\Omega} \sum_{p=1}^n K_p(s, t) x^{(p, n-p)}(s) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

( $x^{(p, n-p)}(s)$  знаходять із співвідношень (4)). Ряд (3) за певних умов збіжний. Напр., коли справджуються умови

$$\left| \int_{\Omega} K_0(s, t) dt \right| < B, \quad \int_{\Omega} |K_p(s, t)| dt < \frac{B}{r^p},$$

$$p = 1, 2, 3, \dots, \quad s \in \Omega,$$

де  $B$  і  $r$  — сталі, інтегр. рівняння (1) має в крузі  $|\lambda| < \frac{r}{4B}$  єдиний розв'язок, який можна подати рядом (3), що збігається регулярно. Швидкість збіжності характеризується оцінкою ( $h \rightarrow +\infty$ )

$$|x(s) - x_h(s)| = O(h^{-\frac{3}{2}} \gamma^{h+1}), \quad s \in \Omega,$$

де

$$\gamma = |\lambda| \frac{4B}{r}, \quad x_h(s) = \sum_{n=0}^{h-1} \lambda^{n+1} x^{(1,n)}(s). \quad (5)$$

За набл. розв'язок рівняння (1) беруть часткову суму виду (5). Похибку такого розв'язку можна апріорно оцінити за допомогою нерівності

$$|x(s) - x_h(s)| < \frac{r}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \gamma} - \sum_{n=0}^{h-1} \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \gamma^{n+1} \right), \quad s \in \Omega.$$

У методі послідовних наближень вибираємо яким-небудь способом початкове наближення  $x_0(s)$  до шуканого розв'язку рівняння (1) й будемо ітераційний процес виду

$$x_n(s) = \int_{\Omega} K[s, t, x_{n-1}(t)] dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Якщо відомо, що послідовні наближення (6) зійдуться до розв'язку рівняння (1), то, зупинивши процес на останньому кроці, одержимо набл. розв'язок цього рівняння.

Наведемо один з результатів щодо збіжності процесу (6). Нехай ф-ція  $K(s, t, x)$  є неперервною разом з похідною  $K'_x(s, t, x)$  за сукупністю змінних  $s, t \in \Omega, |x| < \rho$  і нехай

$$|\lambda| \int_{\Omega} \sup_x |K(s, t, x)| dt < \rho,$$

$$|\lambda| \int_{\Omega} \sup_x |K'_x(s, t, x)| dt < \alpha, \quad s \in \Omega, |x| < \rho,$$

де  $\alpha < 1$ . Тоді при будь-якій неперервній ф-ції  $x_0(s)$  з області

$$|x| < \rho, \quad s \in \Omega, \quad (7)$$

послідовні наближення (6) сходяться рівномірно до неперервного розв'язку  $x^*(s)$  рівняння (1), який міститься в області (7) і є єдиним тут. Швидкість збіжності визначається нерівністю

$$|x^*(s) - x_n(s)| < \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sup_s |x_1(s) - x_0(s)|, \quad s \in \Omega. \quad (8)$$

При  $n > 1$  нерівність (8) дає апостеріорну оцінку похибки  $n$ -го наближення. Апостеріорна, і, взагалі кажучи, точніша оцінка має вигляд

$$|x^*(s) - x_n(s)| < \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sup_s |x_n(s) - x_{n-1}(s)|, \quad s \in \Omega.$$

Труднощі обчислювання квадратур, що виникають під час реалізації процесу (6), можна подолати за допомогою деяких способів набл. інтегрування. Узагальненням процесу (6) є алгоритм осереднювання функціональних поправок

Аналог методу Ньютона розв'язування алгебр. рівнянь є одним з ефективних методів розв'язування н. л. р. (1)

Уведемо ітераційний процес ( $\lambda = 1$ )

$$x_n(s) = x_{n-1}(s) + \Delta_{n-1}(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

$$\Delta_{n-1}(s) = x_{n-1}(s) + \int_{\Omega} K'_x[s, t, x_{n-1}(t)] \Delta_{n-1}(t) dt,$$

$$\text{де } x_{n-1}(s) = \int_{\Omega} K[s, t, x_{n-1}(t)] dt - x_{n-1}(s),$$

що його запропонував рад. математик Л. В. Канторович і який має надлишкову збіжність 2-го порядку. Тут на кожному кроці відносно поправки  $\Delta_{n-1}(s)$  розв'язується лінійне інтегр. рівняння (див. Інтегральних лінійних рівнянь способи розв'язування). Якщо ф-ція  $K(s, t, x)$  є неперервною разом з похідними  $K'_x(s, t, x)$  і  $K''_{xx}(s, t, x)$  за сукупністю змінних  $s, t \in \Omega, |x - x_0(t)| < \rho$  і якщо виконано умови.

а) для початкового наближення  $x_0(t)$  ядро  $K'_x[s, t, x_0(t)]$  має резольвенту  $\Gamma(s, t)$ , причому  $\int_{\Omega} |\Gamma(s, t)| dt < B, \quad s \in \Omega;$

б) відхиля  $x_0(s)$  рівняння (1) на наближенні  $x_0(s)$  задовольняє нерівність  $|x_0(s)| = |\int_{\Omega} K[s, t, x_0(t)] dt - x_0(s)| < \eta, \quad s \in \Omega;$

в) в області  $|x - x_0(s)| < 2(1 + B)\eta < \rho, \quad s \in \Omega$ , маємо  $\int_{\Omega} \sup_x |K'_x[s, t, x]| dt < K, \quad s \in \Omega;$

г) сталі  $B, \eta$  і  $K$  підлягають умові  $h = (1 + B)^2 K \eta < \frac{1}{2}$ , то процес Ньютона — Канторовича (9) сходиться рівномірно до розв'язку  $x^*(s)$  рівняння (1), розм'яшеного в області

$$|x - x_0(s)| < \frac{1}{h} \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{1 + B} \eta, \quad s \in \Omega \quad (10)$$

і єдиного в області  $|x - x_0(s)| < 2(1 + B)\eta, \quad s \in \Omega$ . Швидкість збіжності визначається оцінкою

$$|x^*(s) - x_n(s)| < \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^{n-1}} (1 + B) \eta, \quad s \in \Omega. \quad (11)$$

Такі твердження, окрім того, що встановлюють збіжність алгоритму, ще й являють собою теорему про існування області розміщення і області однозначності розв'язку н. л. р. Відхилення початкового наближення  $x_0(s)$ , яке задовольняє означені умови і в грубим наближенням розв'язку рівняння (1), — це самостійна задача, для розв'язування якої загальних рецептів немає. Вибір того чи іншого способу одержання  $x_0(s)$  залежить від виду рівняння (1) або характеру досліджуваної проблеми. Якщо потрібне  $x_0(s)$  знайдено, то велика швидкість збіжності процесу (9) забезпечує одержання набл. розв'язку рівняння (1) з достатньою для практики точністю після невеликої кількості ітераційних кроків. Апостеріорну оцінку похибки наближення  $x_n(s)$  можна знайти за ф-лою (11). Точнішу, апостеріорну оцінку дасть нерівність (10) ( $x = x^*(s)$ ), якщо у відповідних виразах замінити  $x_0(s)$  на  $x_n(s)$  і перерахувати відповідні сталі.

Іншим ефективним методом розв'язування н. л. р. є аналог методу Ейткенна — Стеффенсена розв'язування алгебр. рівнянь. Уведемо ітераційний процес ( $\lambda = 1$ )

$$x_n(s) = x_{n-1}(s) + \Delta_{n-1}(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1}(s) = & x_{n-1}(s) + \\ & + \int_{\Omega} \frac{K[s, t, x_{n-1}(t)] - K[s, t, x_{n-1}(t)]}{x_{n-1}(t) - x_{n-1}(t)} \times \\ & \times \Delta_{n-1}(t) dt, \end{aligned}$$

де  $x_{n-1}(s) = \tilde{x}_{n-1}(s) - x_{n-1}(s)$ ,  $\tilde{x}_{n-1}(s) = \int_a^b K[s, t, x_{n-1}(t)] dt$ . Теорема збіжності цього

методу за загальною ідеєю є відомим відповідним теорем для методу Ньютона. Алгоритм (12) має надшвидку збіжність 2-го порядку, але не потребує обчислювання на кожному ітераційному кроці похідної  $K'_x[s, t, x_{n-1}(t)]$ . При цьому, ґрунтуючись на ідеї інтерполяції, він іноді збігається фактично швидше за алгоритм Ньютона.

Метод кубатурних формул дає можливість розв'язувати н. л. р. (1), заздалегідь уникати точного обчислювання інтегралів та необхідності розв'язувати лінійні інтегр. рівняння. Для цього користуються методом заміни інтеграла в самому рівнянні скінченною сумою за якою небудь кубатурною формулою. Нехай для спрощення вважатимемо рівняння (1) за одновимірне

$$x(s) = \lambda \int_a^b K[s, t, x(t)] dt, \quad s \in [a, b], \quad (13)$$

в якому ф-ція  $K[s, t, x]$  є неперервною за сукупністю змінних. Візьмемо квадратурну ф-лу

$$\int_a^b F(t) dt = \sum_{j=1}^m A_j F(t_j) + R, \quad (14)$$

де вузли  $t_j \in [a, b]$ . Користуючись цією ф-лою, рівняння (1) запишемо у вигляді

$$x(s) = \lambda \sum_{j=1}^m A_j K[s, t_j, x_j] + \lambda R(s), \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} x_j &= x(t_j), \\ R(s) &= \int_a^b K[s, t, x(t)] dt - \\ &- \sum_{j=1}^m A_j K[s, t_j, x_j] \end{aligned}$$

( $x(t)$  — точний розв'язок рівняння). Беручи в рівнянні (15)  $s = t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , одержуємо:

$$\begin{aligned} x_i &= \lambda \sum_{j=1}^m A_j K(t_i, t_j, x_j) + \lambda R(t_i), \quad (16) \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Відкинувши тут малу величину  $\lambda R(t_i)$ , одержимо нелінійну систему

$$\tilde{x}_i = \lambda \sum_{j=1}^m A_j K(t_i, t_j, \tilde{x}_j), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

Пі невідомі  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$  приймемо за наближені значення шуканого розв'язку  $x(s)$  у вузлах квадратурної ф-ли. Подальше завдання полягає в тому, щоб розв'язати систему (17);

для цього можна використати всі відомі способи розв'язування систем нелінійних алгебр. рівнянь. Потім, коли чисельний розв'язок рівняння (1) знайдено, його можна проінтерполювати (див. *Інтерполяція функцій*) на весь проміжок  $[a, b]$ , виходячи з рівності (15), відкинувши в ній  $\lambda R(s)$  і замінивши  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  розв'язком системи (17). В результаті одержуємо наблиз. розв'язок рівняння (1)

$$\tilde{x}(s) = \lambda \sum_{j=1}^m A_j K(s, t_j, \tilde{x}_j). \quad (18)$$

Якщо (14) — узагальнена квадратурна ф-ла з кроком  $h$  і рівномірними вузлами, то деяке уявлення про похибку розв'язку системи (17), зумовлену відкиданням у системі (16) величини  $\lambda R(t_i)$ , можна одержати, порівнюючи цей розв'язок з аналогічним розв'язком для кроку  $\frac{h}{2}$  у збіжних вузлах. Знайдено

я строгу апостеріорну оцінку похибок розв'язку (18) для випадку довільної квадратурної ф-ли

Викладені методи є придатними й для рівнянь із змінною межею інтегрування, тобто для нелінійних рівнянь Вольтерри, їх можна реалізувати на ЦОМ. Для багатьох типів одновимірних інтегральних рівнянь ефективним засобом розв'язування є аналогові й гібридні обчисл. машини (АОМ і ГОМ). Напр.,

$$\text{для рівняння } x(s) = f(s) + \int_a^b k(s, t) F[x(t)] dt$$

при заміні  $k(s, t) \approx \sum_{i=1}^m A_i(s) B_i(t)$  процес

пошуку розв'язку полягає в мінімізації будь-якої норми для суми відхилів  $\mu_{k1} = \epsilon_{k1} =$

$$- \int_a^b B_i(t) F \left[ f(t) + \sum_{j=1}^m \epsilon_{k-1,j} A_j(t) \right] dt \quad (k =$$

$= 1, 2, \dots$  — номер наближення); кожне наближення відтворюється автоматично за інтервал часу  $[a, b]$  на кожному кроці мінімізації.

Зручність відтворювання нелінійних залежностей і множення на АОМ і ГОМ дозволяє реалізувати багато алгоритмів варіаційних методів для досить складних н. л. р. При цьому незалежна змінна подається як час  $[a, b]$ , забезпечується періодичне відтворювання мінімізованого функціоналу, а процес мінімізації можна автоматизувати або доручати операторові, який керує відьними параметрами, стежачи за поведінкою мінімізованого функціоналу по осцилографу. Рівняння Вольтерри з виродженими й різницевими ядрами розв'язують неалгоритмічно, будуючи їхні електронні моделі-аналоги й вимірюючи напруж. зміни в часі за законом  $x(t)$ . Розв'язуючи нелінійні рівняння Вольтерри з ядром загального виду, моделюють оператор виду

$x_i$   
 $\int_a^b k(x_i, t) f(x(t)) dt$ , що дає можливість реалізувати метод послідовних наближень з невеликою затратою апаратури або одержати наближ. розв'язок у вигляді кусково-ламаної ф-ції за допомогою безпосереднього аналого-дискретного моделювання з використанням інтеграторів у кількості, яка дорівнює кількості відрізків  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  дискретизації.

Лит. Назаров Н. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна «Труды Саратовского государственного университета. Серия 5-я Математика» 1961, в. 33; Мисолевских Н. П. О существовании метода Л. В. Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений и его применения «Вестник Ленинградского университета. Серия математики, физики и химии», 1953, № 11, в. 4; Канторович Л. В., Ахмедов Р. П. Функциональный анализ в рекуррентных пространствах М., 1959 [библиогр. с. 871-880]; Мисолевских Н. П. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений «Вестник Ленинградского университета. Серия математики, механики и астрономии», 1962, № 7, в. 2; Ульям С. Алгоритм обобщенного метода Стеффенсона «Известия АН Эстонской ССР. Серия физико-математических и технических наук», 1963, № 3; Бельтюков Л. А. Аналог метода Рунге-Кутты для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерры «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, № 4; Бельтюков Л. А. Об одном методе решения нелинейных функциональных уравнений «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1964, т. 5, № 5; Колотов Ю. Д. Метод ограничения функции на прямой «Известия АН Эстонской ССР. Серия физико-математических и технических наук», 1968 [библиогр. с. 327-331]; Забейков П. И. (та ін.). Интегральные уравнения М., 1968 [библиогр. с. 432-441]; Краснопольский М. А. (та ін.). Приближенные решения операторных уравнений М. 1969 [библиогр. с. 437-452]; Негр-ань А. Ф. Методы решения интегральных уравнений на аналоговых вычислительных машинах. К., 1972 [библиогр. с. 211-217].

Б. А. Бельтюков, А. Ф. Верлань.  
**ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ** — рівняння, що містять невідому функцію під знаком інтеграла. І. р. бувають лінійні й нелінійні. Лінійні й нелінійні І. р. мають вигляд:

$$\alpha(x) \varphi(x) - \mu \int_D k(x, y) \varphi(y) dy = f(x), x \in D, (1)$$

де параметр  $\mu$ , коефіцієнт  $\alpha(x)$ , ядро І. р.  $k(x, y)$ , права частина  $f(x)$  і область інтегрування  $D$  відомі; потрібно визначити невідому ф-цію  $\varphi(x)$  так, щоб рівняння (1) задовольнялось тотожно для всіх (або майже всіх) значень  $x$  в області  $D$ . Вигляд (1) приймають і системи лінійних І. р. (тоді  $\alpha(x)$  і  $k(x, y)$  — матриці;  $f$  і  $\varphi$  — вектор-функції) та багатовимірні І. р. (тоді  $D$  — багатовимірна область). Розв'язок ф-ції І. р. (1) знаходять у тому класі функцій, для якого ліва частина (1) з урахуванням властивостей  $\alpha(x)$  і  $k(x, y)$  має ті самі властивості, що й права частина  $f(x)$ . Рівняння (1) при  $f(x) \equiv 0$  наз. однорідним, у протилежному випадку, тобто коли  $f(x) \neq 0$  на множині додатної міри, — неоднорідним. Якщо  $\alpha(x) \equiv 0$ , і, то (1) наз. відповідно рівнянням 1-го і 2-го роду. Якщо однорідне рівняння 1-го або 2-го роду має відмінні від нуля розв'язки — власні ф-ції, то значення параметра  $\mu$  наз. характеристичним, при цьому  $1/\mu = \lambda$  для рівнянь 2-го роду наз. власним значенням.

При фредгольмівських ядрах  $k(x, y)$ , тобто ядрах, у яких оператори  $K\varphi = \int_D k(x, y) \varphi(y) dy$  цілком неперервні, І. р. (1) наз. рівняннями типу Фредгольма. Прикладами таких ядер є неперервні ф-ції  $k(x, y)$ , ф-ції з умовою  $\int_D \int_D |k(x, y)|^2 dx dy < \infty$ , а також усілякі ф-ції зі слабкими особливостями, для яких  $\sup \int_D |k(x, y)| dx < \infty$ . Якщо в рівнянні (1) типу Фредгольма  $k(x, y) = 0$  для  $y \geq x$ , то (1) наз. рівнянням Вольтерри. Рівняння вигляду  $\int_0^x \frac{\varphi(y) dy}{(x-y)^\alpha} = f(x)$ ,  $(0 < \alpha < 1)$  наз.

рівнянням Абеля.  
 І. р. (1), відмінні від рівнянь Фредгольма 2-го роду, наз. особливими. До них належать: І. р. Фредгольма 1-го роду, сингулярні І. р. з ядром Коші ( $D \equiv \Gamma$  — скінченна сукупність кусково-гладких дуг, що не перетинаються, і змкнених кривих  $k(x, y) \equiv \frac{k_1(x, y)}{x-y}$ ) і ядром Гільберта ( $D [0, 2\pi]$ ,  $k(x, y) \equiv k_1(x, y) \times \cotg \frac{x-y}{2}$ ); сингулярні І. р. типу згортки ( $D \equiv [-\infty, \infty]$ ,  $k(x, y) \equiv a_1(x-y) + a_2(x-y) \operatorname{sign} y + k_1(x, y)$ ); І. р. Вінера-Хопфа ( $D \equiv [0, \infty]$ ,  $k(x, y) \equiv a(x-y)$ ) та ін. Ядро  $k_1(x, y)$  тут припускається фредгольмівським, а ф-ції  $a_1, a_2$  і  $a$  звичайно припускаються інтегрованими або інтегрованими разом зі своїм квадратом. Особливими І. р. є й численні рівняння інтегральних перетворень: рівняння Фур'є  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \varphi(y) dy = f(x)$ , Лап-

ласа  $\int_0^{\infty} e^{-xy} \varphi(y) dy = f(x)$ , Мелліна  $\int_0^{\infty} y^{x-1} \times$   
 $\times \varphi(y) dy = f(x)$ . Хаккеля  $\int_0^{\infty} \sqrt{xy} v(yx) \times$   
 $\times \varphi(y) dy = f(x)$ , де  $v$  — ф-ція Бесселя 1-го роду порядку  $\nu$ , та ін.  
 Нелінійні І. р. це не мають докладної класифікації. Вкажемо на деякі типи таких рівнянь, що мають першорядне значення. Рівняння Гаммерштейна  $\varphi(x) = \int_D k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy$ , де  $k(x, y)$  — фредгольмівське ядро,  $f$  — нелінійна ф-ція відносно змужаної  $\varphi$ . Загальнішими є рівняння Урисона  $\varphi(x) = \int_D k(x, y, \varphi(y)) dy$ , де  $k(x, y, \varphi)$  — звичайно неперервна ф-ція при  $x, y \in \bar{D}$  і  $|\varphi| < C$  ( $C$  — якась достатньо велика константа,  $\bar{D}$  — замикання  $D$ ). Рівняння Ляпунова

$$\sum_{\alpha, \beta} \int_D \dots \int_D k_{\alpha, \beta}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(p)}) \times$$

$$\times \varphi^{\alpha_1}(x) \varphi^{\alpha_2}(y^{(1)}) \dots \varphi^{\alpha_p}(y^{(p)}) \varphi^{\beta_1}(x) \varphi^{\beta_2}(y^{(1)}) \dots \\ \dots \varphi^{\beta_p}(y^{(p)}) dy^{(1)} dy^{(2)} \dots dy^{(p)} = 0, \quad (2)$$

в яких ф-ція  $y$  — відома, число  $p$  — фіксоване, а підсумовування поширено на будь-які вектори  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ),  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ ) з невід'ємними цілочисловими компонентами. Ліва частина рівності (2) наз. інтегростепеневим рядом. Нелінійне однозмірне сингулярне І. р. можна зобразити у вигляді  $P(x, \varphi(x), S\varphi, T_1\varphi, T_2\varphi, \dots, T_n\varphi) = 0$ , де

$$\text{сингулярний інтеграл } S\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(y) dy}{y-x},$$

$T_j$  — цілком неперервний оператор,  $P$  — задана нелінійна ф-ція. Багатовимірне нелінійне сингулярне І. р. може мати вигляд  $P(x, \varphi(x), \sigma_1\varphi, \sigma_2\varphi, \dots, \sigma_n\varphi; T_1\varphi, \dots, T_n\varphi) = 0$ ,

$$\text{де } \sigma_i \varphi \equiv \int_{\Gamma} \frac{f_i(x, \theta)}{(y-x)^m} \varphi(y) dy, \theta = \frac{y-x}{|y-x|},$$

$S$  —  $m$ -вимірна поверхня,  $f_i(x, \theta)$  — диференційовні ф-ції.

І. р. збільшального відіграють допоміжну роль і виникають на основі інтегр зображень розв'язків багатьох задач матем. фізики. Перевагою такого підходу є зменшення розмірності області визначення розв'язків І. р. Точку розв'язати аналітично І. р. або розв'язати їх у замкненій області, як правило, неможливо. Тому до появи ЕОМ більшість І. р. досліджували лише якісно. З розвитком обчисл. техніки в математиці для розв'язування широких класів І. р. розроблено багато ефективних наближених методів (див. *Інтегральні лінійні та сингулярні рівняння*); способи розв'язування, *Інтегральні нелінійні рівняння* способи розв'язування).

Лит. Забрейко П. П. [та ін.] Інтегральні рівняння. М., 1968 (бібліогр. с. 432—444); Трояков І. Ф. Інтегральні рівняння. Пер. з англ. М., 1960 (бібліогр. с. 292—298); В. В. Ісаченко.

**ИНТЕГРАТОР** — див. Пристрій інтегровальний.

**ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ РВНЕНИЯ** — клас рівнянь у математиці. Див. Рівняння класифікація.

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИМВОЛЬНОЕ**, інтегрування аналітичне — знаходження первісної функції, якщо її можна записати в аналітичному вигляді. Методи І. с. вперше було опубліковано в працях І. Ньютона (1643—1727) і Г.-В. Лейбніца (1646—1716). Подальшого розвитку ці методи набули в працях Л. Ейлера (1707—83), В. П. Остроградського (1801—82), Ш. Ермита (1822—1901) та ін. Процес інтегрування, оснований на цих методах, не є однозначним, він розрахований на те, щоб використовувати евристичні здібності людини.

Поява розвинених алгоритмічних мов і ЦОМ з великими можливостями щодо символічних перетворень дала змогу в 60-х роках 20 ст. взятися за створення великих універсальних програм І. с. Ці програми мають евристичний характер. Метою створення їх є вивчення ви-

тань, пов'язаних з проблемою «штучного інтелекту», а також практичне використання при розв'язуванні деяких задач, які потребують інтегрування поблизу полюсів та інтегрування шавидкозмінних ф-цій. Ці програми застосовують, використовуючи асимптотичні методи, а також у тих випадках, коли необхідно одержати загальний розв'язок, що залежить від буквених параметрів.

Програма SAINT, яку створено на основі тих самих принципів, що й широко відому програму «Логік-теоретик», є спробою при розв'язуванні задач І. с. моделювати людський спосіб мислення. Щоб одержати безпосередній розв'язок, програма використовує таблицю з 26 стандартних форм. Якщо інтеграл не табличний, то роблять спробу звести його до табличного вигляду за допомогою одного з 18 передбачених програмою перетворень. До числа таких перетворень належать перетворення виду

$$\int (P(x) + \varphi(x)) dx = \int P(x) dx + \int \varphi(x) dx$$

тощо, а також різні підстановки. Перебір застосовуваних перетворень здійснюється евристично відповідно до таблиці ознак (характеристик), складеної для кожного виду інтегрованого виразу. Після перетворення знову пробують застосувати таблицю. Цю програму було написано мовою ЛІСП і реалізовано на машині «ІВМ-7090».

Програму SIN, створену 1967, було написано теж мовою ЛІСП, але для роботи на машині «ІВМ-7094». Ця програма складається з трьох рівнів. Перші два рівні передбачають застосування таблиці й деяких евристичних перетворень, з яких найважливішу роль відіграють підстановки  $u = u(x)$  для інтегрування виду

$$\int F(u(x)) u'(x) dx \quad (1)$$

де  $F$  — одна з тригонометричних ф-цій, а  $u(x)$  — довільна ф-ція. До 2-го рівня належить також інтегрування частинами. Якщо 1-й або 2-й рівні не забезпечують успіху, то за допомогою підстановок Ейлера від  $x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ;  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  або підста-

новки  $t = \tan \frac{x}{2}$  та інших роблять спробу звести

трансцендентні підінтегральні вирази до дробово-раціонального вигляду. Після цього, щоб виділити раціональну частину, використовують метод Остроградського. В останніх варіантах програми для цього застосовували ще алгоритм Рітца. Процедuru І. с. було використано як складову частину внутрішнього матем. забезпечення машини «МІР-2» зі входною мовою АНАЛІТИК. Процедuru (програму) розділено на три рівні. 1-й рівень містить таблицю з десяти табличних інтегралів. Завдяки властивостям мови АНАЛІТИК ця таблиця є досить місткою, тобто містить дуже загальні форми, такі, як  $\int x^k e^{ax} \ln b x dx$ . Такі форми застосовують і в вироджених ви-

падках, коли параметри дорівнюють 0 або 1. В цьому разі машини автоматично спрощують громіздкі праві частини. 2-й рівень програми передбачає використання тотожних перетворень і застосування різних підставок. Центр роль при цьому відіграє введення виразів до вигляду (1). Проте функція  $F$  є довільною. 3-й рівень передбачає застосування різних тотожних перетворень, які збільшують однозначність запису підінтегральних виразів. До них належать тотожності виду  $\lg x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $\operatorname{th} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ , зніснення ірраціональності в знаменнику тощо. Ці перетворення не мають принципового характеру, проте значно збільшують ймовірність успіху при інтегруванні. Розв'язуючи практичні задачі, які потребують масового інтегрування на машині «МІР-2», застосовують спеціальні програми, розраховані на швидке інтегрування відповідних класів інтегралів.

Лит., Фішман Ю. С. Интегрирование функций на машине выполняющей аналитические преобразования. «Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем», 1968, в. 2, С. 141-143. Д. Эристикская программа, решающая задачи символьного интегрирования в объеме первого курса университета. В кн. Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967.

Ю. С. Фішман

**ІНТЕГРУВАННЯ ЧИСЕЛЬНЕ**— дія. Інтегрування способи обчислення. ІНТЕНСИВНІСТЬ ПОТОКУ в теорії масового обслуговування — математичне сподівання числа подій із стаціонарного потоку одиниць подій, що настали за одиницю часу. У випадку нестационарних потоків миттєву І. н. позначають рівністю

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu(t, t + \Delta t)}{\Delta t},$$

де  $\mu(t, t + \Delta t)$  — матем. сподівання числа подій, що настали на проміжок часу  $(t, t + \Delta t)$ . У випадку стаціонарного потоку І. н. постійна. Для будь-якого стаціонарного потоку зі скінченною інтенсивністю  $\mu < \infty$  необхідно та достатньою умовою ординарності цього потоку є рівність  $\lambda = \mu$ , де  $\lambda$  — параметр потоку (теорема В. С. Королюка). З усіх стаціонарних потоків без післядії тільки найпростіші потоки задовольняють цю умову. Див. також Потік випадковий.

С. М. Броді

**«ІНТЕРНЕЙШЕНАЛ БІЗНЕС МАШІНЗ КОРПОРЕЙШЕН»**, ІБМ (International Business Machines Corporation, IBM) — найбільша в світі корпорація по розробці, виробництву й збуту електронних цифрових обчислювальних машин (ЕЦОМ), зовнішніх пристроїв і систем обробки даних. Засновано її в 1911, виникла назва вона має з 1924. Наук дослідження й розробки провадиться в 30 лабораторіях корпорації (в США й за кордоном). 16 її заводів випускають обчисл. машини й системи, пристрої, обладнання й елементи. В 1970 корпорація структурно складалася з 11 великих підрозділів — відділів.

Обчисл. пристрої ІБМ почали створювати 1929. В 1944 інженери корпорації разом з

ученими Гарвардського ун-ту створили першу в світі автомат. електромех. обчисл. машину «Mark-1», 1948 ІБМ випустила першу серійну електронну машину «IBM-604», 1949 — розробила першу обчислювальну систему з програмою на перфокартах, яка складалася з двох машин; 1952 створено систему обробки даних «IBM-701», а 1954 — «IBM-650», що широко застосовувалась у промисловості. В 1956 корпорація випустила машину «IBM-704» з запам'ятовувальним пристроєм на магн. осердях на 32 тисячі слів, а 1960 — напівпровідникову ЕЦОМ відомої 7000-ї серії — «IBM-7090», швидкодія якої зросла в 5 раз порівняно з аналогічними ламповими машинами. В 1965 ІБМ випустила першу модель сімейства обчисл. систем «IBM 360», що поклали початок електронним обчислювальним машинам 3-го покоління. Логіч. структура цих систем послужила основою для розробки в 1967 сімейства бортових машин «4 P» (на інтегральних схемах).

Нижче в таблиці наведено осн. тех. дані найвідоміших серійних машин, що їх випускає ІБМ (до цієї не включено дані унікальних машин і систем, таких, як система керування на космодромі в Х'юстоні, бортова обчисл. машина космічного корабля «Джеміні» тощо, і десятки систем стратегічного призначення).

Лит. Зейденберг В. К., Матвеев Н. А., Тарозатова Е. Н. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1969 г. М., 1970.

П. В. Походжайло

**«ІНТЕРНЕЙШЕНАЛ КОМП'ЮТЕРЗ ЛІМІТЕД»** (International Computers Limited, I. C. L.) — провідна англійська фірма по випуску ЕЦОМ і периферійного обладнання до них. Створена 1968. При розробці нових ЕЦОМ науково-дослідні лабораторії фірми тісно співпрацюють в Манчестерському ун-ті. В 1965 випускає серію суміщуваних машин на інтегральних схемах «System 4». З 1964 випускає сімейство ЕЦОМ «ICL 1900 Series» (з 1968 почато випуск цієї серії машин на інтегральних схемах — «ICL 1900A Series») 1969 почато випуск машини серії 1900 А на інтегр. схемах моделі «ICL 1908 А» зі швидкодією порядку мільйона операцій за 1 сек (вмість 3П на магн. осердях — до 524 тис. 24-розрядних слів з можливим напрушуванням до 4 198 тис. слів і з часом циклу до 0,75 мксек; 3П на магн. барабанах вмістю до  $8 \times 2$  млн. знаків; час виконання арифм. операцій: додавання й віднімання — 0,9 мксек; множення — 2,6 мксек; ділення — 7 мксек). 1971 фірма розробила ЕЦОМ «MU-5» (спільно з Манчестерським ун-том), що поступається потужністю лише перед змер. «CDC-7600» (середній час виконання команди — бл. 0,1 мксек).

Лит.: Ильяков Ю. И. Электронная вычислительная техника в капиталистической экономике. М., 1968; Зейденберг В. К., Матвеев Н. А., Тарозатова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970.

С. Ф. Козубовський

## Основні характеристики найвідоміших машин фірми IBM

| Назва                           | Дата виготовлення    | Основні елементи | Час додавання/множення, мксек | Тип і кількість ОЗП (тис. слів) | Середній цикл, мксек      | Введення — виведення                                | Максимальна кількість вивідного ЗП з довільним вибором ліній, мліс десяткових знаків |
|---------------------------------|----------------------|------------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------|---|--|
| IBM-603<br>IBM-701              | 1948<br>1952         | лампи            | 500/                          | тригери електронно-променеві    | 12                        | перфокарти, перфокарти, перфострічки, друк пристрій |  |
| IBM-650                         | 1954                 | "                | 700/                          | барабани 1-4, магн осердя 80    | 4500<br>100               | перфокарти, перфострічки, друк пристрій             | 48 (дискети)   |
| IBM-705-III                     | 1956                 | "                | 80/                           | осердя 20-80                    | 9                         | перфокарти, друк пристрій                           |  |
| IBM-704                         | 1956                 | "                | 12/228, флос 72 192 п 338     | осердя 4-32 барабани 4-16       | 12                        | перфокарти, друк пристрій, екран індикатора         |  |
| IBM-360 RAMAC модель I          | 1957                 | "                | 30 000/                       | осердя 0,1 барабани 2           | 10 000                    | перфокарти, перфострічки, друк пристрій             | 0-40   |
| IBM-709                         | 1958                 | "                | 1/                            | осердя 4-32 барабани 4-16       | 12, 7000                  | друк пристрій, екран індикатора                     |  |
| IBM-1620                        | 1959                 | транзистори      | 560/                          | осердя 20-100                   | 20                        | перфокарти, перфострічки                            | 1  |
| IBM-7090                        | 1960                 | "                | 4,4, 4,4-30,3                 | осердя 32                       | 2,2                       | перфокарти, друк пристрій                           | 274 (дискети) 0,83 (барабани)  |
| IBM-1401                        | 1960                 | "                | 230/                          | осердя 1,4-4                    | 11,5                      | перфокарти, друк пристрій                           |  |
| IBM-7030 STRIETH                | 1961                 | "                | 1,5/                          | осердя 16-262                   | 2,2                       | перфокарти, друк пристрій                           | 710 (перфок.) 256 (барабани) 50 (магн стрічок)                                       |
| IBM-7072<br>IBM-7044            | 1962<br>1963         | "                | 12/84<br>5/22,3-33            | осердя 5-30 осердя 8-32         | 8<br>2,3                  | перфокарти, перфострічки, друк пристрій             | 0,73 (барабани) 234 (дискети) 50 (барабани стрічок)                                  |
| IBM-7700<br>IBM-360<br>IBM-1130 | 1964<br>1965<br>1965 | "                | 4/                            | осердя 16-48 осердя 8           | 3<br>3,8                  | перфокарти, перфострічки, друк пристрій             | 150 (дискети)  |
| IBM-1800                        | 1966                 | "                | 10/                           | осердя 4-32                     | 2                         | перфокарти, перфострічки, друк пристрій             | 75 (дискети)   |
| IBM-4PI                         | 1967                 | "                | 3-10/29,6-31,6                | осердя 5-3                      | 2,5 (час вибірання з ОЗП) |   |  |
| IBM-360 модель 85               | 1969                 | "                | 0,08, 05                      | тонні плівки 4-8                | 1                         | перфокарти, друк пристрій                           |  |

Примітка: характеристики систем «IBM-360» дані у ст. «IBM-360»

**ІНТЕРПОЛЯТОР** — пристрій, призначений для інтерполювання функцій. Блок-схему І. зображено на мал. 1, де ПВ — пристрій введення, за допомогою якого інформація, записана у програмі П, вводиться в *залам'ятовувальний пристрій* ЗП і ВІ — вузол інтерполяції, який власне і здійснює інтерполяцію,  $U_1, U_2, \dots, U_n$  — вихідні сигнали І. Часто в І. входить пристрій, що керує в процесі роботи введенням програм, і ЗП (КП та зв'язки 1, 2 на мал. 1). У програмі звичайно записують координати вузлів інтерполяції або інші характерні точки чи параметри інтерполяційної кривої ІК (поверхні), вид інтерполяційної формули, а іноді й інші дані (напр., діаметр фрези та швидкість її руху по контуру, а також інші технологічні команди при

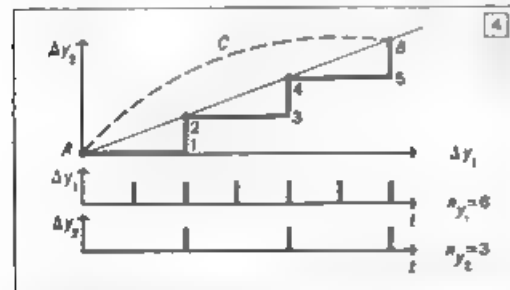
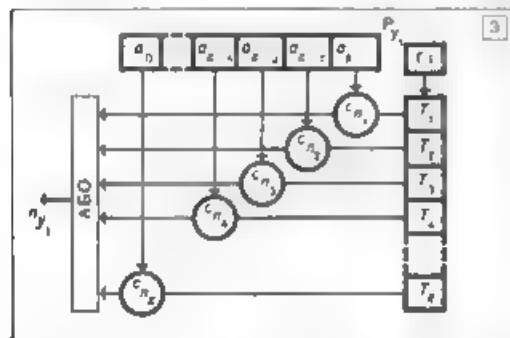
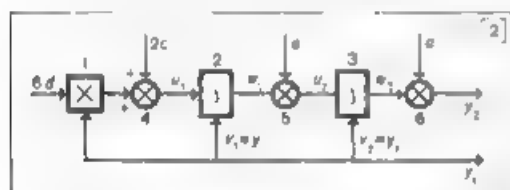
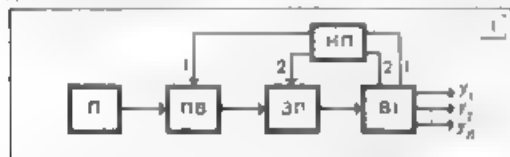
роботі І. в системі програмного керування фрезерним верстатом або ознаку графіка — номер, колір тощо — у графопобудовниках).

Розрізняють: залежно від характеру ІК (поверхні) — лінійні, параболічні, кругові та інші І.; від системи координат — 1., що використовують декартову, полярну та інші системи координат, від числа координат — дво-, три- і т. д. координатні І. від характеру зображення змінних — І. неперервної дії й дискретні, від способу представлення ІК — І., що використовують представлення ІК в явному вигляді, тобто у вигляді  $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$  або в параметричному вигляді, тобто  $y_1 = f_1(t), y_2 = f_2(t), \dots, y_n = f_n(t)$ ; від використання елементів і конструкції — мех., електромех. та електронні І.



Як ВІ в І. неперервної дії (ІН) використовують потенціометри (лінійні або нелінійні), авторансформатори (з лінійним або нелінійним законом зміни вихідної напруги), селені, інтегратори, конденсатори, гнучкі сталеві стрічки тощо.

Блок-схему двокоординатного ІН, який використовує як ВІ інтегратори і здійснює параболічну інтерполяцію в явному вигляді за законом  $y_2 = a + by_1 + cy_1^2 + dy_1^3$ , наведено на мал. 2.



1. Блок-схема інтерполатора.
2. Блок-схема параболічного інтерполатора неперервної дії і блок множення на коефіцієнт  $b, c, d$ . 3 — інтегратори, які здійснюють операцію  $w = \int x dt$  (показано випадок  $x_0 = 0$ ); 4, 5, 6 — суматори.
3. Блок-схема вузла інтерполяції лінійного дискретного інтерполатора.
4. Графік лінійної дискретної інтерполяції АСВ — ділянка інтерпольованої кривої, пряма АВ — лінійна неперервна інтерполяція, А123456 — дискретна лінійна інтерполяція АСВ.

Дискретні (цифрові) І. (ІД) являють собою спеціалізовані обчисл. пристрої. Вихідні сигнали ІД мають вигляд дискретних сигналів. Як ВІ в ІД застосовують цифрові інтегратори, схеми, що використовують підсумовування скінченних різниць, та інші обчисл. схеми. Блок-схему одного з варіантів ВІ двокоординатного ІД з задаванням ІК в параметричному вигляді подано на мал. 3. Задаванням такого І. в видавання по двох вихідних каналах  $y_1$  та  $y_2$  серій імпульсів, кількість яких  $n_{y_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta t_1}$  та  $n_{y_2} = \frac{\Delta y_2}{\Delta t_2}$  має бути пропорційною відрізкам інтерполяції по координатах  $y_1$  та  $y_2$  (тут  $\Delta t_1, \Delta t_2$  — ціна одного імпульсу за відповідною координатою).

При цьому здійснюється лінійна дискретна інтерполяція (мал. 4). Число  $n_{y_1}$  записується

у двійковому коді ( $n_{y_1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i$ ) в ЗПІ

(регістр  $R_{y_1}$ ). Сигнали дозволу (якщо  $a_i = 1$ ) або заборони (якщо  $a_i = 0$ ) з виходів  $R_{y_1}$  подаються на один з виходів схем збігу  $C_{y_1} = C_{y_2}$  (логічні схеми «І»), на другі входи надходять диференційовані сигнали з виходів тригерів  $T_1 - T_k$  лічильника. Якщо на вхід лічильника від генератора ГІ подати  $2^k$  імпульсів, то  $k$ -сть імпульсів на виході логіч. схем «АБО» дорівнюватиме кількості, записаній в  $R_{y_1}$ , тобто дорівнюватиме  $n_{y_1}$ . Аналогічний вузол використовується й для координати  $y_2$ .

І. застосовують у системах програмного керування металорізальними верстатами, гноріальними апаратами й електроннопроменевою обробкою матеріалів (див. «Кіт-87»), у пристроях відображення інформації, моделюючих установках і т. ін.

Літ.: Чернышев А. В., Яхкин А. В. Автоматизация обработки на металлорежущих станках с применением программного управления. М., 1959 (бібл. гр. с. 191, 195). Карбаский В. В. Специализированное вычислительное устройство для задания движения объекта по прямой, параболе и окружности. В кн. Автоматическое регулирование и управление. М., 1962. Коцюба Ю. Т., Харченко А. Ф., Петрушенко Л. А. Гамма-интерполирующие устройства для систем цифрового и программного управления. «Информационно-управляющие системы», 1967, в. 2. Ю. В. Кременчуко

**ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ** — одна з задач заващення випадкових процесів теорії. Лінійна І. в. п.  $\xi(t)$  полягає в побудові оцінки  $\hat{\xi}(t)$  значення процесу  $\xi(t)$  в момент часу  $t$  ( $0 < t < T$ ), яку лінійно виражають через спостереження  $\xi(t)$  при  $t < 0$  та  $t > T$ . При цьому звичайно шукають оцінки  $\hat{\xi}(t)$ , для яких середньоквадратична похибка  $\sigma^2(t) = M[\xi(t) - \hat{\xi}(t)]^2$  є мінімальною. Явні формули для розв'язування задачі І. в. п. одержано для стаціонарних випадкових процесів з дробово-раціональною спектральною щільністю. Напр., якщо спектральна щільність процесу  $\xi(t)$  дорівнює

$f(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2 + \alpha^2}$ , то  $\tilde{f}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \times$   
 $\times \sin \alpha(T-\tau) + \tilde{f}(\tau) \sin \alpha \tau$ . Вперше задачу лінійної і, в. п. для стаціонарної послідовності  $\tilde{f}_n$  із спектральною щільністю  $f(\lambda)$ , що спостерігається при всіх  $\lambda$ , крім  $\lambda = 0$ , розглянув рад. математик А. М. Колмогоров. Виявилось, що середньоквадратична похибка

інтерполювання  $\tilde{f}_0$  дорівнює  $\sigma^2 = 2\pi \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} \right|^{-1}$

(зокрема, інтерполювання буде безпомилковим, якщо  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} = +\infty$ ).

М. Я. Ядрин.

**ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ** — наближена заміна функції  $f(x)$ , заданої на всьому відрізку  $[a, b]$  або, в усякому разі, в окремих його точках  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  функцією  $P(x)$  якогось класу, значення якої в точках  $x_j$  збігаються з відповідними значеннями функції  $f(x)$ . Точки  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , наз. в. п. в. і. в. і. інтерполяції (в. і.), а  $P(x)$  — інтерполюючою ф-цією. В деяких випадках вимагають, щоб заданих значень у в. і. набувала не тільки інтерполююча ф-ція, а й її похідні.

В обчисл. практиці застосовують інтерполяцію, коли оперують з ф-ціями  $f(x)$ , заданими в скінченній кількості точок  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , відрізка  $[a, b]$ , а треба знати  $f(x)$  для проміжних значень аргумента (ноді для  $f(x)$  відоме й аналітичне представлення, проте знаходження кожного значення  $f$  вимагає великого обсягу обчислень. У цьому разі при знаходженні значень ф-ції для багатьох значень аргумента також застосовують інтерполяцію — за кількома обчисленими значеннями  $f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  будують просту інтерполюючу ф-цію, за допомогою якої й обчислюють наближені значення  $f(x)$  в решті точок.

Звичайно  $P(x)$  відшукують у вигляді узагальненого многочлена

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i \Phi_i(x), \quad (1)$$

де  $\Phi_i(x)$  — лінійно незалежні на  $[a, b]$  система ф-цій і  $c_i$  — дійсні коеф. Побудова конкретної інтерполюючої ф-ції  $P(x)$  для  $f(x)$  зводиться до відшукання  $c_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  з умов

$$\sum_{i=0}^n c_i \Phi_i(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Узагальнений многочлен, який має властивість (2), наз. узагальненим інтерполяційним многочленом (і. м.) для  $f(x)$  за заданою системою вузлів. Визначник  $\Delta$  системи (2) відмінний від нуля при будь-якому виборі попарно різних точок  $x_j$  відрізка  $[a, b]$ , якщо система ф-цій  $\Phi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  є системою Чебишова на  $[a, b]$ , тобто якщо будь-який узагальне-

ний многочлен (і. м.) у якого хоча б один з коеф. відмінний від нуля, має на  $[a, b]$  не більше як  $n$  нулів. З цього випливає існування і єдиність узагальненого і. м.

$$F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta_i}{\Delta} \Phi_i(x), \quad (3)$$

де  $\Delta_i$  — визначник, одержуваний з  $\Delta$  заміною  $i$ -го стовпця стовпцем вільних членів системи (2). Якщо розкласти  $\Delta_i$  по елементах  $i$ -го

стовпця ( $\Delta_i = \sum_{j=0}^n f(x_j) \Delta_{ji}$ , де  $\Delta_{ji}$  — алгебр.

доповнення елементів  $i$ -го стовпця визначника  $\Delta$ ), то узагальнений і. м. (3) набуде вигляду

$$P(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \Phi_k(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^n f(x_j) \Phi_j(x),$$

де  $\Phi_j(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \Phi_k(x)$  — узагальнені многочлени, незалежні від  $f(x)$ , цілком визначені вибором системи в. і. З виконання умов (2) випливає, що

$$\Phi_j(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } j \neq k, \\ 1, & \text{якщо } j = k. \end{cases} \quad (4)$$

Найчастіше на практиці застосовують інтерполяцію алгебр. многочленами (параболічну інтерполяцію), тобто многочленами за системою функцій  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . Такий спосіб наближування ґрунтується на гіпотезі, яка твердить, що на невеликих відрізках зміни  $x$  ф-цію  $f(x)$  можна достатньо добре наближити за допомогою параболі якогось порядку, аналітично вираженої алгебр. многочленом. Система ф-цій  $1, x, x^2, \dots, x^n$  являє собою систему Чебишова, і тому і. м. існує, і він єдиний. Для його побудови треба насамперед знайти многочлен, який набуває в одній вузловій точці значення  $1$ , а в решті —  $0$ . Таку властивість має многочлен

$$(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1}) \times$$

$$\times (x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)$$

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1}) \times (x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1}) \times (x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$$

він дорівнює  $1$ , якщо  $x = x_i$ , і  $0$ , якщо  $x = x_j$ ,  $j \neq i$ ; отже,

$$F(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \times$$

$$(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1}) \times$$

$$\times (x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)$$

$$\times \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1}) \times (x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1}) \times (x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$$

Пай многочлен наз. і. м. Лагранжа і позначають звичайно  $L_n(x)$ . В разі рівновіддалених в. і., тобто, коли  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , він має вигляд

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \\ = (-1)^n \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{n!} \times \\ \times \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{C_n^i f(x_i)}{t-i}, \text{ де } t = \frac{x-x_0}{h}, \\ C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Якщо всі обчислення проведено точно, то  $L_n(x)$  збігається з  $f(x)$  у в. і. В решті точок вони, загалом кажучи, відрізнятимуться один від одного (див. *Закруглення похибки, Похибка, Похибок обчислювальна теорія*). Виняток становить лише випадок, коли  $f(x)$  є многочленом ступеня, не вищого за  $n$ . У цьому разі  $f(x)$  та  $L_n(x)$  тотожно співпадають.

Загалом нажучи, довільна ф-ція  $f(x)$ , співпадаючи з і. м. у вузлах інтерполяції, може як завгодно відрізнятися від нього в решті точок. Але, якщо  $f(x)$  має на  $[a, b]$  неперервні похідні до  $n$ -го порядку і похідна  $f^{(n)}(x)$  диференційовна на  $[a, b]$ , то

$$f(x) - L_n(x) = R_n(x) = \\ = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n), \quad (6)$$

де  $x_0 < \xi < x_n$ . Величину  $R_n(x)$  наз. а. л. як членом інтерполяції або похибкою інтерполяції (похибка методу). Поклавши  $M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ , одержимо

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1) \dots \\ \dots (x-x_n)|. \quad (6')$$

Права частина виразу (6) для заданої ф-ції  $f(x)$  залежить тільки від многочлена  $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$ , який повністю визначається в. і. В деяких випадках є можливість вибрати в. і. на свій розсуд і збільшувати точність інтерполяції. Так, якщо за в. і. взяти нулі полінома Чебишова  $T_n(x) = \cos [n \arccos x]$ ,  $|x| \leq 1$ , то похибка інтерполяції на відрізку  $[-1, 1]$  для даної ф-ції  $f(x)$  буде найменшою. В цьому разі оцінка (6') набуде вигляду

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Якщо інтерполяція здійснюється на довільному відрізку  $[a, b]$ , то його можна перевести в  $[-1, 1]$  лінійною заміною змінного.

Інтерполяційна ф-ла Лагранжа (5) має деякі вади. Її побудова, а також обчислення за нею вимагають великої обсягу роботи. Крім того, якщо відомий  $L_n(x)$ , побудований за значеннями в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , і треба побудувати  $L_{n+1}(x)$  за його значеннями в  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ , то всі обчислення треба здійснювати знову. В зв'язку з цим, щоб спростити обчисл. процес, треба було видозмінити і. м. Існують різні форми запису і. м., які мають ті чи інші переваги. Простим перегруповуванням членів і. м. Лагранжа (5) можна перетворити на інтерполяційний многочлен Ньютона

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0; x_1) + (x-x_0) \times \\ \times (x-x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x-x_0) \times \\ \times (x-x_1) \dots (x-x_{n-1})f(x_0; x_1; x_2; \dots; x_n), \quad (7)$$

де

$$f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k}) = \\ = \frac{f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - \\ - f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}}$$

— поділені різниці  $(k+1)$ -го порядку,

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \dots,$$

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

— поділені різниці 1-го порядку. Многочлен Ньютона має порівняно з многочленом Лагранжа ту перевагу, що додання нових в. і. зумовлює у формулі (7) лише додання нових доданків без зміни початкових

В разі рівновіддалених в. і. ф-ла (7) спроститься. Так, коли як вузли  $x_0, x_1, \dots, x_n$  взяти точки  $x_0, x_0+h, x_0+2h, \dots, x_0+nh$ , то з інтерполяційної ф-ли Ньютона (7) одержуємо т. зв. інтерполяційну ф-лу Ньютона для інтерполяції вперед

$$L_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x-x_0) \times \\ \times (x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x-x_0) \times \\ \times (x-x_1) \dots (x-x_{n-1}),$$

де  $\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$  — скінченні різниці  $k$ -го порядку,  $\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$  — скінченні різниці 1-го порядку. Коли як в. і. виберемо точки  $x_0, x_0+h, \dots, x_0+nh$ , то аналогічно одержимо інтерполяційну ф-лу Нью-

тона для інтерполяції назад

$$L_n(x) = f(x_n) + \frac{\Delta f_{n+1}}{h} (x - x_n) + \\ + \frac{\Delta^2 f_{n+1}}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \\ + \frac{\Delta^n f_n}{n!h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

Коли як в і оберемо точки  $x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 - nh, x_0 + nh$  або  $x_0, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 - nh, x_0 + nh$ , то з ф-ли (7) одержимо інтерполяційні ф-ли Гаусса для інтерполяції відповідно вперед і назад, підсума цих ф-л дає ф-лу Стірлінга. Можна вказати ще багато інтерполяційних ф-л, але всі вони в іншій формі запису і. м. Лагранжа (звичайно, в припущенні, що в них використано одні й ті самі в. і.) Проте в різних випадках застосовують різні ф-ли. Це пояснюється тим, що звичайно Arithmetic здійснювати обчислення, якщо при інтерполяції спочатку використовуються наближені до  $x$  вузли, а потім поступово підключаються все більш віддалені. При цьому перші члени інтерполяційних ф-л дають основний вклад у шукану величину, а решта даватимуть лише невеликі поправки. Відповідно до цього, напр., якщо  $x$  міститься близько до початку відрізка інтерполяції, то треба використати інтерполяційну ф-лу Ньютона для інтерполяції вперед, при  $x$ , близьких до кінця відрізка, — ф-лу Ньютона для інтерполяції назад, а при інтерполяції на середині відрізка — ф-ли Бесселя та Стірлінга.

Параболічна інтерполяція дуже зручна: многочлени прості за формою, їх легко обчислювати, диференціювати й інтегрувати; тому її застосовують найчастіше. В деяких окремих випадках доцільно використовувати інші види інтерполяції. Так, якщо інтерпольована ф-ція  $f(x)$  — періодична, то можна інтерпольуючу ф-цію  $P(x)$  шукати в класі тригонометричних многочленів, якщо інтерпольована ф-ція перетворюється в нескінченність у заданих точках або поблизу них, то  $P(x)$  доцільно шукати в класі раціональних ф-цій. Поряд з відомими перевагами параболічна інтерполяція для рівновіддалених в. і. має ту істотну ваду, що з зростанням кількості вузлів похибка заміни відправної ф-ції і. м. в точках між вузлами не обов'язково зменшуватиметься. В околі кінця інтервалу інтерполяції така похибка може зростати навіть до нескінченності. Цей вада не має тригонометрична інтерполяція: для кожної ф-ції з обмеженою варіацією інтерпольуюча ф-ція, одержана у вигляді тригонометричного многочлена з рівновіддаленими вузлами, необмежено прямує до заданої ф-ції в кожній точці даного інтервалу, коли кількість вузлів нескінченно зростає. Ця перевага тригонометричної інтерполяції робить її дуже важливою, бо для такої інтерполяції вимога періодичності інтерпольованої ф-ції не обов'язкова.

Широко застосовують також інтерполяцію кусково-аналітичними ф-ціями (сплайнами). Найзвичайшим представником цього класу є, мабуть, кубічний сплайн, який на інтервалах  $[x_{i-1}, x_i]$  записується у вигляді  $S(x) = A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i$ . Він є кусково-кубічною кривою, яка має неперервну першу та другу похідні на всьому відрізку інтерполяції.

На практиці часто виникає задача про відшукування за заданим значенням ф-ції значення аргумента. Цю задачу розв'язують методами оберненої інтерполяції. Якщо задана ф-ція є монотонною, то обернена інтерполяція здійснюється шляхом заміни ф-ції аргументом і навпаки й наступної інтерполяції. Якщо задана ф-ція не є монотонною, то за заданим значенням аргумента для неї записують той чи інший і. м., прирівнюють його до заданого значення ф-ції й розв'язують одержане рівняння відносно аргумента.

Інтерполяційні многочлени побудовано й для випадку, коли потрібен збіг у в. і. не тільки значень інтерпольованої ф-ції та і. м., а й їхніх похідних до деякого порядку. Досліджено також задачу і. ф. багатьох змінних, хоч вона має багато принципових труднощів, порівняно з тією самою задачею для ф-ції однієї змінної, причому для цього випадку є ряд результатів щодо оптимізації інтерполяційних ф-л з метою зменшення їхніх похибок.

Лит. Гамбаров Я. А. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1956 [Библ. гр. с. 321—325]. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1953 [Библ. гр. с. 216—218]. Вережкин М. С., Жидков Н. П. Методы вычисления. Т. 3. М., 1968 [Видцов К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Пер. с англ. М., 1961]. Алберт Дж. Нильсен Э. Э. Олш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Пер. с англ. М., 1972 [Библ. гр. с. 267—269, 307, 309].

Л. І. Вережко, А. І. Вережко.

**ІНТЕРПРЕТАЦІЯ МОВИ СТРУКТУРНА** — процес, що здійснює переведення робочої (виконуваної) програми з програмного рівня  $\{P\}^B$  на мікрокомандний рівень  $\{M\}^B$  внутрішньої мови  $\{B\}$ . Цей процес складається здебільшого з ряду послідовних перетворень програми, результати яких зображуються поступово на проміжних рівнях  $N\{B\}$  внутр. мови і, кінцеві кінцем, у вигляді мікрокоманд (тобто на рівні  $M\{B\}$ ). Виконання останніх відбувається безпосередньо в міру утворення їх.

Алгоритми інтерпретації фіксують структурно (див. Математичне забезпечення ЦОМ внутрішньої мови), тому викладене поняття іноді визначають як структурну інтерпретацію, на відміну від програмної інтерпретації, що передбачає спец. етап динамічного перетворення перисної (а не робочої) програми на програмний рівень внутр. мови. Це останнє перетворення, на відміну від трансляції перисної програми, здійснюють у процесі виконання її, і тоді на програмному рівні внутр. мови програма в оперативній пам'яті ЦОМ уже попередньо не фіксується,

а відображується динамічно. Оскільки відображення у внутр. мові елементів і конструкцій вхідної мови означає інтерпретацію цих елементів, іноді говорять про інтерпретацію вхідних алгоритм. мов, маючи при цьому на увазі не програмну інтерпретацію вхідної мови, а структуру інтерпретації внутр. мови, програмний рівень якої відповідно поближено до алгоритм. мови.

Класи систем інтерпретації ЦОМ аналогічні класам внутр. мов ЦОМ (див. *Мова ЦОМ внутрішня*), тобто системи інтерпретації поділяють за парамі альтернативних ознак: «традиційна» або «розвинута» та «елементарна» або «процедурна». Ознака системи інтерпретації збігається з ознакою програмного рівня внутр. мови (якою фіксують інтерпретовувані робочі програми), тобто розвинуті внутр. мові відповідає розвинута система інтерпретації елементарному — елементарна й т. д.

Кожна система інтерпретації як множини алгоритмів (зафіксованих структурно) має підмножини алгоритмів, що забезпечують переведення виконуваних програм з кожного рівня внутр. мови (крім мікрокомандного рівня) на наступний нижчий. Результати цього переведення як відповідного етапу процесу інтерпретації динамічно фіксуються у структурному устаткуванні машини на час, потрібний щоб виконати задані операції (а т. ч. й для дальшої деталізації виконаної програми) аж до мікрокоманд. Множину алгоритмів системи інтерпретації поділяють за двом. підмножинами — аналізуючу й виконавчу, які переводять роботу програму з програмного на виконавчий, а з виконавчого — до мікрокомандного рівня внутр. мови. Відповідно до характеристик рівня внутр. мови лише в розвинутих системах інтерпретації є аналізуюча частина, у процедурних системах інтерпретації в складі виконавчої частини є спец. підмножина, що реалізує переведення з виконавчого на деталізовано-виконавчий рівень внутр. мови.

Етапи процесу інтерпретації виділяють відповідно до реалізованих на них підмножин алгоритмів системи інтерпретації. Гол з них є аналізуючий та виконавчий процеси, ф-ції цих етапів визначають за програмним рівнем внутр. мови: у аналізуючому підком за програмним рівнем, у виконавчому — що й за мікрокомандним.

Відповідно до міри наближення на рівні, не нижчому за подібність внутр. мови до алгоритм. мови (тобто для розвинутої процедурної внутр. мови), осн. ф-ції аналізуючого етапу в заг. випадку такі: динамічний аналіз робочої програми і динамічне адресування всіх величин (позначених і неозначених), що його виконують у ході аналізу програми. Мета динамічного аналізу — визначити черговий операційний знак (чи ідентифікатор процедури), що його можна виконати, та його зміст у відповідності з контекстом програми.

Аналіз програми адебільшого виконують, виставляючи суміжні операційні знаки (з ура-

хуванням контексту). При цьому в ході зворотньо-поступального руху за програмою виконують оперативну організацію магазинів в пам'яті, за допомогою яких здійснюється адресування непозначуваних проміжних результатів обчислень. Адресування позначуваних у програмі величин ґрунтується на встановленні відповідності між позначеними та поточними адресами й використанні при цьому системи відносних і базисних адрес.

Ф-ції виконавчих етапів інтерпретації — керувати процесом виконання операцій на всіх його рівнях. У зв'язку з застосуванням умовної (віртуальної) пам'яті для адресування величин і використанням у внутр. мовах широкого класу стандартних процедур в цих ф-ціях особливого розвитку набула ф-ція динамічного переведення робочої програми в виконавчого на деталізовано-виконавчий рівень внутр. мови. Реалізуючи сучасні системи структурної інтерпретації, застосовують, як правило, ступінчасте побудування засобів її. (При цьому за швидкодією (пов'язаною зі способом реалізації) перевагу надають скрізь застосуванням елементарним мовним конструкціям, з яких уже складають конструкції складніші й такі, що відносно рідше зустрічаються (прикладні перших — алгоритми арифм. операцій та операції звертання за символічними адресами, прикладні других — алгоритми елементарних ф-цій та матрично-векторних операцій). До більш швидкодіючих належать схемні (апаратні) засоби, до менш швидкодіючих — *довочасний запам'ятовувальний пристрій*. Розвиток систем структурної інтерпретації — одна з визначальних властивостей найсучасніших і найперспективніших обчисл. машин.

Лит. Гаушкова В. М. [та ін.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 (Библиогр. с. 234—247).

З. Л. Рабинович.

**ІНТЕРПРЕТУЮЧА СИСТЕМА** — система, яка за програмою, записаною певною зовнішньою мовою, реалізує припис, заданий програмою, за допомогою її поточної (звичайно пооператорного) перекладу внутрішньою мовою ЦОМ. І. є. можна реалізувати програмними і схемними засобами. На кожній ЦОМ реалізовано певну систему безпосередньої інтерпретації, для якої зовн. мова збігається з внутр. мовою ЦОМ (див. *Інтерпретація мови структурна*, *Мова ЦОМ внутрішня*).

**ІНТУІЦІОНІЗМ** — напрям у сучасній математиці, а якого впливає потреба повної перебудови всієї математичної науки і яке приводить до радикального відторгнення значної частини класичної математики. Засновник І.—голд. математик Л.-Е. Брауер (1881—1966), його послідовники — переважно теж голд. вчені. Філософською основою І. є картезіанська вимога цілковитої очевидності змісту матем. суджень. Об'єкти математики конструктивно подають у розумових побудовах. Не доводячи можливості такої побудови, не можна ні в якому разі ствер-

дживати, що об'єкт існує. Будь-які доведення існування, які не дають методу побудови, спростовуються як неслухні.

**Логіка й арифметика.** Брауер вважав логіку за вторинний продукт математички, скованої в першу чергу безпосередньо на матем. об'єкти й утримуваній від формалізації загальних способів міркування. Однак 1930 годя, математик А. Гейтінг запропонував формалізацію відомих інтуїціоністських логіч. способів міркувань за допомогою т. з. інтуїціоністського числення предикатів. Характерною властивістю цього числення є певнидність *виключеного третього закону*. І, не визнає справедливості цього логіч. принципу, бо вимає універсальної методу розпізнавання, який з його членів ( $A$  чи «не  $A$ ») є справедливим. Твердження не «не  $A$ » еквівалентне  $A$ , а твердження «не для всіх  $x$  не  $A(x)$ » не випливає існує такий  $x$ , що  $A(x)$ . Інтуїціоністське числення предикатів й його застосування до числення *висловлювань* виконано добре. Для числення висловлювань зазначено процедуру розпізнавання висловлювань. Для обох числень створено еквівалентні семантичні числення й доведено усунувність розриву; доведено також інтерполяційну теорему. З погляду класичної математики виявилися цікавими алгебр. й топологічні інтерпретації цих числень та їхній зв'язок з модальними численнями. Було дано інтерпретацію числень, яка відповідає розумінню інтуїціоністської логіки математиками-класиками, й доведено повноту числень з погляду цієї інтерпретації. Інші інтерпретації виявилися неповними. Інтуїціоністська арифметика ґрунтується на двох стовпцях розуміння принципу Індукції Ясна річ, повністю її не можна формалізувати, але часткову формалізацію здійснено її успішно виключають.

**Аналіз і теорія видів** Інтуїціоністський аналіз пов'язаний, в основному, з поняттям *вільно утвореної послідовності натуральних чисел*, кожний член якої визначається актом довільного вибору або вибрання наперед законом утворення. Континуум складається з вільно утворених послідовностей раціональних чисел, підпорядкованих природним обмеженням Функції — це обчисленні функціонали над такими послідовностями Як незаперечний принцип, Брауер висунув положення: значення обчисленого функціоналу залежить від певного початку послідовності. Другий принцип аналізу — т. з. бар-індукція (з класичного погляду еквівалентна індукції до лічбових трансфінітів). На цій основі розвивається система, в якій, зокрема, всяка задана на сегменті ф-ція виявляється рівномірно неперервною. Інтуїціоністський аналіз було визначено і як формальну систему. Слід окремо відзначити, що в останніх своїх роботах Брауер впроваджує вільно утворені послідовності, які залежать від розв'язання проблем на момент вибору. Ці прийоми потрібні лише для побудови контрприкладів. Оскільки поняттям інтуїціоністської теорії множин є поняття виду,

тобто властивості матем. об'єктів, побудова яких передуює самому виду. Зрозуміло, одержана теорія не може бути скільки-небудь повною паралеллю класичної множини теорії.

І, став, мабуть, першим критичним напрямом у математиці, який радикально відкинув уявлення про актуально нескінченно. Це сподіює І. з гільбертівським фінітизмом і марковським конструктивізмом — напрямом, який, безперечно, зазнали на собі інтуїціоністського впливу. І. відрізняється від них певним припущенням абстрактного елемента в понятті вільно утвореної послідовності. Тим самим припускається не тільки потенціальна лічбова й потенціальна континуальна нескінченність. На відміну від марковського конструктивізму І. обминає тезу Черча, не вважаючи її за самоочевидне твердження. За змістом це веде до аналізу, відмінному від конструктивістського.

З другого боку, абстракцію в І. припускають тільки при побудові континууму. Наступні рівні будуть за допомогою предикативної ієрархії видів. Класичною паралеллю І. є предикативізм Бореля — Лебега — Лузіна, що припускає актуальний (тобто класичний) континуум, але такий, що на різних ступенях потребує предикативності визначень. Для практичного застосування І. не має великої цінності. Але безкомпромісності його ідей, висунутих під час кризи основ математики, відіграла плідну стимулюючу роль. Частково під їхнім впливом Д. Гільберт і розробив формалістську програму обґрунтування математики (див. *Формалізм у математиці*).

Слід окремо відзначити, що в І. вперше почали вживати поняття ефективної обчисленості ще до того, як воно стало об'єктом систематичного вивчення. Інтуїціоністський конструктивізм був одним з джерел конструктивізму в матем. філософії.

Див. Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York—Toronto, 1952 Гейтінг А. Інтуїціонізм Введение в теорию М., 1965 (библиогр. с. 152—160, 174, 195) Kleene S. C., Vesley R. E. The foundations of intuitionistic mathematics especially in relation to recursive functions. Amsterdam, 1965 Рясеня Р. С. и Кирский Р. Математика интуицистская Пер с англ. М., 1972 (библиогр. с. 568—578).

**ІНФОРМАТИВНІСТЬ ОЗНАК** — величина, яка кількісно характеризує придатність ознак (чи набору їх)  $X$  для розпізнавання класів об'єктів. При цьому припускають, що подані для розпізнавання об'єкти представлені сигналами  $x$  у просторі ознак  $X$ . У розпізнаванні образів як І. о. використовують умовну ентропію, ймовірність помилки розпізнавання, дисперсію Кульбака, дисперсію міру та інші величини. Найчастіше трапляється умовна ентропія  $H$ :

$$H(K/X) = - \sum_x p(x) \sum_k P(k/x) \log P(k/x),$$

де  $K$  — множина класів,  $X$  — ознаки,  $k$  — номер класу,  $x$  — сигнал у просторі ознак  $X$ ,  $p(x)$  — щільність ймовірності появи сигналу

$x$ ,  $P(k/x)$  — апостеріорна ймовірність класу  $k$  за умови, що спостерігався сигнал  $x$ . У разі, якщо за ознаками  $X$  можна безпомилково вказати на клас, умовна ентропія дорівнює нулеві. При порівнюванні двох наборів ознак більш інформативним є той, що характеризується меншою умовною ентропією. На практиці використали і о. утруднено через невідомі ймовірності  $p(x)$  та  $P(k/x)$ . Вибираючи інформативні ознаки, найчастіше беруть до уваги властивості тих сигналів, що їх збираються класифікувати. Враховуючи властивості сигналів, можна наближено робити висновки про розподіл  $p(x)$  та  $P(k/x)$  і знаходити досить інформативні ознаки. Інформативність набору ознак слід відрізняти від інформативності окремих ознак набору. Тільки в тому випадку, коли ознаки незалежні при умові окремих класів, інформативність набору ознак дорівнює сумі інформативності окремих ознак. У цьому випадку на підставі інформативності окремих ознак можна складати найінформативніший набір  $I_k$ . Якщо ознаки залежні, то  $I$  о не виражається через інформативність окремих ознак і вибір найінформативнішого набору за інформативністю окремих ознак стає неможливим.

Лит. Ковалевський В. А. Задача распределения образов с точки зрения математической статистики. В кн. Читателю автомата и рационализатору образов. К., 1965. Кузнецов А. Теория информации и статистика. Пер. с англ. М., 1967 (Библ. инт. с. 384—384). Т. К. Виниш.

**ІНФОРМАТИКА** — наукова дисципліна, що вивчає структуру й загальні властивості інформації наукової, а також закономірності всіх процесів наукової комунікації — від неформальних процесів обміну науковою інформацією під час безпосереднього усного й письмового спілкування вчених і спеціалістів до формальних процесів обміну за допомогою наукової літератури. Значну частину цих процесів становить науково-інформаційна діяльність щодо збирання, аналітико-синтетичного перероблення, зберігання, пошуку й поширення наук. інформації.

І. не здійснює науково-інформаційної діяльності, якою належить займатися спеціалістам у відповідних галузях наук й техніки, а вивчає внутр. механізми реферування документів природними мовами, яке здійснює людина. Вона розробляє заг. методи такого реферування, але не займається практичним реферуванням документів науковців з конкретних галузей науки або техніки. Основою дослідження І. є діалектичний та історичний матеріалізм, для дослідження часткових проблем І. застосовуються окремі методи, що їх використовують інші наук. дисципліни. І. розглядають як один із розділів кібернетики, причому іноді вважають, що до кібернетики входять проблеми автоматизації інформаційної служби, перекладу й реферування наук. тех. літератури, побудова інформаційно-пошукових систем і інформаційно-логічних систем та інші задачі. Проте ряд проблем, що їх розв'язує І. (оптимізація системи наук. комунікації, структура наук. документа,

збільшення ефективності наук. дослідження шляхом застосування науково-інформаційних засобів тощо), виходить за межі кібернетики. В І. широко використовують і методи семіотики, що їх іноді розглядають як теор. фундамент І. Семіотику за традицією поділяють на прагматику, семантику й синтактику. В межах прагматики можна проводити аналіз конкретної науково-інформаційної діяльності, а саме — створення інформаційно-пошукових систем, удосконалення системи початкових публікацій, індексування тощо. Методи семантики використовують в І., напр., будуючи та аналізуючи мови інформаційно-пошукові та вивчаючи такі перетворення структури тексту, які не змінюють його змісту. Методи синтактики застосовують в І., розв'язуючи завдання щодо формалізації та автоматизації деяких видів науково-інформаційної діяльності (індексування, реферування автоматичне, машинний переклад). Матем. інформацій теорію використовують в І. для забезпечення оптимального кодування семантичної інформації, тривалого зберігання її, пошуку й прип'явання на підставі. Семантика логічна істотно впливає на І., коли вивчають і розробляють нові способи записування (нодання) наук. інформації. Методи логіки математичної використовують І., будуючи інформаційно-пошукові мови й формалізуючи процес логічного висновку з тих чи ін. теорій. В І. дедалі ширше використовують і методи психології, особливо таких порівняно нових її напрямків, як психологія праці, психологія інженерна та психолінгвістика. Методи психології мають важливі зазначення при вивченні процесів мислення, при розробці проблем індексування, реферування, інформаційного пошуку (див. Пошук інформації автоматичний) тощо. Книгознавство й, зокрема, історія книги дають І. цінні відомості про найважливіші етапи формування наук. документів, дають змогу зрозуміти історичну зумовленість методів і засобів наук. комунікації. З тех. наук І. взаємодіє при створенні багатьох засобів реалізації інформаційних систем.

Осн. теоретичні завдання І. полягає у визначенні заг. закономірностей, відповідно до яких створюються наук. інформації, відбувається перетворення її, передання та використання в різних сферах діяльності людини. Прикладні завдання І. полягають у розробленні найефективніших методів і засобів здійснення інформаційних процесів, у визначенні способів оптим. наук. комунікації (у самій науці і між наукою та виробництвом) з широким застосуванням сучасних тех. засобів. Наук. дослідження в галузі І. проводять у таких напрямках: 1) вивчення осн. науково-інформаційних процесів — збирання, аналітико-синтетичного перероблення, зберігання, пошуку й поширення наук. інформації; 2) вивчення історії та організації науково-інформаційної діяльності в різних галузях і країнах; 3) визначення оптим. форм зображення (записування наук. інформації, розроблення типології наук. документів) та осн. ви-

мог до них; вивчення властивостей і закономірностей документальних потоків; 4) розроблення методів аналізу семантичної інформації, формалізації добування осн. змісту з наук. документів; 5) дослідження інформаційних мов і процедур перекладу з природних мов на інформаційні й навпаки; 6) створення систем інформаційного пошуку та обслуговування; 7) застосування маш. техніки для реалізації інформаційних систем і розроблення деяких спец. тех. засобів (для інформаційно-пошукових пристроїв).

І. не вивчає і не розробляє критеріїв оцінки істинності, новизни й корисності наук. інформації. Вони є певід'ємною частиною тих наук, у яких розглядають наук. інформацію. Багато питань, які входять тепер до І., давно розробляли в ін. дисциплінах (у бібліотекознавстві, книгознавстві, лігвістиці тощо). Ще на поч. 20 ст. бельг. учений П. Отле запропонував об'єднати комплекс процесів збирання, оброблення, зберігання, пошуку й поширення документів під заг. назвою «документація», що іноді є синонімом поняття «І.». У 1945 амер. учений В. Буш уперше широко поставив питання про необхідність механізувати інформаційний пошук. Міжнародні конференції в наук. інформації (Лондон, 1948; Вашингтон, 1958) ставилися перші етапи розвитку І. В СРСР І. почала розвиватися в 50-х рр., особливо після створення 1952 Ін-ту наук. інформації АН СРСР (тепер Всесоюзний інститут наукової й технічної інформації Держ. Комітету Ради Міністрів СРСР в науки й техніки та АН СРСР). Для також *Інформація документальна*.

Літ. Михайлов А. Н., Черный А. М., Гиларевский Р. С. Основы информатики. М., 1968 (бібліогр. с. 728-735). Международный форум по информатике, т. 1-2. М., 1973. Abstracts of international science and technology, v. 1-7. Washington, 1968-72. Р. С. Гиларевский, А. І. Черный.

**ІНФОРМАЦІЇ ЗБЕРІГАННЯ** — відображення інформації у властивостях, конфігурації або розміщенні фізичних об'єктів, що в сукупності називаються носіями інформації. Історично найдавніші форми І. з. пов'язані з розвитком писемності: комбінації предметів (раковини, вуалів); графічне зображення на камені, глині, папірусі, папері. Величезне значення в розвитку цього способу І. з. мало винайдення друкарства. Сучасні форми І. з. ґрунтуються на широкому використанні фотографії та явища залізничного магнетизму й пов'язані з розвитком ЦОМ. Особливого розвитку набули методи й засоби зберігання дискретної інформації у вигляді послідовності двійкових символів. Осн. характеристиками носіїв інформації є тривалість зберігання інформації в них; їхня надійність, тривалість часу нанесення нової інформації на носій (записування) і тривалість часу зчитування її з носія (читання) та вартість зберігання одиниці інформації. До дій, що забезпечують І. з. та відтворення збереженої інформації, належать кодування інформації символами, що застосовуються на вибраному носії інформації, записування й читання інформації,

пошук потрібної одиниці інформації або місця для неї під час читання й записування. Сукупність взаємопов'язаних засобів і методів, яка забезпечує виконання цих етапів, становить систему І. з. До систем І. з. належать запам'ятовувальні пристрої, інформаційно-пошукові системи та інформаційно-довідкові системи. С. Д. Чиховський.

**ІНФОРМАЦІЇ КІЛЬКІСТЬ** — теоретико-інформаційна міра величини інформації, що міститься в одній випадковій величині відносно іншої випадкової величини. Якщо  $\xi$  і  $\eta$  — дискретні випадкові величини й  $\{p_i\}$ ,  $\{q_j\}$ ,  $\{p_{ij}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  відповідно розподіли ймовірностей випадкових величин  $\xi$ ,  $\eta$  і пар  $(\xi, \eta)$ , то І. к.

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}. \quad (1)$$

У заг. випадку, коли випадкові величини  $\xi$  і  $\eta$  набувають значень у якихось вимірних просторах  $X$  і  $Y$  відповідно, І. к.  $I(\xi, \eta)$  визначають так. Нехай  $\varphi(x)$ ,  $x \in X$ ;  $\Psi(y)$ ,  $y \in Y$  — вимірні ф. ції, що набувають скінченної кількості значень. Тоді  $\varphi(\xi)$  і  $\Psi(\eta)$  — дискретні випадкові величини і І. к. у  $\xi$  відносно  $\eta$

$$I(\xi, \eta) = \sup_{\varphi, \Psi} I(\varphi(\xi), \Psi(\eta)), \quad (2)$$

де верхню границю беруть за всіма парами  $\varphi(x)$  та  $\Psi(y)$ , що набувають скінченної кількості значень. Якщо  $\xi$  й  $\eta$  — дискретні величини, визначення (2) зводиться до визначення (1). А якщо  $\xi$  й  $\eta$  — неперервні величини, що мають спільну щільність розподілу  $p(x, y)$  з маргінальними щільностями  $p(x)$  та  $q(y)$ , то з ф-ли (2) випливає, що

$$I(\xi, \eta) = \iint_{X \times Y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)q(y)}. \quad (3)$$

Хоча це визначення І. к. виявилася корисним з погляду проблем інформації передавання, воно не може бути єдиною мірою І. к., яку можна застосовувати в усіх випадках. Міру І. к. вибирають у кожному конкретному випадку, виходячи з конкретних обставин. Напр., на в усіх випадках доцільно задавати І. к. у термінах розподілу ймовірностей. Рад. математик А. М. Колмогоров визначив І. к. в об'єкті як складність його обчислювання за допомогою якогось універсального алгоритму. В деяких ситуаціях розумнішою мірою невизначеності, ніж ентропія, може бути, напр., дисперсія  $D\xi$  випадкової величини  $\xi$ , тому різницю безумовної й серед. значення умовної дисперсії

$$I = D\xi - MD(\xi, \eta)$$

можна з однаковою підставою вважати мірою І. к.  $\xi$  відносно  $\eta$ . Деякі осн. властивості І. к. такі: 1) величина  $I(\xi, \eta)$  не залежить від значень, що їх набувають випадкові величини  $\xi$  і  $\eta$ , а залежить лише від спільного розподілу цих величин; 2) величина  $I(\xi, \eta) \geq 0$ ,



при цьому тоді й лише тоді, коли  $\xi$  й  $\eta$  незалежні,  $I(\xi, \eta)$  може перетворюватися й на  $+\infty$ ; 3) величина  $I(\xi, \eta)$  симетрична відносно  $\xi$  й  $\eta$ , тобто  $I(\xi, \eta) = I(\eta, \xi)$ ; це означає, що  $I$  к. в  $\xi$  відносно  $\eta$  збігається з  $I$  к. в  $\eta$  відносно  $\xi$ ; 4) якщо  $f(\cdot)$  — будь-яка ф-ція, задана на просторі  $X$ , то  $I(\xi, \eta) \geq I(f(\xi), \eta)$ , що цілком узгоджується з уявленням про те, що  $I$  к. в  $\xi$  відносно  $\eta$  не менша за  $I$  к. в якійсь ф-ції від  $\xi$  відносно  $\eta$ ; 5)  $I(\xi, \eta) \leq I(\xi, \xi)$ , що теж узгоджується з інтуїтивним уявленням про  $I$  к.; 6) у разі, якщо  $\xi$  — дискретна випадкова величина,  $I$  к.  $I(\xi, \xi) = H(\xi)$ , де  $H(\xi)$  — ентропія  $\xi$ . В реалі випадків завжди  $I(\xi, \xi) = +\infty$ . Між  $I$  к.  $I(\xi, \eta)$  та ентропією в дискретному випадку (або дифер. ентропією в неперервному випадку) існує такий зв'язок. У дискретному випадку  $I(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi, \eta) = H(\xi) - MH(\xi/\eta)$ , де  $H(\xi)$ ,  $H(\eta)$  і  $H(\xi, \eta)$  — відповідно ентропії величин  $\xi$ ,  $\eta$  і пари  $(\xi, \eta)$ , а  $MH(\xi/\eta)$  — середня умовна ентропія  $\xi$  при умові  $\eta$

$$MH(\xi/\eta) = - \sum_{j=1}^m q_j \sum_{i=1}^n p_{ij} \log p_{ij},$$

де  $(q_j)$  — розподіл  $\eta$ , а  $(p_{ij})$  — умовний розподіл  $\xi$  при фіксованому значенні  $\eta$ . Аналогічно цьому для неперервних  $\xi$  і  $\eta$

$$I(\xi, \eta) = h(\xi) + h(\eta) - h(\xi, \eta) = h(\xi) - Mh(\xi/\eta),$$

де  $h(\xi)$ ,  $h(\eta)$  і  $h(\xi, \eta)$  — відповідно дифер. ентропії величин  $\xi$ ,  $\eta$  і пари  $(\xi, \eta)$ , а  $Mh(\xi/\eta)$  — середня умовна дифер. ентропія  $\xi$  при умові  $\eta$

$$Mh(\xi/\eta) = - \int_Y q(y) \int_X p(x/y) \log p(x/y) dx dy,$$

де  $q(y)$  — щільність розподілу величини  $\eta$ , а  $p(x/y)$  — умовна щільність розподілу  $\xi$  при умові  $\eta$ . З інших властивостей  $I$  к. важливо відзначити властивість умовної інформації, виражену ф-лою:

$$I((\xi, \zeta), \eta) = I(\eta, \zeta) + MI(\xi, \eta/\zeta),$$

де  $MI(\xi, \eta/\zeta)$  — середня умовна  $I$  к., що її визначають аналогічно тому, як було визначено середню умовну ентропію, та властивість «погрібної інформації», виражену ф-лою:

$$I((\xi, \zeta), \eta) + I(\xi, \zeta) = I(\xi, (\eta, \zeta)) + I(\eta, \zeta).$$

Для гауссівського випадку можна навести ф-лу явного обчислювання  $I$  к. Якщо  $\xi$  й  $\eta$  —  $n$ -вимірні гауссівські величини і при цьому пара  $(\xi, \eta)$  теж має гауссівський розподіл, то

$$I(\xi, \eta) = - \frac{1}{2} \log \frac{D_{\xi\eta}^{(2n)}}{D_{\xi\xi}^{(n)} D_{\eta\eta}^{(n)}}.$$

де  $D_{\xi\xi}^{(n)}$ ,  $D_{\eta\eta}^{(n)}$  і  $D_{\xi\eta}^{(2n)}$  — відповідно визначники кореляційних матриць величин  $\xi$ ,  $\eta$  і пари  $(\xi, \eta)$ . Зокрема, в одновимірному випадку

$$I(\xi, \eta) = - \frac{1}{2} \log(1 - r^2),$$

де  $r$  — коеф. кореляції  $\xi$  і  $\eta$ .

Літ. див. до ст. Інформація передавання.

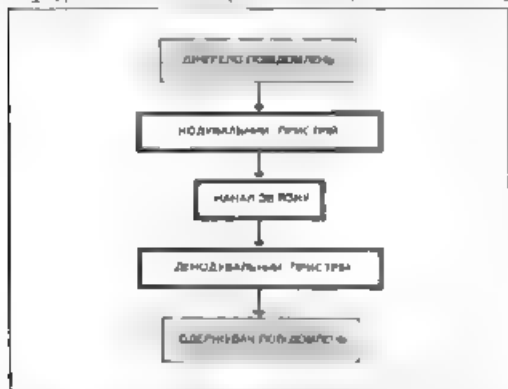
Р. Я. Добружин, В. В. Прасов.

**ІНФОРМАЦІЯ ПЕРЕДАВАННЯ** — процес перенесення інформації від джерела повідомлень до споживача повідомлень (адресата). Теорія  $I$  к. є складовою частиною інформаційної теорії. В теорії  $I$  к. вивчають оптич. й близькі до оптимальних методи передавання інформації по каналах зв'язку, припускаючи, що можна в широких межах варіювати методи кодування повідомлень у сигнали на вході каналу зв'язку і декодування сигналів у повідомлення на виході цього каналу. Заг. схема системи  $I$  к., яку вперше розглянув амер. математик К.-В. Шеннон (я. 1916), подана на мал. *Джерело повідомлень* виробляє повідомлення, що підлягає передаванню по каналу зв'язку від джерела до споживача повідомлень. Звичайно припускають, що можливі повідомлення належать до якоїсь заданої множини повідомлень  $X$ , яка може мати плану природу, із заданими статистичними властивостями (тобто з заданим розподілом ймовірностей на просторі можливих повідомлень  $X$ ). Якщо відомі статистичні властивості джерела повідомлень, це значно полегшує конструювання системи  $I$  к. І справді, вибираючи метод передавання, можна, напр., прагнути до того, щоб якнайшвидше і безпосередньо передавалися часті повідомлення. При конструюванні системи  $I$  к. завжди припускають, що заданим є вимоги, які ставлять до точності відтворення повідомлень, бо коли множина  $X$  не є скінченною чи лічбовою, не можна домогтися повного збігу того повідомлення, яке надсилають, і того, яке одержують під час передавання по будь-якому «зв'язаному» каналу зв'язку. Проте, вимога такого повного збігу є в багатьох випадках надмірною. Напр., не слід вимагати від конструктора системи радіомовлення, щоб точність відтворення радіоприймачем звукового сигналу перевищувала можливості людського уха, що сприймає далеко не всі деталі звукових коливань. Математично і вимоги точності відтворення повідомлення формують адекватного, як якесь обмеження, що виділяє клас допустимих сумісних розподілів ймовірностей для того повідомлення, яке передають, і для того, яке приймають.

Повідомлення, що їх виробляє джерело, передають по каналу зв'язку. При цьому передається по каналу можуть тільки елементи з якоїсь фіксованої множини  $Y$  (множина  $Y$  відрізняється від множини  $X$ , бо сигнали й повідомлення, які передають, мають адекватного різну природу, напр., повідомлення можуть бути дискретними, а сигнали — неперервними). В процесі передавання по каналу вхідний сигнал  $y \in Y$  перетворюється на якийсь

сигнал на виході каналу  $\bar{y} \in \bar{Y}$ , де  $\bar{Y}$  — фіксована множина. В найпростішому випадку безпомилкового передавання по каналу сигнал  $y$  збігається з  $\bar{y}$ . Але в будь-яких фізично реальних каналах під час передавання повідомлення з тих або інших причин проникають помилки, тому сигнал на виході відрізняється від сигналу, поданого на вхід каналу.

Щоб перетворити повідомлення на сигнал, який передається по каналу зв'язку, необхідно виконати операцію, яку наз. кодуванням повідомлення. Вона полягає в тому, що з кожним із можливих повідомлень зіставляють певний сигнал на вході каналу, тобто описують його математично як ф-цію, що відображає  $X$  в  $Y$ . У неперервних каналах зв'язку реально використовувати методи кодування часто наз. модуляцією. Коли повідомлення на вході набуває фіксованого значення, то по каналу передається сигнал, який відповідає цьому



Сигнальна схема системи передавання інформації

повідомленню. За допомогою операції декодування за відповідним сигналом на виході каналу відновлюють певне значення повідомлення, яке наз. повідомленням на виході каналу. У неперервних каналах зв'язку реально використовувати методи декодування часто наз. демодуляцією. Математично декодування описують ф-цією, що відображає простір  $Y$  значень сигналів на виході в простір значень повідомлення  $X$ . Кодування й декодування використовують неодмінно, якщо множина  $X$  відрізняється за своєю природою від множини  $Y$ . При цьому передавати по каналу зв'язку самі повідомлення не можна. Один з осн. висновків теорії І. п. полягає в тому, що за допомогою досить складних відповідно відомих методів кодування й декодування можна істотно поліпшити якість передавання й збільшити його швидкість.

Основну проблему, яку досліджують у теорії І. п., можна сформулювати так. Вважають відомими й фіксованими повідомлення із заданими умовами точності відтворення та канал зв'язку. Припускають, що методи кодування й декодування можна обирати довільно з певного досить широкого класу можливих методів. Треба знайти умови, за яких існують такі методи кодування й декодування, що задане повідомлення можна передати по заданому каналу зв'язку так, щоб задовольнялися фіксовані умови точності відтворення повідомлення. За цих умов треба ефективно побудувати ці методи, коли доведено, що вони існують. Розв'язання раніше вивченої проблеми розв'язати не вдалося. Навіть для того, щоб наближено розв'язати її в найпростіших ситуаціях, треба поєднувати теоретико-ймовірнісні, алгебри. й комбінаторні методи.

Наближені конструктивні розв'язки для найпростіших каналів зв'язку розглядають у кодуванні теорії. К.-Е. Шеннон встановив, що основну проблему теорії І. п. можна просто й остаточно розв'язати, якщо застосувати до неї асимптотичний підхід, заснований на припущенні, що кількість інформації, яка підлягає передаванню, і тривалість передавання по каналу прямують до нескінченності. За Шенноном  $C$  — пропускна здатність каналу зв'язку й  $H$  — ентропія повідомлення за заданих умов точності. Ці величини він визначив як максимум і мінімум відповідно якоїсь іншої величини, яку він наз. інформаційною кількістю. Шеннон показав, що коли  $H > C$ , то ніякі методи кодування й декодування не дають змоги передати повідомлення по каналу зв'язку із заданою умовою точності відтворення. З іншого боку, якщо  $H < C$ , і при цьому, коли ентропія  $H$  і тривалість передавання достатньо великі, то здійснювати передавання із заданою точністю відтворення можна, відповідно вибравши кодування й декодування.

Спочатку доведення теорем Шеннона мало якісний і нестрогий характер. Згодом під теорію Шеннона було підведено строгий математичний базис і зроблено узагальнення теорем Шеннона для каналів та повідомлень з певними параметрами. Інтерес до таких узагальнень викликає той факт, що на практиці, як правило, не можна вважати повністю відомими параметри джерела повідомлень і каналу зв'язку, тим більше, що ці параметри можуть іноді змінюватися в процесі передавання. Тому доводиться лише припускати, що джерело повідомлень і канал зв'язку належать до якогось класу можливих джерел повідомлень і каналів. При цьому вводять мінімальний критерій якості передавання, при якому якість передавання оцінюють для найгірших можливих джерел повідомлень і каналів, які належать до цього класу. Зроблено й узагальнення теорем Шеннона для каналів зі зворотним зв'язком. Наявність повного зворотного зв'язку означає, що в момент часу  $t$ , тобто на вході каналу, вважають за відомі точні значення сигналів на виході каналу для всіх моментів часу  $t' < t$ . Зокрема, для каналів без пам'яті зі зворотним зв'язком осн. результат полягає в тому, що наявність зворотного зв'язку не збільшує пропускної здатності каналу. В зв'язку з цим можна використовувати не такі складні кодувальні та декодувальні пристрої. Зпоміж інших узагальнень слід виділити канали з похибками синхронізації, де можуть бути випадкові збої синхронізації, внаслідок чого порушується однозначність відповідності між сигналами на вході й виході каналу, та двосторонні канали. У двосторонніх каналах є два потоки інформації, причому джерело повідомлень одного потоку суміщене з споживачем повідомлень іншого потоку, і при цьому передавання з зворотним напрямом можна використати як допоміжне — для передавання інформації в прямому напрямі.

З появою праць Шеннона почалися пошуки придатних для практичної реалізації варіантів методів передавання оптич. або близьких до оптич. Розроблено методи циклічного і згортального кодування, методи мажоритарного і послідовного декодування. Вони значною мірою ґрунтуються на тих самих доведеннях теорем Шеннона, хоча ці доведення спочатку здавалися неефективними. Теор. досягнення в галузі теорії кодування і прогрес у техніці обчисл. пристроїв, потрібних для практичної реалізації алгоритмів кодування й декодування, розвиток техніки зв'язку, яка використовує для І. а. дедалі складніше й дорожче обладнання, підвищення вимог до дальності й надійності передавання (напр., у зв'язку з проблемами космічного радіозв'язку) — все це привело до того, що використання рекомендованих теорій досягт. складних методів кодування й декодування стає тепер економічно й технічно виправданим.

Літ.: Добружин Р. Л. Теорія оптимального кодирования информации. В кн. Кибернетику на службу коммунизму т. 3 М. — Л. 1966. Шеннон К. Математическая теория связи. М. — Л. 1953. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М. 1963. Фан Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М. 1963. Вольфрам Д. Дж. Джемобс Н. Теоретические основы техники связи. Пер. с англ. М., 1969 (библиогр. с. 629—631).

Р. Л. Добружин, В. В. Прляв.

**ІНФОРМАЦІЙНА ТЕОРІЯ** — розділ кібернетики, який займається математичним описуванням та оцінкою методів передавання, зберігання, добування й класифікації інформації. Оскільки поняття «інформація» і застосування його досить багатоманітні, на даному етапі І. т. становить сукупність наук дисциплін, у кожній з яких визначають один з аспектів цього поняття.

І. т. в основному матем. дисципліна, яка використовує методи *імовірностей теорії*, *математичної статистики*, *лінійної алгебри*, *груп теорії*, *графів теорії*, *теорії теорії* та ін. розділи математики. Важливим рисом, яка об'єднує різні дисципліни, що їх відносять до І. т., є широке використання в них статистичних методів. Це пояснюється тим, що процес добування інформації пов'язаний зі зменшенням невизначеності наших відомостей про об'єкт, а природною мірою невизначеності якоїсь події є її *імовірність*.

Найважливішою складовою частиною І. т. є теорія інформації передавання. Часто термін «І. т.» використовують як синонім терміна «теорія передавання інформації».

Основи І. т. заклали 1948—49 амер. математик К. Шеннон (в. 1916). Великий внесок у неї зробили рад. математики А. М. Колмогорова (в. 1903) і О. Я. Хвічин (1894—1959) і рад. радіотехніки В. О. Котельнікова (п. 1908), О. О. Харкевич (1904—1965) та ін.

Виявлення теорії передавання інформації пов'язане з розв'язанням у 1948 К. Шенноном осн. проблеми знаходження швидкості передавання інформації, якої можна досягнути при оптич. методі кодування й декодування так, щоб імовірність *помилки* при переда-

ванні була як загодно малою. Ця оптич. швидкість передавання, яку наз. пропускною здатністю каналу зв'язку, виражається через введену Шенноном величину, названу *інформаційною місткістю*. Задачі, пов'язані з оптич. способом зберігання інформації, принципово не відрізняються від задач оптич. передавання інформації, бо зберігання інформації можна розглядати як її передавання, а не в просторі, а в часі. Осн. теорема І. т. спочатку мала характер теорем існування, в яких доводили існування оптич. методів кодування й декодування, але не вказували способи побудови їх. реалізації їх. Тому за останні десятиріччя набула широкого розвитку *теорія кодування*, присвячена побудові конкретних і відносно простих алгоритмів кодування й декодування, які своїми можливостями наближаються до оптич. алгоритмів, існування яких доводиться в теорії передавання інформації. Для теорії кодування характерним є те, що крім статистичних методів, вона використовує для побудови конкретних кодів алгебр. й комбінаторні ідеї.

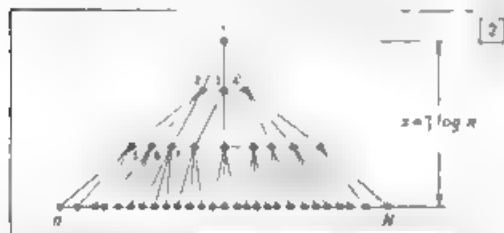
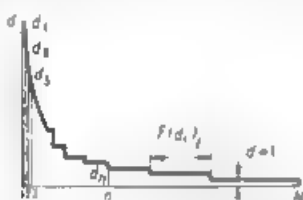
До І. т. відносять і всі застосування статистичних методів до описування способів перетворення сигналів на вході й виході каналів зв'язку. З погляду математики — це просто деякі застосування матем. статистики (у першу чергу статистики випадкових процесів), *застосування випадкових процесів теорії*, теорії ігор та ін. До І. т. природно долучається теорія *розпізнавання образів*, що розробляє алгоритми розподілу об'єктів за певними класами, які описано лише на інтуїтивному рівні й які не допускають чіткого матем. задавання. Такі алгоритми завжди виключають у себе процес навчання за певним списком об'єктів, які людина заздалегідь класифікувала. При будь-якому дог. трактуванні І. т. важко залишити поза її межами матем. статистику, оскільки осн. задачею матем. статистики є задача описування алгоритмів добування інформації з дослідних даних і розподілу об'єктів за певними класами на основі спостереження їхніх ознак. Те, що матем. статистику за традицією не розглядають як розділ І. т., можна історично пояснити тим, що виникла вона набагато раніше, ніж інші розділи І. т. До І. т. природно було б віднести й усьо лінгвістику, бо вона є наукою, яка вивчає осн. спосіб передавання інформації в людському суспільстві — мову, й інформатику, яка вивчає записи інформації в різному роду документах.

Літ. див. до ст. *Інформації передавання*, Р. Л. Добружин, В. В. Прляв.

**ІНФОРМАЦІЙНІ РОБІТ АВТОМАТИЗАЦІЯ** — див. *Пошук інформації автоматичний*, *Інформатика*, *Резервування автоматичне*.

**ІНФОРМАЦІЙНІ ПОТОКИ НАУКИ** — системи зафіксованих наукових і технічних результатів, що містяться в книгах, періодичних виданнях, патентах, звітах та інших формах зберігання й передавання науково-технічних знань. І. п. н. — це не лише об'єкт дослідження, а й канали зв'язку науки, без яких вона

не могла б функціонувати як складна динамічна інформаційна система. За орієнтовними даними, в світі існує 30—40 тис. періодичних видань, щорічно публікується 2 млн. статей, 75 тис. описів до патентів та авторських свідоцтв. І. п. н., як і наука загалом, — це складні системи з об'єктивно існуючими закономірностями. Виявлення закономірностей систем І. п. н. є одним із центр. завдань інформаційної науки. При організації пам'яті інформаційно-пошукових систем (ІПС) і розробці алгоритмів їхньої роботи треба враховувати ці закономірності.



1. Інформаційний розподіл «гіперболічні сходів».  
2. Структурна модель розподілу «гіперболічні сходів».

Інтегральна модель систем І. п. н. ґрунтується на статистичних розподілах учених за продуктивністю, статей — за журналами тощо. Ще 1926 доведено, що жодні з яких-небудь галузей знаєть розмістити вчених за рангами, пропорційно кількості їхніх публікацій, то знаходять розподіл у вигляді «гіперболічних сходів» (маж. 1), де  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$  — кількість публікацій ученого 1, 2, 3, ..., n-го рангу,  $N$  — загальна кількість елементів розподілу. В 1946 доведено, що аналогічний розподіл виходить, якщо впорядковувати журнали за кількістю публікацій в якій-небудь проблемі (т. з. закон розсіювання інформації). В 1949, визначають розподіл частот слів у досить довгому тексті, одержали аналогічний

розподіл  $P_n = \frac{c}{n^\gamma}$  (розподіл Ціффа), де  $c$  —

константа,  $n$  — ранг слова в словнику,  $\gamma \approx 1$  для природних мов. В інформаційному розподілі «гіперболічні сходів» відображено загальні властивості складних систем ієрархічного типу. Сильною для таких систем є деревовидна структура (маж. 2). Розподіл, показаний на маж. 1, відображено в структурній формі на маж. 2. Елементи, що на маж. 1 містяться в межах одного східця, на маж. 2 містяться в межах одного шару. Т. з. закон

Бредфорда відповідає значенню  $\gamma \approx 1$  і якісно формулюється так: «Якщо наукові журнали розмістити в порядку зменшення їхньої продуктивності, тобто кількості статей з певного питання, то їх можна розділити на основні періодичні видання, переважно присвячені цьому питанню, і на кілька груп, чи зон, у яких по стільки ж статей, як і в основній зоні. Кількості видань, що в основній групі і в наступних зонах, відноситимуться, як 1:1:1:2<sup>2</sup>. Точніше було б говорити не про «розсіювання», а про «концентрацію» публікацій у невеликій зоні спеціалізованих видань. Це підтверджує й нагромаджена статистика з розподілу публікацій в якій-небудь галузі: знаєть у періодичних виданнях, яка свідчить, що в порівняно обмеженій кількості журналів (5-10%) сконцентровано близько 50% публікацій з обраної теми. Розподіл публікацій, розглядуваний у часі, відображає повні істотні закономірності розвитку самої науки. Відомості з «шкільної арифметики», напр., «розсієння» по всіх журналах тому, що ця наука припинила існування як «система», і розподіл її публікацій у літературі досяг значення максимальної ентропії. І навпаки, в історії науки відомо чимало прикладів, коли який-небудь науковий напрям, що виник у якійсь одній науковій установі, відображається в публікаціях друкованого органу лише цієї установи. Між цими крайніми випадками є множини статей, які відображаються в реальних розподілах. Це приводить до зміни параметра  $\gamma$  від 0 до  $\infty$ . Проте в будь-якому випадку «розсіювання» інформації — це така сама об'єктивна закономірність, як, напр., і розподіл частот слів у тексті, і визначається вона не «класом» у документалістиці й видавничій справі. Цю закономірність доводиться брати до уваги при розробці інформаційних систем, комплектуванні фондів бібліотек тощо.

Велике практичне значення має прогнозування зростання І. п. н. Потреби планування роботи видавництва, центр. і галузевих інформаційних служб і керування науковими дослідженнями пов'язані з прогнозуванням не загальним зростанням світового інформаційного масиву, а зростання публікацій в окремих галузях науки. В таких окремих галузях науки зростання кількості публікацій є функцією від кількості наукових працівників:  $D = f(N)$ . Проте лінійна залежність між ними існує лише в одному випадку — коли продуктивність усіх наукових працівників однакова. В загальному випадку вигляд цієї функції визначається законом розподілу вчених за продуктивністю.

Однією з важливих рис розвитку науки в період науково-тех. революції є збільшення «валентності» окремих наукових результатів, їхньої здатності збагачувати «сучужі» галузі науки. Цей факт разом з величезним зростанням самих наукових досліджень і збільшенням у зв'язку з цим кількості публікацій іноді сприймається як переконливий доказ інформаційної кризи. Насправді цю ілюзію «цоховання» вчених під масою статей

створюють не самі по собі потоки публікацій, а потік досягнень науки. За цих умов традиційні засоби зберігання й пошуку інформації вже не можуть задовольнити вчених, треба розробити й створити інформаційно-пошукові та інформаційно-логічні системи, що ґрунтуються на нових принципах і враховують складні закономірності систем інформаційних потоків.

Дит. Добров Г. М. Научное исследование в области информатики. К., 1966. [Бібліогр. с. 254, 267].  
Михайлов А. Н., Черныш А. И., Гиял-Ревский Р. С. Основы информатики. М., 1968. [Бібліогр. с. 728—735].  
Коваченко Л. С. О некоторых проблемах релевантности в информатике и науковедении — Шрейдер Ю. А., Осипова М. А. О некоторых динамических моделях в информатике. «Научно-техническая информация. Серия 2», 1969. № 6.  
Коваченко Л. С. Нейросетевые методические вопросы теории информационно-логиче-ских систем. «Научно-техническая информация. Серия 2», 1969. № 12.

**ІНФОРМАЦІЙНО-ДОВІДКОВА СИСТЕМА** — система реєстрації, переробки та зберігання інформації, призначена для забезпечення абонентів відомостями довідкового характеру. Зміст видаваної інформації визначається даними, загромодженими в довідкових масивах (ДМ) системи. Функціонально типовий процес видавання довідки полягає в тому, щоб виконати асоціативний пошук у ДМ і потім здійснити потрібні змістові й (або) структурні перетворення й оформити одержані відомості у вигляді документа чи інформаційного повідомлення спец. виду. До інших функцій І.-д. с. належать тривале зберігання великих обсягів систематизованої інформації, яка має складну внутрішню структуру, поповнювання й оновлювання збержуваної інформації й забезпечування обміну інформацією з абонентами. Типовими прикладами І.-д. с. є довідкові місцеві служби, бібліографічні відділи в бібліотеках, оперативнодиспетчерські служби на підприємствах тощо. До складу І.-д. с. зазвичай входять такі функціональні компоненти: сховище інформації або *аналоговий комп'ютерний пристрій* (ЗП); пристрої перетворювання, передавання й відображення інформації; *канали зв'язку* й передавання даних і т. зв. процесор, який здійснює об-ф-ції по обробці інформації (щод процесором можна розуміти як ЕЦОМ, так і колектив людей, які виконують аналогічну роль в І.-д. с.). Зберігати та обробляти інформацію можна централізовано або в кількох взаємоз'язаних, але територіально віддалених один від одного пунктах; це відповідає двом осн. типам організації І.-д. с.

За характером представлення й інтерпретації виводжуваної та збержуваної інформації, розрізняють І.-д. с. документального й фактографічного типу. В документальній І.-д. с. інформація зберігається й видається абоненту у вигляді документів (напр., статей, патентів, тех. документації). В окремих випадках абонентів повідомляють перелік адрес документів у ЗП. Результатом роботи фактографічної І.-д. с. є, як правило, сукупність фактів, тобто значень кількісних величин і назв предметів, проце-

сів, явищ тощо. На практиці часто трапляються системи, які видають інформацію й документального, й фактографічного характеру. Такі системи наз. *документально-фактографічними*. І.-д. с., особливо фактографічні, можуть відрізнятися одна від одної складністю виконуваної переробки інформації. Найпростішими щодо цього є *інформаційно-пошукові системи*, в яких формування довідки зводиться до пошуку потрібної інформації в ДМ. У найскладніших системах результати пошуку можуть зазнавати порівняно складної словесної обробки (напр., виділення фактів з тексту знайдених статей).

Функціональні можливості, ефективність і галузь застосування І.-д. с. істотно залежить від ступеня автоматизації й механізації процесів обробки, введення — виведення й зберігання інформації. Найширші перспективи щодо цього пов'язуються з використанням автоматизованих І.-д. с. (АІДС), побудованих на базі ЕЦОМ і спряжених з нею засобів зберігання, передавання й відображення інформації. АІДС складається з таких осн. частин: тех. обладнання, матем. забезпечення та інформаційної бази.

До складу тех. обладнання АІДС входять: ЕЦОМ, яка є функціональною основою процесора системи; комплект периферійного обладнання для введення — виведення, передавання й підготовки інформації, пристрої для зв'язку абонента з ЕЦОМ і різних типів ЗП для зберігання великих обсягів різноманітної інформації. Як ЗП в АІДС використовують нагромаджувачі на магн. стрічках, дисках і барабанах та механізовані пристрої зберігання мікрофільмів, дикікроперфокарт тощо. Систему зв'язку АІДС з абонентами будують зазвичай на базі стандартних пристроїв зв'язку (напр., *телемаїнів*), а'єдиуваних в ЕЦОМ через телеграфію або телефонні канали. Великого поширення тепер набули абонентські пульти, обладнані екранами, щоб відображати виводжувану в ЕЦОМ інформацію, та клавіатурою для введення даних та інформації керуючого характеру (див. *Екранний пульт*).

Інформаційна база АІДС являє собою сукупність ДМ, у яких зберігається інформація, яка становить предметну сферу визначеної системи. Цю інформацію організовано в ЗП з урахуванням вимог до необхідного часу вибирання даних, до форми та виду подавання їх. Кількість ДМ залежить від змістової структури сфери призначення АІДС, прийнятого порядку внесення інформації при оновлюванні інформаційної бази й характеру підготовлених первісних даних для розв'язування задач. Так, напр., організація ДМ у вигляді кількох однакових щодо змісту, але різними способами впорядкованих *масивів*, істотно скорочує час розв'язування типових довідкових задач. До складу матем. забезпечення АІДС включають: набір *програми*, які реалізують різні *алгоритми* переробки інформації й керування процесом функціонування АІДС; комплекс формалізованих мов (див. *Мови формальні*), призначених описувати ін-

формацію, яка циркулює в системі, й алгоритми обробки; сукупність масивів інформації службового характеру (словники, кодувальні таблиці тощо) й встановлені матеріали по застосуванню матем. забезпечення. Ключовими компонентами матем. забезпечення АІДС є: *мова інформаційна*, зовнішня мова для формулювання запитів до системи, *бібліотека стандартних підпрограм*, *операційна система* з програмою-диспетчером, мова представлення вивідної інформації та блок реалізації асоціативного пошуку для заданого типу критерію смислової відповідності.

Продуктивність І.-д. с. багато в чому залежить від організації процесу функціонування системи, а це пов'язується з розподілом ресурсів, від вибору режимів роботи І.-д. с. (ретроспективний пошук, вибірковий розподіл інформації тощо) та заданої дисципліни обслуговування абонентів і забезпечення раціональної послідовності виконання окремих етапів і функцій обробки. Сучасна організація функціонування АІДС базується на використанні *мультимікропроцесування*, організації обчисл. процесу (див. *Обчислювальні роботи методи організації*) з одночасним розв'язуванням кількох задач і обслуговуванням абонентів і (або) задач у режимі розподілу часу. Специфічними особливостями АІДС є: широке використання дисциплін пріоритетного обслуговування абонентів та задач; суміщення режимів інформування за розписом з оперативною обробкою нестандартних запитів, які надходять довільно в часі; реалізація одночасного багатоканального дистанційного зв'язку з абонентами. АІДС зазвичай розширюють можливу сферу застосування І.-д. с. Напр., АІДС широко використовують і в складі *автоматизованих систем управління* в промисловості, економіці й на транспорті, в такому ж для автоматизації управління підприємствами й науковими організаціями (див. *Автоматизовані системи управління підприємствами*).

Лит. Михайлов А. И., Черныш А. И., Гиларевский Р. С. Основы информатики. М. 1988 (бібліогр. с. 324-73). Стожик А. А., Зайцен Н. Г. Автоматизированные информационно-справочные системы из назначения, характеристики и основные требования к ним. «Кибернетика», 1989. № 6. Мидоу Ч. Анализа информационно-поисковых систем. Пер. с англ. М. 1977. Тейлор Ф. У. Информационно-поисковые системы. Характеристики, испытание и оценка. Пер. с англ. М. 1972.

**ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧА СИСТЕМА** — система, яка на основі інформації про стан об'єкта виробляє й приймає рішення щодо керування ним. За структурою І.-к. с. поділяють на дві підсистеми: підсистему забезпечення інформацією служби управління об'єктом і підсистему вироблення й приймання рішень щодо управління. У реальних системах управління функції І.-к. с. виконує адміністративно-управлінський персонал: обліковці (реєстрації й обліку даних), бухгалтерія (зображення поточного виду об'єкта, систематизація даних), конструкторський, встановчий та ін. відділи (вироблення рішень), дис-

петчерський, технологічний та ін. відділи (прийняття рішень). Кожен відділ на основі систематизованих даних підготував необхідну інформацію, внаслідок чого потоки інформації в існуючих І.-к. с. часто дублюють один одного.

Наявність однієї планової засади в управлінні нар. г-вом створює ієрархічну структуру з різних І.-к. с. Це значить, що І.-к. с. нижчого рівня виробляє й приймає рішення для досягнення нерозв'язаного об'єктом мети, заданої І.-к. с. вищого рівня. Вироблення мети в І.-к. с. вищого рівня здійснюється за фактичною інформацією про стан об'єкта управління нижчого рівня й мету, задану І.-к. с. вищого рівня. Практично мету задають у вигляді переліку значень показників, яких повинні досягти об'єкт.

Підсистема забезпечення інформацією служби управління керуванням об'єктом здійснює свої функції за допомогою різних масивів даних про цей об'єкт. Умовно-постійний масив даних характеризує структуру об'єкта керування (кількість елементів, їхні характеристики, взаємозв'язок тощо). Напр., структуру підприємства утворюють цехи осн. й допоміжного виробл., склади, випускана продукція, входження деталей у вузли, технологічні схеми проходження деталей по цехах і т. д. Масив, сформований за даними з первинних документів, відображає динаміку стану керуваного об'єкта, напр., дані про міжцеховий рух деталей, про забезпеченість осн. виробництва деталями, роботою силою тощо, про реалізацію продукції, витрату деталей і зачастих і т. ін. Масив даних, нагромаджений за структурними елементами об'єкта керування, містить інформацію про трудові, матеріальні й грошові ресурси, фактично затрачені на виготовлення певної кількості або ваги кожного виду кінцевого продукту. Масив нормативних даних містить інформацію про витрати матеріальних, трудових і грошових ресурсів на виготовлення одиниці кінцевого продукту. Нормативні дані поділяють на розрахункові й статистичні. Розрахункові нормативи використовують, запускаючи у виробн. новий вид продукції, або вводять у директивному порядку. Такими є, напр., норми податків. Статистичні нормативи одержують внаслідок поділу сумарної величини витрат ресурсів (матеріальних, трудових і грошових) на кількість або вагу виготовленого продукту й використовують, щоб коректувати розрахункові нормативи. Залежно від задиту, який надходить у підсистему, за даними одного з масивів або за сукупністю масивів формується відповідь.

Підсистема вироблення й приймання рішень займається прогнозуванням стану керуваного об'єкта, виробляє й приймає рішення щодо досягнення заданої мети. Прогнозування в підсистемі реалізують за допомогою планування на різних рівнях: перспективного, річного, квартального, декадного і щоденно-добового. Розвиток виробничих відносин, різноманітність випус-

каної продукції й великі швидкості перебігу виробничих процесів на підприємствах породжують багатоваріантність і невизначеність у досягненні поставленої мети. Це веде до необхідності використовувати екон.-мат. методи, що своєю чергою вимагає докладнішої й вірогіднішої інформації про керуваний об'єкт. Збільшення обсягів інформації про об'єкт і складність ручного розрахунку екон.-матем. моделей стали причиною запровадження в практику роботи І.-к. с. автоматизованих систем управління.

Лит. Неймичнов В. С. Информатическая информация в кибернетических системах. М.: Наука, 1987. 248 с. (Серия «Информатика и ее приложения»). В кн.: Исследования по общей теории систем. М., 1969.

**ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ ТЕХНІЧНЕ ОСНАЩЕННЯ** — комплекс технічних засобів, якими оснащено інформаційно-керуючі системи і автоматизовані системи управління підприємствами (див. також Автоматизовані системи управління в народному господарстві, Систематизація).

**ІНФОРМАЦІЙНО-ЛОГІЧНА МОВА** — див. Мова інформаційно-логічна.

**ІНФОРМАЦІЙНО-ЛОГІЧНА СИСТЕМА** — автоматизована система, що на основі масиву фактичних даних, який зберігається в ній, здійснює алгоритмічне розв'язування різних задач щодо синтезу нових відомостей, які не існують у явній формі в цьому масиві. Таке розв'язування проявляється комбінаторним перетворенням сукупностей елементів інформаційного масиву, який моделює логічний чи евристичний висновок. Окремий випадок І.-л. с. — автоматизована інформаційно-пошукова система фактографічна, яка у відповідь на запити видає відомості, що їх немає в явній формі й її інформаційних масивах.

Під час функціонування будь-якої інформаційно-пошукової системи (ІПС), у т. ч. й інформаційно-пошукової системи документальної, моделюються деякі найпростіші види логічного висновку. Завдяки цьому під час пошуку відбираються й такі релевантні документи (див. Релевантність документа), зміст яких перебуває у відношенні семантичного проходження до інформації, якої вимагає запит. При цьому враховуються осн. факти, властиві відповідній предметній галузі. Здебільшого ці факти зображено в термінах мови інформаційно-пошукових дескрипторного типу, в найпростішому випадку — в термінах відношень парадигматичних між дескрипторами, що відіграють роль дескриптивних аксіом предметної галузі. Дескриптивні аксіоми можна також вважати включеними до алгоритму перевірки критерію семантичної відповідності. Аналогічно цьому при алгоритм. розв'язуванні обчисл. задач перетворення вихідних даних задачі на шуканий числовий розв'язок рівносильне моделюванню процедури логіч. висновку, аксіоматику й правила яких включено до алгоритму розв'язування задачі. Таке саме буває й під час машинного доведення теорем. Характерною особливістю

І.-л. с. є те, що для розв'язування задач (крім деякої незмінної аксіоматики й сукупності правил виведення) використовують набори елементів інформаційного масиву змінного складу, застосування до яких згаданих правил і дає розв'язання поставленої задачі. Розв'язувані задачі наз. і н ф о р м а ц і й н о - л о г і ч н и м и, на відміну від інформаційно-пошукових задач, що їх розв'язує ІПС. Але якщо з'єднати кон'юнкціями всі різні висловлювання, що становлять інформаційний масив якоїсь фактографічної ІПС, і розглянути одержану кон'юнкцію як запис одного «складного факту» (або аналогічно розглянути сукупність документів з інформаційного масиву документальної ІПС як фрагменти одного «наддокумента»), то відмінність між інформаційно-пошуковими та інформаційно-логіч. задачами стирається в тому розумінні, що при цьому для розв'язування і тих, і других згаданих «складних фактів» (або «наддокумента») є поряд з інформаційним запитом чи формулюванням інформаційно-логіч. задачі незмінним вихідним словом, до якого застосовують відповідні алгоритми розв'язування задач, і тому його можна вважати включеним до складу цих алгоритмів.

Суть різниці між інформаційно-логічними та інформаційно-пошуковими задачами й відповідними системами полягає в складішому характері модельованих в І.-л. с. умов і відних процедур. Щоб забезпечити можливість такого моделювання в І.-л. с., треба застосувати багаті й значною мірою формалізовані мови інформаційно-логічні.

Напр., простою реалізованою моделлю І.-л. с. є програма «Бейсбол», яка автоматично відповідає на різноманітні питання щодо цієї гри. Прикладом експериментальної І.-л. с., що розв'язує практично важливу задачу, є машинний пошук т. з. «хім. аналогів» шляхом синтезу хім. сполук на евристичній основі.

У зв'язку з тенденціями, що накреслилися щодо алгоритмізації процесів створення тех. виробів заданого призначення, можна сподіватися в майбутньому на застосування І.-л. с. для розв'язування різноманітних проектних і конструкторських задач. Вважають, що перспективними сферами застосування І.-л. с. в майбутньому є складання аналітичних і критичних тематичних оглядів літератури, виявлення закономірностей і евристичний синтез робочих гіпотез під час наук. досліджень, вірогідне прогнозування нових фактів тощо. Попередньою умовою для створення І.-л. с., що могли б виконувати такі функції, є створення відповідних великомасштабних фактографічних ІПС.

Лит. Власов Г. Э., Френк В. К. Проблематика создания машинного языка для органической химии. В кн.: Сообщения лаборатории электромоделирования, в. 1. М., 1960. Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967 [Сб. лог. п. 491—546]; Рейтман У. Р. Познание и мышление. Пер. с англ. М., 1969 [Сб. лог. п. 378—395]; Cooley E. J., Wipke W. T. Computer-assisted design of complex organic syntheses «Science», 1969, v. 166, № 3902. Г. Е. Власов



**ІНФОРМАЦІЙНО - ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЦЕНТР ПІДПРИЄМСТВА** — основна ланка автоматизованих систем управління підприємством (АСУП). І.-о. ц. п., який працює в складі АСУП, виконує функції збирання, нагромадження й централізованої обробки даних, розраховку й видає планові завдання цехам та ділянцям, веде облік виробів й матеріально-тех. забезпечення, організовує розв'язування задач оптим. планування, прогнозує виробничо-госп. діяльність підприємства на ризні періоди на основі єдиної інформаційної бази АСУП.

У різних автоматизованих системах управління функції персоналу І.-о. ц. п. за характером виконуваних робіт близькі між собою, а кількісний склад може бути різний; він залежить від обсягу виконуваних робіт. Обслуговують будь-який І.-о. ц. п. адміністративний персонал, на який покладено керівництво його повсякденною діяльністю, планування й контроль за дотриманням графіка виконання робіт та облік усіх робіт, і персонал, який приймає початкові дані від служб підприємства, готує проміжні *масиви інформації* для введення в ЕОМ, оформляє розульці обробки інформації, обслуговує обладнання, бібліотеку стандартних і типових програм тощо, тобто забезпечує безперерйне функціонування АСУП.

І.-о. ц. п. — це своєрідний «цех» обробки інформації, готовою продукцією якого є результати розв'язування задач. Такі центри в складі АСУП координують роботу підприємства, керують нею. Тому І.-о. ц. п. клас. координуючі й керуючі центри.

**ІНФОРМАЦІЙНО-ПЛАНУЮЧА СИСТЕМА** — те саме, що й *інформаційно-керуюча система*. Див. також *Автоматизовані системи управління підприємством*.

**ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА МОВА** — див. *Мова інформаційно-пошукова*.

**ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА СИСТЕМА** — сукупність мовно-алгоритмічних і технічних засобів для зберігання, пошуку й видавання необхідної інформації. І.-п. с. забезпечує пошук інформації автоматичний. На вхід І.-п. с. надходять інформація двох видів: що відображає досягнутий рівень знань про який-небудь клас об'єктів (пристроїв, технолог. процесів, хім. сполук, реакцій, теорем тощо) і що відображає інформаційну потребу абонентів І.-п. с. Інформація першого виду наз. *інформаційним масивом*, а другого — *інформаційним запитом*. Елементи інформаційного масиву та інформаційні запити надходять в І.-п. с. природною мовою, далі їх перекладають формалізованою *мовою інформаційно-пошуковою* (див. *Індексування*). Осн. функцією І.-п. с. є виявлення елементів інформаційного масиву, які відповідають на запит, що його поставлено системою. І.-п. с. складається з двох осн. компонентів — абстрактної І.-п. с. та *інформаційно-пошукового пристрою*. Абстрактна І.-п. с. — це сукуп-

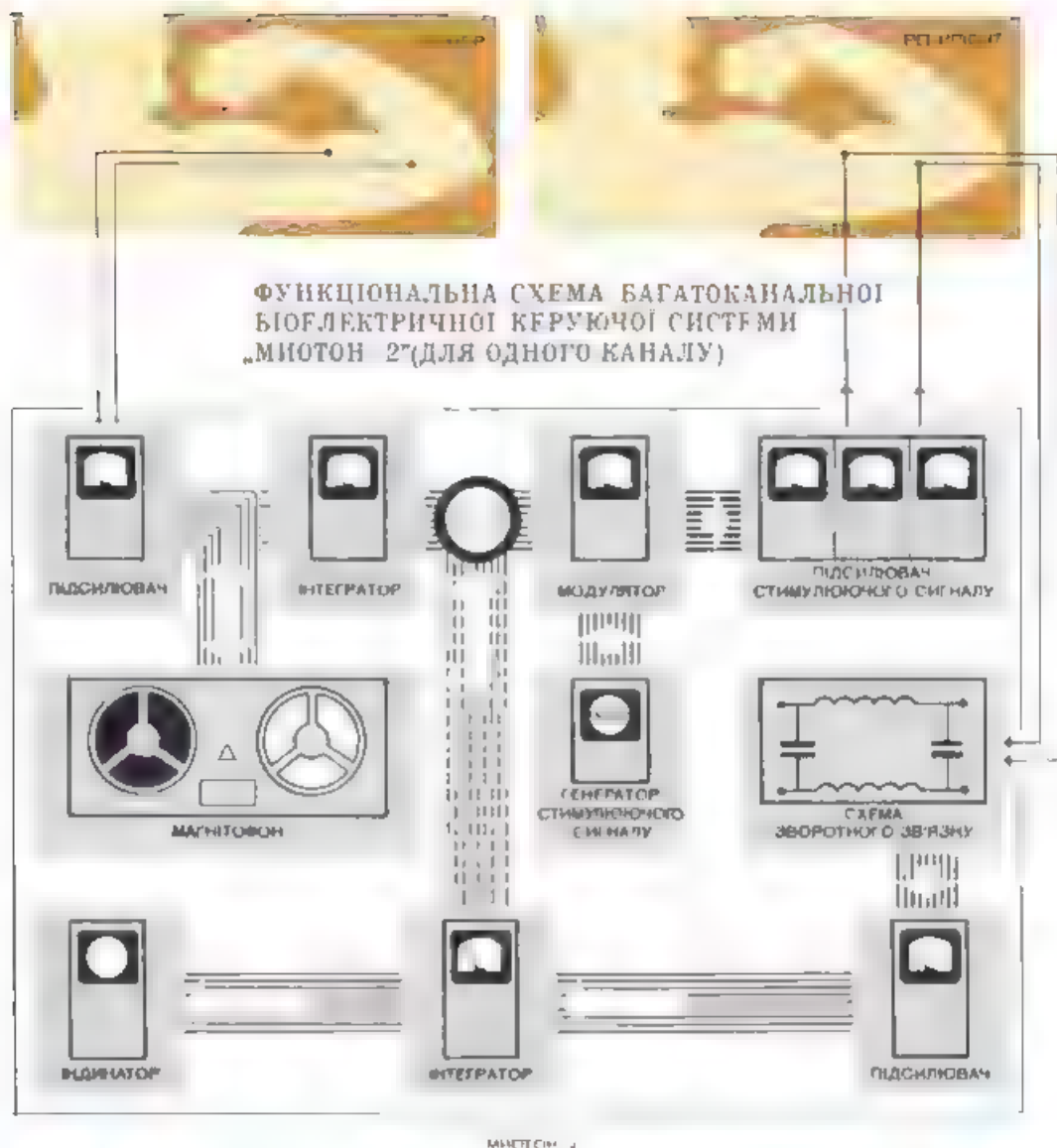
ність інформаційно-пошукової мови, правил індексування та критерію семантичної відповідності. Абстрактна І.-п. с. реалізується за допомогою або інформаційно-пошукового пристрою, в якому як посій інформації можуть застосовуватися каталожні картки, перфокарти різного типу, що обробляються вручну або тісно пов'язані з аналітичними машинами, або пошукового пристрою типу універсальної цифрової обчислювальної машини. До засобів реалізації абстрактної І.-п. с. належать і інструкції щодо обробки інформаційних запитів та елементів інформаційного масиву, програми для ЕЦОМ тощо. За характером інформаційного масиву (отже, й за характером інформації, що її видають) І.-п. с. поділяють на *інформаційно-пошукові системи документальні* (або документографічні) та *інформаційно-пошукові системи фактографічні*. Інформаційний масив документальної І.-п. с. складається з елементів, кожний з яких передає осн. зміст документа (статті, книги, тех. звіту, патента тощо), незалежно від того, скільки об'єктів описано в документі. Такий елемент наз. *пошуковим образом документа*. Інформаційний масив фактографічної І.-п. с. складається з елементів, кожний з яких відповідає безпосередньо певному об'єкту, незалежно від того, чи описано його в одному документі, чи в кількох. Щоб зручніше було зберігати й обробляти інформацію, елементи інформаційного масиву в інформаційно-пошуковому пристрої розчленовують на складові частини й об'єднують один з одним у різних сполученнях. Документальна І.-п. с. у відповідь на поставлений запит видає множини документів, що містять шукану інформацію, або вказує на адреси зберігання цих документів. Фактографічна І.-п. с. у відповідь на запит видає безпосередньо шукану інформацію. За видом інформаційного забезпечення І.-п. с. можуть бути використані як системи вибіркового розподілу інформації, так і системи довідкової (або ретроспективного) пошуку або можуть поєднувати обидві функції.

Лит. Беркштейн З., Лахуті Д., Чернявський В. Вопросы теории поисковых систем. М., 1946 [Бібліогр. с. 130-131] Михайлов А. И., Черный А. И., Галицкая Р. С. Основы информатики. М., 1968 [Бібліогр. с. 728-735].

Б. Ф. Скороходько.

**ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА СИСТЕМА ДОКУМЕНТАЛЬНА** — інформаційно-пошукова система, призначена для пошуку науково-технічних документів (статей, книг, науково-технічних звітів, описів до авторських свідоцтв і патентів тощо), в яких є необхідна інформація. У відповідь на інформаційний запит, поданий системі, І.-п. с. д. видає адреси зберігання релевантних документів, тобто таких, які відповідають на запит. Адреса зберігання — це код, який однозначно визначає місце перебування документа у сховищі. Роль адреси зберігання може відігравати бібліографічний опис документа (автор, назва, джерело), каталожний, інвентарний чи порядковий номер документа тощо. Деякі І.-п. с. д. здійснюють і видавання самих документів чи копій

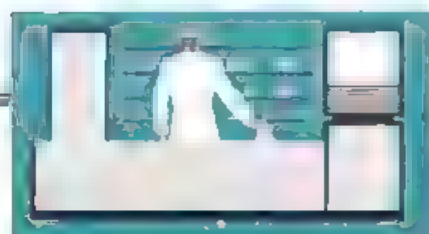




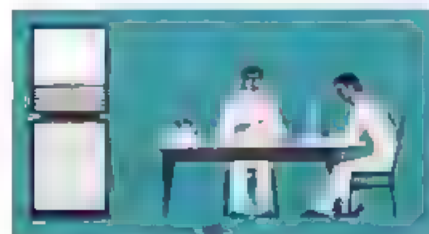
# СХЕМА АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ЛІКАРНЕЮ



8



9

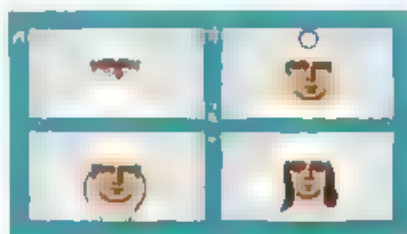


10

5



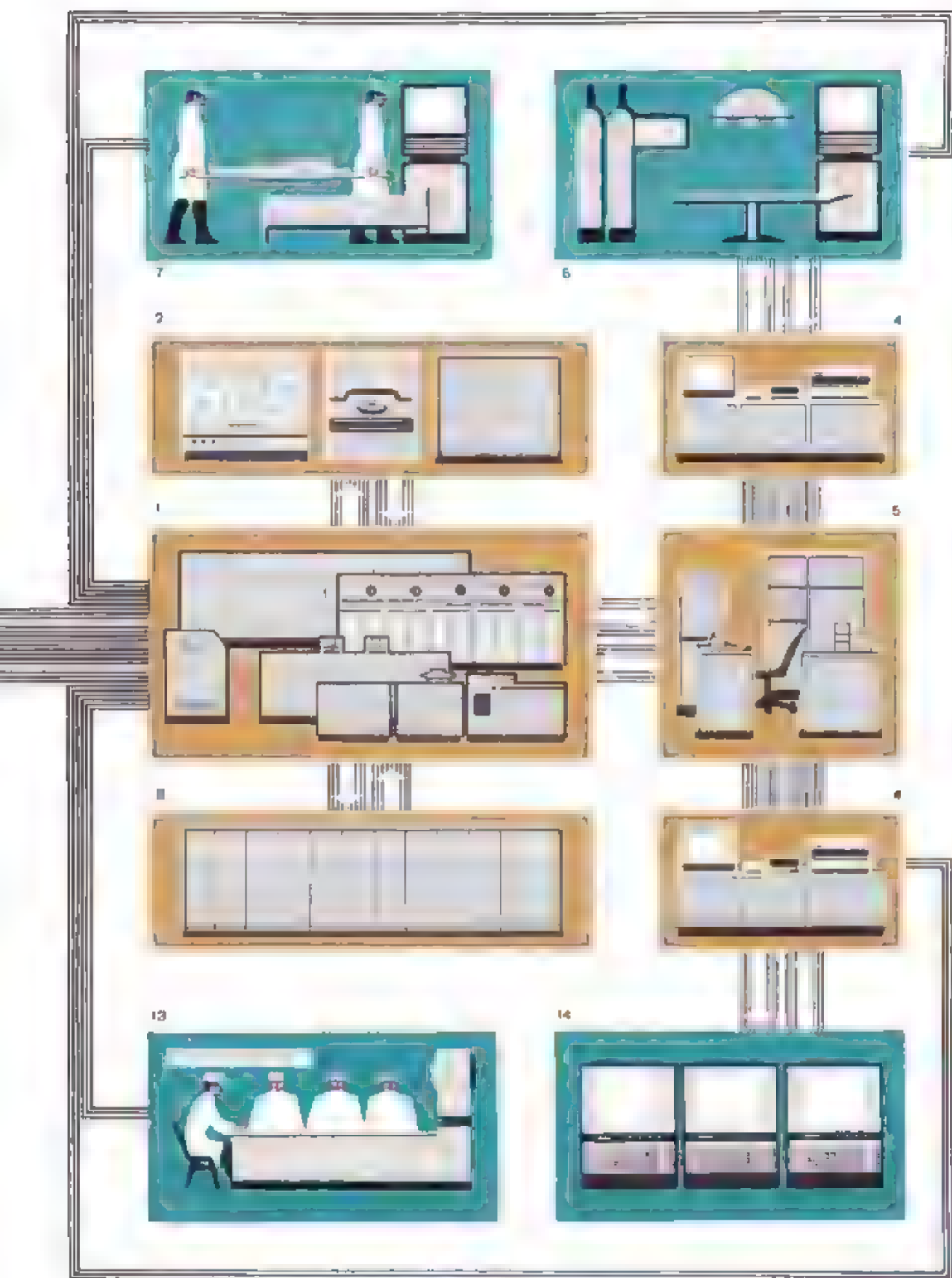
- 1 ЕЛЕКТРОННА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА
- 2 ІНФОРМАЦІЙНИЙ ЦЕНТР ТЕРМІНОВА
- 3 ЕЛЕКТРОННИЙ АРХІВ
- 4 СЛІДКУЮЧІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ
- 5 ДІАГНОЗ СТАН РЕКОМЕНДАЦІЇ
- 6 МОДЕЛЮЮЧИЙ КОМПЛЕКС (МАПА ЕОМ
- 7 ДІАГНОЗ ПРОГНОЗ ЛІКУВАННЯ)
- 8 В ДОМОСТІ ПРО ХВОРОГО ДІАГНОЗ
- 9 ПРОГНОЗ ЛІКУВАННЯ
- 10 ВІДЛІЧЕННЯ ДЛЯ ПРИЙОМУ ХВОРОГО
- 11 ІНДИВИДУАЛЬНИЙ ПРОФІЛЬ ДІАГНОЗ
- 12 ПРОГНОЗ ЛІКУВАННЯ
- 13 ДІАГНОСТИЧНІ ЛАБОРАТОРНІ
- 14 МЕДИЧНІ ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ДАНІ
- 15 АПТЕКА В ДОМОСТІ ПРО ЛІКА
- 16 ПРИЗНАЧЕННЯ ДІЄТИ ДІАГНОСТИЧНІ
- 17 ЛІКУВАННЯ
- 18 ВІДЛІЧЕННЯ РЕАБІЛІТАЦІЇ
- 19 БІОІМІТРИЧНІ ДАНІ
- 20 ГОЛОВНИЙ ЛІКАР ВЧЕРА РАДА АСУП
- 21 УПРАВЛІННЯ
- 22 ПАРАТИ ІНТЕНЗИВНОГО НАГЛЯДУ

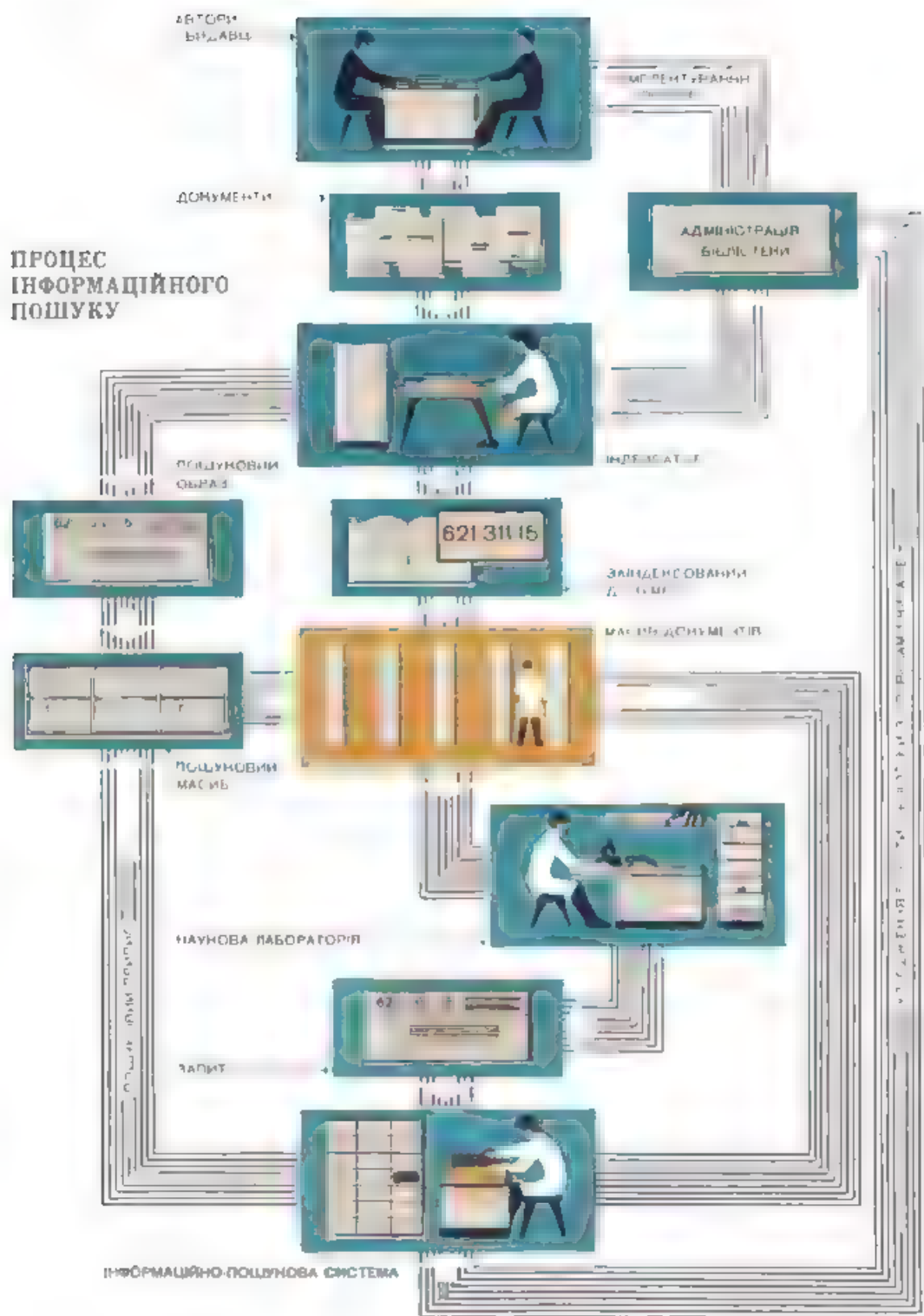


12

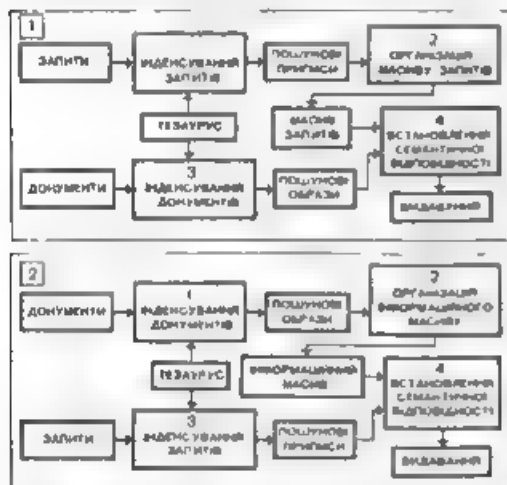


13





їх, але здебільшого це відбувається поза І.-п. с. д. (вручну або за допомогою спец. інформаційно-пошукових пристроїв). І.-п. с. д. можуть виконувати функції вибіркового розподілу інформації і довідкового (ретроспективного) пошуку або поєднувати ці функції (див. *Пошук інформації автоматизований*). До складу І.-п. с. д. входять блоки, що виконують осн. операції пошуку інформації — індексування документів і запитів і встановлення семантичної відповідності між запитами і документами (мал. 1 і 2) *Ефективність*



1. Спрощена блок-схема документальної інформаційно-пошукової системи, яку використовують для вибіркового розподілу (1-й і 2-й блоки працюють у режимі формування й поповнення масиву запитів, 3-й і 4-й — у режимі пошуку).

2. Спрощена блок-схема документальної інформаційно-пошукової системи, яку використовують для довідкового (ретроспективного) пошуку (1-й і 2-й блоки працюють у режимі формування й поповнення інформаційного масиву, 3-й і 4-й — у режимі пошуку).

інформаційного пошуку в І.-п. с. д. оцінюють в основному коефіцієнтом точності пошуку і коефіцієнтом повноти пошуку.

Прикладом І.-п. с. д. є система «Пусто — Непусто». Ці системи розроблено для пошуку документів в галузі електротехніки. Мову інформаційно-пошукову цих систем створено на основі слів природної мови. В І.-п. с. д. «Пусто — Непусто-4» застосовують дескрипторну мову з одним видом відношень парадигматичних і без відношень синтагматичних. У цих системах процес індексування документів полягає в тому, що з реферату документа вибирають усі слова, які є в російсько-дескрипторному словнику (інформаційно-пошуковому тезаурусі), котрі ці слова замінюють вручну чи автоматично дескрипторами. Запити індексують аналогічно, але коли в запиті є однорідні члени речення, його поділяють на підзапити (напр., «Розрахунок і конструювання трансформаторів» дає «Розрахунок трансформаторів» і «Конструювання трансформаторів»). Критерій семантичної відповідності системи форму-

ють у термінах пустоти й непустоти множин  $M_1, M_2, M_3$  і  $M_4$ , створених дескрипторами зі складу пошукового припису та пошукового образу:  $M_1$  — множина дескрипторів пошукового образу документа, які збігаються в дескрипторів пошукового припису;  $M_2$  — множина дескрипторів пошукового образу документа, для яких у складі пошукового припису перебувають підпорядковані їм дескриптори;  $M_3$  — множина дескрипторів пошукового образу документа, для яких у складі пошукового припису є дескриптори, що підпорядковують їм;  $M_4$  — множина дескрипторів пошукового припису, що не мають у складі пошукового образу документа дескрипторів, що збігаються чи пов'язані з ними відношеннями підпорядкованості. Документ вважається релевантним і таким, що підлягає видачі, якщо певна множина чи певна комбінація множин  $M_1, M_2, M_3$  і  $M_4$  не пуста (непусті), а решта множин пуста (звідси й назва системи). Так, напр., якщо множина  $M_1$  не пуста, а решта множин пуста, документ вважається релевантним. Документ вважається релевантним і тоді, коли множини  $M_1$  і  $M_3$  непусті, а  $M_2$  й  $M_4$  — пусті. В цьому разі кожен дескриптор пошукового припису або є в пошуковому образі, або має там підпорядкований йому дескриптор. Систему можна реалізувати на ЕЦОМ і на суперкомп'ютерних картах.

Лит. Безомогов Г. Г., Котов Р. Г. Автоматизированные информационно-поисковые системы. М., 1984 (6 бліт. с. 169-175). Плєдун Г. П. О некоторых сторонах исследования по созданию информационно-поисковых систем «Научно-техническая информация», 1981, № 1; Информационно-поисковая система «ИНТО». М., 1984 (6 бліт. с. 215-217). Труды III Всесоюзной конференции по информатико-поисковым системам и автоматизированной обработке научно-технической информации т. 1, 4. М. 1967, Шрейдер Ю. А. Логистический подход в теории информационных систем «Научно-техническая информация», 1982, № 9; Aïouche P. (та ін.) *Economie générale d'une chaîne documentaire automatisée*. Paris, 1967. Салтон І. Автоматическая обработка, хранение и поиск информации. Пер. с англ. М. 1973. Б. Ф. Скороходько

**ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВА СИСТЕМА ФАКТОГРАФІЧНА** — інформаційно-пошукова система (ІПС), що забезпечує видавання відповідей на інформаційні запити фактів, які цікавлять споживача. Такі інформаційні запити наз. фактографічними. І.-п. с. ф. спеціалізуються, як правило, на видаванні фактичних відомостей якогось одного роду. Осн. відмінності їх від інформаційно-пошукових систем документальних: інформаційний масив І.-п. с. ф. складається не з інформаційних документів, а з записів фактів розглядуваного типу (взятих з документів чи з ін. джерел), у відповідь на запит відбувається безпосереднє видавання шуканих відомостей або вказуванням на адреси зберігання відповідних записів фактів, або (в досконаліших І.-п. с. ф., до яких належать застосовувані в практиці сучасні автоматизовані І.-п. с. ф.) — шляхом безпосереднього видавання записів цих фактів тією чи іншою зрозумілою споживачеві мовою (бажано, щоб зазнача-

лись і документи, з яких ці факти взято). Автоматизовані І.-п. с. ф. реалізуються за допомогою ЦОМ.

Традиційним неавтоматизованим аналогом І.-п. с. ф. є довідники фіз. властивостей речовин і матеріалів, каталоги тех. параметрів виробів певного роду, картотеки адрес пром. підприємств тощо. Як неавтоматизовані І. п. с. ф. широко використовують перфокартотеки, що складаються з перфокарт з крайовою перфорацією, на яких записують відомості про відповідні об'єкти. Ці відомості кодуються крайовими перфораціями у вигляді наборів пошукових ознак, які дають змогу механічно відібрати потрібні записи за допомогою ручних пристосувань чи засобів малої механізації інформаційного пошуку.

Фактографічні відомості — це здебільшого записи, що складаються з назви об'єкта розглядуваного роду (предмета, хім. сполуки, тех. виробу, виробничого процесу тощо) і властивих об'єктові характерних властивостей (ознак, які часто бувають виражені числами). В інформаційно-пошукових масивах (ІПМ), що їх використовують в автоматизованих І.-п. с. ф. для представлення записів фактів, повинні бути засоби для позначення всіх елементів відомостей вгаданого виду. Записи фактів мовами інформаційно-пошуковими, призначені для відгортки пошуку за фактографічними запитаннями, є пошуковими образами відповідних фактичних відомостей, первинні записи яких (природними мовами) становлять інформаційний масив І. п. с. ф. (див. *Пошуковий образ документа*). Масив пошукових образів фактичних відомостей, реалізованих на тому чи іншому носії (здебільшого на стрічкових магнітних або на дисках магнітних у вигляді *атомового пристрою* ЕЦОМ, що реалізує І.-п. с. ф.), є активним сховищем інформаційно-пошукової системи.

У багатьох випадках зручно організовувати масив пошукових образів фактичних відомостей у вигляді т. а. інформаційних чи об'єктно-характеристичних таблиць, які являють собою таблиці з двома входами. На одному вході таких таблиць перелічуються об'єкти розглядуваного роду, на другому класи характеристик (властивостей, ознак), а конкретні значення (словесні або числові) характеристик записуються на перетині рядків і стовпців. В активному сховищі І.-п. с. ф. інформаційні таблиці можуть розгортатися по рядках або стовпцях. У першому випадку значення характеристик групуються за об'єктами, в другому — за назвами характеристик.

Як ІПМ в автоматизованих І.-п. с. ф. можна використати й дескриптори ІПМ, що мають досить розвинуту структуру й засоби вираження текстових відношень, зокрема, мову ВХ-кодів і мову стандартних фраз. Останні є способами запису багатомисних предикатів, місця яких заповнюють терміни-дескриптори, причому місце, що його займає дескриптор, точно визначає її контекстуальну фікцію.

В ІПМ останнього типу кожен вид естан-

дартної фрази використовується для записування відомостей певного роду, тому в конкретній І.-п. с. ф. досить використати один відповідний вид «стандартної фрази». Крім того, активне сховище документальної ІПС, яке складається з пошукових образів документів, що являють собою набори «стандартних фраз» різного виду, може служити для пошуку за тими фактографічними запитаннями, які відповідають видам «стандартних фраз», що є в ІПМ. При цьому загалом пошук відбуватиметься хоч і повільніше, ніж в аналогічній спеціалізованій І.-п. с. ф., але з тією ж ефективністю. Щоб оцінити ефективність інформаційного пошуку фактографічного в І.-п. с. ф., використовують коеф. штрата інформації та пошукового шуму, цілком аналогічні відповідним коеф. для документального пошуку. Тому у випадку застосування досить розвинутих ІПМ різниця між ІПС документальними та І.-п. с. ф. не принципова: І.-п. с. ф. можна розглядати як окремий випадок ІПС документальних, спеціалізованих для пошуку певного типу текстів (тобто фрагментів документів), які описують факти певного роду.

Як правило, значення коеф. повноти І.-п. с. ф. перевищують відповідні значення для документальних ІПС і наближаються до одиниці (100%). Узагальнена функціональна схема І.-п. с. ф. механічною мірою відрізняється від відповідної схеми документальної ІПС. При введенні відомостей в І. п. с. ф. та формуванні її інформаційного масиву проявляється додаткова логічна операція відбирання та добування (з документів чи ін. джерел) фактичних відомостей заданого роду, можлива оцінка вірогідності цих відомостей, зокрема, виявлення можливо суперечливих аналогічних відомостей в раніше накопиченому інформаційному масиві ІПС; замість «пасивного сховища» документів в І.-п. с. ф. може бути «активне сховище» первинних записів фактичних відомостей природними мовами, релевантну частину яких, після того як її виявлено за пошуковими образами, може бути видаємо як відповідь. Той самий фактографічний масив пошукових образів можна застосовувати для пошуку різного роду (напр., для пошуку об'єктів за заданими наборами значень характеристик або для видавання відомостей про значення характеристик заданого об'єкта). При цьому кожен такий тип інформаційно-пошукових задач розв'язується за особливим алгоритмом, який виконує роль спеціалізованого критерію семантичної відповідності. Масив пошукових образів І.-п. с. ф. можна застосовувати й для алгоритм. розв'язування логічних задач, пов'язаних з моделюванням умовивідних процедур ін. типу, ніж ті, з якими пов'язано моделювання інформаційного пошуку. В цьому разі І.-п. с. ф. виконує роль інформаційно-логічної системи. До найбільш великомасштабних автоматизованих І.-п. с. ф. належать І.-п. с. ф. для хім. сполук. Див. Белозеров Г. Г., Котлов Р. Р. Автоматизовані інформаційно-пошукові системи. М., 1968 [6, б. 10, с. 169-175]. В далі Г. З. О некоторых сторонах исследований по созданию

інформаційно-пошукових систем. «Научно-техническая информация», 1961, № 1; Сейфер А. П., Цурова С. С. Автоматическая информационная система по свойствам веществ. «Стандартизация», 1965, № 1, Скороходько Э. Ф. Проект фактографической информационно-поисковой системы. В кн.: Труды III Всесоюзной конференции по информационно-поисковым системам и автоматизированной обработке научно-технической информации, т. 1, М., 1967, М. 10, с. 4. Анализ информационно-поисковых систем Пер. с англ. М. 1970. Г. Э. Велдунг.

**ІНФОРМАЦІЙНО-ПОШУКОВИЙ ПРИСТРІЙ** — пристрій чи сукупність засобів, використовуваних для реалізації інформаційно-пошукової системи. І.-п. п. класифікують за застосовуваними в них матеріальними носіями запису інформації, що їх умовно ділять на дискретні і неперервні (табл.)

**Класифікація інформаційно-пошукових пристроїв за типами носіїв запису інформації.**

| Носії запису інформації  | Інформаційно-пошукові пристрої  |
|--|---|
| <b>Дискретні</b>   |   |
| Каталожні картки<br>Унітерм-карти                                    | Каталоги й картотеки<br>Картотеки   |
| Перфораційні карти в крайовій перфорації або внутрішньої перфорацією | Пристрій для інформації, сортування карт ручного обертання з термідання просвітних карт<br>Пічально-інформаційні машини |
| Діамакрокарти<br>Магнітні карти<br>Мікрофільмні формати              | Спеціалізовані інформаційно-пошукові пристрої   |
| <b>Неперервні</b>  |   |
| Мікрофільмні рулонки<br>Перфораційні стрічки                         | Мікрофільмні селектори<br>Організми ЕЦОМ  |
| Магнітні стрічки<br>Магнітні диски<br>Магнітні барабани              | ЕЦОМ. Спеціалізовані інформаційно-пошукові пристрої<br>ЕЦОМ   |

1. **Дискретні носії запису інформації** історично з'явилися раніше за неперервні, відзначаються простотою реалізації І.-п. п. й набувають широкого застосування в практиці.

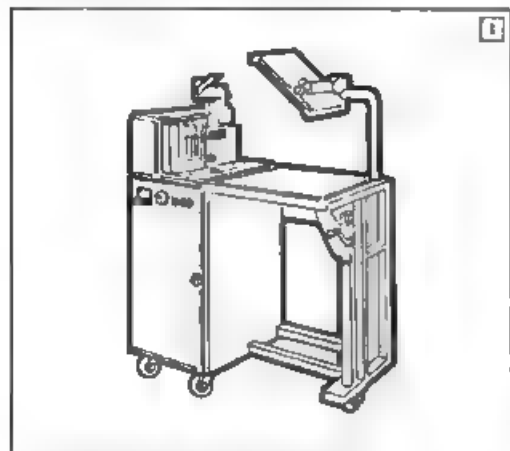
**Каталожні (бібліографічні) карти** застосовують для складання каталогів і картотек. У каталожних ящиках за спец. розділниками збирають карти з описами документів, прізвища авторів або заголовки яких починаються з певної букви (алфавітний каталог) або ж їхній зміст присвячено якому-небудь предметові (предметний каталог), тім чи іншій галузі знання (систематичний каталог). Ці карти виготовляють із цупкого паперу, вони стандартного формату  $75 \times 125$  мм і мають біля нижнього краю отвір для стрижня, який закріплює масив картою у ящику. Каталогні ящики поміщають у гнізда спец. шаф.

**Унітерм-карти** розроблено 1951 (США) й призначено для реалізації інформ-

аційно-пошукових систем (ІПС), оснований на принципі координатного індексування. Це карти формату  $75 \times 125$  мм або  $203 \times 125$  мм, на які нанесено спец. сітку однієї горизонтальної і десятих вертикальних граф. У верхній горизонтальній графі записують унітерм — ключове слово, яке виражає однічне поняття, а саме ім'я, географічну назву чи назву фірми. У вертикальних графах записують адресні шифри (номери) документів, пошукові образи яких включають унітерм, зазначений у верхній вертикальній графі. Запис робиться за Ostenenno цифровою кожною номером, напр., 294 записується в графі 4, 135 — у графі 5 і т. д. Така система записування полегшує процедуру виявлення номерів документів, які одночасно містяться в кількох порівнюваних унітерм-картах. Це виявлення збіжних номерів документів різнозначне операції логіч. множення понять, позначених відповідними унітермами.

Перфораційні карти являють собою прямокутники з цупкого паперу, уздовж їхніх країв поперізані отвори або ж по всьому полю нанесено позички для пробиття таких каліброваних отворів (перфорацій). Уперше такі карти з'явилися у 80-х роках 18 ст. (Франція), коли їх застосовували для керування роботою ткацьких верстатів. На початку 90-х років 19 ст. в США винайшли перфоратор і електр. мабулатор для карт з внутр. перфорацією. Карти з перфорацією по краях найчастіше обробляють вручну. На кожну з них наносять пошуковий образ і текст одного документа. Пошукові ознаки цього документа кодують вирізками між відповідною перфорацією й зовнішнім краєм карти. Пошук необхідних карт у їхньому неупорядкованому масиві здійснюється зведенням однієї або кількох сортувальних стійок у відповідки пошуковій ознаці перфорації та струшуванням масиву вручну або за допомогою спец. вібратора. При цьому карти з вирізками цих отворів випадають. Карти з внутрішньою перфорацією можна обробляти вручну (щілинні й просвітні карти) й за допомогою спец. машин. Щілинні перфокarti відрізняються від карт з крайовою перфорацією тим, що вони не випадають з масиву, а висувуються за величину щілини (віддалі між двома суміжними отворами). Це дає змогу вести пошук у кількох етапів і полегшує застосування складних кодів. Просвітні перфокarti є ніби варіантом унітерм-карт, у яких механізовано процедуру виявлення збіжних номерів. Записування в них виконується пробиванням перфокarti в точці, координати якої відповідають номеру документа. Під час пошуку відібрані перфокarti, на яких записано пошукові ознаки цього інформаційного запиту, накладають одну на одну й проглядають на просвіт, щоб виявити збіжні пробивки, які відповідають номерам шуканих документів. Найширшого застосування набули перфокarti машинного сортування, що мають формат  $187,4 \times 82,5$  мм. На лицьовому боці на них по всьому полю, за винятком вузької

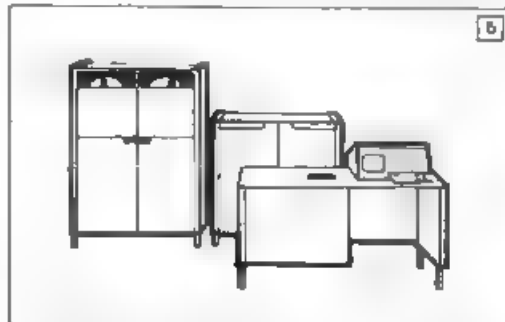
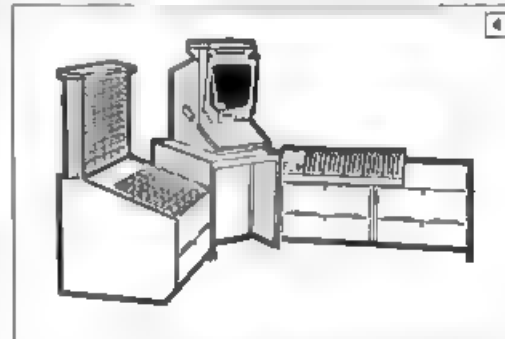
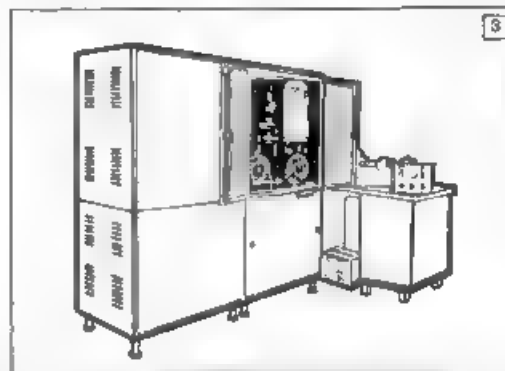
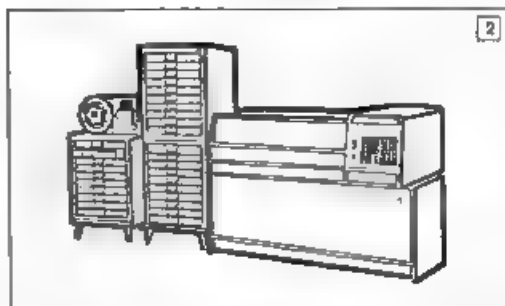
горизонтальної смуги згоря, надруковано колонки цифр, які виконують роль матриці. Як правило, використовують 45-, 80- і 90-колонкові перфокарти. Щоб обробляти їх, застосовують стандартні лічильно-перфораційні машини. ІПС, створені на базі цих машин, придатні для роботи з масивами документів обсягом понад 200 тис., а то й кілька мільйонів документів (за умови попереднього підсортювання їх). Застосовують і апертурні перфокарти, в яких є каліброване вікно (апертура) для вклевлювання мікрокопії документа на фотоплівці.



1. Селектор системи «Фільморекс».

Діамікрокарта (мікрофіша) є найперспективнішим з усіх дискретних носіїв запису інформації. Вона являє собою прямокутний негативної або позитивної фотоплівки з зображеннями документів або частин їх, на відміну від мікрокарти (мікропринту), яку виконують на непрозорій основі (фотопалпері). Частина діамікрокарти, як правило, відводять або для фотооптичного запису пошукового образу документа, або для його бібліографічного опису. Текст документа подають у мікрокопії, його можна прочитати або скопіювати в натуральну величину за допомогою спец. апаратури. Залежно від призначення діамікрокарти та її розміру й від кратності зменшення на ній розміщується від однієї до 200 сторінок тексту. На основі діамікрокарт створюють досить складні електромеханічні, електронні й фотооптичні І.-п. п.

Прикладом може служити комплекс пристроїв «Фільморекс» (створено у Франції, 1950, не раз модифіковано). Його характеристики: розмір негативної карти —  $60 \times 35$  мм, ємність карти — 1 кадр, кратність зменшення — від 4:1 до 30:1, ємність кодового поля — 400 двійкових одиниць, швидкість сортування — 4–6 карт за 1 сек, час пошуку — 5 сек, місткість сховища —  $5 \times 10^6$  карт (мал. 1). А такий пристрій як «МЕДІА» (США, 1950) використовує позитивні карти розміром  $32 \times 10$  мм, кратність зменшення —



2. Інформаційно-пошуковий пристрій на діамікрокартах «МЕДІА».
3. Мікрофільмовий селектор «Помекс ДВ».
4. Мікрофільмовий селектор «Слоустар».
5. Інформаційно-пошуковий пристрій на відеомagnetніз стрічці «Відеофайл».



30 : 1, ємність кодового поля — 69 двійкових одиниць, швидкість сортування — 10 карт за 1 сек, час пошуку — 1 м, місткість сканера —  $4 \times 10^5$  карт (мак. 2). Аналогічні і-п. створено на основі магн. карт, напр., «Магнкард» (США, 1957), у яких значно більша ємність кодового поля (5 тис. двійкових знаків), швидкість сортування (90 карт за 1 сек) і менший середній час пошуку (30 сек).

Мікрофільми форматні є великими відрізками рулонних мікрофільмів, їх можна розглядати як різновид діаметрокарт. На їхній основі створюють і-п. п. різних ступенів складності.

2. Неперервані носії запису інформації поступаються перед дискретними щодо зручності й простоти зпорядкування їхніх масивів, проте, засновані на них і-п. п. мають значно більшу швидкість. Найбільше поширеним є і-п. п. для пошуку документів, записаних на рулонних мікрофільмах. Їх почали розробляти в 30-х роках 20 ст. й назвали мікрофільмовими селекторами. Ці пристрої часто використовують для реалізації 2-го контура ІПС із порівняно невеликими масивами документів. З тенденцією спрощувати їх до рівня читально-копіювальних апаратів з автомат. протягуванням мікрофільму й найпростішими пристроями для потоку окремих його кадрів. Осн. мікрофільмові селектори мають такі характеристики: «Поиск ДВ» (СРСР, 1967) використовує негативний неперфорований 35-мм мікрофільм з 15-кратним зменшенням, в 1 м вміщується до 19 кадрів, ємність кодового поля — 30 двійкових одиниць, швидкість протягування фільму — 1 м/сек, місткість бобіни — 150 м, час пошуку — 75 сек (мак. 3); «Лоудстар» (США, 1961) використовує негативний неперфорований 16-мм мікрофільм з 24-кратним зменшенням, в 1 м вміщується до 115 кадрів, ємність кодового поля — 1 двійкова одиниця, швидкість протягування фільму — 3 м/сек, місткість бобіни — 30,5 м, час пошуку — 5 сек (мак. 4).

Перфораційні стрічки застосовують в організматичного типу «Супертайпер» і «Дюрмач» (США) й «Оптіма» (НДР), що їх використовують як ввідні пристрої в ЕЦОМ при реалізації на них різних інформаційних систем, у т. ч. й ІПС.

Стрічки магнітні, диски магнітні й барабани магнітні застосовують в основному для реалізації зовнішніх запам'ятовувальних пристроїв в ЕЦОМ, рідше — в спец. і-п. а., у т. ч. — в відеомігнітним записуванням зображення документів. Прикладом такого спец. і-п. п. може бути і-п. п. на відеомігнітній стрічці «Відеофайл» (США, 1958—64, мак. 5). При реалізації і-п. п. на ЕЦОМ ці машини можна використовувати не тільки для виведення відповідей на запити інформаційні запити, а й для вибіркового поширення інформації, для підготовки оригінал-макетів друкованих показників бібліографічного й координатного типів та в інших видах інформаційного забезпечення.

Лит. Воробьев Г. Г. Перфорационный метод документального учета в карточном хозяйстве. М., 1967 [б.б.л.р. с. 116—126]. Михайлов А. И., Черный А. И., Гидяревский Р. С. Основы информатики. М., 1964 [б.б.л.р. с. 728—735]. Леонидов Г. Г., Котов Р. Г. Автоматизированные информационно-поисковые системы. М., 1968 [б.б.л.р. с. 169—175]. Перфорационные карты и их применение в науке и технике. Пер. с англ. М., 1963. Р. С. Падаревский, А. И. Чорный.

**ІНФОРМАЦІЯ** (лат. informatio — роз'яснення, виклад, об'ясненість) — одне з найзагальніших понять науки, яке означає певні відомості, сукупність якихось даних, знань і т. ін. Поняття І. звичайно передбачає наявність двох об'єктів — джерела І. та споживача І. (адресата). І. можна розглядати як філософську категорію, і в сучас. вченні про І. можна бачити конкретизацію лєнінської тези про властивість відображення, притаманну цій матерії. Відображення не вводиться до простої фіз. взаємодії двох об'єктів. І., яку переносить сигнал, як правило, має певний зміст (для споживача), відмінний від змісту самого факту надходження сигналу. Це досягається за рахунок спец. угод, за якими, скажімо, один удар барабана свідчить про наблизнення противника. Для людини, яка не знає про таку угоду, цей звук такої І. не несе. Іншими словами, І. буває про щось, і сигнал про це, який приймає споживач, може і не мати прямого фіз. зв'язку з подією чи явищем, що про нього він сповіщає. В цьому розумінні І. виступає як властивість об'єктів і явищ (процесів) породжувати різноманітність станів, які шляхом відображення передаються від одного об'єкта до іншого і зберігаються в його структурі (можливо, у змінному вигляді).

При вивченні І. виникають технічні, семантичні й прагматичні проблеми. Технічні й проблеми стосуються питань точності, надійності, швидкості передавання сигналів зв'язку і т. ін. Семантичні проблеми спрямовано на дослідження того, як точно можна передавати зміст тексту за допомогою кодів. У цьому випадку адресат звичайно має можливість визначити висвітленість свого становища і вважати ціннішою ту І., яка дає йому можливість перейти в вигідніший стан. Прагматичні проблеми полягають у тому, наскільки ефективно І. впливає на поведінку адресата. Поняття І. є одним з осн. понять кібернетики (подібно до поняття енергії у фізиці). При будь-якому процесі керування або регулювання, який здійснює живий організм чи автоматично діюча машина або пристрій, відбувається переробка вхідної І. на вихідну. Для того, щоб І. могла надійти від джерела до адресата, треба, щоб стани джерела було якимсь чином відображено у зовн. (щодо джерела й адресата) середовищі, яке вживає на приймальні органи адресата. Отже, І. в зовн. середовищі виражається за допомогою якихось матеріальних об'єктів (носіїв І.), асортимент і спосіб розміщення яких задають І. Відображення множини станів джерела у множини станів носіїв наз. способом кодування І., а образ стає при обраному

способі кодування — кодом цього стану (або кодом  $I$ ., що задається цим станом). Абстрагуючись від фіз. сутності носія  $I$ ., й розглядаючи їх як елементи якоїсь абстрактної множини, а способі їхнього розміщення — як відношення у цій множині, приходять до абстрактного поняття коду  $I$ ., як способу її представлення. При такому підході код  $I$ ., можна розглядати як модель математичну, тобто абстрактну множину з заданими на ній предикатами. Ці предикати визначають тип елементів коду і їхнє взаємне розміщення.

Найчастіше кожний окремий стан джерела представляє одна буква якогось скінченного алфавіту  $A$ , в послідовності змінних у часі станів — послідовності букв, тобто слово, записане алфавітом  $A$ . Залежно від того, яким кодом задано одну й ту саму  $I$ ., передавання та переробка  $\Pi$  становлять різні тех. труднощі. Так, напр., у ЦОМ зручніше представляти числа в двійковій системі числення, а не в десятковій, числову  $I$ ., зручніше передавати спеці. телеграфним кодом, а не за допомогою телефону. Різні способи представлення  $I$ ., спеціально пристосовані для конкретних випадків, пов'язаних з передаванням, зберіганням і переробкою  $\Pi$ , розглядає кодування теорія (див. також *Кодування автоматичне*).

Тепер найбільше досліджено тех. проблеми  $I$ . Розділ науки, присвячений цим проблемам, назв. *Інформаційною теорією* (див. також *Інформації передавання*). Основа цієї науки заклав амер. вчений Р. Хартлі в 1928, визначивши міру кількості  $I$ . для деяких задач каналів зв'язу. Пізніше іншу, загальнішу, міру кількості  $I$ . для цих самих задач запропонував амер. вчений К.-Е. Шеннон (м. 1916), запровадивши як міру невизначеності системи ентропію  $H = - \sum p_i \log p_i$ , де  $p_i$  — ймовір-

ність того, що система перебуває в  $i$ -му стані. Величину усуненої невизначеності системи в результаті одержання  $I$ . прийнято як кількісну міру  $I$ . Запроваджене таким чином *Інформаційна кількість* не збігається з загальноприйнятим поняттям кількості  $I$ . як кількості й важливості одержаних відомостей, бо при дослідженні тех. проблем не враховуються ні семантичні, ні прагматичні аспекти. Запроваджене в теорії  $I$ . поняття кількості  $I$ . служить лише для розв'язування тех. питань, напр. оптм. кодування  $I$ ., при цьому абстрагуються від її смислу.

Запроваджене К.-Е. Шенноном поняття кількості  $I$ . не адекватне інтуїтивному уявленню про  $I$ . і з уточненням останнього для певного класу ситуацій, що виникають при вивченні каналів зв'язу. Поняття кількості  $I$ ., виникло з задач теорії зв'язу і не суті адекватне тільки до цих задач. Недостатність такого уявлення про  $I$ . проявляється при спробі зв'язати кількість одержуваної  $I$ . з поведінкою одержувача, що розв'язує якусь задачу. В цьому разі треба мати міру  $I$ ., яка відображає корисність повідомлення для одержувача. Тут ентропія не завжди прийнятна як міра

невизначеності. Для задач, у яких система характеризується складнішою мірою невизначеності, вимірюваною  $I$ ., має нові якісні сторони.

Розрізняють кілька видів  $I$ . Поняття  $I$ . — це кількість  $I$ ., що набувається при повному з'ясуванні стану якоїсь системи й дорівнює ентропії цієї системи. Окрема  $I$ . — кількість  $I$ ., що міститься в окремому повідомленні, яке стверджує, що система перебуває в певній множині станів. Поняття взаємної  $I$ . — зменшення невизначеності системи  $X$  у результаті того, що стають відомими положення системи  $Y$ . Окрема взаємна  $I$ . про систему — це кількість  $I$ . про систему  $X$ , яка міститься в окремому повідомленні і вказує, що система  $Y$  перебуває в певній множині станів. Корисна  $I$ . — кількість  $I$ ., яка міститься в окремому повідомленні і зменшує невизначеність відомостей про систему. Зміну невизначеності відомостей про систему під впливом відомостей у повідомленнях, що надходять, інтерпретують як процес запасання корисної  $I$ . про систему. Негативні значення корисної  $I$ . розцінюють як деінформацію. Повідомлення, які не змінюють невизначеності системи, не несуть у собі корисної  $I$ . У даній постановці задачі може виявитися, що одне й те саме повідомлення містить різну кількість корисної  $I$ . для різних одержувачів. Якщо одержувачі виходять з різних гіпотез, то одне й те саме повідомлення може уточнити уявлення про систему для одного з одержувачів і не додати нічого нового до відомостей другого одержувача. Такі якісні сторони вимірюваної  $I$ . більше відповідають нашому інтуїтивному уявленню про неї. Але для розглянутих означень  $I$ . істотною статистична модель ситуації, яку не завжди можна створити. Дуже важливою характеристикою  $I$ . є її доступність для одержувача. Кількість  $I$ ., яку нервовою системою людини здатна подати мозок, напр., під час читання тексту, становить приблизно  $1 \text{ біт}$  за  $1/16 \text{ сек.}$  Ця порція  $I$ . затримується у свідомості приблизно  $10 \text{ сек.}$ , тобто людина сприймає  $16 \text{ біт}$  за  $1 \text{ сек.}$ , і водночас у її свідомості утримується  $160 \text{ біт}$ . Щодо інших видів  $I$ ., то пропускання здатність нервової системи може бути значно більшою. Для задач аналізу текстів (напр., машинно-го мережаду) ця характеристика доступності одержувача до сприймання  $I$ . є однією з найважливіших.

Машинний переклад неможливий без наявності в машині певних відомостей. В результаті аналізу великої кількості текстів цей обсяг відомостей збільшується, і здатність машини сприймати  $I$ . зростає. Такий процес інтерпретують як поповнення та перебудову машинного довідника (*тезауруса*) в результаті аналізу текстів. Тезаурус — один з багатьох станів якоїсь моделі зовн. середовища. Текст розглядається як якийсь оператор над тезаурусом. Кількістю семантичної  $I$ ., яка міститься в тексті відносно тезауруса, називають міру зміни тезауруса в результаті аналізу тексту. Подібна концепція семантичної  $I$ . здатна обслужити ситуації,

де виникає потреба в оцінці прагматичної цінності І. Поняття семантичної І. може набути соціального характеру, якщо створити тезаурус, які в моделює суспільного мислення. Літ. Колмогоров А. Н. Претизьке вивчення руського мислення. В кн. В. Б. У. Р. Введення в кибернетик. Пер. с англ. М., 1959. Яглом А. М., Нглом И. М. Вероятность информации М., 1960. (Бібліогр. с. 309-312) Шрейдер Ю. А. О количественных характеристиках семантической информации. «Научно-техническая информация», 1963, № 10. Бонгард М. М. Проблема узнавания. М., 1967. Урсул А. Д. Природа информации М., 1968. Картели Р. В. Л. Передача информации. В кн. Теория информации и ее приложения М., 1959. Вриллюн Л. Наука и теория информации Пер. с англ. М., 1960. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике Пер. с англ. М., 1963. (Бібліогр. с. 783-820). Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи Пер. с англ. М., 1965. Д. К. Личман, Ю. П. Стопан.

**ІНФОРМАЦІЯ ДОКУМЕНТАЛЬНА** — інформація, закріплена на якому-небудь матеріальному носії. Прикладом І. д. може бути та частина інформації наукової, яку зафіксовано в наукових документах, а також різні бухгалтерські відомості, банківські документи тощо. В кибернетичі це поняття вживають у зв'язку з автоматизацією обробки й пошуку документальної інформації. Д. С. Писиченко.

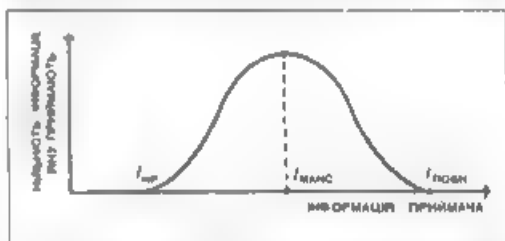
**ІНФОРМАЦІЯ НАУКОВА** — логічна інформація, що адекватно відображає об'єктивні закономірності природи, суспільства й мислення. Прикладом І. н. можуть бути закони фізики, хімії, математики тощо, встановлені в ході розвитку цих наук. Оскільки основу процесу пізнання становить суспільно-істор. практика — матеріальне виробництво, класова боротьба тощо, то джерелом І. н. є не лише наук. дослідження, й усі види діяльності людей щодо перетворювання природи й суспільства. І. н. поділяють на види: загальнонаукові одержування та (або) використання її (біол., політ., тех., управлінська, хім., фіз., тощо) й за призначенням (масова й спеціальна).

І. н. є результатом переробки й узагальнення абстрактно-логіч. мислення, відомостей і даних, одержуваних безпосередньо в процесі пізнання. Під адекватністю відображення І. н. об'єктивних закономірностей природи, суспільства й мислення розуміють ступінь правильності відображення, зумовлений досягнутим рівнем науки. Наукові гіпотези та прогнози є І. н., яка підлягає перевірці на практиці, внаслідок цього вони перетворюються на теорії або ж їх відкидають як помилкові. Критерій використання І. н. в суспільно-істор. практиці дає змогу відрізнити І. н. від побутової інформації, тривіальних істин, наук, фантастики тощо. В кибернетичі І. н. застосовують здебільшого в зв'язку з автоматизованим пошуком, оскільки великий обсяг І. н. утруднює пошук і використання її. Див. також *Документ науковий, Інформатика, Інформація документальна, Науково-інформаційна діяльність*.

Р. С. Гларисевич, Д. С. Писиченко, А. І. Черний.

**ІНФОРМАЦІЯ СЕМАНТИЧНА** — зміст або зміст повідомлення. На відміну від статистичних характеристик інформації дані І. с.

немає загальноприйнятої кількісної міри. Зміст повідомлення описується шляхом співвідношення з І. с., що зберігається у приймачі (тезаурусі). Один з важливих методів описування І. с. полягає в перекладі повідомлення на стандартизовану семантичну мову, властиву цьому тезаурусу. Відомості, що їх одержано в повідомленні, змінюють початковий тезаурус. Величину такої зміни і обирають за характеристику кількості І. с., яка міститься в цьому повідомленні відносно цього приймача. Недостатньо розвинутий тезаурус



дистансе або нульову, або дуже малу І. с. з цього повідомлення (не зможе «розуміти» його). Занадто повний тезаурус також не зможе дістати багато І. с. (інформація не буде для нього новою). Кількість І. с., що її приймає тезаурус з фіксованого повідомлення, залежить від кількості І. с., яка є в тезаурусі (приймачі) (як показано на мал.). Методи доведення І. с. тісно пов'язані з методами аналізу смислової структури текстів природною мовою, що їх розробляють у зв'язку з автоматизацією перекладу, індексування, реферування тощо. Див. *Анотаування автоматичне, Машинний переклад, Реферування автоматичне*.

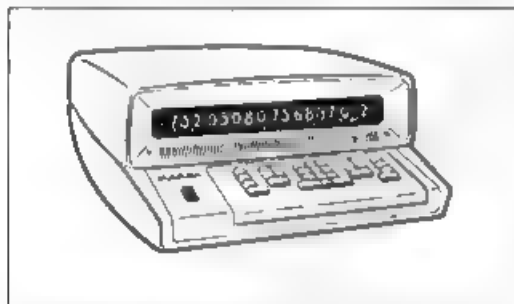
Ю. А. Шрейдер.

**IPL-V** — спискова мова програмування. В IPL-V першину інформацію задають у вигляді спискових структур. Для обробки інформації в бл. 150 базисних процесів (операторів), які включають арифм. процеси («додати», «помножити», «перевірити  $a > b$ »), спискові процеси («вставити символ у список», «стерти список», «скопіювати список»), процеси обміну з зовн. пам'яттю, процеси введення й виведення та ін. Для виконання циклічно повторюваних операторів є спеціальні процеси, що їх наз. генераторами, які забезпечують перегляд спискових структур. Програму мовою IPL-V подають у вигляді спискових структур. Див. *Мова спискова*.

Дж. Newell A., Tonge F. An introduction to information processing language V «Communications of the Association for Computing Machinery», 1960, v. 3, № 4. Т. О. Грінченко.

**«ИСКРА»** настільна електронна обчислювальна машина класична, призначена для виконання науково-технічних та обліково-статистичних обчислень. Розробили її в Ін-ті кибернетики АН УРСР 1966. Відрізняється від аналогічних машин вищим ступенем автоматизації обчисл. і допоміжних операцій, логічною будовою, яка дає змогу автоматично й напівавтоматично виконувати обчислюван-

ня складних формул, прямих і обернених елементарних функцій тощо без записування проміжних результатів, має високу надійність і технологічність. Може виконувати з урахуванням знаків і ком. такі операції над 16-розрядними десятковими числами: алгебричне додавання — віднімання, алгебр. додавання з константою, множення, множення на постійний множник, ділення, ділення на постійний дільник, нагромадження — алгебр. підсумовування результату дії із змістом нагромаджувального регістра та добування квадратного кореня. Обчислювання елементарних



Настільна клаватурна електронна обчислювальна машина «Іскра».

функцій (sin, cos, tg, ctg, sh, ch, th, cth, e<sup>x</sup>, ln, lg тощо) проводиться записавтоматично, після кількох затискань на клавіші, без записування проміжних результатів. Числа подано з машини з природними розміщеними кодами в десятковій системі числення. Арифм. і запам'ятовувальних регістрів — 5. Результати виконаних дій можна спостерігати на індикаторних пристроях двох варіантів: на 16-розрядному індикаторі з цифровими індикаторними лампами, який показує зміст одного з регістрів, або на індикаторі з електронопроменевою трубкою, який показує зміст будь-яких трьох із п'ятих регістрів. У машині передбачено можливість виводити на друку і на перфострічку західні дані, результати обчислень з їхніми знаками та спец. ознаки, які не відлягають обчислюванням на машині. Споживана потужність — 80 вт. Вага машини — 25 кг. Габаритні розміри 540 × 490 × 210 мм. Машину випускають серійно. Є кілька модифікацій: «Іскра-11», «Іскра-12», «Іскра 22», «Рось» і «Орбита».

Літ. Корнєнко Г. Я. Настільная электронная клавиатурная вычислительная машина для научных, инженерных и учетно-статистических расчетов. В кн.: Механизация и автоматизация инженерного и управленческого труда. Издательство, 1967.

Г. І. Корнєнко.

«ІТЕРАТОР» — спеціалізована аналогова обчислювальна машина для розв'язування лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} + AX = F = 0, \quad (1)$$

$$G_0 X_0 - \gamma_0 = 0, \quad (2)$$

$$G_1 X_1 + G_2 X_2 - \gamma = 0, \quad (3)$$

де  $X = X(t)$  — вектор шуканих ф-цій,  $X_0 = X(t_0)$ ,  $X_1 = X(t_1)$ ,  $X_2 = X(t_2)$ . Розв'язок відшукують в інтервалі  $[t_0, t_2]$ ,  $t_1$  — внутр. точка інтервалу,  $A = A(t)$ ,  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  — задані матриці,  $F(t)$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma$  — задані вектори; порядок дифер. рівняння  $n \leq 8$ , кількість умов у системі (3)  $m \leq 4$ . Задача (1) — (3) розв'язується «І.» сукупно в АОМ, яка реалізує систему (1) з початковими умовами, що їх задає «І.», крайові умови (2) і (3) реалізують на «І.». Розроблено «І.» в Ін-ті кібернетики АН УРСР 1962. Складається він з аналогів крайових умов (2) і (3), блока перетворення невязок, генератора програми роботи АОМ та блоків «І.»,

Задачу розв'язують ітераційним методом Ньютона, що зводить її до серії задач Коші. Застосування методу Ньютона дає змогу швидко відшукувати розв'язок, ітерування умовляється похибками аналогових обчислень і, як правило, має 2—4 кроки. Алгоритм складається з двох частин: визначення матриці перших похідних за компонентами вектора початкових умов і автомат. відшукання розв'язку крайової задачі з використанням одержаної матриці перших похідних. «І.» задовольняє крайові умови в похибкою, не більшою як 3%. «І.» може працювати сукупно в АОМ «МН-7», «МНТ-8», «МНТ-5»; призначений він для використання в проектних орг-ціях, н.-д. інститутах, обчисл. центрах тощо.

Л.м. Пухов Г. Е., Грездов Г. И., Верлянь А. Ф. Методы решения краевых задач на электронных моделях. К., 1965 [библиогр. с. 142, 144]. Г. І. Грездов.

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ — методи наближеного розв'язування задач прикладної математики, побудовані на послідовному наближенні до розв'язку шляхом багаторазового застосування якоїсь певної обчислювальної або аналітичної процедури. При цьому відповідними даними для кожної наступної процедури є результати застосування попередніх процедур (див., напр., Операторний рівнянь способи розв'язування). Наслідком цього процесу є послідовність, яка при виконанні деяких умов сходить до розв'язку задачі, тобто є можливість одержати наближення, як загодно мало відміне від справжнього розв'язку. Напр., для розв'язування довільного рівняння  $f(x) = 0$  його зображують у вигляді  $x = \varphi(x)$  (це можна зробити багатьма способами, напр.,  $x = x + C f(x)$ , де  $C$  — довільна стала), і будують послідовність:  $x_0$  — довільно,  $x_1 = \varphi(x_0)$ ,  $x_2 = \varphi(x_1)$ , ...,  $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ... Ця послідовність сходить до розв'язку вихідного рівняння, якщо, напр.,  $\varphi(x) > x$  і  $0 < \varphi'(x) < 1$ .

І. м. застосовують і в теор. дослідженнях. За їхньою допомогою доводять, напр., теореми існування та єдиності розв'язків рівнянь класу рівнянь.

А. І. Березовський.

**КАЛЕНДАРНЕ ПЛАНУВАННЯ** — впорядкування в часі певного ряду робіт, що їх виконують відповідно до заданих обмежень, коли ресурси, що їх використовують для виконання цих робіт, обмежені. Задачі К. п. становлять клас комбінаторних задач цілковитого впорядкування в часі різних дискретних процесів, великої кількості робіт, що їх попередньо частково впорядковано згідно з технологією виконання — з технологічними маршрутами

Знайдання побудовання календарного плану-графіка полягає у встановленні найкращої послідовності виконання робіт згідно з заданим критерієм оптимізації. К. п. виробництва є осн. засобом угодження планів виробничих дільниць і підрозділів, що обслуговують ці дільниці, в часі. Календарний план-графік можна розглядати як своєрідну модель виробництва. Кінцевою метою побудовання календарного плану на виробн. є визначення строків виконання окремих планових робіт, операцій по кожній бригаді, оператору, робочому місцю. К. п. полегшує й завданням служб постачання потрібної сировини й напівфабрикатів, бо заздалегідь відомо, на який момент часу та в якій кількості потрібно постачати їх для кожної виробничої дільниці, для кожного робочого місця. Завданням К. п. є й вибирання того з допустимих графіків, який найбільше відповідає конкретній виробничій обстановці. Як прогноз ходу виробничого процесу календарний графік дає виразну картину можливого використання устаткування й трудових ресурсів, указує, де може виникнути «вузьке місце», дає змогу заздалегідь передбачити можливий збій у виробн. і своєчасно вжити заходів, щоб ліквідувати їх. З роботою підприємства за календарним планом зв'язані організації ощадливого й ділового обліку, чіткіша постановка роботи в технологічного проектування й розрахунку цілком реальних нормативів. Робота за календарним планом створює передумови для точнішого визначення розмірів і строків запасів матеріалів, деталей, напівфабрикатів, інструментів, для підтримування на належному рівні запасів незавершеного виробн.

З появою ЕОМ робота підприємств за єдиним календарним планом стала реальною мож-

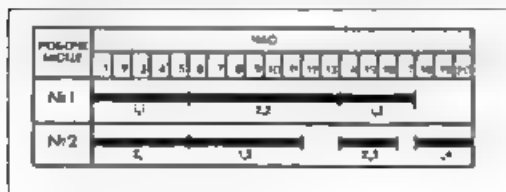
# К

задач малої розмірності. Для розв'язування деяких окремих задач К. п. застосовували методи програмування лінійного, цілочислового лінійного програмування та програмування динамічного. В заг. випадку динамічність виробництва, різні відхилення, неоднозначно визначені критерії оптимізації потребують побудовання такої схеми розв'язування, яка була б досить універсальна, забезпечувала більшу гнучкість, допускала легко реалізовані перехід від одного критерію оптимізації до іншого; забезпечувала б прийнятний час розрахунків, давала змогу одержувати достатньо близький до оптимального наближений розв'язок і вносити зміни в одержаний розв'язок, тобто здійснювати коректування плану-графіка. Ці вимоги задовольняють алгоритми, що використовують методи моделювання, та ідеї послідовного аналізу варіантів.

Є різні способи наочного зображення календарних планів роботи дільниць. Найпоширенішими з них є графічні способи. На графіку роботи дільниці (мал.) видно завантаження кожного робочого місця по змінах. Кожну операцію на такому графіку зображують відрізком, який за довжиною дорівнює тривалості виконання операції у вибраному масштабі часу. Під відрізком записано осн. характеристики операції (номер деталі, номер операції, розмір партії тощо). Великого поширення набули особливі форми зображення як самих «технологічних маршрутів», так і календарних планів у вигляді т. з. стрічкових діаграм або сіткових графіків (див. *Сіткові методи планування й управління*). Такі форми зображення використовують при К. п. в разі складних розробок, при проектуванні унікальних об'єктів з обмеженим строком тощо. Можна не тільки наочно графічно зображувати календарні плани, а й по-іншому зображувати у вигляді таблиць дані, що характеризують календарні плани.

Задачі К. п. зустрічаються в алгоритмічній теорії та автоматичній теорії, при конструюванні ЦОМ та в ін. розділах дискретної прикладної математики. При цьому розглядуванні дискретні процеси можна ототожнювати з технологічними маршрутами оброблюваних деталей, а задану обмежену множину перетворювачів — з множиною одиниць устаткування (робочих місць)

Лит. Бутенко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., 1964 (Библиогр. с. 361 - 362); Танасев В. С. К теории расписания. «Доклады АН БССР», 1964, т. 8, № 12; Моделирование про-



Графік роботи дільниці.

ливості. Матем. методи розв'язування задач К. п. розробляють у межах матем. теорії розкладів, яка бурхливо розвивається останнім часом. Точні методи розв'язування задач побудовання календарного плану-графіка можна застосовувати, як правило, лише для

цессов производства и управления. Новосибирск, 1988. Цикурба В. Н. [та ін.] Задача календарного планирования и методы их решения. К., 1986 [бібліогр. с. 152-153]. Важоян А. Научное программирование в промышленности и торговле. Пер с англ. М., 1983. Календарное планирование. Пер с англ. М., 1986 [бібліогр. с. 450-464].

Т. П. Подчасова

**КАНАЛ МАШИНИЙ** — пристрій, за допомогою якого проводиться обмін даними між центральним процесором і периферійним обладнанням. Див. також *Пристрій обміну*.

**КАНАЛИ ЗВ'ЯЗКУ** — 1) Сукупність технічних пристроїв, які забезпечують незалежне передавання повідомлень від передавача до приймача по одній фізичній лінії зв'язку. Лінія зв'язку являє собою середовище, в якому поширюються сигнали від передавача до приймача. По цій лінії організовують одночасне передавання кількох незалежних повідомлень, кожне з яких їде своїм каналом. На одній лінії каналів може бути дуже багато. Канали, по яких зв'язок здійснюється лише в одному напрямі, наз. односторонніми, або симлексними, а канали з одночасним двостороннім зв'язком у прямому й зворотному напрямках — дуплексними.

К. з. разом з відправником і одержувачем становлять систему зв'язку (мал.). Незалежні повідомлення  $P_1, \dots, P_N$  багатоканальної системи зв'язку від  $N$  джерел (відправників) надходять за входи передавачів і там перетворюються на сигнали  $S_1, \dots, S_N$ , які відповідають цим повідомленням. Сигнали всіх передавачів надходять у лінії зв'язку. З виходу лінії зв'язку суміш сигналів усіх  $N$  каналів надходить на входи приймачів, там ці сигнали розділяють за допомогою спец. роздільних пристроїв (селекторів), перетворюють на повідомлення й видаються одержувачеві. Операція перетворення повідомлення на сигнал наз. *модуляцією сигналу*.

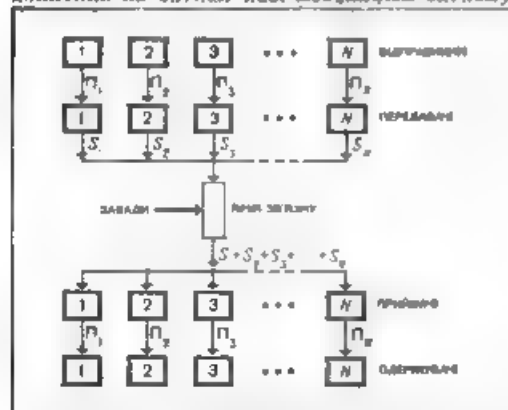


Схема багатоканальної лінії зв'язку

а зворотне перетворення — демодуляцією сигналу. За частотною способом розділення сигналів різних каналів розміщуються в певних частотних смугах і розділяються за допомогою набору смугових фільтрів, кожне з яких пропускає смугу частот свого каналу;

а за часового — передавання відбувається так, що елементи сигналу, який належить певному каналові, передаються в певні проміжки часу, вільні від передавання сигналів інших каналів. Для розділення сигналів на приймальному кінці встановлюють комутатор, який працює синхронно з розподільником на передавальному кінці.

Найважливіші характеристики К. з.: ступінь спотворень, яких зазнає передаваний сигнал, рівень завад у каналі й загасання сигналу. Лінійні спотворення складаються з частотних і фазових, вони визначаються перохідною характеристикою каналу або (це еквівалентне) комплексним коефіцієнтом передавання каналу. Щоб зменшити фазові спотворення, в К. з. включають фазокоригуючі кола. Нелінійні спотворення виникають внаслідок дії нелінійних елементів і вузлів (дроти і трансформатори з осердям, підсилювачі, контакти, які окислилися, тощо). За наявності нелінійних спотворень у складі сигналу з'являються вищі гармонічні складові й комбінаційні частоти.

Внаслідок впливу завад сигнал спотворюється, й умови розділення сигналів погіршуються. Джерелами синусоїдальних, імпульсних і флукуційних завад є сусідні передавачі, пром. установки, лінії електропередачі, атмосферні завади, внутр. шуми в апаратурі зв'язку тощо. Завади в реальних системах зв'язку обмежують нижній рівень потужності сигналу й вірогідність (надійність) зв'язку.

Згасання К. з. характеризується втратою потужності в ньому (аналогічним рівня потужності сигналу), його вимірюють у децибелах і визначають з виразу  $\Delta = 10 \log \frac{P_0}{P_N}$ ,

де  $P_0$  — потужність на початку каналу при ідеальному узгодженні каналу з передавачем,  $P_N$  — потужність на виході реального каналу.

За характером передаваних повідомлень К. з. поділяють на телеграфні, телефонні, фототелеграфні, радіомовні, телевізійні, телемеханічні, передавання даних, радіолокаційні тощо. Вони відрізняються один від одного год. чин. діапазоном і смугою частот. Повітряні лінії проводять з біметалевого, мідного, а іноді з сталевого дроту. По лінії з біметалевими дротами (сталевий дріт, укритий шаром міді) можна передавати сигнали до 150 кГц. Це дає змогу організувати 15 високочастотних каналів по одній парі дротів. Одним з осн. засобів проводного зв'язку є кабелі з симетричними парами. В кабельних лініях використовують систему ушлюнювання, яка дає змогу створювати 24 телефонні канали при діапазоні частот до 108 кГц, або 60 каналів з верхнім діапазоном частот до 250 кГц. По коаксіальних кабелях можна передавати високі частоти аж до 8-12 МГц, а це дає змогу створювати до 2700 телефонних каналів чи 1200 телефонових і одна телевізійний канал. До проводних ліній слід віднести й системи з передаванням сигналів зв'язку по лініях електр. передачі (ЛЕП). К. з., побудовані на цих лі-

ніях, використовують в енергосистемах для диспетчерського телефонного зв'язку, телеметрії, телекерування й релейного захисту.

Для створення К. з широко використовують радіо- й радіорелейні лінії. В радіорелейних лініях зв'язок здійснюється на надвисоких частотах у діапазоні дециметрових і сантиметрових хвиль, де є змога виділити широкі смуги частот і розмістити багато каналів. У багатоствольній системі радіорелейного зв'язку, яка містить до 8 стовбів, на кожному з них створюють 2220 телефонних каналів чи 700 телефонних і один телевізійний канал. Можна домогтися значного збільшення кількості К. з., якщо працювати в більш високочастотному діапазоні. Тому для створення К. з. починають використовувати хвилеводні лінії, по яких можна передавати частоти до  $2 \cdot 10^{11}$  мд. Дуже широкі можливості відкриваються при використанні для побудови систем зв'язку оптичного й ультрафіолетового діапазонів хвиль.

2) В теорії інформації передавання К. з. наз. матем. опис розглянутих вище реальних (фізичних) К. з. Одно з загальноприйнятих визначень К. з. в дискретним часом ґрунтується на таких положеннях

а) Задають монотонно зростаючу послідовність дійсних чисел  $t_1, t_2, \dots$ , які наз. моментами передавання, тобто припускають, що сигнал передається по К. з. в окремі наперед задані моменти часу  $t_1, t_2, \dots$ . При цьому вважають, що сигналові, який надійшов на вхід каналу в момент  $t_i$ , відповідає сигнал на виході каналу, одержаний у той самий момент  $t_i$ . В реальних (фізичних) К. з. передавання сигналу ніколи не відбувається миттю, а має якусь скінченну тривалість. Тому матем. модель К. з. з дискретним часом найбільше пристосована для описування тих реальних К. з., в яких передавання проводиться в окремі неперетинні проміжки часу.

б) Вважають заданими простори  $Y$  і  $\tilde{Y}$  значень сигналів на вході й виході каналу відповідно. Щоб матем. модель К. з. була описом для якомога більшої кількості різних фізичних К. з., природно вважати, що простір значень сигналів на виході каналу в кожен момент передавання  $t_i$  і простір значень сигналу на виході каналу в той самий момент часу є довільними множинами  $Y$  і  $\tilde{Y}$ . Наприклад, де  $Y$  і  $\tilde{Y}$  не співпадають, є, наприр., канал зі стиранням, у якому внаслідок дії шумів передаваний сигнал може бути спотворено так, що його не можна з певністю ототожнити ні з одним із можливих значень сигналу на вході (тобто внаслідок передавання по каналу сигнал «стирається»). Порівняно з простором значень  $Y$  сигналу на вході простір значень  $\tilde{Y}$  сигналу на виході для каналу зі стиранням містить додаткове значення, яке відповідає «стиранню» сигналу під час передавання. Можливі й такі випадки, коли сигнал на вході набуває скінченної чи лічбової кількості значень, а сигнал на виході може набувати

будь-якого дійсного значення (випадок т. а. напівперервних каналів). Так буде, якщо сигнал на вході набуває, наприр., усього двох значень  $+1$  і  $-1$ , а під час передавання на нього впливає адитивний шум, що в момент  $t_i$  є випадковою величиною  $\xi_i$ , яка набуває будь-яких дійсних значень.

в) У будь-яких фізично реальних К. з. в передаванні з тих чи інших причин трапляються похибки, які призводять до того, що сигнал на виході каналу відрізняється, власне, від сигналу на вході каналу. Математично такі похибки в каналах описують, задаючи системи перехідних імовірностей

$Q_n(\tilde{y}_1/y_1, y_2, \dots, y_n)$ , де  $y_1, \dots, y_n \in Y$ , а  $\tilde{A}$  — довільна множина  $n$ -вимірних векторів  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$ ,

де  $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}$ , які при будь-яких  $n$  є умовними розподілами в просторі  $n$ -вимірних векторів  $(y_1, \dots, y_n)$  — значень сигналів на виході каналу, за умови, що було передано сигнали  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Ця система перехідних імовірностей повинна задовольняти двом природним обмеженням. Перше з них наз. вимогою відсутності випередження. Його наочний зміст полягає в тому, що статистичні властивості значень сигналів на виході, які з'явилися до якогось моменту  $t$ , цілком визначаються сигналами на вході до моменту  $t$  і не залежать від значень сигналів, що їх передають після моменту  $t$ . Друге обмеження полягає у вимозі узгодженості умовних розподілів, а ця узгодженість полягає в тому, що умовний розподіл сигналу на виході в моменти  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , який обчислено за умовним розподілом імовірностей сигналу на виході в моменти  $t_1, t_2, \dots, t_m$ ,  $m > 1$  який згідно з вимогою відсутності випередження, не залежного від  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$ , повинен збігатися з заданим умовним розподілом для сигналів у моменти  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .

г) Реальні сигнали, що їх передають по К. з., завжди підлягають певним обмеженням (наприр., обмежено потужність передавача й приймача, напругу електр. мереж тощо). Є різні способи матем. відображення цих обмежень, проте, матем. теорія виявляється істотно простішою, якщо припустити, що обмеження накладають не на простір значень сигналу, а на його статистичні властивості. Найзагальніший спосіб введення таких обмежень задають за допомогою певних множин  $V_n$ ,  $n=1, 2, \dots$  — допустимих розподілів імовірностей на множині відрізків ахідних сигналів завдовжки  $n$ , тобто на просторі  $n$ -вимірних векторів  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , де  $y_i \in Y$ . Прикладом такого обмеження може бути вимога, щоб розподіл імовірностей сигналів на виході  $\eta_1, \eta_2, \dots$ , які є послідовністю випадкових величин, відповідних моментам передавання  $t_1, t_2, \dots$ , задовольняли нерівність  $M\eta_i^2 \leq p^2$ ,  $i=1, 2, \dots$ , яку наз. обмеженням на потуж-

ність сигналу на вході в кожен момент часу. Часто використовують ще й нерівність виду

$$\frac{1}{n} M \left[ \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right] \leq P^2, \text{ що } P^2 \text{ заз. обмеженням}$$

на середню потужність сигналу.

Наведено вище визначення К. з. з дискретним часом можна узагальнити й на К. з. з неперервним часом, тобто на випадок, коли передавання провадиться в усі моменти часу  $t$ . У неперервному К. з. сигнали на вході й виході є випадковими процесами з неперервним часом. Крім того, так само, як і для К. з. з дискретним часом, треба, щоб було задано систему допустимих розподілів на просторі значень сигналу на вході каналу в кожен момент часу  $t$ .

До найважливіших класів К. з. належать такі канали (наведені далі визначення для К. з. в дискретним часом здебільшого природно узагальнити й на канали з неперервним часом). Стационарний канал без пам'яті зі скінченною кількістю сигналів на вході  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots$

$\dots, \bar{y}_k$  й на виході  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_l$  відком визначається матрицею перехідних ймовірностей

$$P = \|p_{ij}\|, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, l,$$

де  $p_{ij} = P(\eta_m = \bar{z}_j / \eta_m = \bar{y}_i)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  — ймовірність того, що сигнал на вході каналу  $\bar{y}_i$  перейде внаслідок передавання по каналу в сигнал  $\bar{z}_j$  на виході каналу. При цьому має місце рівність

$$P(\bar{\eta}_1 = \bar{y}_1, \dots, \bar{\eta}_n = \bar{y}_n / \bar{\eta}_1 = \bar{y}_1, \dots, \bar{\eta}_n = \bar{y}_n) = P(\bar{\eta}_1 = \bar{y}_1, \bar{\eta}_2 / \bar{\eta}_1 = \bar{y}_1) \dots P(\bar{\eta}_n = \bar{y}_n / \bar{\eta}_1 = \bar{y}_1, \bar{\eta}_2 = \bar{y}_2, \dots, \bar{\eta}_{n-1} = \bar{y}_{n-1}).$$

Яка означає, що кожен передаваний по каналу сигнал спотворюється незалежно від решти передаваних сигналів (тобто в каналу немає пам'яті).

Найчастіше розглядають симетричні канали без пам'яті, для яких кількість символів на виході  $l = k$  збігається з кількістю символів на вході, а матриця  $\|p_{ij}\|$  така, що

$$p_{ij} = p, \quad i = 1, \dots, m; \quad p_{ij} = \frac{1-p}{m-1} \quad (i \neq j, \quad 0 < p < 1)$$

Прикладами каналів з неперервним простором сигналів на вході й виході є гауссівські канали, в яких сигнал на вході  $\eta_k$  в момент  $t$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , дорівнює сумі  $\bar{\eta}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \eta_j + \zeta_k$ , де  $\eta_j$  — значення сигналів на вході каналу,  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots)$  — гауссівська випадкова послідовність, яка не залежить від  $\eta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а  $a_{kj}$  — певні випадкові числа. Зокрема, якщо  $\eta_k = \eta_k + \zeta_k$ ,  $k = 1,$

2, ... і компоненти адитивного шуму  $\zeta_k$  є незалежними, то гауссівський канал з дискретним часом є каналом без пам'яті.

Інтенсивно вивчають К. з. зі зворотним зв'язком. Наявність зворотного зв'язку означає, що на вході каналу в момент  $t$  знають за відомі не лише значення вхідних сигналів до моменту  $t$ , а й значення сигналів на виході для всіх моментів  $t' < t$ . Канали зі зворотним зв'язком можна інтерпретувати як канали, в яких поряд з передаванням (з похибками) в прямому напрямі може бути й передавання (безпохибкове) у зворотному напрямі. Наявність зворотного зв'язку здебільшого дає змогу поліпшити осн. характеристики передавання в прямому напрямі.

З інших узагальнень К. з. слід відзначити К. з. із похибками синхронізації. В таких К. з. може відбуватися встанання й випадання символів, так що внаслідок передавання кожному символу на вході каналу відповість група символів на виході каналу випадкової (можливо, й нульової) довжини; при цьому на виході каналу неможливо встановити, якому вхідному символу відповідає цей вихідний символ. Як остатній приклад узагальнень наведеного вище визначення К. з. слід відзначити двобічні К. з., в яких з двох зустрічні потоки інформації, причому джерело повідомлення одного потоку суміщене з одержувачем повідомлення другого потоку. Математично двосторонній К. з. без пам'яті можна описати сукупністю перехідних ймовірностей

$P(\bar{y}_1, \bar{y}_2 / \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ , де  $\bar{y}_1$  і  $\bar{y}_2$  — відповідно вхідні й вихідні сигнали на першому, а  $\bar{y}_2$  і  $\bar{y}_1$  — на другому кінці каналу, ймовірностей, які задають ймовірності появи вихідних сигналів  $\bar{y}_1$  і  $\bar{y}_2$  на відповідних кінцях каналу за умови, що вхідними сигналами на відповідних кінцях каналу були  $\bar{y}_1$  і  $\bar{y}_2$ .

Літ. Харкенич А. А. Основи основної теорії зв'язку. М., 1955 (Інформ. с. 205-206). Босма Н. Д. Канали зв'язку. М., 1963 (Інформ. с. 387-388).

А. М. Лучук, Р. Л. Добрушин, В. Н. Прасов.  
**КАНАЛИ ЗВ'ЯЗКУ ПРОПУСКНА ЗДАТНІСТЬ** — теоретико-інформаційна міра можливості передавання інформації по каналу зв'язку. Пропускна здатність каналу зв'язку збігається з максимальною можливою передачею інформації швидкістю по такому каналу, при якій ще можна домогтися як завгодно високої надійності передавання. Заг. вираз для К. з. ш. з. визначають за співвідношенням

$$C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} C_t, \quad (1)$$

де  $C_t$  — пропускна здатність часового відрізка  $[0, t]$  каналу, яку задано виразом

$$C_t = \sup I(\eta_0^t, \bar{\eta}_0^t), \quad (2)$$

де  $\eta_0^t, \bar{\eta}_0^t$  — відрізки  $[0, t]$  сигналів на вході й виході відповідно,  $I(\eta_0^t, \bar{\eta}_0^t)$  — інформаційна кількість відносно  $\eta_0^t$ , що міститься в  $\bar{\eta}_0^t$ , а



верхню грань беруть за всіма можливими допустимими розподілами відрізка сигналу  $\eta_0$  на вході каналу за умови, що умовний розподіл сигналу на виході  $\bar{\eta}_0$  (при фіксованому сигналі на вході  $\eta_0$  каналу) збігається з умовним розподілом, який задають перехідною функцією каналу. Отже, пропускна здатність  $C$  відрізка  $[0, t]$  каналу характеризує максимальну кількість інформації, яку можна одержати при передаванні по відрізку  $[0, t]$  каналу, обравши оптимально розподіл сигналу на вході каналу. Розподіл імовірностей, на якому досягається верхня грань у виразі (2), наз. оптимальним розподілом на вході відрізка  $[0, t]$  каналу. Оптим. або близький до оптим. розподіл дає змогу найповніше використати можливості каналу зв'язку (відрізка каналу).

Іноді вводять інше визначення К. з. п. з.  $\bar{C}$ .

Якщо  $\eta$  та  $\bar{\eta}$  — сигнали на вході й виході каналу відповідно, і  $I(\eta, \bar{\eta})$  — швидкість передавання інформації, то  $\bar{C} = \sup I(\eta, \bar{\eta})$ , де верхню грань беруть за всіма можливими допустимими розподілами сигналу  $\eta$  на вході каналу, при умові, що умовний розподіл сигналу на виході при фіксованому сигналі на вході каналу збігається з умовним розподілом, заданим перехідною функцією каналу. Якщо обидві величини  $C$  та  $\bar{C}$  існують, то завжди  $\bar{C} \leq C$  і, більше того, в багатьох випадках  $C = \bar{C}$  (напр., для випадку стаціонарних каналів зі скінченною пам'яттю).

Якщо обчислювання К. з. п. з.  $C$  (або  $\bar{C}$ ) виявляється можливим лише в деяких окремих випадках для найпростіших (з матем. точки зору) каналів зв'язку. Напр., для дискретного стаціонарного каналу без пам'яті зі скінченною кількістю сигналів на вході й виході, який задають матрицею перехідних імовірностей каналу  $Q = \|p_{ij}\|$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $j = 1, 2, \dots, l$ , пропускна здатність  $C = 0$  тоді й лише тоді, коли всі рядки матриці  $Q$  збігаються, тобто для каналу з незалежним виходом, у якому умовний розподіл імовірностей сигналів на виході не залежить від сигналу на вході каналу. При  $l = k$   $C$  набуває макс. значення  $\log k$  у випадку каналу без шумів, тобто у випадку, коли кожний рядок і кожна колонка матриці  $Q$  містить рівно одну одиницю, а решта нулі. Для симетричного каналу, який задають матрицею

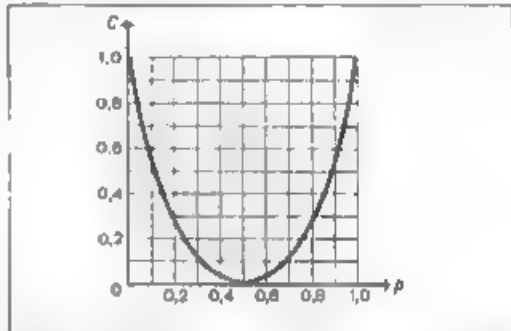
$$Q = \|p_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad p_{ii} = p,$$

$$p_{ij} = \frac{1-p}{k-1}, \quad i \neq j, \quad 0 < p \leq 1, \quad (3)$$

$$C = \log k + p \log p + (1-p) \log \frac{(1-p)}{k-1},$$

при цьому оптим. розподіл сигналу на вході є рівномірний розподіл. На мал. наведено графік пропускної здатності каналу,

який задають виразом (3) як функцію  $p$  при фіксованому  $k$ .  $C$  перетворюється на нуль при  $p = \frac{1}{k}$  (бо при цьому значенні  $p$  канал виявляється з незалежним виходом). При  $p = 1$  канал є каналом без шумів і  $C$  набуває макс. значення  $\log k$ . Цікавою і на перший погляд парадоксальною особливістю графіка є те, що при малих імовірностях правильного передавання  $p$  (менших за критичне значення  $p = 1/k$ ) пропускна здатність зростає. Мож-



Графік пропускної здатності  $C$  двійкового симетричного каналу залежно від імовірності помилки  $p$  в каналі

ливість передавання при таких  $p$  пов'язана з тим, що, одержавши сигнал на виході, з більшою певністю можна вважати, що його одержано з сигналу на вході, який відрізняється від нього.

Для двійкового каналу зі стиранням, який задають матрицею

$$Q = \begin{bmatrix} p & q & h \\ q & p & h \\ q & q & h \end{bmatrix}, \quad p + q + h = 1,$$

$$K. \text{ з. п. з. } C = (1-h) + p \log \frac{p}{1-h} + q \log \frac{q}{1-h}. \text{ Якщо похибок } (q = 0) \text{ немає,}$$

а є тільки стирання,  $C = 1 - h$ . Для каналів з неперервним простором сигналів на вході й виході явне обчислення пропускної здатності виявляється можливим для гауссівських каналів. Напр., для гауссівського каналу з дискретним часом і незалежним адитивним шумом, його задають рівністю  $\bar{\eta}_k = \eta_k + \zeta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , де  $\zeta_k$  — послідовність незалежних гауссівських випадкових величин, така, що  $M\zeta_k = 0$ ,  $M\zeta_k^2 = N$ , а на розподіл стаціонарного вхідного сигналу ( $\eta_1, \eta_2, \dots$ ) закладено умову, яка полягає в тому, що середня потужність не перевищує  $P$ , пропускна здатність  $C = \frac{1}{2} \log (1 + P/N)$ . Цю

формулу узагальнено й на випадок гауссівського каналу без пам'яті з неперервним часом. Вперше формула для гауссівських каналів дав амер. математик К.-Е. Шеннон (н. 1916).

Оскільки одержати дві форми для пропускної здатності каналів досить важко, значний інтерес становить одержання різного роду асимптотичних ф-л. Напр., для каналу без пам'яті, сигнали на вході й виході якого набувають значень у  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $R^n$ , який задають щільністю умовного розподілу  $p(y, \bar{y})$  сигналу  $\bar{y} = \bar{y}$  на виході при фіксованому сигналі на вході  $\eta = \eta$  і обмеженні на середню потужність сигналу на вході  $M|\eta|^2 \leq \varepsilon$  (де  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ).

$|\eta| = \sum_{i=1}^n \eta_i^2$ , пропускна здатність при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (випадок малого сигналу на вході) має вигляд.

$$C = \left| \sup_x \frac{\Phi(x)}{x^2} \right| \varepsilon + o(\varepsilon),$$

де  $\Phi(x) = \int_{R^n} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(0, y)} dy$ ,  $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Лит. див. до ст. Інформації передавання.

**КАРДИНАЛЬНІ ЧИСЛА** — характеристики, що їх приписують класам еквівалентних множин. Важливою задачею множин теорії є заг. визначення чисел елементів множин. Для скінченних множин задачу розв'язують порівнюванням з відрізками  $\{1, 2, \dots, n\}$  натурального ряду: якщо множина  $A$  є рівнопотужною такому відрізку, тобто її можна бієктивно відобразити на нього, то за число  $n$  елементів приймають  $n$  (запис:  $\text{Card } A = n$ ). Для лічбових множин, які всі є рівнопотужними множині натуральних чисел  $Z_+$  (ї одна одиниця), число елементів виражається символом  $N_0$  (алеф-нуль); лічбовість множини  $A$  передається записом  $\text{Card } A = N_0$ . Існування нелічбових множин довів нім. математик Г. Кантор (1845—1918) за допомогою діагонального процесу, що набув згодом фундаментального значення в аналізі та логіці. Розглянемо дійсні числа  $x$ ,  $0 \leq x < 1$  і доведемо, що множина  $[0, 1]$  таких чисел нелічбова. Для цього зобразимо числа  $x$  нескінченними десятковими дробами виду  $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ , при цьому додатні числа з скінченними розкладами запишемо з нескінченним рядом дев'яток (напр.,  $0,25 = 0,24999\dots$ ). Припустимо (всупереч тому, що доводиться), що множина  $[0, 1]$  є лічбовою; тоді всі числа  $x$  можна пронумерувати числами  $1, 2, \dots$ . Запишемо відповідні десяткові розклади в порядку цих номерів.

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ 0, & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \end{array} \quad (1)$$

(тут перший індекс — номер числа, другий — номер десяткового знака). «Зіркуємо» діа-

гональні знаки, взявши  $b_1 \neq a_{11}$ ,  $b_2 \neq a_{22}$ ,  $\dots$ ,  $b_n \neq a_{nn}$ ,  $\dots$ , при цьому так, щоб ніяке  $b_i$  не дорівнювало 0 чи 9. Тоді число  $x_0 = 0, b_1 \dots b_n \dots$  не може міститися в наведеній таблиці (1); справді, коли  $b$  воно займало в (1)  $n$ -й рядок, то було б  $b_n = a_{nn}$ . Але тоді  $x_0$  не ввійшло б до нумерації чисел  $x$ , всупереч припущенню, одержана суперечність доводить нелічбовість множини  $[0, 1]$ . (Аналогічні міркування лежать в основі доведень алгоритм. нерозв'язності). Всі непусті відрізки дійсної осі  $R$  і сама ця вісь є рівнопотужними відрізку  $[0, 1]$ . Тому ж рівнопотужні евклідові простори  $R^n$  будь-якої розмірності. Про всі ці множини кажуть, що вони мають потужність континууму (continuum — неперервне — вживають його як синонім  $R$ ).

Другий спосіб одержання множин, рівнопотужних  $[0, 1]$ , також дуже наближений для математики. Розкладаючи числа  $x \in [0, 1]$  на нескінченні дійкові дробі  $0, b_1 \dots b_n \dots$  ( $b_k = 0$  або  $1$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ), тобто

$$x \text{ в ряди виду } \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \dots + \frac{b_n}{2^n} + \dots,$$

встановлюють бієктивну відповідність між відрізком  $[0, 1]$  та множиною дійкових дробів, тобто множиною послідовностей  $\{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ . Кожній такій послідовності відповідає підмножина  $Z_+$ , яка складається з тих чисел  $k$ , що для них  $b_k = 1$ . Отже,  $[0, 1]$  є рівнопотужною множині всіх підмножин натурального ряду  $Z_+$ ; звідси для множини потужності континууму буде запис:

$$\text{Card } A = 2^{N_0}.$$

У заг. випадку, нехай  $A \sim B$  означає рівнопотужність  $A, B$ . Тоді  $A \sim A$ , з  $A \sim B$  випливає  $B \sim A$  і з  $A \sim B, B \sim C$  випливає  $A \sim C$ . Отже, рівнопотужність є еквівалентністю відношення між множинами. Клас еквівалентності множин наз. потужністю, або К. ч. кожної з множин класу; так,  $N_0$  є потужність будь-якої лічбової множини,  $2^{N_0}$  — потужність будь-якої множини, рівнопотужної  $[0, 1]$ . Заг. запис  $\text{Card } A = \aleph$  означає, що потужність множини  $A$  є клас еквівалентності множин, позначений символом  $\aleph$ . Природно ввести між потужностями відношення порядку; якщо  $\text{Card } A = \aleph, \text{Card } B = \aleph'$ , то  $\aleph < \aleph'$  означає, що  $A$  рівнопотужніше якійсь частині  $B$ , але  $B$  не рівнопотужне ніякій частині  $A$  (зокрема, самому  $A$ ). Має місце теорема, за якою для будь-яких множин  $A, B$  або  $A$  рівнопотужне частині  $B$ , або  $B$  — частині  $A$ ; коли справджується і те, й друге, то  $A$  і  $B$  рівнопотужні. Тим самим для будь-яких двох потужностей  $\aleph, \aleph'$  є три можливості  $\aleph < \aleph', \aleph' < \aleph, \aleph = \aleph'$  ( $=$  означає абіг), які взаємно виключають одна одну. У цьому розумінні К. ч. схожі на звичайні числа. Для К. ч. можна ввести операції додавання та множення, але арифметика, яка при цьому виникає, зовсім не схожа на звичайну. До-

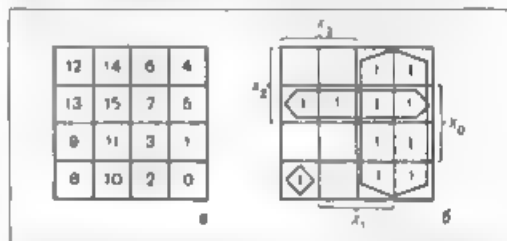
ведено, що потужність множини всіх підмножин будь-якої множини  $A$  більша, ніж  $A$ , звідси випливає, що множина  $K$ , ч. не обмежена.

Найважливішою нерозв'язаною задачею теорії множин від самого початку була проблема континууму: чи існує потужність, проміжна між лічболою і потужністю континууму? «Гіпотеза континууму» полягала в тому, що такої потужності немає, що множина, яка є рівнопотужною частини відрізка  $[0, 1]$ , або рівнопотужна всьому відрізку, або скінченна чи лічболова. Щоб усунути парадокси, які виникають у сучасній теорії множин, побудовано аксіоматику теорії множин Австр. математик К. Гедель показав 1938, що гіпотеза континууму сумісна з аксіомами теорії множин, тобто що її не можна спростувати жодним міркуванням, яке виходить з цих аксіом. Наразці, 1963 амер. математик П. Кoen повністю розв'язав проблему континууму, показавши, що гіпотезу континууму не можна довести жодним міркуванням, яке виходить з аксіом теорії множин. Отже прийняття чи відхилення гіпотези континууму є однаково законним, це веде до двох рівноправних «математик». Цей результат є одним з найглибших в основах математики.

Лит., Натансон І. П. Основи теорії функцій дійсної змінної. К., 1950. Аделсгадс П. С. Введення в теорію множин та теорію функцій. Ч. 1. М.-Л. 1948. Хаусдорф Ф. Теорія множин. Пер. з нем. М.-Л., 1937 (бібліогр. с. 291-293). Пурбана М. Начала математики, ч. 1. Основні структури аналізу, кн. 2. Теорія множин. Пер. з фр. М., 1985. Реллс К. Л. A. B. Hillel. I. Foundations of set theory. Amsterdam, 1955. Келлі Дж. Л. Общияя топология. Пер. с англ. М., 1968 (бібліогр. с. 381-374). Cohen P. J. Set theory and the continuum hypothesis. New York Amsterdam, 1966. O. B. Radoševič.

**КАРНАУ КАРТА**, Ве́йча діагра́ма — прямокутна таблиця певного спеціального висяду, яку використовують для задавання булевих функцій. Застосовують для спрощення пошуку тупикових і мінімальних диз'юнктивних нормальних форм (ДНФ) представлення їх. Будують  $K$ , к. для задавання  $\phi$ -ції, яка залежить від  $n$  змінних, використовують таблицю з  $2^n$  клітин. Кожній клітині надається номер, що визначається числом, запис якого в двійковій системі числення збігається з певним набором значень змінних. При задаванні  $\phi$ -ції за допомогою такої таблиці в кожній клітині записують значення цієї  $\phi$ -ції (0 або 1) на відповідному наборі значень змінних. При задаванні частково визначених  $\phi$ -цій у клітині, відповідній набору значень змінних, на яку  $\phi$ -цію не визначено, ставлять штику. Застосування  $K$ , к. для спрощення пошуку тупикових і мінімальних ДНФ засновано на встановленні при нумерації клітин такої відповідності між набором змінних і клітинками таблиці, за якої елементарним добуткам різної довжини відповідають цілком визначені, зручні для записування й розпізнавання конфігурації з одиниць таблиці, напр., конфігурації у формі прямокутника чи квадрата з розміще-

них поряд одиниць. Знаходження тупикових і мінімальних ДНФ заданої булевої  $\phi$ -ції за такої нумерації зводиться до відшукування найекономішних покрив конфігурації одиниць, яка відповідає цій  $\phi$ -ції, вказаними конфігураціями одиниць елементарних добутків. За певних обмежень на число змінних цей пошук характеризується наочністю, відносною простотою знаходження склеюваних членів і виконання власне операцій склеювання, а також наочністю й простотою довиначення частково визначених  $\phi$ -цій для найеконом-



Способи нумерації клітинок: а — нумерація клітинок при  $n=4$ ; б — буквенна нумерація клітинок

нішого покриття їх. Одержання зручних для записування й розпізнавання конфігурацій одиниць (прямокутників чи квадратів), що відповідають елементарним добуткам, і виконання всіх можливих склеювань і поглинянь, а також одержання зведеної системи імплікант у випадку  $n \leq 4$  забезпечується, якщо при нумерації клітинок номерами наборів (конституент одиниць) номери всіх конституент, сусідніх даній (тобто таких, що відрізняються значенням лише однієї змінної), виявляються геометрично сусідніми. При  $n > 5$  виконати цю вимогу неможливо, і номери сусідніх конституент можуть розміщуватися й у клітинках, місце яких у таблиці визначається додатковими ознаками. Ці ознаки можна одержати, наприклад, виходячи з  $K$ , к. при  $n=4$ . Один з можливих способів нумерації клітинок  $K$ , к. при  $n=4$  показано на мал. а. В деяких випадках поряд з розглянутим способом використовують буквенний (мал. б), який дає змогу виділяти області  $K$ , к., в яких значення будь-якої змінної змінюється постійним. Буквенна нумерація виявляється зручною, наприклад, коли булеву  $\phi$ -цію задають за допомогою  $K$ , к., якщо цю  $\phi$ -цію зображено досконалою ДНФ і конституенти записано у вигляді добутку змінних, а також при переході від покриття конфігураціями одиниць, що відповідають елементарним добуткам, до аналітичного представлення при записі цих добутків у вигляді добутку змінних. Як приклад на мал. б показано задавання за допомогою  $K$ , к.  $\phi$ -ції  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , що набуває одиничних значень на наборах з номерами 0—7, 8, 13, 15. На цьому ж малюнку показано найекономішнє покриття конфігурації одиниць, яка відповідає цій функції, правильними прямокутниками, що складаються з клітинок (0—7), (5, 7, 13, 15) і (8).

Перехід від покриття певної булевої ф-ції, заданої за допомогою К. м., до її аналітичного представлення у вигляді ДНФ пов'язаний з відшукуванням аналітичних представлень елементарних добуток, що відповідають усім конфігураціям одиниць покриття і є диз'юнктивними членами цієї ДНФ. Такий елементарний добуток складається з тих і лише тих співзв'язників ( $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots, x_n, \bar{x}_n$ ), які перетворюються в одиницю на всіх наборах, охоплених відповідним покриттям. Наприклад, показаному на мал. 6 покриттю відповідає ДНФ  $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ , яка в даному разі є мінімальною.

Найнеефективніше застосування К. м. — при  $n \leq 4$ . При  $n = 5$ , 6 необхідний певний навик у роботі з картами. При  $n > 6$  складність К. м. збільшується настільки, що практично повністю втрачається значущість геом. зображень, а разом з нею й вся перевага застосування К. м.

Лит.: Глазков В. М. Синтез цифрових автоматів. М., 1962 (Бібліотек. с. 464, 469). Фреме-ва Н. С., Поддипенский Я. С. Магнитная техника автоматизации и вычислительной техники. М., 1970 (Бібліотек. с. 309, 404); Veitch E. W. A card method for simplifying truth functions. «Proceedings of the Association for Computing Machinery», 1952, May, No 2-3, Karman G. H. The map method for synthesis of combinations logic circuits. «Transactions of the American Institute of electrical engineers», 1953, v. 72, No 1. Ю. Л. Ісаченко

**КАРТА МАГНІТНА** — прямокутний шматок (лист) гнучкої плівки, покритий феромагнітним шаром і призначений для магнітного записування інформації. К. м. як носій запису інформації має ряд істотних переваг: зручна для формування масивів інформації та для передавання її зберігання даних поза цифровою обчислювальною машиною (ЦОМ). К. м. можна попередньо відбракувати, а в процесі експлуатації окремі карти можна замінювати.

На базі К. м. будують *нагромаджувачі* з послідовним і довільним вибиранням карти в оперативного комплексу карт. У першому випадку, щоб знайти потрібну карту, послідовно перебирають оперативний комплект карт аж до моменту надходження до блока магнітних головок (МГ) заданої карти. У другому випадку будь-яка задана карта за невеликий проміжок часу вибирається і подається до блока МГ. Прикладом нагромаджувача з послідовним вибиранням може бути система «Magnacart». Вона складається з чотирьох поруч розміщених вакуумних барабанів, за допомогою яких карти можна передавати з одного пенала до іншого або переміщувати відносно МГ для записування і зчитування. Оперативний комплект карт (3000 шт.) зберігається в пеналі, 50 таких пеналів містяться в магазині нагромаджувача. Вибраний пенал автоматично підводиться до вакуумних барабанів. Крім обміну інформацією з ЦОМ, система «Magnacart» може сортувати й підбирати карти. Ємність системи — до  $2,5 \cdot 10^9$  двійкових знаків. Застосовують К. м. на

майларовій основі з майларовим захисним покриттям феромагнітного шару. Ємність карти —  $4,5 \cdot 10^9$  двійкових знаків.

Нагромаджувач з довільним вибиранням типу «SRAM» має магазин з 8 кодовими і 2 фіксуючими поворотними стрижнями, на яких висять 256 майларових К. м. (оперативний комплект). Кожна К. м. має свою індивідуальну комбінацію з 8 кодових вирізів. Будь-яку з 256 К. м. можна вибрати, відповідно комбінуючи поворот стрижнів, і подати на вакуумний барабан, що переміщує її поблизу МГ. Після записування зчитування карта автоматично повертається на стрижні. Ємність К. м. —  $1,3 \cdot 10^6$  двійкових знаків, час вибирання — 0,25 сек. В нагромаджувачах великої й надвеликої ємності, побудованих за багатоадресним принципом, є по кілька (до 8 і більше) оперативних комплектів карт, причому спочатку вибирається комплект, а потім — потрібна карта. Найбільше поширені багатомагазинні нагромаджувачі, де кожен комплект карт зберігається в окремому магазині, в якому є система вибирання К. м. найпридатніша для побудови різних перспективних пристроїв, напр., з довільним вибиранням карти, з циклічним переміщенням або кроковим рухом карти. Р. Л. Черняк.

**КАСКАДІВ МЕТОД** — один із методів синтезу комбінаційних схем. К. м. було розроблено для синтезу релейно-контактних схем, пізніше цей метод широко застосовують при синтезі комбінаційних схем, побудованих з логічних елементів К. м. найчастіше використовують для синтезу схеми, яка реалізує одночасно  $m$  булевих функцій  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , кожна з яких є ф-цією  $n$  аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Цей метод ґрунтується на використанні співвідношення булевої алгебри, вірного для довільної булевої ф-ції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Наведене співвідношення містить у правій частині ф-ції, які залежать від  $n-1$  аргумента, і його легко синтезувати, використовуючи двохходові елементи «І» і «АБО», що реалізують ф-ції виду  $x_n f_1 \vee \bar{x}_n f_2$ , якщо за вхідні значення дозволяється брати значення аргумента  $x_n$  і значення ф-ції  $f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$  і  $f_2 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ . Побудована у такий спосіб схема для кожної з ф-цій  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) утворює останній каскад шуканої комбінаційної схеми. Передостанній каскад одержують аналогічно, але вже стосовно до ф-ції вигляду

$$f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Застосовуючи вказаний прийом послідовно  $m-2$  рази, першопри задачу синтезу зводять до задачі синтезу схеми, що реалізує деякі булеві ф-ції від двох змінних, а цю задачу розв'язують тривіально. Т. ч., застосовуючи К. м., одержують шукану схему (на її вихо-

дах реалізуються фізичні  $f_1, \dots, f_m$ , залежні від  $n$  змінних) у вигляді сполучення послідовно зв'язаних  $n-1$  каскадів.

Лит.: Позаров Г. П. Математическая теория системных контурных (1, 2)-полупространств. Доклады АН СССР, 1955, т. 100, № 5; Гаушкин В. М. Системы дифференциальных автоматов. М., 1962 (Библиогр. с. 464-480). В. М. Коваль.

**КАТАЛОГ** (від грец. *κατάλογος* — список) — згрупований певним чином масив вторинних документів. Найпоширеніші в процесі науково-інформаційної діяльності — бібліотеки К., що являють складову частину *дослідково-інформаційного фонду*.

**КВАДРАТНІ ФОРМУЛИ** — формули чисельного інтегрування. Див. *Інтегралів способи обчислення*.

**КВАЗІАНАЛОГОВА МОДЕЛЬ** — обчислювальний пристрій, який ґрунтується на принципі еквівалентності рішень об'єкта та моделі щодо одержуваних результатів. К. м. ґрунтується на тому, що *аналогова модель* інших рішень  $B$ , які хоча б частково не подібні до рішень  $A$  і такі, щоб при виконанні певних умов (умов еквівалентності) — всі або деякі з розв'язків рішень  $B$  збіглися з точністю до постійних множників з розв'язками початкових рішень  $A$ .

Реалізація умов еквівалентності К. м., як правило, пов'язана з формуванням т. з. вектора зрівноважувальних величин, одержуваних у моделі (див. *Зрівноважування методу*). В К. м. умови еквівалентності яких можуть бути такі, що для реалізації їх не треба використовувати величини, одержувані у моделі. Такі К. м. наз. *незрівноважуваними*, або К. м. 1-го роду. За своїми властивостями вони практично не відрізняються від суто аналогових моделей. К. м. 1-го роду належать до категорії пристроїв без *зворотних зв'язків*. Вимірність вектора зрівноважувальних величин заздалегідь не обмежують, і вона залежить від виду модельованого об'єкта. Цей вектор наперед невідомий, тому для його визначення організується процес зрівноважування моделі. К. м., побудовані в такий спосіб, наз. *зрівноважуваними*, або К. м. 2-го роду. Зрівноважувані К. м. складаються з двох осн. частин: власне моделі, або квазіаналога, та з пристроєм, призначеного для зрівноважування або керування. Моделі 2-го роду відносять до категорії систем зі зворотними зв'язками, бо в них є пристрої керування.

К. м. ґрунтується на принципі *квазіаналогового моделювання*, що є розвитком аналогового методу. Порівняно з аналоговими пристроями К. м. мають більші обчисл. можливості і за допомогою їх можна розв'язувати ширші класи рівнянь. М. М. Кулик.

Лит.: Пухов Г. В. Методы анализа и синтеза квазіаналоговых электрических цепей. К., 1967 (Библиогр. с. 560-564).

**КВАЗІАНАЛОГОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ** — дослідження фізичного процесу шляхом вивчення явища іншої фізичної природи, яке описується математичними співвідношеннями, еквівалентними щодо одержуваних ре-

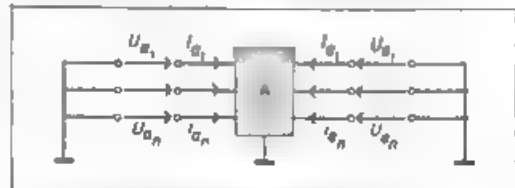
зультатів, і допускає вимірювання значень невідомих величин. Стан об'єкта моделювання звичайно характеризується групою невідомих величин  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ , а стан моделі, що перебуває у квазіаналоговій відповідності з об'єктом, — групою величин  $b_1 X_1(t), \dots, b_n X_n(t), Z_{m+1}(t), \dots, Z_{m+m}(t)$ , де  $b_1, \dots, b_n$  — якісь сталі.

Рівняння об'єкта моделювання можна записати у вигляді

$$A(X, F) = 0,$$

де  $A$  — оператор, який визначає зв'язки між невідомими  $X$  і заданими величинами  $F$ . Будь-яка *квазіаналогова модель* є аналогом не початкової системи рівнянь, а якісь інші рівняння. Щоб рівняння об'єкта і квазіаналогової моделі стали еквівалентними, треба виконати кілька умов, які наз. умовами еквівалентності. Ці умови можуть бути такі, що для реалізації їх у моделі не потрібно використовувати одержані в ній величини. Такі моделі за своїми властивостями практично не відрізняються від моделей прямої аналогії, і їх наз. *квазіаналоговими моделями 1-го роду*, або *некерованими* (незрівноважуваними). А в заг. випадку умови еквівалентності такі, що для реалізації їх треба використовувати одержані в моделі величини. Оскільки вони наперед невідомі, для реалізації умов еквівалентності треба організувати певний процес керування (зрівноважування). Моделі в цьому випадку наз. *квазіаналоговими моделями 2-го роду*, або *зрівноважуваними*. Незрівноважувані моделі належать до категорії пристроїв без зворотних зв'язків (див. *Зрівноважування методу*).

Заг. підхід до одержання рівнянь незрівноважуваних квазіаналогових моделей полягає в заміні початкових рівнянь еквівалентними їм розширеними рівняннями, які містять, крім  $X$  та  $F$ , і допоміжні невідомі  $y$ , і додаткові величини  $G$ , що не входять до  $X$ . При цьому матем. зв'язки між  $X, y, F, G$  вибирають так, щоб виконувались і умови фіз. реалізованості за допомогою вибраних елементів і умови простоти обчислювання вектора  $G$  за даними, що є у початкових рівняннях.



1. Схема квазіаналога, побудованого на основі асиметричних діодів постійного струму.

Властивості зрівноважуваних моделей визначаються структурою еквівалентних рівнянь. Заг. підхід до одержання цих рівнянь (як і для незрівноважуваних квазіаналогових моделей) полягає в тому, що початкові рівняння треба замінити розширеними так, щоб виконувались умови еквівалентності.

Це здійснюється за допомогою вектора зрівноважувальних величин і вектора додаткових, незалежно визначуваних величин.

Основою тех. засобів К. ж. є електр. кола, в яких розподіл струмів і напруг перебуває в певній відповідності з матем. залежностями, які описують стаціонарний або нестационарний процес, що відбувається в досліджуваному об'єкті (див. *Електрична кіла теорія*). Рівні методи синтезу квазіаналогових моделюючих електр. кіл ґрунтуються на використанні принципу утворення потенціально-нульових

які дали б змогу усувати з рівнянь багато-полюсних членів вигляду  $\mathcal{E}_{aa}u_a$  і  $\mathcal{E}_{bb}u_b$ , бо матриці  $\mathcal{E}_{aa}$  і  $\mathcal{E}_{bb}$  не можуть бути довільними. Таких способів тільки два. Перший з них полягає в тому, що для однієї з груп полюсів  $a_1, \dots, a_n$  чи  $b_1, \dots, b_n$  домагаються виконання умов  $u_a = 0$ ,  $i_a = 0$  чи  $u_b = 0$ ,  $i_b = 0$ . Залишивши, напр., полюси  $b_1, \dots, b_n$  на короткому ході і виконавши умови  $i_b = 0$ , одержимо рівняння

$$i_a = \mathcal{E}_{aa}u_a - \mathcal{E}_{ab}u_b + \bar{i}_a,$$

$$0 = -\mathcal{E}_{ba}u_a + \mathcal{E}_{bb}u_b + \bar{i}_b.$$

Якщо струм  $i_a$  чи напругу  $u_b$  регулювати так, щоб напруга  $u_b = 0$ , то одержимо рівняння  $\mathcal{E}_{ba}u_a = \bar{i}_b$ , за допомогою якого можна моделювати алгебр. об'єкти довільного вигляду, оскільки матриця  $\mathcal{E}_{ba}$  може бути довільною. Принцип утворення потенціально-нульових вузлів у моделюючих колах застосовується для моделювання не тільки алгебричних, а й диференціальних та ін. об'єктів.

За другого способу члени вигляду  $\mathcal{E}_{aa}u_a$  і  $\mathcal{E}_{bb}u_b$  можна усувати з рівнянь кола, регулюючи струми  $i_a$  і  $i_b$  так, щоб виконувалися співвідношення

$$i_a = \mathcal{E}_{aa}u_a,$$

$$i_b = \mathcal{E}_{bb}u_b.$$

У цьому випадку також одержимо рівняння

$$\mathcal{E}_{ab}u_b = \bar{i}_a,$$

$$\mathcal{E}_{ba}u_b = \bar{i}_b.$$

які дають змогу моделювати алгебр. об'єкти довільного вигляду. Аналогічний результат можна одержати при нульових значеннях усіх компонент матриць  $\mathcal{E}_{aa}$  і  $\mathcal{E}_{bb}$ . У ланцюгах синусоїдального змінного струму, що складаються тільки з ємностей та індуктивностей, цього можна домогтися й не регулюючи струми  $i_a$  і  $i_b$ , бо в таких колах опори ємностей та індуктивностей мають протилежні знаки і, отже, можуть бути скомпановані в кожному вузлі.

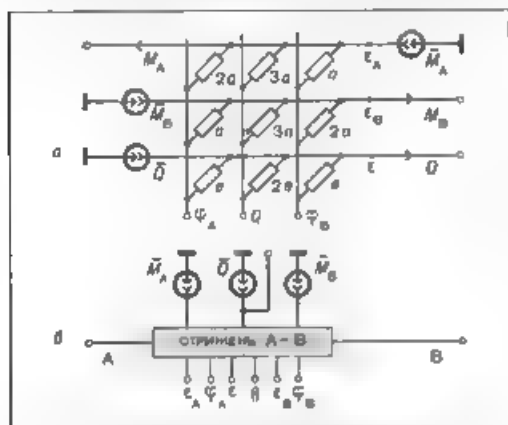
Розглянемо одян із способів побудови квазіаналогів об'єктів на прикладі моделювання рамних систем буд. механіки. Для кожного стрижня рами можна записати рівняння:

$$M_A = \frac{2EI}{l}(2\varphi_A + \varphi_B + 3\theta) + \bar{M}_A,$$

$$M_B = \frac{2EI}{l}(\varphi_A + 2\varphi_B + 3\theta) + \bar{M}_B,$$

$$Q_{AB} = \frac{6EI}{l^2}(\varphi_A + \varphi_B + 2\theta) + \bar{Q}_{AB},$$

де  $l$  — довжина стрижня,  $EI$  — жорсткість



2. Схема квазіаналогого стрижня, який з'єднує: а — для коефіцієнта  $a$ , б — для коефіцієнта  $b$ .

точок, принципу утворення вузлів з нульовими власними провідностями і на комбінованому використанні цих процесів (див. *Нульових власних провідностей вузлів метод і Потенціально-нульових точок метод*). Так, напр., рівняння квазіаналога, побудованого на основі електр. кіл постійного струму (мал. 1), мають вигляд

$$i_a = \mathcal{E}_{aa}u_a - \mathcal{E}_{ab}u_b + \bar{i}_a,$$

$$i_b = -\mathcal{E}_{ba}u_a + \mathcal{E}_{bb}u_b + \bar{i}_b.$$

Тут  $\mathcal{E}_{aa}$  і  $\mathcal{E}_{bb}$  — матриці власних провідностей вузлів  $a_1, \dots, a_n$  і  $b_1, \dots, b_n$ ;  $\mathcal{E}_{ab}$  і  $\mathcal{E}_{ba}$  — матриці взаємних провідностей між вузлами  $a_1, \dots, a_n$  і  $b_1, \dots, b_n$ ;  $i_a$  і  $i_b$  — вектори струмів полюсів;  $\bar{i}_a$  і  $\bar{i}_b$  — значення  $i_a$  і  $i_b$  при короткому замиканні полюсів  $a_1, \dots, a_n$  і  $b_1, \dots, b_n$  на один спільний полюс (землю). Квадратні матриці  $\mathcal{E}_{aa}$  і  $\mathcal{E}_{bb}$  — діагональні, в додатних коефіцієнтах, не меншій за суму модулів коэф. відповідних рядків матриць  $\mathcal{E}_{ab}$  і  $\mathcal{E}_{ba}$ . Квадратні матриці  $\mathcal{E}_{ab}$  і  $\mathcal{E}_{ba}$  мають невід'ємні компоненти, а з усьому іншому вони можуть мати довільний вигляд. Із структури й характеру рівнянь розглянутого багатополюсника випливає, що його можна застосовувати для моделювання алгебр. об'єктів. Але, щоб одержати моделі таких об'єктів у заг. випадку, треба мати способи,

на згинання;  $M_z$  — згинаючі моменти на кінцях;  $Q_z$  — поперечні сили з протилежним знаком у будь-якому поперечному перерізі стрижня;  $\varphi$  — кут повороту кінця стрижня;  $\theta$  — кут переносу з протилежним знаком;  $\bar{M}_z$ ,  $\bar{Q}_z$  — силові фактори для стрижня з застиснутими кінцями.

Для визначення невідомих кутів  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\theta$  додатково складають рівняння рівноваги. Ці рівняння є простими сумами згинаючих моментів у вузлах і сумами поперечних сил у різних перерізах рами, через це вони мають вигляд

$$By = z,$$

де  $y$  — вектор, компоненти якого моделюють кути  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  і  $\theta$ ;  $B$  — прямокутна матриця, компоненти якої складаються тільки з одиниць і нулів,  $z$  — вектор відомих членів. Схему квазіаналога стрижня, який згинають, наведено на мал. 2. Провідності резисторів моделюють коефіцієнтами  $\varepsilon = \frac{2EI}{l}$ .

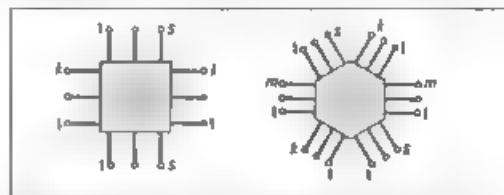
$b = \frac{6EI}{l^3}$ . Якщо напруги  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  з дорівнюють «0», то схема моделює рівняння стрижня. Рівняння рівноваги у вузлах рами і поперечних перерізах виконуються автоматично, коли квазіаналог стрижня з'єднується між собою.

Принцип еквівалентності, на якому ґрунтується К. м. с. загальнішим, ніж принцип подібності, на якому ґрунтуються аналогове моделювання. Тому, щоб збільшити можливості близькості сучасних моделюючих пристроїв і розширити клас розв'язуваних задач, їх будують саме за цим принципом. Ці пристрої використовують для моделювання об'єктів, які можна описувати системами алгебр. і дифер. рівнянь з початковими й крайовими умовами, для розв'язування задач оптим. планування, буд. механіки тощо.

Г. П. Галушківський.

**КВАЗІАНАЛОГОВЕ МОДЕЛЮЮЧЕ СЕРЕДОВИЩЕ** — квазіаналогова модель, яка конструктивно є структурою, що складається з однотипних і однотипно з'єднаних між собою осередків, які утворюють геометрично правильну й ізотропну плоску чи просторову ґратку, при цьому кожний осередок допускає керування її станом або параметрами. Станом осередків середовища можна керувати за допомогою сигналів з сусідніх осередків, ззовні або комбінованим способом. К. м. с. поділяють на неарівноважувані та арівноважувані. Не арівноважуване К. м. с. — це обчисл. середовище, де немає зворотних зв'язків. Введення до нього відомої інформації дає змогу безпосередньо одержати шукані величини, що складаються з осн. невідомих, які відповідають початковим рівнянням модельованого об'єкта, і допоміжних, які одержують, розв'язуючи за принципом квазіаналогового моделювання не задані, а розширені еквівалентні рівняння. У арів-

новажуваному К. м. с. допоміжні невідомі використовують для формування т. з. арівноважувальних величин. Ці величини впливають на режим моделі так, що виконуються умови еквівалентності рівнянь об'єкта і рівнянь, які описують стан К. м. с. Процес добирання керуючих величин наз. арівноважуванням обчисл. середовища. Як правило, арівноважування проводять за допомогою зворотних зв'язків. Обчисл. пристрій, побудований на базі арівноважуваного К. м. с., структурно поділяють на дві осн. частини:



Типи осередків для плоского квазіаналогового моделюючого середовища

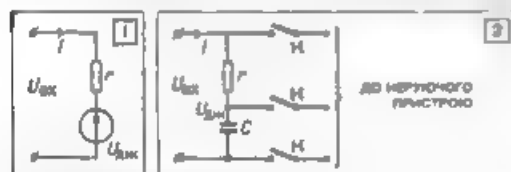
квазіаналог, який є власно моделлю (як квазіаналог використовують арівноважуване К. м. с.), і пристрій керування для арівноважування квазіаналога. Пристрій керування квазіаналогом можна виконати у вигляді перетворювача, що є якимсь середовищем спрямованої ДП, яке пропускає сигнали лише в певних напрямках (див. *Арівноважування методи*).

К. м. с. бувають дискретні і неперервні. У дискретних К. м. с. можна виділити окремий осередок середовища. В моделях з неперервним середовищем як розв'язувальну частину використовують неперервні структури, що складаються з монолітного матеріалу (напр., електропровідний папір, провідні тканини, провідна пластмаса тощо). Такі структури наз. неперервними моделюючими середовищами (див. *Моделювання на суцільних середовищах*). Неперервні К. м. с., в яких властивості матеріалу в усіх напрямках однакові, наз. однорідними, а неперервні К. м. с., в яких властивості матеріалу в усіх напрямках неоднакові, — неоднорідними.

Вимога однорідності (ізотропності) структури К. м. с. обмежує вибір форми осередків. Форма осередків така, що сукупність щільно укладених осередків утворює плоске чи об'ємне тіло без зазорів між осередками. На кожній стороні (грані) осередка є виводи для з'єднування з іншими комірками. Тому як осередки використовують фігури (тіла) з центр. симетрією і парною кількістю сторін (граней). На симетричних сторонах осередка кількість виводів однакова. Для плоского квазіаналогового середовища можуть бути два типи осередків (мал.), де  $1 - k$ ,  $1 - m$ ,  $1 - s$  — полюси, для тривимірного простору — п'ята. К. м. с. бувають одновимірні, двовимірні і тривимірні (залежно від модельованого об'єкта). Аналогове моделююче середовище — різновид К. м. с. Конструктивно воно будується так само, як і К. м. с.

проте базується на принципі подібності (див. *Подібність теорія*). Моделюючи рівняння Лапласа, як аналогове обчисл. середовище застосовують електропровідний папір, властивий в провідній гуми, провідні тканини, провідні пластмаси, а моделюючи рівняння Фур'є, — електропровідний папір з розподіленою ємністю.

**КВАЗІРЕЗИСТОР** — електричний двополюсник, який містить у собі залежні джерела напруги й струму й має задане значення вхід-



1. Схема квазірезистора.

2. Схема динамічного квазірезистора.

ного опору. Один з можливих варіантів виконання схеми К. показано на мал. 1. У цій схемі величина напруги джерела  $U_{вх}$  пропорційна вхідній напрузі  $U_{вх} = \alpha U_{вх}$  і вхід-

ний опір визначається як  $R_{вх} = \frac{r}{1-\alpha}$ .

Т. ч., при незмінному значенні опору  $r$  величину опору К. можна регулювати, змінюючи значення коэф.  $\alpha$ . Щоб спростити схеми пристроїв, у яких є значна кількість К., останні виконують у вигляді динамічних К. (мал. 2). У динамічному К. залежне джерело  $U_{вх}$  замінюють конденсатором  $C$  (або іншим запам'ятовувальним елементом), що періодично підзаряджається від керуючого пристрою до потрібної напруги. Керуючий пристрій обслуговує систему динамічних К., підключаючи до них через ключі  $K$  на досить малий час. Якщо стала часу розрядження конденсатора  $C$  велика порівняно з часом зарядження й часом циклу роботи керуючого пристрою, вхідний опір динамічного К. практично мало відрізнятиметься від потрібного значення.

К. застосовують у схемах аналогових та гібридних обчисл. машин, особливо в сітчастих інтеграторах, для розв'язування задач матем. фізики. Динамічні К. полегшують автомат введення первісної інформації про параметри моделі. Відсутність у схемі динамічного К. змінних параметрів дає змогу ефективно використовувати їх при побудові дискретних моделюючих середовищ.

В. Н. Васильев.

**КВАЙНА МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ** — метод одержання мінімальної диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) представлення булевих функцій з досконалої ДНФ. Застосування К. м. м. вимагає виконання двох етапів: одержання скороченої ДНФ з досконалої та побудову на основі скороченої диз'юнктивних нормальних форм тупикових, з яких вибирають диз'юнктивних нормальних форми мінімальної.

м. На першому етапі до досконалої ДНФ застосовують операції неповного склеювання ( $xy \vee xy = x \vee xy \vee xy$ ) й елементарного поглинання ( $x \vee xy = x$ ). Можливість одержання скороченої ДНФ у результаті застосування цих операцій визначається теоремою Квайна: якщо в досконалій ДНФ змислові всі операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то в результаті буде одержано скорочену ДНФ.

За допомогою операції елементарного поглинання на першому етапі виключають тільки ті члени ДНФ, до яких застосовано всі можливі для них склеювання. Мінімізацію на цьому етапі зручно проводити в такій послідовності. Виходячи з досконалої ДНФ  $f_0$  булевої ф-ції  $f$ , залежної від  $n$  змінних, будують послідовність ДНФ  $f_1, f_2, \dots, f_k \dots$  доти, поки не збіжаться деякі ДНФ  $f_k$  й  $f_{k+1}$ . При цьому перехід від  $f_i$  до  $f_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) здійснюють за таким правилом. У ДНФ  $f_i$  виконують усі операції неповного склеювання, застосовувавши до елементарних добутків довжини  $(n-i)$ . В результаті в представлений ф-ції утворюються добути довжини  $(n-i-1)$ . Оскільки склеювати можна лише добути з однаковою кількістю букв, з жодним з одержаних добутків добути довжини  $(n-i)$  склеюватися не будуть. Тому після виконання операції склеювання виключають усі ті елементарні добути довжини  $(n-i)$ , які можна виключити, застосовувавши операцію елементарного поглинання. На другому етапі використовують т. з. таблицю простих імплікант, що являє собою прямокутну таблицю з двома входами. Стопці такої таблиці позначають конститuentами одиниці мінімізованої ф-ції, рядки — її різними простими імплікантами. Якщо до певної конститuentи входить будь-яка з простих імплікант, то на перетині відповідних стовпця і рядка ставиться позначка.

Побудова тупикових ДНФ за допомогою таблиці простих імплікант пов'язана з побудовою на її основі т. з. скороченої таблиці простих імплікант. Таку таблицю одержують при викреслюванні з таблиці простих імплікант: 1) тих стовпців, імпліканти яких мають лише по одній позначці, 2) тих рядків, імпліканти яких мають позначки у викреслених стовпцях, 3) одного з тих двох стовпців, у яких є позначки в однакових стовпцях і 4) тих рядків, які внаслідок викреслювання у відповідності з 1)–3) не мають жодної позначки. Побудувавши тупикову ДНФ при цьому відповідає вибір такої сукупності простих імплікант, яка включає всі ті імпліканти, що належать рядкам, викресленим відповідно до 2) (т. з. ядро булевої ф-ції), і, крім того, певну систему імплікант із скороченої таблиці, позначки яких принаймні один раз накривають усі її стовпці. На відміну від ядра така система в заг. випадку може вищипувати різні набори простих імплікант. Вибір набору імплікант з мінім. сумарним числом букв за



кількох можливих варіантів відповідає побудові мінімальної ДНФ заданої ф-ції.

К. м. м. зазвичайно застосовують для мінімізації ф-цій, що залежать від порівняно невеликого числа змінних. При збільшенні числа змінних зручнішими виявляються інші методи мінімізації.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифрових автоматів М., 1962 [61610гр. с. 464—469]

Ю. Л. Іосадзе.

**КВАНТОРИ** — логічні оператори, які переводять одну висловлювальну форму в іншу. Розрізняють К. загальності та К. існування (див. *Логічні операції*).

**КВАНТУВАННЯ** — операція перетворення сигналу, при якій здійснюється дискретизація його за рівнем чи за часом або подвоєчас і за рівнем і за часом.

К. за часом — перетворення сигналу  $x(t)$  на послідовність імпульсів, які йдуть один за одним і амплітуда, тривалість або частота яких залежить від амплітуди вхідного сигналу (див. *Модуляція*). Пристрій, що виконує операцію К. за часом, наз. *переривачем*, або імпульсним елементом. Вважають, що імпульсний елемент пропускає вхідний сигнал  $x(t)$  лише протягом якогось часу  $\tau_1$  (тривалість замикання) і не пропускає його протягом часу  $T_1 - \tau_1$  (тривалість переривання). Величину  $T_1$  наз. *періодом К.* (переривання).  $T_1$  може бути *випадковою величиною* (К. з випадковим періодом), *величиною, функціонально залежною від квантовуваного сигналу  $x(t)$*  (або сигналу на виході імпульсного елемента  $x(tT_1)$ ), чи *сталом*  $T_1 = T = \text{const}$ . Звичайно  $\tau_1 < T_1$ , тому сигнал  $x(tT_1)$  в часі є послідовністю імпульсів, обидва яких відповідає вхідному сигналові  $x(t)$ . Операція К. за часом змінює як інтенсивність сигналу (при  $T_1 = T = \text{const}$ ,  $\tau_1 = \tau = \text{const}$  послідовно-

вого в  $\frac{\tau}{T}$  раз), так і його частотний спектр.

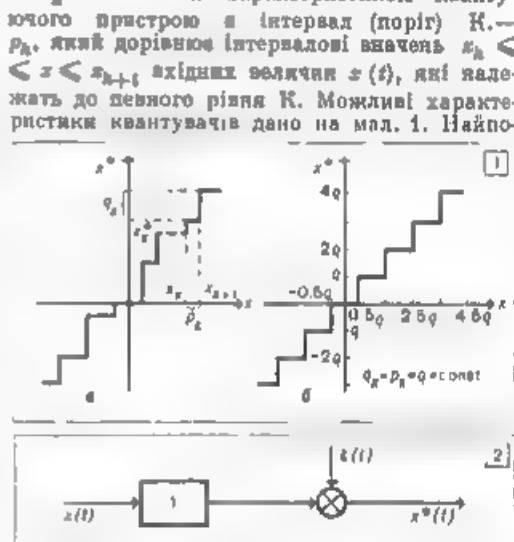
Якщо  $\omega_0$  — частота складової неперервного сигналу  $x(t)$ , то частотний склад квантованого сигналу збагачується на нескінченне число бічних частот  $\omega_0 \pm \pi \frac{2\pi}{T}$ ,  $\pi = 1, 2, \dots$

К. за часом змінює інформативність первісного сигналу. Доведено, що втрат інформації немає, коли інтервал К. сигналу  $x(t)$ , спектр якого обмежений ( $\omega_0$  — гранична частота спектра), дорівнює  $T = \frac{\pi}{\omega_c}$  (теорема

Котельникова). В цьому випадку сигналом  $x(tT_1)$  можна відтворити первісний  $x(t)$ , для цього застосовують *фільтри нижніх частот*, які відтинають усі бічні частоти, й підсилювачі.

К. за рівнем — перетворення сигналу  $x(t)$ , яке полягає в заокруглюванні його миттєвого значення до якоїсь найближчої, наперед заданої, фіксованої величини  $x_k$ , яку наз. *рівнем К.* Це К. є нелінійним перетворенням вхідного сигналу  $x(t)$ . Пристрій,

що здійснює операцію К. за рівнем, наз. *квантувачем* (квантуючим пристроєм). Віддалі між двома сусідніми рівнями К. наз. *кроком К.*  $q_k = x_{k+1} - x_k$ . Важливою характеристикою квантуючого пристрою є інтервал (поріг) К. —  $p_k$ , який дорівнює інтервалові значень  $x_k < x < x_{k+1}$  вхідних величин  $x(t)$ , які належать до певного рівня К. Можливі характеристики квантувачів дано на мал. 1. Найпо-



1. Характеристики квантувачів: а — нерівномірний, б — рівномірний.

2. Блок-схема перетворення сигналу у квантований.

ширенішим є К. з  $q_k = q = \text{const}$  і  $p_k = p = \text{const}$  (рівномірне К., мал. 1, б), бо воно дуже просте.

Перетворення вхідного сигналу в квантувачі пов'язане з операцією заокруглювання, а, отже, з певним спотворенням вхідного сигналу. Похибкою К. наз. величина  $e_k = x(t) - x_k$  при  $x_k < x(t) < x_{k+1}$ . Вона залежить від характеристик квантуючого пристрою ( $q_k, p_k$ ) і від самого вхідного сигналу. Величину  $e_k$  можна одержати для кожного значення  $x(t)$ . Квантуючий пристрій, що перетворює вхідний сигнал в мінімальними похибками, наз. *оптимальним*. Квантувач, оптимальний для одного виду сигналу  $x(t)$ , не буде оптимальним для іншого. Для рівномірного К. при  $q = p$  і  $x_1 = x_{-1} = 0,5 q$  величина похибки лежить у межах  $-0,5q \leq e \leq +0,5q$ . Оскільки квантувач є здебільшого частиною динамічної системи, похибка К. в таких системах можуть нагромаджуватись. Оцінити величину похибки, спричинену К. у динамічній системі, можна, використовуючи метод Ципкіна, за яким оцінюють максимальне значення похибки, спричиненої К., через імпульсну вагову ф-цію системи

$$w[n], \text{ як } |e|_{\max} = 0,5 q \sum_{n=0}^m |w[n]|.$$

Якщо  $x(t)$  — випадкова ф-ція часу, то й  $e(t)$  буде випадковою ф-цією, що й наз.

шумом  $K$ . Вплив шуму  $K$  на роботу пристроїв, у яких є квантувачі, можна дослідити за допомогою статистичної теорії  $K$ . сигналів. Доведено, що коли хрост  $K$ . є досить малий, а кількість рівнів  $K$ . велика, то шум  $K$ . є некорельованим з квантованим сигналом — випадковим процесом типу *білого шуму*. Амплітуда шуму  $K$ . розподілена рівномірно між значеннями  $-0,5q$  і  $+0,5q$ , а спектральна щільність дорівнює  $\frac{q^2}{12}$ . Внаслідок такої апроксимації шуму  $K$ ., роботу рівномірного квантувача можна досліджувати за допомогою еквівалентної блок-схеми (мал. 2). Якщо кількість рівнів  $K$ . обмежена, оцінка впливу  $K$ . за рівнем ускладнюється.

Однозначно відтворити первісний  $x(t)$  за його квантованим значенням  $x^*$  неможливо. Якщо відомий закон розподілу вхідного сигналу  $P(x)$ , то можна знайти ймовірність того, що вхідна величина лежить у межах  $kq - 0,5q \leq x \leq kq + 0,5q$ , і знайти умовну щільність ймовірності розподілу  $x$  у цьому інтервалі

$$P\left\{\frac{x}{x^*} = kq\right\} = \frac{P(x)}{P(k)}.$$

де  $P(k)$  — ймовірність появи сигналу  $x^*$ ,

$$P(k) = \int_{x^* - 0,5q}^{x^* + 0,5q} P(x) dx.$$

Математичне сподівання, дисперсію та ім. квантованого сигналу  $x^*$  можна виразити через матем. сподівання, дисперсію та ім. вхідного сигналу  $x(t)$  за допомогою формул, що їх назв. поправками Шенперда для згрупованих даних:

$$M|x^*| = M|x| + \frac{1}{12} q^2.$$

$$D|x^*| = D|x| + \frac{1}{3} q^2 E(x^2) + O(q^4).$$

де  $M(\cdot)$  і  $D(\cdot)$  — матем. сподівання та дисперсія величин, які стоять у квадратних дужках,  $E(\cdot)$  — характеристична ф-ція  $x$ ,  $O(q^4)$  — величини 2-го порядку малости. Кореляційна ф-ція матиме при цьому вигляд:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \begin{cases} E|(x^*)^2(t_1)| - \frac{1}{12} q^2 & \text{при } t_1 = t_2, \\ R_{xx^*}(t_1, t_2) & \text{при } t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

У ряді пристроїв, цифрових обчисл. машин, вимірювальних приладів, пристроїв керування, зв'язку тощо сигнали піддають одночасному перетворенню  $K$ . за часом і  $K$  за рівнем. При цьому вихідний сигнал подають здебільшого в цифровій формі — десятковій, двійковій, двійково-десятковій тощо (див. Дискретизація). Одночасно  $K$ . за рівнем і часом здійснюється в *аналого-цифрових перетворювачах*.

Лит. Цыпкина Я. З. Теория линейных импульсных систем М., 1963 (Библиогр. с. 326—383) Ефи-мов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле М., 1969 (Библиогр. с. 88—87) Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Пер. с англ. М., 1964 Корн Г. А. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. Пер. с англ. М., 1968.

Б. Ю. Мандруський-Соколов

**КВАНТУВАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ** — описування неперервних сигналів, що діють на елементи реєстраторного поля, ступінчастими (кусково-постійними) функціями під цих сигналів  $K$ . а. може здійснюватися в самих реєстраторах і поза ними. Для  $K$ . а. використовують порогові елементи, що дають змогу подати неперервний вхідний сигнал як ступінчасту ф-цію. Як правило, порогові елементи всіх реєстраторів мають однакові властивості. Чим більше порогів мають порогові елементи, тим повніше одержані ступінчасті ф-ції описують вхідне зображення. Дуже часто порогові елементи мають лише один поріг і тоді вхідний сигнал реєстратора можна подати як кусково-постійну ф-цію з двома можливими значеннями.

Н. І. Мислюк

**КЕРУВАННЯ В УМОВАХ НЕВІЗНАЧЕНОСТІ** — див. Прийняття рішень в умовах невизначеності

**КЕРУВАННЯ ВИПАДКОВИМИ ПРОЦЕСАМИ ТЕОРІЯ** — розділ математики, що вивчає проблеми оптимізації систем, поводження яких описується випадковими процесами. К. в. п. т. виникла як синтез трьох матем. дисциплін: детерміністичної теорії керування (яка включає класичне варіаційне числення, програмування динамічне, Понтрягіна принцип максимуму), випадкових процесів теорії та математичної статистики. К. в. п. т. в широкому розумінні охоплює проблеми опт. статистичних оцінок для випадкових процесів (фільтрацію, інтерполяцію, прогнозування), послідовний аналіз Вальда, стохастичні варіанти динамічного програмування та принцип максимуму. Методы К. в. п. т. дають змогу знаходити розв'язки багатьох прикладних задач (напр., задачі оптимізації масового обслуговування систем, визначення найдодільнішого економ. поводження та керування технологічними процесами при наявності випадкових факторів, здійснення опт. надійнісного синтезу складних тех. систем тощо). У К. в. п. т. найпоширенішою є концепція керування за неповними даними з застосуванням байєсівського підходу та методів динамічного програмування. Важливу роль у К. в. п. т. відіграє поняття марковського процесу, бо марковські процеси є досить доброю матем. моделлю реальних явищ, і апарат теорії марковських процесів — рекурентні та дифер. рівняння — пристосований до розв'язування задач з опт. керування. Суть зг. задачі керування випадковим процесом за неповними даними можна з'ясувати на прикладі керуваного процесу з дискретним часом і дискретним простором станів. Нехай поведінка системи в моменти часу  $n = 0, 1, 2, \dots$  описується послідовністю випадкових величин  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ . При цьому значення  $\xi_n$  не відомі

експериментаторові. В його розпорядженні є випадкові величини  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ , статистично пов'язані з  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ . Імовірнісну еволюцію послідовностей  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  та  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$  визначають за апріорним розподілом  $\pi_0$  випадкової величини  $\xi_0$  і перехідними ф-ціями

$$P(\xi_{n+1}, \eta_{n+1} / \xi_n, H_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

де  $P(\xi_{n+1}, \eta_{n+1} / \xi_n, H_n)$  — умовний сумісний розподіл імовірностей неспостережуваного стану системи  $\xi_{n+1}$  і спостережуваних даних  $\eta_{n+1}$  у момент  $n+1$  при заданих  $\xi_n = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  і  $H_n = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ . Нехай задано сімейство перехідних ф-цій  $\{P^d(\xi_{n+1}, \eta_{n+1} / \xi_n, H_n), n \geq 0\}$ , які залежать від якого-небудь параметра (керуючого діяння)  $d \in D$ . Експериментатор може в кожен момент часу на основі наявної інформації вибрати якийсь  $d$ , впливаючи тим самим на перебіг процесу  $\{\xi_n, \eta_n\}$ . Значення керуючих діянь, вибраних у моменти часу  $1, 2, \dots, n$ , позначимо через  $\Delta_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . У момент часу  $n$  експериментаторові відомі  $H_n$  і  $\Delta_n$ . Уся інформація про  $\xi_n$  міститься в умовному розподілі імовірностей  $\xi_n$  при заданих  $H_n$  і  $\Delta_n = \pi_n(\xi_n / H_n, \Delta_n)$ . Значення  $\pi_n(\xi_n / H_n, \Delta_n)$  можна обчислити, знаючи  $\pi_0$  та перехідні ф-ції. Отже, став розглядуваної керуваної системи в момент  $n$  описується вектором  $\lambda_n = (\pi_n, H_n, \Delta_n)$ ,  $\lambda_0 = \pi_0$ . Спостерігаючи в наступний момент часу випадкову величину  $\eta_{n+1}$ , експериментатор обчислює  $\lambda_{n+1}$  за *Бадаса формулою*.

Стратегією допустимою наз. набір ф-цій  $\delta = \{\delta_1(\lambda_0), \delta_2(\lambda_1), \dots, \delta_n(\lambda_{n-1}), \dots\}$ , які в будь-який момент  $n$  визначають правило вибирання керуючого діяння  $\delta_n(\lambda_{n-1})$  з допустимої множини керуючих діянь  $D(\lambda_{n-1}) \subseteq D$  на основі наявної інформації  $\lambda_{n-1} = (\pi_{n-1}, H_{n-1}, \Delta_{n-1})$ . Сукупність усіх допустимих стратегій позначимо через  $\Delta$ . Апріорний розподіл  $\pi_0$ , сімейство перехідних ф-цій  $\{P^d(\xi_{n+1}, \eta_{n+1} / \xi_n, H_n), n \geq 0, d \in D\}$  та стратегія  $\delta \in \Delta$  визначають керований стратегією  $\delta$  процес, що спостерігається частково.

Нехай задано числову ф-цію  $\varepsilon_N(\lambda_N)$ ,  $0 \leq \varepsilon_N < \infty$ , що характеризує виграш, який одержує експериментатор, якщо еволюція керуваного процесу обривається на  $N$ -му кроці, а стан процесу —  $\lambda_N$ . Критерієм якості керування є

$$U(\pi_0, N, \delta) = M_{\pi_0}^{\delta} \varepsilon_N(\lambda_N). \quad (1)$$

де  $M_{\pi_0}^{\delta}$  — символ математичного сподівання, що відповідає процесові, керуваному стратегією  $\delta$ , при умові, що випадкова величина  $\xi_0$  розподілена за законом  $\pi_0$ . У ви-

падку  $N = \infty$  критерій якості визначають як  $\lim_{N \rightarrow \infty} U(\pi_0, N, \delta)$ . Часто виразу функцію можна представити у вигляді

$$\varepsilon_N(\lambda_N) = W^d(\lambda_0) + W^d(\lambda_1) + \dots + W^d(\lambda_{N-1}) + f(\lambda_N),$$

де  $W^d(\lambda_{i-1})$  інтерпретують як виграш на  $i$ -му кроці, а  $f(\lambda_N)$  — останній виграш. Мета керування полягає в максимізації критерію (1), ф-цію  $U(\pi_0, N) = \sup_{\delta \in \Delta} U(\pi_0, N, \delta)$

наз. його ціною. Стратегія  $\delta^*$  ( $\delta^e$ ) наз. оптимальною (ε-оптимальною), якщо

$$U(\pi_0, N, \delta^*) = U(\pi_0, N), \quad U(\pi_0, N, \delta^e) > U(\pi_0, N) - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Основні проблеми К. в. п. т.: а) за яких умов існують оптимальні та ε-оптимальні стратегії; б) як знаходити ці стратегії й ціну  $U(\pi_0, N)$ . Користуючись методом динамічного програмування, можна одержати нелінійні рекурентні (за  $N$ ) *Беллмана рівняння* для  $U(\pi_0, N)$ , розв'язання які знаходимо  $U(\pi_0, N)$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^e$ . Рекурентний вигляд співвідношень для ціни дає змогу в багатьох випадках будувати ефективні обчислювальні алгоритми для відшукування  $U(\pi_0, N)$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^e$ . Принципова трудність, що виникає при розв'язуванні задачі К. в. п. т., полягає в тому, що з плином часу зростає обсяг інформації про стан керуваного процесу. Цю трудність часто переборюють, вводять достатні статистики. Достатніми статистиками наз. ф-ції від станів  $\lambda_n$ ,  $n \geq 0$  керуваного процесу, що містять усю істотну інформацію, необхідну для відшукування  $\delta^*$  та  $\delta^e$ . Важано, щоб достатні статистики були такими, щоб їх було легко обчислювати при надходженні нової інформації, а саме: щоб значення достатньої статистики в момент часу  $n+1$  відповівалося за її значенням у попередній момент та результатом спостереження  $\eta_{n+1}$ . Такі достатні статистики наз. марковськими. Знаходження марковських достатніх статистик мінім. розмірності є складною задачею. Існує важливий клас задач, у яких марковські достатні статистики знайти порівняно просто. Це клас адитивних марковських задач, у яких

$$a) P^d(\xi_{n+1}, \eta_{n+1} / \xi_n, H_n) = P^d(\xi_{n+1}, \eta_{n+1} / \xi_n, \eta_n), \quad d \in D, \quad n \geq 0,$$

тобто послідовність  $\{\xi_n, \eta_n\}$  утворює керований *Марков ланцюг*;

$$b) W^d(\lambda_n) = W^d(\eta_n, \pi_n^N), \quad f(\lambda_n) \equiv 0, \quad n \geq 0,$$

$d \in D$ , де  $\pi_n^N = \hat{\pi}(\xi_n / H_n, \Delta_n)$  — розподіл імовірностей  $\xi_n$  при заданих  $H_n$  та  $\Delta_n$ ,

$$в) D(\lambda_n) = D(\pi_n, \eta_n, d_n).$$

У припущеннях а), б), в)  $\gamma_n = (\hat{x}_n, \eta_n, d_n)$  є марковською достатньою статистикою, а, отже, керування  $d_{n+1}$  в момент часу  $n+1$  можливе в класі ф-цій, залежних від  $\hat{x}_n$  і  $\Delta_n$  лише через  $\gamma_n$ , тобто  $d_{n+1} = d_{n+1}(\hat{x}_n, \eta_n, d_n)$ . У випадку адитивної марковської задачі бачимо, що алгоритм керування процесом на неповних даних складається з двох етапів: обчислювання значень  $\hat{x}_n$  за значеннями  $\hat{x}_{n-1}$ ,  $\eta_{n-1}$ , які зберігаються в пам'яті, та значеннями  $d_n$ ,  $\eta_n$ , які надійшли; формування на основі  $\hat{x}_n$ ,  $\eta_n$ ,  $d_n$  керування в момент  $n+1$ . Якщо  $\eta_n \equiv \xi_n$ , тобто стан процесу спостерігається повністю, перший етап стає не потрібним.

Розглянемо конкретний приклад адитивної марковської задачі. Агрегат у процесі експлуатації може перебувати в одному з двох станів: «0» — робочий стан, «1» — стан відмови. Стан агрегату безпосередньо не спостерігається. Є сигналізуючий пристрій, у якого сигнал «0» відповідає робочому стану, агрегату, сигнал «1» — стану відмови, причому можуть надходити й помилкові сигнали. В кожний момент  $n = 0, 1, \dots$  на основі сигналів, що надійшли раніше, треба прийняти одно з двох рішень:  $d^n$  — замінити агрегат працювати,  $d^n$  — відремонтувати агрегат. Відомі ймовірнісні характеристики агрегату й сигнального пристрою, а також ф-ція вартостей, пов'язаних з функціонуванням агрегату: а)  $P_n(i)$  — ймовірність того, що в початковий момент часу  $n = 0$  агрегат перебуває в стані  $i$ ,  $i = 0, 1$ ; б)  $P(j, d^n)$  — ймовірність того, що агрегат у довільний момент часу виявиться в стані  $j$ , якщо в попередній момент він перебував у стані  $i$  та приймала рішення  $d^n$ ,  $i, j, k = 0, 1$  (еволюція агрегату має марковський характер); в)  $P(j|i)$  — ймовірність надходження сигналу  $j$  за умови, що агрегат перебував у стані  $i$  (ця ймовірність характеризує надійність сигнального пристрою); г)  $r(i, d^n)$  — виграш за один період роботи агрегату за умови, що на початку періоду агрегат перебував у стані  $i$  та було прийнято рішення  $d^n$ . За цими характеристиками легко обчислити перехідні ф-ції,  $\hat{x}_n$ ,  $\eta^n$  ( $\eta_n$ ,  $\hat{x}_n$ ) та довести існування стратегії (правила експлуатації агрегату), яка максимізує критерій (1). Див. також *Ігор теорія*.

Лит.: Стратомович Р. Я. Умовне марковське процесу і їх застосування в теорії оптимального управління. М., 1966 [б.блогр. с. 313–316]. Ширяев А. Н. Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. В кн. Transactions of the fourth Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes, Prague, 1967. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. М., 1969 [б.блогр. с. 227–231]. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы. Пер. с англ. М., 1964 [б.блогр. с. 187]. Кутисер Г. Дж. Стохастическая устойчивость и

управление. Пер. с англ. М., 1969 [б.блогр. с. 103–198].  
Б. С. Штатланд.

**КЕРУВАННЯ ВІДНОШЕННЯ**, залежності відношення — відношення, що зв'язує елементарні одиниці речення в природній та штучній мовах.

**КЕРУВАННЯ ДАНИМИ** — одна з основних функцій операційної системи. К. д. забезпечує доцільні для певної програми та певних тех. засобів ЦОМ способи оперування даними, які містяться на носії, носіях (магнітні диски, стрічки та барабани, перфокартри, перфострічки). Без належної організованого К. д. не можна ефективно розв'язувати задачі автоматичної обробки даних та ін. важливі задачі. К. д. ґрунтується на організації цієї інформації, яка зберігається в пам'яті ЦОМ, у єдину ієрархічну структуру.

Мінім. кількістю інформації в цій структурі є логіч. запис, який містить інформацію про один з багатьох аналогічних об'єктів. Інформація на носії, носіях запису поділяється на блоки (або фіз. записи). Блок складається з одного чи кількох логіч. записів, і його можна зчитати (або записати) в результаті одного звернення до зони, пам'яті. Величина блока визначається характеристиками пристроїв зони. ЗП (у ЗП на магн. стрічці блок — зона пам'яті). Відповідно до змісту інформація поділяється на масиви — сукупності логіч. записів, які містять повну (в необхідних межах) інформацію про логічно зв'язану множину об'єктів. Масивом може бути програма вхідною мовою, бібліотека стандартних підпроцесів якогось певного класу, власне масив початкових чи вихідних даних.

Обмін між зовнішнім та головним ЗП здійснюється через буфери, які являють собою спеціально виділені ділянки осп. пам'яті. Розмір буфера встановлюють або сам програміст, або керуюча програма відповідно до розміру макс. блока з масивів. На зоні, носіях масиви зберігаються в томах, можливих якнайменше собою стандартну фіз. одиницю зони. ЗП, наприклад, бобину магн. стрічки, пакет дисків чи ділянку на дисках, обслуговувану одним механізмом вибирання, магн. барабан. Співвідношення між величиною тому й величиною масиву може бути різне: або в одному тому може бути кілька масивів, або один масив може займати кілька томів.

К. д. ґрунтується на використанні операційною системою допоміжної інформації, що є в пам'яті ЦОМ і дає змогу знайти потрібний масив за його назвою та організувати послідовний перегляд його за записами тощо. Кожен том інформації містить назви та описи всіх масивів і інформацію про розміщення їх. Кожен том ідентифікують за допомогою *мітки* тому (групи інформаційних слів), у якій зазначено його порядковий номер та посилання на зміст тому. Масиви також ідентифікують за допомогою *міток*, які мають уся потрібну керуючу інформацію. Часто один масив супроводять групи ведучих *міток*, які стоять перед ним, та замикальних *міток*, які стоять після нього. В опе-

раційній системі є спец. підпрограми обробки міток, що визначають характеристики записів у масиві, час його формування, можливість для споживача, який звернувся до масиву, читати чи записувати дані тощо. В групах міток користуват сам може заповнювати інформацією деякі з міток, у яких він вберігає свою спец. інформацію про масив, та обробляти їх. Для пошуку потрібного масиву операційна система веде каталог, який перебуває, як правило, в реидентному томі з прямим доступом. Каталог має адебільшого деревоподібну структуру, найнижчим рівнем якої є змісти томів. Щоб можна було обробляти різні масиви без повторної трансляції програми, назви масивів зазначають у керуючому завданні. Завдання, які реалізують поповнення того самого масиву, використовують при тій самій його назві поняття покоління, інформація про яке міститься в мітці масиву. Найпоширенішими є послідовна організація масивів на носіях, коли записи в них розміщуються послідовно й авсім не впорядковано (застосовують її лише для томів з послідовним доступом), та індексована послідовна організація, коли записи розміщуються у вигляді впорядкованої послідовності за якоюсь частинною запису — ключем (застосовують її, як правило, для томів з прямим доступом).

К. д. ґрунтується, як правило, на двох способах обміну даними, які містяться у зоні пам'яті (т. з. способах доступу). Перший з них, базисний, полягає в тому, що програмістові надається велика свобода, тим самим зменшується ступінь автоматизації обміну. За базисного способу доступу, наприклад, у макрокоманді, задають читання (або записування) блоку, а не читання логіч. запису. Після закінчення обміну програма самостійно перевіряє його правильність і т. ін. Другий спосіб обміну даними, т. з. спосіб доступу з чергами, більш автоматизований. За цього способу з макрокоманди потрібне читання (або записування) логіч. запису. Керуюча програма, використовуючи систему буферизації, автоматично виділяє відповідні записи, слідкує за закінченням обміну, перевіряє його правильність тощо.

**А. І. Никітін.**  
**КЕРУВАННЯ В АДАПТАЦІЇ** — керування в системі з певною апріорною інформацією про процес керування, змінюване в міру накопичення інформації про процес і використовуване для поліпшення якості роботи системи. Таке значення терміну *адаптація* склалося у теорії керування під впливом тех. застосувань і трохи відрізняється від змісту цього терміну, як його розуміють в біології.

В дискретному часі  $t = \frac{k}{\Delta t}$ , де  $t$  — час,  $\Delta t$  — інтервал його квантування, можливе таке представлення процесу К. з. а. Припустімо, що керований процес  $x$  є марковським процесом і описують його якоюсь характеристикою інформації  $P$ . Нехай у момент  $i$  задано стан процесу  $x_i$  і стан інформації про про-

цес  $P_i$ , які утворюють точку  $(x_i, P_i)$  у певному фазовому просторі. Перехід у новий стан відбувається під впливом керування  $u_i$  і збурення  $z_i$  — випадкової величини з імовірнісним розподілом  $dG(x_i, P_i; u_i, z_i)$ , який може бути якоюсь частиною характеристики інформації. Перехід у новий стан визначається випадковими перетворюваннями  $T_1$  і  $T_2$  так, що

$$x_{i+1} = T_1(x_i, P_i; u_i, z_i); \quad (1)$$

$$P_{i+1} = T_2(x_i, P_i; u_i, z_i). \quad (2)$$

Керування  $u$ , змінюючи стан процесу  $x$ , впливає й на характеристику інформації  $P$ . В окремому випадку, який трапляється в застосуваннях, у правих частинах виразів (1) і (2) може не бути  $P_i$  та  $z_i$  відповідно.

Якщо перетворення  $T_1$  і  $T_2$  задано, то керування в момент переходу треба вибирати у вигляді

$$u_i = u_i(x_i, P_i). \quad (3)$$

Керування (3) має властивість адаптації в тому розумінні, що воно залежить від усієї доступної в момент  $i$  інформації  $P_i$  про процес. Але звичайно перетворення  $T_1$  і, особливо  $T_2$ , не задані, й визначення цих перетворень, як і самої характеристики інформації, є частиною задачі про К. з. а. Дійсно, для того, щоб інформація про процес з часом накопичувалася, необхідно спеціально вибирати  $T_2$  так, щоб опис процесу  $P_{i+1}$  був повнішим, ніж  $P_i$ . Зміни в напрямі поліпшення характеристики інформації становлять суть адаптації. Якщо із станом  $x_{i+1}$  зв'язати, наприклад, якийсь показник якості керування  $W(x_{i+1})$ , то за рахунок більшої інформованості керування внаслідок адаптації цей показник може поліпшуватися. При цьому послідовність перетворень  $(T_1, T_2)_i, i = 0, 1, 2, \dots$  для процесу К. з. а.

У цьому загальному представленні процесу К. з. а. і характеристика інформації  $P$ , й механізм адаптації, який визначається перетвореннями  $T_2$ , не мають конкретного змісту. Розвиваються теорії адаптації, побудовані на основі статистик випадкових величин і випадкових процесів, де функцію розподілу імовірностей використовують як характеристику інформації, а як перетворення  $T_2$  іноді використовують формулу Байеса для апостеріорних імовірностей. Однією з таких теорій є теорія *дуального керування*, яка розглядає задачу про оптимальне К. з. а. на кінцевому інтервалі роботи системи.

К. з. а. реалізує, зокрема, деякий оператор, який навчався керувати тим або іншим процесом чи апаратом. Під час навчання поведінка оператора змінюється, вдосконалюючись переважно завдяки накопиченню досвіду (або інформації).

Лит.: Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968 [Бібліогр. с. 347—381]; Безьяман Р. Процессы регулирования с адаптацией. Пер. с англ. М., 1964. В. І. Іваненко.

**КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ** — див. *Запаси теорія*.

**КЕРУВАННЯ КОМАНДАМИ** — див. *Керування структурне в ЦОМ*.

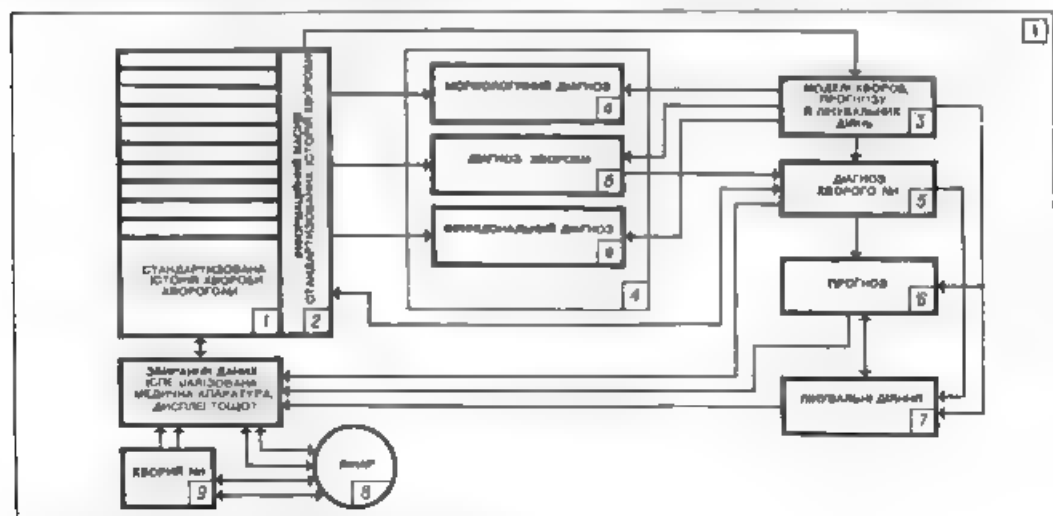
**КЕРУВАННЯ ЛІКУВАЛЬНИМ ПРОЦЕСОМ**. Лікувальний процес є складним циклічним процесом, який охоплює збирання й обробку медико-біологічних даних, постановку діагнозу, вибір стратегії лікування і проведення самого лікування. К. л. п. може проходити з участю й без участі медичного персоналу (див. *Автоматизація медичної діагностики*).

На мал. 1 представлено блок-схему автоматизації одного циклу лікувального процесу в медичній інформаційній системі. Інформацію про стан здоров'я хворого зібрано в стандартизованій історії хвороби (СІХ) — блок 1. У блоці 2 відбувається нагромадження СІХ, тобто створюються масиви інформаційні системи. Кожен СІХ присвоюється ідентифікатор, що дає змогу проводити над інформаційними масивами різні перетворення, наприклад, здійснювати статистичну обробку, поділяти ознаки й симптоми на анамністичні й фізикальні. Моделі хвороб і лікувальних діянь містяться в довгочасному зважальному пристрої системи (блок 3). Діагноз хвороби визначається в блоці 4, а специфічні прояви й особливості перебігу даного захворювання з даного хворого — у блоці 5. Прогнозування перебігу й кінця хвороби виконується в блоці 6. Прогноз захворювання, зроблений на основі діагнозу з урахуванням різних лікувальних діянь, повинен мати

інші дані (напр., вироблена системою рекомендація щодо лікувального діяння) спочатку надходять до лікаря (блок 8), а вже потім лікар призначає хворому (блок 9) відповідні лікувальні діяння, погоджуючись або не погоджуючись із рекомендацією системи. Якщо лікар на підставі додаткової інформації не погоджується з рекомендацією системи, він може використати цю інформацію для корегування пам'яті (блок 3) системи. Цим і закінчується один цикл лікувального процесу.

Лікувальний процес може складатися з різної кількості циклів — від двох до багатьох десятків. Тому на кожному циклі робить оцінку й корегування керуючого діяння. Діагноз видужання і прогноз для життя визначають після видужання хворого.

Суть матем. методів прийняття рішень у К. л. п. полягає ось у чому. Після того як з'ясовано специфічні особливості захворювання хворого, можна переходити до побудови прогнозу перебігу й кінця захворювання, а також до призначення лікувальних діянь. Нехай будуть відомі *модель математична* діагностованого об'єкта  $T_n$  та навчальна й експериментальна вибірки  $T_n$  та  $d_n$ . Нехай  $i_s$  ( $s = 1, \dots, S$ ) — лікувальні діяння (методи), які можуть перевести хворого  $T_n$  зі станом здоров'я  $i_s$  в новий стан  $i_s'$  ( $i_s, i_s' = 0, \dots, G$ ;  $i_s \neq i_s' \neq i_s'$ ). Нехай  $p(i_s' \rightarrow i_s)$  — ймовірність такого переходу. Поз-



1. Блок-схема автоматизації циклу лікувального процесу

конкретний об'єктивний характер і разом з тим бути відносним щодо строгої індивідуалізації та в розумінні динамічності в часі. Вироблення конкретної стратегії лікування й вибір лікувального діяння відбуваються в блоці 7. Дані про стан хворого, а також

визначено через  $e_{ij}$  міру ефективності  $i_s$ -го методу лікування при  $d_j$ -му класі. Тоді задачу знаходження опт. сукупності лікувальних діянь можна сформулювати так: знайти таку опт. сукупність лікувальних діянь  $i_s^*$ , щоб

міра їхньої ефективності була максимальною. У цьому разі міра ефективності

$$e_{ij}(z_{ij} \rightarrow z_{ij}')_{i,j} = p(d_{ij}) \cdot p(z_{ij} \rightarrow z_{ij}')_{i,j}$$

а макс. значення міри ефективності, або оптим. лікувальне діяння на  $(z_{ij} \rightarrow z_{ij}')$ , досягається при  $e_{ij}' = \max_{i,j} e_{ij}(z_{ij} \rightarrow z_{ij}')_{i,j}$ . Це

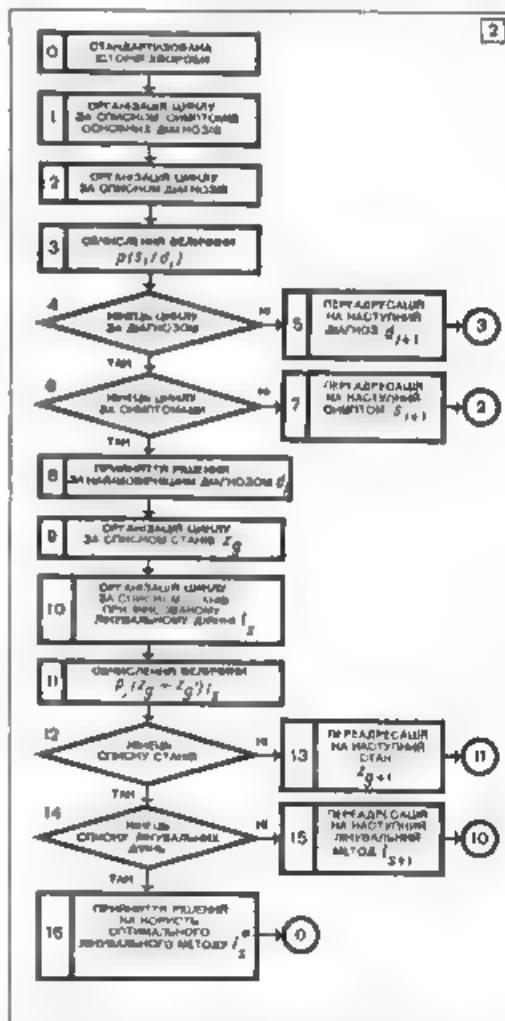
визначення дійсно для тих пар  $(z_{ij} \rightarrow z_{ij}')$ , для яких справджується твердження про те, що  $z_{ij}'$  краще за  $z_{ij}$ .

Припустимо, що заг. ефективність лікувальних діянь  $I_j$  є адитивною ф-цією, яка складається з  $e_{ij}$ . Тоді для визначення оптим. сукупності лікувальних діянь можна сформулювати *Веллмана принцип оптимальності* багатокрокового процесу прийняття рішення: оптимальна сукупність лікувальних діянь має ту властивість, що яке б не було початково призначено лікувальне діяння  $I_j$  за станом здоров'я хворого  $z_{ij}$ , наступне лікувальне діяння повинно бути оптим. щодо початково призначеного лікування. Виходячи з цього принципу, макс. ефективність лікувальних діянь можна одержати у вигляді:

$$I_j = \max_{i,j} \sum_{i,j} [e_{ij}(z_{ij} \rightarrow z_{ij}')_{i,j} + e_{ij}(z_{ij}' \rightarrow z_{ij}'')_{i,j}].$$

Т. ч., вибір оптим. сукупності лікувальних діянь сходиться до пошуку на графі (мал. 1) макс. шляху. Системний підхід до розв'язування задач автоматизації лікувального процесу пов'язаний з великим обсягом обчисл. роботи над інформаційними масивами. Істотним є оптим. вибір способів представлення початкових даних, пошуку й виділення потрібної інформації з масивів, обчислювань та зберігання проміжних і кінцевих результатів обчислювань. Для побудови й дослідження вирішувальних правил масивів СІХ перетворюється на масив з адресно-груповим способом зберігання даних. До інформаційних масивів системи належать також: масив історій хвороб різних клінік, які входять до даної медичної інформаційної системи; виписки з історій хвороб, стандартизовані карти обстежень; таблиці експериментальних даних; діагностичні оцінки симптомів і станів; оцінки ефективності лікувальних діянь; масив критеріїв якості рішень, які приймаються; результати прийняття рішень вирішувальними правилами системи за навчальною й екзаменаційною вибірками, афавіт медичних та ін. термінів; каталог програмного забезпечення, за допомогою якого визначається вільне місце в пам'яті системи, адреса запису масиву й відомостей про масив; опис режимів роботи різних програм, а також опис масивів і документів. Розв'язування задач діагностики, прогнозування перебігу хвороби та ін. за умови використання різних типів вирішувальних правил і апріорних даних показано на мал. 2. Специфіка кожного з вирішувальних правил визна-

чається послідовністю використання початкових масивів і результатів обчислювань, послідовністю вибирання чисел в масивів, характером і послідовністю дій над числами, способом зберігання й використання проміжних результатів обчислювань. При цьому кожне з вирішувальних правил можна задати списком операторів і списком режимів роботи системи. Своєю чергою список режимів роботи й список операторів можна визначити як опис задачі для керуючого блоку програми. Опис відповідних задач запису-



2. Схема розв'язування задачі лікувального процесу.

ються в пам'яті системи, їх використовують у міру потреби.

Лит.: Парик В. В., Баевский Р. М. Введение в медицинскую кибернетику М.— Прага, 1986. Медицинская информационная система. К., 1971 (Бібліогр. с. 283—288); Цолов А. А., Яценко В. М., Шулъга В. А. Информационная модель

лечного процесса. «Кибернетика», 1971, № 4, і для Р. Ластед і Медичинська діагностика і сучасні методи вирішення. В кн. Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1968.

А. О. Попов, В. М. Янченко, В. А. Шульга.

**КЕРУВАННЯ ОПЕРАЦІЯМИ** — див. Керування структурне в ЦОМ.

**КЕРУВАННЯ ОПТИМАЛЬНЕ** — див. Оптимізаційне керування теорія.

**КЕРУВАННЯ ПРОГРАМНЕ** — див. Системи програмного керування.

**КЕРУВАННЯ СТРУКТУРНЕ В ЦОМ** — частина системи керування цифровою обчислювальною машиною, алгоритми якої зафіксовано структурним способом. Принципи програмного керування в сучасній ЦОМ реалізують за допомогою алгоритмів двох видів: оперативних, тобто таких, що їх вводять у вигляді програм в оперативний апарат автоматизованого пристрою, і постійних, закладених у структуру ЦОМ (див. Математичне забезпечення ЦОМ внутрішнє). Оперативні алгоритми — це програми розв'язування задач і більшість алгоритмів операційної системи; вони становлять верхній рівень системи керування. Проміжні рівні керування й найнижчий рівень, який безпосередньо виконує на апаратурі, становлять К. с. в ЦОМ.

Розрізняють два основні способи структурної фіксації алгоритмів. Перший — фіксація алгоритмів за допомогою схем, виконаних з елементарних структур ЦОМ. Таке К. с. в ЦОМ наз. реалізованим апаратним засобом. За другого способу алгоритми фіксуються у вигляді послідовностей керуючих кодів, записаних у якомусь довготривалому зчитувальному пристрої (ДЗП). Такий спосіб фіксації використовували раніше лише для алгоритмів програмного рівня (записування підпрограми).

У сучасних ЦОМ ДЗП використовують найчастіше для фіксування алгоритмів, записаних на вищому рівні мови ЦОМ внутрішньої. Алгоритми, зафіксовані в такий спосіб, наз. мікропрограмами, а структурне керування, реалізоване такими засобами, — мікропрограмним К. с. в ЦОМ. Ці структурні способи фіксації алгоритмів являють собою різні види автоматів керуючих, які й реалізують К. с. в ЦОМ. У структурному керуванні сучасних ЦОМ ці два способи поєднують, а функції між ними розподіляють так, щоб домогтися високої швидкості ЦОМ та оптим. організації обчисл. процесу.

Незалежно від способу реалізації традиційні функції К. с. в ЦОМ зводяться до автомат. визначення й забезпечення необхідного порядку слідування команд програми, підготовки адрес операндів та до керування діями щодо переробки інформації в ЦОМ. У ЦОМ з мультипрограмуванням структурне керування ще реалізує деякі функції операційної системи, зокрема керування перериваннями. Відповідно до двох традиційних функцій К. с. в ЦОМ можна поділити на дві частини: керування командами й керування операціями.

**Керування командами (КК)** — це частина К. с. в ЦОМ, яка забезпечує необхідний порядок слідування команд, який задає програма, і перетворення адресних частин команд. Розрізняють два способи організації вибірання команд програми: природний (за чергою) та примусовий (із зазначенням у кожній команді адреси наступної команди). В сучасних ЦОМ використовують переважно природний порядок слідування команд, який апаратно реалізують у вигляді двійкового лічильника команд програми. На початку роботи за даною програмою в лічильник надсилається адреса 1-ї команди програми, а при виконанні кожної чергової команди вміст лічильника зростає на 1. Після виконання команд умовного чи безумовного переходу замінюється й вміст лічильника — в нього надсилається початкова адреса нової програмної послідовності. Примусовий порядок слідування команд застосовують, якщо алгоритми К. с. реалізують, наприклад, набір мікропрограм. Задавання переходів між окремими мікропрограмами є специфічною функцією, яку наз. схемою галузнення, і чим більше можливостей при переходах, тим влучніше будувати систему мікропрограм. Наприклад, у ЦОМ «МІР-1» (див. «МІР») є можливість переходу в чотирьох напрямках, тобто можна вказати одну з чотирьох можливих адрес переходу. Другою важливою функцією КК є перетворення адресних частин команд, необхідність у якому виникає тому, що види адресації операндів у команді різні. Розглянемо, які перетворення необхідні при безпосередньому, прямому, непрямому, відносному й індексному адресуванні. Перші два види адресування не потребують додаткових перетворень, бо при першому виді адресування в команді задається сам операнд, а при другому — його пряма фіз. адреса. При непрямому адресуванні в команді міститься адреса 2-го (або вищого) рангу. Функція КК визначає пряму адресу операнда, тобто вона збуджує одне (чи кілька) додаткових зворотів до ЗП. Відносне (базове) й індексне адресування вимагають, щоб було виконано операцію додавання для визначення виконавчої адреси операнда. До складу КК вводять додаткове обладнання: реєстр бази, індекстр бази й суматор адрес. Це обладнання інколи вбудовують у пристрій індексної арифметики. Дії з індексації можна виконувати й в арифметичному пристрої (АП), але тоді стає неможливо суміщувати ці дії з операцією в АП.

**Керування операціями (КО)** — друга частина К. с. в ЦОМ, яка реалізує операції самого структурного керування і задає операції в інших пристроях ЦОМ при виконанні команд програми. КО можна будувати відповідно до принципів синхронного чи асинхронного керування. Принцип синхронного керування передбачає однакову тривалість усіх операцій, яка повинна відповідати найдовшій операції. Всі операції поділяють на однакову кількість тактів, і таку



саму кількість тактових сигналів виробляє лічильник тактів. Схема КО економна щодо витрат апаратури, але зменшується швидкодія за рахунок пустих тактів в операціях з коротким циклом виконання. Особливістю асинхронного принципу керування полягає в тому, що для виконання кожної операції витрачається необхідна кількість тактів, причому виконання кожної чергової операції починається за сигналом про закінчення попередньої операції. Вадю асинхронного принципу керування є значні витрати апаратури, бо для виконання кожної операції будують окрему схему. Ще у ЦОМ 1-го покоління ці два принципи поєднували й будували КО за мішаним принципом. Операції поділялися на дві групи: короткі, але часто виконували (напр., додавання) і багатотактні, хоча вони в програмі трапляються рідко (ділення). 1-у групу операцій виконує центр керування, побудоване за синхронним принципом; другу — місцеве керування, яке представляє асинхронну схему. Отже, з осн. циклу ЦОМ вилучено довгі операції, і частково виконання їх суміщується з роботою решти К. с. в ЦОМ. Прикладами таких К(с) є схеми керування «БЭСМ-1» і «М-220». КО сучасних ЦОМ будують переважно за асинхронним принципом, бо швидкодія є визначальним фактором ефективності ЦОМ. Розвитком структури ЦОМ у зв'язку з вимогами значно підвищити ефективність цих машин і автоматизацію процесу підготовки та розв'язування задач на них розширив роль і функції їхнього структурного керування. Значно зростає потік керуючої інформації, обробляти яку і є функцією К. с., зумовлене такими причинами: по-перше, застосуванням алгоритм. мов високого рівня як вхідних мов ЦОМ і пов'язаним з цим розширенням видів та форматів оброблюваних даних (символьні, цілі тощо), по-друге, введенням різних форм паралелізму в режимі обробки інформації як усередині однієї програми, так і для кількох програм (напр. суміщувати операції в різних пристроях можна шляхом введення буферів, що угоджують швидкості цих пристроїв), по-третє, розвитком засобів операційної системи, зокрема функцій, пов'язаних з розподілом ресурсів у мультипрограмному режимі розв'язування задач. Ці причини зумовили появу в складі К. с. в ЦОМ нових блоків: мікропрограмної реалізації складних багатотактних операцій, що їх у ЦОМ попередніх поколінь здійснювали у вигляді підпрограм, попереднього перегляду програми (т. з. попереджувальний пристрій), динамічного адресування віртуальної пам'яті.

Ще більше розширено функції К. с. в ЦОМ в розвинених системах інтерпретації. Виконання інтерпретації вхідної мови високого рівня структурними засобами вимагає, щоб до складу керування включали нові структурні одиниці: блок аналізу програми, блок автомат. адресування величин, блок магазину пам'яті з власним керуванням тощо. Крім того, К. с. в ЦОМ виконує й традиційні

ві операції керування: команди умовного й безумовного переходу, організацію циклічних процесів та індексацію. Зміни в структурі керування ЦОМ приводять до того, що структурне керування перетворюється на окремий процесор переробки керуючої інформації, який має свої внутр. команди, буферну пам'ять та арифм. пристрій для виконання індексації. У ЦОМ з розвинутою інтерпретацією високий рівень вхідної мови поступово знижується структурою керування ЦОМ до рівня елементарних операцій, тобто структурне керування будують за ступінчастим принципом. Для реалізації таких схем використовують принципи мікропрограмного керування, який полягає в побудові К. с. як набору послідовностей елементарних операцій (мікрооперацій), що в сукупності реалізують алгоритм керування ЦОМ; під мікрооперацією розуміють елементарну машинну дію, яка позначається у внутр. мові і не містить інших машинних дій, позначених цією мовою. Запропонований ще 1951 (в Англії) принцип мікропрограмного керування спочатку використали для побудови К. с. лише малих ЦОМ в невеличкому наборі операцій. Удосконалення технології виготовлення ДЗП і зменшення часу зачитування з ДЗП до 100 нсек привели до широкого використання цього принципу в ЦОМ — 2-го й 3-го поколінь. Схема цього принципу, яка тепер стала класичною (т. з. схема Уїлліса), складається з двох діючих матриць (в одній з них закодовано мікрооперації, у другій — переходи від однієї мікрокоманди до іншої) і регістра мікрокоманд. Видоміни сучасних схем мікропрограмного К. с. в ЦОМ не принципові, а лише відображають різні етапи розвитку техніки: діючі матриці заміняють на феритові (чи інші матриці ДЗП), ізгод до схем вводять регістр для фіксації коду, зачитуваного з ДЗП. Дальшим розвитком принципу мікропрограмного керування є схеми ступінчастого мікропрограмного керування. У їхньому принципі збіглися два напрями розвитку схем керування — ступінчасте записування алгоритмів при програмуванні і мікропрограмний принцип керування операціями в ЦОМ. За ступінчастою організацією К. с. в ЦОМ операції  $n$ -го ступеня реалізуються через операції  $(n-1)$ -го і нижчих ступенів. Операціями найнижчого ступеня є мікрооперації. Такий метод побудови К. с. в ЦОМ дає змогу при реалізації в наборі команд складних операцій скоротити час виконання їх порівняно з методом реалізації їх у вигляді підпрограм, а також дає істотну економію апаратури К. с. в ЦОМ. При сумісній реалізації кількох операцій  $n$ -го ступеня вдається об'єднати однакові ділянки мікропрограм. При цьому ручно використовувати методи синтезу й мінімізації, розроблені в теорії цифрових автоматів (див. *Автоматизація теорія*).

Багатоступінчаста організація мікропрограмного керування дає змогу відносно просто реалізувати в ЦОМ і принципи асинхронності керування операціями та можливості одночас-

ної паралельної роботи ряду автоматів, а це має важливе значення для забезпечення високої швидкості. У такому багатоступінчастому К. с. можна послідувати мікропрограмно реалізовані рівні з апаратно реалізованими. Нижній рівень К. с. в ЦОМ будуть адекватного в елементному базисі машини (частота видавання мікрооперацій збігається з осн. робочою частотою машини). У верх. рівнях структурного керування використовують швидкодіючі ДЗП, тобто у вигляді мікропрограм фіксують найвищий та проміжний рівні внутр. мови. Створення ефективних систем мікропрограмних К. с. дало змогу вже в ЦОМ 3-го покоління осн. системи програмування й частину операційної системи реалізувати у вигляді бібліотек мікропрограм. Ще на кращі результати можна сподіватися при реалізації мікропрограмного керування на схематично з високим ступенем інтеграції — у ЦОМ 4-го покоління.

Лит.: Папернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирование М., 1968 [Бібліогр. с. 583-585], Глушиков В. М. (та ін.) Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации К., 1970 [Бібліогр. с. 254—257].

А. М. Самофалова.

**КЕРУЮЧА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА** — обчислювальна машина, використовувана як центральна ланка керуючої системи й розрахована на автоматичне приймання та обробку інформації, що надходить у процесі керування, та видавання керуючої інформації безпосередньо на виконавчі органи або людині-операторові. Мета застосування К. о. м. — забезпечити оптимальну роботу системи керування.

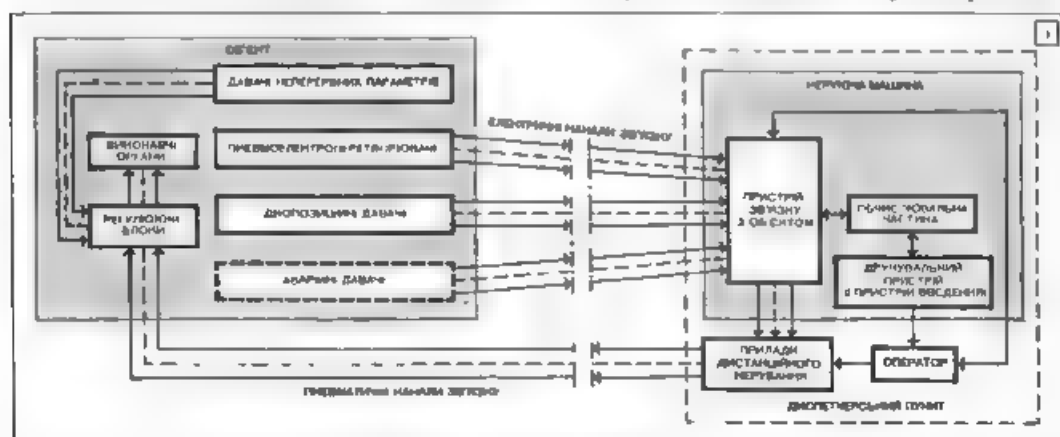
К. о. м. класифікують: за призначенням — на машини промислового застосування, авіаційні (бортові), корабельні тощо; за при-

мізованого контролю, машини-порадники, оптимізуючі машини та на машини прямого керування.

В промисловості К. о. м. широко застосовують для оптимізації процесів керування об'єктами з неперервним і неперервно-дискретним характером виробництва (насамперед на хім., нафтопереробних, цементних, металург. та паперобробних підприємствах). К. о. м. ефективно використовують для автоматизації різних енергетичних об'єктів (включаючи атомні електростанції), автоматизації досліджень, що проводяться за допомогою складних експериментальних установок, та для іншої мети (див. ід. між с. 472—473).

Застосовувати К. о. м. у промисловості почали в 50-х роках 20 ст. Відтоді цей широкий захід пройшов через кілька етапів розвитку.

1-й етап — створення й застосування машин централізованого контролю і машин периферійної обробки інформації (напр., «Марс», «Зоніт», «МППИ» та ін.). Появу машин, які автоматично реалізують функції контролю та реєстрації параметрів технологічного процесу, які раніше виконували вручну, викликало прагнення полегшити контакт людини-оператора, яка керує процесом, з численною контрольно-вимірною апаратурою, та прагнення зменшити вартість цієї апаратури, застосовуючи досконаліші тех. вирішення і замінюючи багато реєструючих пристроїв одним. Машини цього типу характерні слабким розвитком їхньої обчислювальної частини та її спеціалізованим призначенням. У ряді виробництв, які потребують лише найпростіших функцій контролю та керування, без елементів оптимізації, в ряді об'єктів харчової, гумо-тех. та інших галузей промисло-



1. Структурна схема автоматичної системи керування неперервним процесом.

вості, холодильних установках, пресах і т. п., застосування машини централізованого контролю дає значний економ. ефект.

2-й етап — створення й застосування керуючих машин-порадників та оптимізуючих машин — став якісно новим етапом у розвит-

му засобів керування пром. об'єктами. Крім виконання звичайних функцій контролю та реєстрації параметрів, їх розраховано на розв'язування задач оптимізації технологічних процесів, які досі розв'язувала людина-оператор інтуїтивно й не досить точно.

Клас машин, які названо «спорадниками майстра» (напр., «СМ-1» для доменного цеху), розраховано на роботу в системах керування, замінених через оператора. В таких машинах в обчислювальна частина невисокої продуктивності з оперативним ЗП невеликого обсягу, пристрій введення інформації з датчиків та пристрій індикації і друкування «порад» операторові. Пристроєм автомат. зв'язку з органами керування процесом у машині немає (процесом керує людина, використовуючи «поради» машини). Використання машини-порадників дає великий економічний ефект. Так, стосовно до доменного цеху, згідно з даними по трьох вітчизняних заводах, він становив близько 500 тис. крб. на рік (за рахунок поліпшення режиму роботи печей).

Оптимізуюча машина відрізняється від машини типу «спорадник майстра» наявністю в її складі засобів автомат. виконання «порад» і рішень, які діють на об'єкт керування автоматично, без участі оператора (маж. 1). Перші керуючі машини цього класу були спеціалізовані (напр., «Сталі-1» — для оптимізації прокату). Ці машини промислового призначення набули обмеженого застосування через кілька причин: спеціалізоване призначення зумовлювало дуже вузьке коло застосувань машини; виникли труднощі виробничого характеру, пов'язані з верифікацією серійного випуску їх.

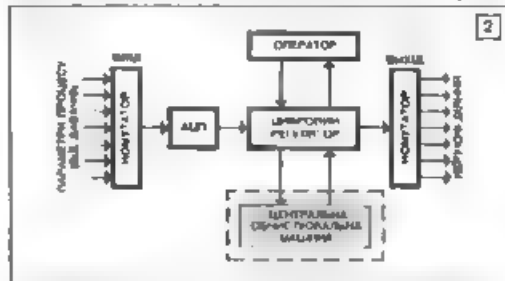
Підприємство виявилася ідея створення К. о. м. широкого призначення, яку висловив 1958 в СРСР В. М. Гаушков. Відмінними властивостями такої машини є: універсальність, дуже розвинута (порівняно з попередніми класами машини) обчисл. частина; обмежена (порівняно з універсальною матем. машиною) розрядність; швидкодія машини достатня для реалізації алгоритмів керування широким колом пром. об'єктів; змінний обсяг пам'яті машини; наявність пристроїв зв'язку з об'єктом, розрахованих на автомат. приймання та видавання інформації тощо. Практикою встановлено, що оптимізація технологічних процесів на базі К. о. м. дає змогу підвищити продуктивність складних установок на 0,5—2%. До перших вітчизняних керуючих машин широкого призначення належать «Дніпр», «УМі», «ВНПІМ-3» та ін.

Мала надійність перших оптимізуючих К. о. м. не дала змоги широко застосувати їх для прямого керування процесами. Їх використовували здебільшого як верхню оптимізуючу ланку системи керування, а роль нижніх стабілізуючих ланок її виконували звичайні прилади контролю та регулювання.

На 3-му етапі з'являються засоби, які достатньо надійні для прямого (безпосереднього) керування процесами. Ними є цифрові регу-

лятори — невеликі обчисл. пристрої, розраховані на реалізацію звичайних законів регулювання, і цифрові керуючі машини на гібридних та інтегральних елементах, здатні розв'язувати задачі оптимізації процесів і задачі контролю та регулювання.

Першу в світі спробу використати засоби цифрової обчислювальної техніки для прямого керування технологічними процесами здійснено в СРСР 1961. Для цього було сконструйовано цифровий регулятор «Автооператор», випробуванням на одному з хім. проце-



3. Блок-схема системи цифрового регулювання.

сів. Випробування показали високу якість регулювання. Проведені в СРСР і за кордоном дослідження системи керування з цифровими регуляторами показали високу якість цифрового регулювання та їхню економічну доцільність у випадку наявності 50 → 100 контурів регулювання.

У системі цифрового регулювання (маж. 2) сигнали датчиків через комутатор та аналого-цифровий перетворювач АЦП надходять до цифрового регулятора (малої спеціалізованої ЦОМ). Тут вони зіставляються з заданнями, які надходять від оператора або центр. обчисл. машини. Якщо розузгоджуються сигнали і задання, то виконуються обчислення, які забезпечують підрахунок керуючого діяння. А це діяння через комутатор надходить безпосередньо на сервопривод. Цифрові регулятори використовують переважно на новостворюваних підприємствах (замінювати систему звичайних регуляторів немає сенсу).

Період розвитку обчисл. систем технічних засобів пром. призначення, який настав з початку 70-років 20 ст., характеризується прагненням створити функціонально повний і технічно досконалий комплекс засобів керування, який відзначається б економіч. ефективністю їхнього використання. Першим кроком у цьому напрямі є розробка агрегатно-блокової системи засобів обчисл. техніки (див. АСОТ), агрегатної системи засобів первинної переробки інформації (АСПІ) та комплексу тех. засобів для локальних інформаційно-керуючих систем (КТЗ ЛІКС). Спільне застосування засобів АСОТ і КТЗ ЛІКС дасть змогу створювати для підприємств із безперервним технологічним процесом керуючі системи будь-якого ступеня складності. Застосування АСОТ спільно з АСПІ дасть змогу створювати керуючі системи для підприємств

із дискретним характером виробництва. Відмінними особливостями АСОТ, КТЗ ЛІКС та АСПІ є агрегативно-блоковий побудова засобів обчислювальної техніки і наявність типових стандартних схем зв'язку між блоками.

Системи керування, як правило, будують за ієрархічним принципом. На нижньому рівні прямого керування технологічними процесами використовують прості й надійні К. о. м., які виконують функції стабілізації, елементарної оптимізації та прямого керування процесом. На другому рівні, який потребує розв'язання задач керування стосовно до окремих складніших груп технологічних процесів, застосовують К. о. м., здатні виконувати складніші функції, пов'язані з оптимізацією роботи групи процесів. Вони, в свою чергу, зв'язуються з центр. ланкою системи керування підприємством, яка здійснює завдання планування, обліку та керування роботою всього підприємства.

Побудова ієрархічних систем керування і відповідних агрегативно-блокових засобів обчисл. техніки ґрунтуються на ряді системотехнічних принципів. Головні з них такі:

1. Структури систем керування в промисловості мають ієрархічний вигляд внаслідок технологічних особливостей і територіального розміщення об'єктів керування. Задачі контролю та керування на кожному рівні ієрархії ставлять різні вимоги до обчисл. обладнання. Для прямого керування процесами (нижчий рівень ієрархії) треба здійснювати невелику кількість операцій з високим ступенем швидкості розв'язку. В міру підвищення ступеня ієрархії кількість обчислень збільшується, а вимоги до надійності апаратури, яка їх реалізує, зменшуються. З огляду на викладене необхідно мати комплекс обчисл. засобів, орієнтованих на розв'язування задач контролю та керування на окремих рівнях ієрархії системи.

2. Процеси керування окремими ланками (рівнями) взаємно зв'язані. Отже, обчисл. засоби треба розраховувати на роботу в багатомісних системах.

3. Щоб зменшити затрати при серійному випуску і застосуванні засобів, їх доцільно будувати за агрегативно-блоковим принципом, обмежуючись мінімально можливою комерційною вартістю засобів.

4. Обсяги пам'яті, розрядність інформації та необхідна швидкість К. о. м. — для окремих ступенів керування різні й мають певні межі, які слід враховувати при створенні засобів системотехніки, щоб уникнути неоправданих затрат на них.

5. На відміну від універсальних обчисл. засобів, вимоги до надійності роботи засобів системотехніки пром. призначення, особливо засобів прямого керування процесами, істотно вищі.

6. Організація системи керування й мультипрограмний режим роботи обчисл. засобів, призначених для нижніх рівнів керування, мають на меті не стільки ефективного використання апаратури (як в обчислюваль-

них системах), скільки забезпечення потрібного часу реакції засобів на зхідну інформацію.

7. Матем. забезпечення засобів для нижніх рівнів керування елементарне й ускладнюється при переході до вищих рівнів керування. Головне його призначення — розв'язувати задачі керування та обслуговувати оператора в реальному масштабі часу.

8. Можливий запас щодо швидкості при використанні досконаліших елементів доцільно використовувати, де це можливо, для зменшення апаратурних обчисл. засобів за допомогою використання операцій зі збільшеною довжиною слова і програмного виконання складних операцій.

9. При створенні агрегативно-блокових засобів доцільно використовувати єдину методичку автоматизації процесу конструювання й типову автомат. систему виготовлення їх.

Лит. Малиновский И. Н. Цифровые управляющие машины и автоматизация производства. М. 1963 [Бібліогр. с. 245-246]. Ющенко Е. Т. [та ін.]. Управляющая машина широкого назначения «Дніпро» в программировании программы к. инж. Стратовича программиста К. 1964 [Бібліогр. с. 277-278].

**КЕРУЮЧА ПРОГРАМА** — частина операційної системи, призначена для керування обчислювальним процесом на ЦОМ К. п. організовує обмін процесора з зовнішніми пристроями, здійснює пам'яті розподіл, керує послідовністю виконання завдань та їхніх частин, керує масивами (файлами), реагує на несправності машини та інші нерегулярні ситуації, викликає транслятори та інші обробляючі програми, встановлює зв'язок з оператором машини, веде протокол обчисл. процесу тощо.

А. І. Никитин.

**КЕРУЮЧЕ ДІЯННЯ**, регулююче діяння — сигнал, що надходить на вхід об'єкта керування від регулятора чи іншого пристрою і впливає на вихідну (регульовану) величину об'єкта керування. К. д. у системі автомат. керування змінюється так, щоб регульована величина відповідала заданій (у системах стабілізації, слідкуючих і програмних) або досягла якогось оптимального значення, зокрема екстремуму (в системах автомат. оптимізації, самоналаджуваних, екстремальних та ін.). Характер змінювання в часі К. д. залежить від виду регульованого закону й визначається властивостями об'єкта керування, характером збурень, що діють на систему, завад і задавальних діянь, а в деяких випадках — і певними вимогами до виду й якості змінювання в часі регульованої величини.

За часом К. д. об'єкти керування бувають одно- й багатовимірні. Кожне К. д. у багатовимірних об'єктах може впливати на одну або кілька вихідних регульованих величин. Характер і ступінь впливу на кожну регульовану величину різні (див. *Спостережуваність й керуваність змоз*). Одним із важливих завдань при синтезі багатовимірних систем автоматичного керування є усунення або послаблення впливу К. д. на всі регульовані



ЦЕНТРАЛЬНА ЛАНКА СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

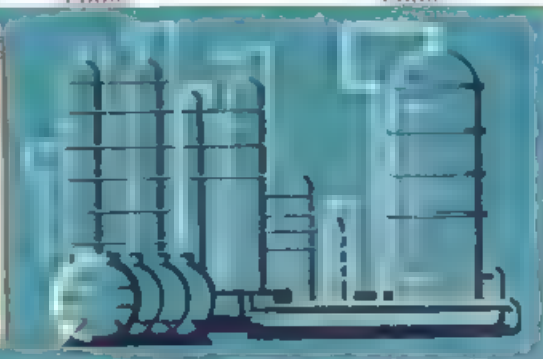
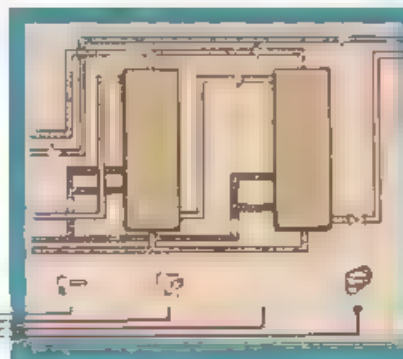
ЗАСТОСУВАННЯ КЕРУЮЧИХ МАШИН ДЛЯ  
ПОВБУДОВИ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ  
ТЕХНОЛОГІЧНИМИ КОМПЛЕКСАМИ



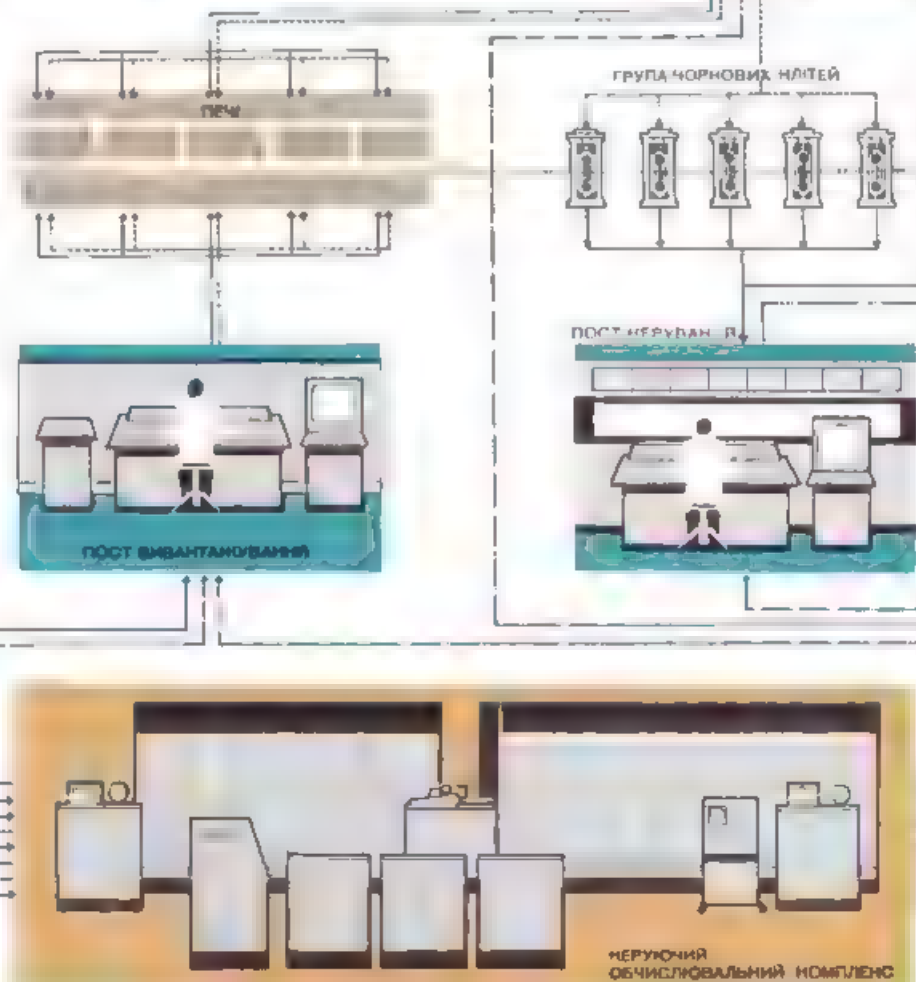
КЕРУЮЧА МАШИНА  
ДРУГОГО ТИПУ

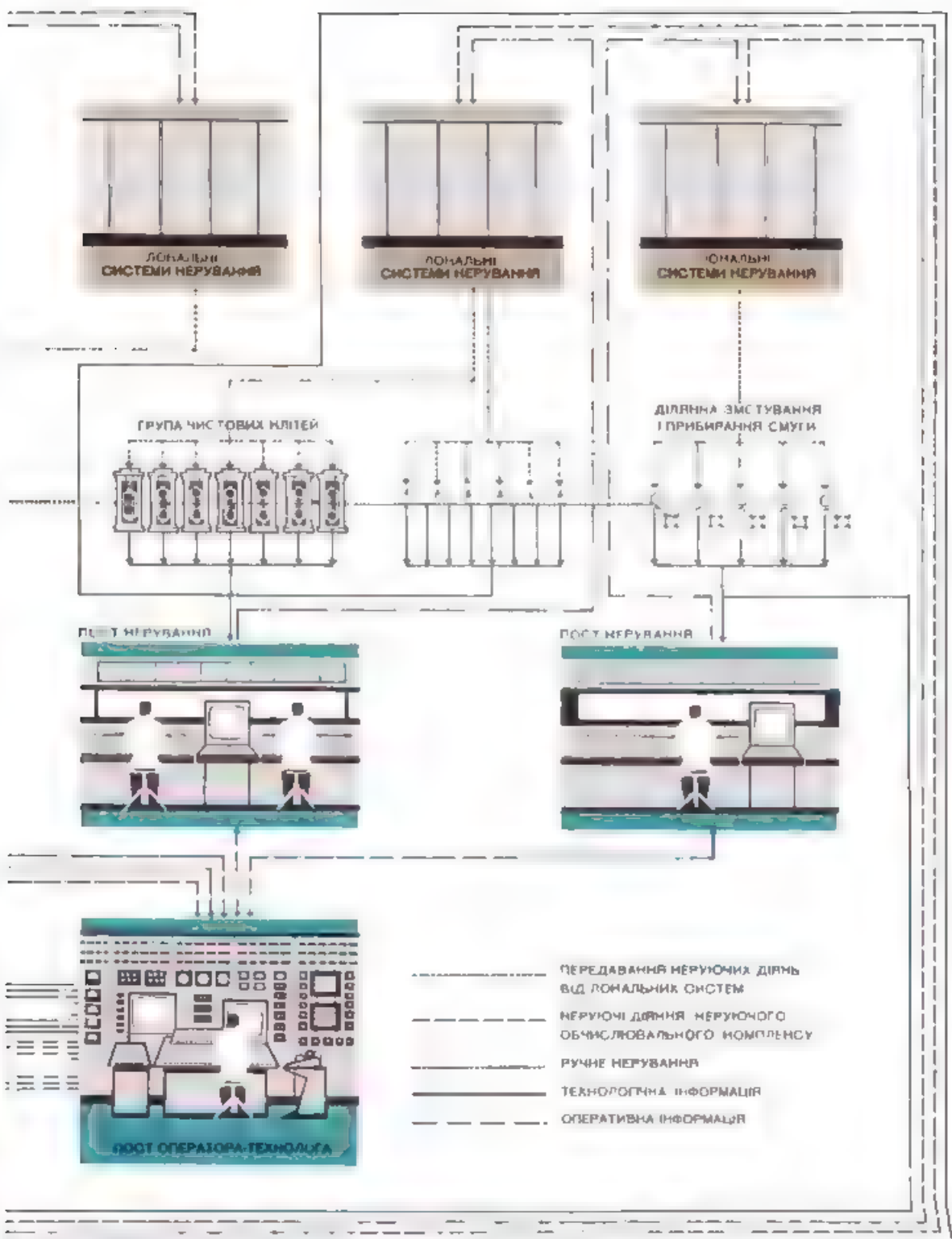


КЕРУЮЧА МАШИНА ПЕРШОГО ТИПУ  
ДЛЯ КЕРУВАННЯ РЕЦЕПТОМ



**КЕРУЮЧА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА  
МАШИНА В АВТОМАТИЗОВАНІЙ  
СИСТЕМІ УПРАВЛІННЯ  
ШИРОКОСМУГОВИМ СТАНОМ  
ГАРЯЧОГО ПРОКАТУВАННЯ**







# КЛАС ДЛЯ АВТОМАТИЗОВАНОГО НАВЧАННЯ

ЦЕНТРОНА ЦИФРОВА  
БЕЧІСЛЮВАЛЬНА МАШИНА



СІСТЕМА НАВЧАННЯ

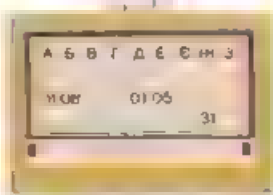


ТАБЛИЦА НАВЧАННЯ



СІСТЕМА ПРАЦЮВАННЯ ВИПАДАКА

ЛОГІСТИКА



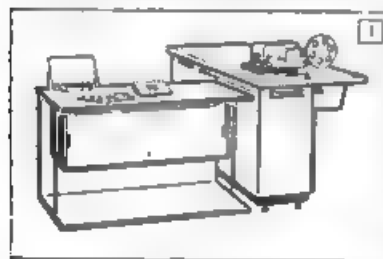


величини, за винятком однієї. Для такої ж *Автоматизації, Двох каналів керування, Процес керування*.

В. Ю. Мандрукович-Система. «КІВ-67» — спеціалізована цифрова керуюча машина, призначена для керування процесами електроннопроменевої (іоннопроменевої) мікрообробки матеріалів Перша вітчизняна машина такого типу. Розроблено її в Ін-ті кібернетики АН УРСР 1967.

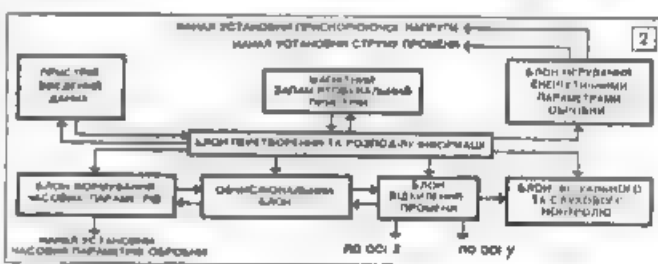
У машині (мал. 1) реалізовано зручну для технологів вхідну мову, яка дає змогу вводити початкову інформацію в цифро-бук-

цифрової обчисл. машини або з нуля керування. Зберігаються вони в магн. запам'ятовувальному пристрої ємністю 4096 20-розрядних слів. У блоці відхилення променя є перетворювач кодів у відхильний струм, побудований за принципом підсумовування на навантажених формованих стабілізаторах струмів, які відповідають значенням розрядів дійкових чисел. Амплітуду струму променя задають у процентах від максимального значення, і це дає змогу стикувати машину з різноманітними електроннопроменевими уста-



1. Спеціалізована керуюча машина «КІВ-67».

2. Блок-схема машини «КІВ-67».



вентів формі. Процес обробки поділяється на етапи, а межах кожного з яких енергетичні характеристики променя й часові параметри не виникають. За однією командою машина здатна опрацювати будь-яку з п'ятих довільно розміщених у межах раstra елементарних геом. фігур потрібних розмірів: точковий растр, кілька прямокутників, похилу лінію, коло або дугу та площу, обмежену з двох боків похилими з будь-яким кутком нахилу або дугами потрібного радіуса. Комбінуючи ці фігури та зв'язки між ними й задаючи опрацювання їх у потрібній часовій послідовності при різних енергетичних характеристиках пучка й часових параметрах опромінювання, можна керувати відтворюванням складних малюнків, створенням компонентів інтегр. схем, виготовленням різноманітних фільмів, проведенням мікрозварювання тощо. Кожна команда складається з десятих слів, у ній є дані про закон переміщення променя по поверхні оброблюваного підкладу, про координати першої й останньої опромінюваних точок, значення струму електронного променя та прискорюючої напруги, тривалість робочих імпульсів і пауз між ними та про кількість імпульсів. Координати точок задаються кількістю кроків із зазначеним номером квадранта (ділянка обробки становить  $2000 \times 2000$  кроків). Режим обробки може бути імпульсним або квазінеперервним (в останньому випадку промінь не зникає при переміщенні від точки до точки). Блок формування часових параметрів (мал. 2) регулює за програмною тривалості імпульсів і пауз між ними при будь-якому співвідношенні їх у діапазоні від 2 мкс до 10,2 сек. Кількість імпульсів опромінювання в кожній точці може досягати 2047. Програми обробки можна вводити з перфострічки, від іншої

новками. Основною обчисл. блоком є складений на двох цифрових інтеграторах лінійно-крутотний інтегратор, який можна перебудувати на опрацювання різних елементарних геом. фігур.

Налагодування програм і контроль за правильністю введення їх та перевіряння станів блоків машини в процесі керування здійснюються за допомогою блоку візуального контролю, побудованого на трубі з темновим запашом і плоскому електролюмінесцентному екрані, та акустичного індикатора. Лід Глушков Я. М., Деркач П. П. Автоматизація підготовки мікростем, «Механізація й автоматизація управління», 1967, № 5.

В. П. Деркач.

**КІБЕРНЕТИКА** (грец. κυβερνήτης — мистецтво керувати) — наука про загальні закони одержування, зберігання, передавання і перетворювання інформації в складних керуючих системах. При цьому під керуючими системами тут розуміють не лише технічні, а й будь-які інші — біол., адміністративні та соціальні системи. Прикладами дуже складних керуючих систем є нервові системи живих організмів, особливо організм людини, а також апарат керування в людському суспільстві.

Термін «К.» вперше (після стародавніх греків) ужив 1834 франц. вчений А.-М. Ампер (1775—1836) у запропонованій ним класифікації наук за позначення науки, якої тоді ще не було, про керування людським суспільством. Незабаром після Ампера цей термін було забуто. Знову відродив його амер. учений Н. Вінер (1894—1964) у назві своєї книги, опублікованої в 1948. Цю дату прийнято вважати за дату народження К. як самостійної науки.

Н. Вінер визначив К. як «науку про керування та зв'язок у тварині й машині». Люд-

ське суспільство не гадає в цьому жвавленні. Відчуваючи цей недолік, Н. Вінер опублікував у 1954 нову книгу «Кібернетика та суспільство». Проте для обох книг Вінера характерним є оповідний підхід, автор описує свої думки та враження в зв'язку з деякими дослідженнями, які він та його колеги виконали в галузі теорії випадкових процесів і фізіології нервової системи. По суті, в книзі немає послідовного викладу методів нової науки та її результатів. Набагато систематичніше виклав 1956 суть К., як її розумів Вінер, амер. учений У.-Р. Ешбі. Загалом для розвитку К. в США і 3х. Європі, особливо на початку, характерне захоплення її філософськими аспектами (хоч їх не завжди правильно трактували). В 2-й пол. 50-х рр. почали широко використовувати електронні цифрові обчислювальні машини (ЦОМ) та автоматизовані системи управління (АСУ). Потрібно було розробити наук. засади проектування таких машин і систем. Оскільки статті та книги з К., які з'являлися тоді, не давали відповіді на насуваючі питання, поставлені практикою, більшість фахівців в ЦОМ та АСУ за кордоном стали скептично ставитися до самої науки К. Що ж до нових наук, методів і результатів, які зникли у зв'язку з завданнями проектування ЦОМ та АСУ, то їх об'єднали в нову науку, що в США й Англії дістала назву «Computer sciences» (наука про ЕОМ), у Франції — «informatique». А термін «К.» стави вживати найчастіше у вужчому значенні, розуміючи під К. переважно аналогові, які існують між машинами та живими організмами, і філософські питання, що постають у зв'язку з соціальними наслідками автоматизації. Лише наприкінці 60-х рр. пам'яталися шляхи зближення між кібернетиком і обчислювачами.

В СРСР розвиток К. відбувався інакше. Після початкової негативної реакції, викликаній частково рядом помилкових філософських настанов Н. Вінера та його послідовників, на початок 60-х рр. кристалізувалося ширше тлумачення К., що повністю охоплює не лише теорію ЦОМ, а й численні застосування в різних галузях, починаючи від ав-

ного діяння об'єкта: керуючі діяння видаються на об'єкт керування по каналу прямого зв'язку, результати цього діяння сприймаються спец. системою датчиків і передаються до керуючої системи по каналу зворотного зв'язку. Передані дані разом з раніше нагромадженою інформацією керуюча система перетворює на нові керуючі діяння, після чого процес обміну інформацією триває.

Інформація про процес в системах керування може бути у двох видах — неперервному й дискретному. Неперервна інформація про необхідні параметри процесу при передаванні звичайно представлена у вигляді тієї чи іншої фіз. величини (сила струму, кут повороту вала тощо), яка є неперервною функцією часу. При зберіганні неперервної інформації представлена у вигляді графіків чи у вигляді якоїсь фіз. величини (напр., величини напруги чи сили) або ступеня прозорості, яка змінюється неперервно на якійсь ділянці простору (ліній, площі). Дискретна інформація представляється у вигляді послідовності окремих сигналів, відокремлених один від одного скінченними часовими чи просторовими проміжками. При цьому кількість різних станів сигналів скінченна. Що ж до фіз. виду сигналів, то для цієї мети можна використати будь-які фіз. величини. Оскільки множина видів дискретних сигналів скінченна, їх прийнято звичайно ототожнювати з буквами того чи іншого (абстрактного) алфавіту або з цифрами тієї чи іншої системи числення. Тому дискретна інформація часто ототожнюється з алфавітно-цифровою інформацією.

У реальних системах керування завжди є можливість наблизити зовнішню неперервну інформацію до дискретної, бо всі реальні пристрої для приймання, передавання та відтворення неперервної інформації завжди мають ряд обмежень. Це, по-перше, обмежена чутливість, яка не дає змоги розрізнити мало відмінні одне від одного значення величини, використовуваної для представлення інформації. Внаслідок цього кожний конкретний прилад фактично має справу лише зі скінченною множиною різних сигналів. По-друге, мають місце обмеження пропускної та роздільної здатності пристроїв. Ці обмеження не дають змоги розрізнити досить близькі один до одного моменти часу або точки простору, і це, зрештою, приводить до того, що неперервна інформація, яка проходить через пристрій або взаємодіє з ним, фактично поділяється на скінченну послідовність сигналів. Тому величезний вплив на розвиток К. справило й продовжує справляти створення універсальних перетворювачів дискретної інформації — електронних цифрових обчислювальних машин.

Автоматичного керування теорія — найближча попередниця К. мала справу з відносно простими об'єктами та керуючими системами, про їх описувати системами дифер. і різницевих рівнянь. Обмежені алгоритмічні можливості, що мали місце в механіці регулювання до появи ЦОМ, давали змогу здійснювати



Схема функціонування довільної системи керування.

томатизації обробки наукових даних до керування великими економ. системами. Схему функціонування довільної системи керування у найзагальнішому вигляді зображено на малюнку. Смісл цього функціонування полягає у здійсненні такого обігу інформації і в таким ритмом, які необхідні для нормаль-

лише найпростіші види перетворення інформації. Нагромадження інформації в керуючих системах і, отже, використання попереднього досвіду в цей період не провадили. Можливість нагромадження інформації (ф-ція пам'яті) і здійснення складних її перетворень найрізноманітнішої природи було у більшості повному вигляді зперше реалізовано в ЦОМ. Це дало змогу поставити й успішно розв'язувати завдання автоматизації не лише фізичної, а й розумової діяльності людини, що в осн. практичним завданням К. Центр ваги досліджень змістився від простих систем керування до складних, основаних, як правило, на використанні в них як осн. керуючої ланки ЦОМ. Зрештою, широке використання ЦОМ у системах керування вичаю підвищило роль дискретної форми представлення інформації й викликало відповідне вдосконалення теор. баз кибернетики.

Для повнішої характеристики предмета К. окarakterизуємо її теор. основу — теоретичну К. Її завдання — створити науку, апарат і методи досліджень, придатний для вивчення широких класів систем керування, незалежно від їхньої конкретної природи. До теор. К. входить цілий ряд наук, напрямів, що розвивалися раніше в таких розділах математики, як логіка, математична, імовірнісна теорія, обчислювальна математика тощо. До них належить інформаційна теорія, яка має справу з кількісною мірою інформації, кодування теорія, яка вивчає способи представлення дискретної інформації у вигляді послідовностей букв абстрактних алфавітів, та алгоритмічна теорія, що займається перетвореннями таких послідовностей. Деякі матем. розділи К. виникли й розвивалися в рамках самої К. Це, зокрема, стосується заг. теорії автоматів, предметом якої є вивчення довідних перетворювачів дискретної інформації. І, значною мірою, її частини, що розвивалися раніше, — теорії логічних сіток. До автоматичної теорії приєднуються теорії формальних мов та граматики, які становлять основу заг. теорії аналогових систем. Усі перелічені напрями К. мають справу з дискретною інформацією та її перетвореннями, що становлять основу при побудові теорії будь-яких систем керування (див. *Дискретних перетворювачів теорія*). Практично можливо знати довідну інформацію до дискретної, але принципово значення для К. має факт існування універсальних перетворювачів дискретної інформації, встановлений ще до виникнення К. в рамках матем. логіки. Універсальний перетворювач дискретної інформації характеризується тим, що, одержавши та запам'ятавши опис будь-якого конструктивного перетворювача (тобто перетворювача дискретної інформації, описуваного будь-якою скінченною множиною правил), він може виконувати (з точністю до винятку кодування) роботу цього перетворювача. Універсальні перетворювачі інформації реалізують т. з. повні системи елементарних перетворень і способів їх композиції, з яких, як в атомів, можна скласти довільні ком-

структивні перетворення інформації — *алгоритми*. До таких універсальних перетворювачів дискретної інформації належать, зокрема, й сучасні ЦОМ.

Матем. основою теорії систем керування, які мають справу з неперервною інформацією, є насамперед теорія звичайних дифер. рівнянь, що переростає в заг. теорію динамічних систем (не обов'язково неперервних). Загалом намітилася тенденція до створення загальнішого матем. апарату кибернетики, що охоплює гібридні (дискретно-аналогові) керуючі системи. Неперервні й дискретні форми представлення інформації вивчають (з різних точок зору) в таких розділах матем. апарату К., як *випадковий процесів теорія*, *теорія*, *теорія статистичних розв'язків*, і в методах розв'язування складних екстремальних задач (лінійне, опукле, стохастичне та динамічне програмування, методи оптимізації на графах тощо). Використовуючи цей апарат, розвинулися такі вже специфічні для теор. К. напрями, як *розпізнавання образів* і теорія навч. і самоорганізованих систем керування. Вони, поряд з теоріями алгоритмів, автоматів і формальних мов, відкривають нові можливості для розв'язування однієї з найзахопливіших задач К. — розкриття закономірностей нагромадження та перетворення інформації в мозку людини. Як бачимо, теор. К. широко використовує математику і будуватиме на матем. основі. Проте теор. К. не зводиться тільки до математики. Вона, як і всі інші природничі й тех. науки, широко використовує експеримент як метод вивчення об'єкта. Дуже наближеною характерною особливістю К. є те, що вона запровадила принципово новий метод вивчення об'єктів та явищ — т. з. матем. експеримент, або машинне моделювання.

Смисл цього методу полягає ось у чому: дуже багато об'єктів та явищ описуються настільки складними системами співвідношень, що прямо застосовувати традиційні матем. методи практично неможливо. Якщо, напр., об'єкт описується системою з багатьох сотень нелінійних дифер. рівнянь, з багатьма десятками параметрів, то, як правило, аналітично розв'язати такі системи неможливо, а коли б і було можливо, то дослідження одержаних складних аналітичних залежностей звичайними матем. методами практично не призвело б до успіху. В цьому випадку природно адатися до матем. експерименту. Опис відповідної системи рівнянь і певного методу її числового розв'язання вміщують у пам'ять ЦОМ. Завдяки величезній швидкості роботи сучасних ЦОМ за короткий час можна одержати велику кількість варіантів розв'язків системи при різних значеннях параметрів. Це дає можливість автоматично будувати таблиці (або графіки) залежностей від параметрів тих чи інших властивостей розв'язків, що нас цікавлять. Інакше кажучи, за допомогою матем. експерименту можна досліджувати об'єкт за його описом (див. *Модель математична*), не вдаючись до побу-

доля та дослідження реальної моделі фізичної цього об'єкта. Ефективність такого підходу визначається, зокрема, точністю машинного моделювання, яку можна оцінити на основі нахилів обчислювальної теорії. Дуже важливо підкреслити, що матем. експеримент можна застосовувати й до таких об'єктів, які не мають точного матем. опису в традиційній формі (тобто у вигляді ф-л чи рівнянь). Його успішно застосовують і до об'єктів, що мають якесь якісне (але досить точне й повне) описи. Напр., записавши в пам'яті ЦОМ правила грамматики з повними списками винятків, можна провадити матем. експерименти в мовних конструкціях. Аналогічно можна будувати й вивчати моделі біологічної, розвитку складних економ. та соціальних систем тощо. Наявність методу машинного моделювання ставить теор. К. поряд з математикою в особливе становище щодо ін. наук. А саме: маючи свій специфічний предмет дослідження (керуючі системи), К. має від початку новий метод дослідження (матем. експеримент), що його, як і матем. формули, застосовують в ін. науках, незалежно від специфіки об'єктів чи явищ, які вони досліджують. Більше того, матем. експеримент охоплює значно більшу, ніж класичні дедуктивні матем. методи, галузь можливих застосувань, включаючи до складу їх практично всі науки, — як технічні та природничі, так і соціальні. Зрозуміло, що, даючи новий універсальний метод наук. дослідження для ін. наук, теор. К., як і математика, аж ніяк не претендує на те, щоб підмінити чи замінити собою ці науки. Поява ЦОМ і методу машинного моделювання привела до того, що теорія складних систем керування стала одним з осн. розділів К.

Однією з найважливіших принципових відмінностей складних систем від простих є те, що за законом функціонування складних систем не може описати й вивчити одна людина, для цього потрібні колективні дослідження. Так, закони функціонування різних регуляторних та керуючих систем людського організму вивчають учні різних спеціальностей (нейрофізіологи, ендокринологи та ін.). Складає з цих розрізнених знань комплексну картину функціонування людського організму можна за допомогою машинного моделювання. При цьому в одному місці (в ЦОМ) не просто нагромаджуються окремі факти. Виникає нова якість. ЦОМ здатна відповідати на деякі запитання про поведінку всієї складної системи (в даному разі людського організму) загалом. Методи комплексного дослідження складних систем керування становлять основу т. з. аналізу систем (див. Систем загальна теорія) та операцій дослідження. Крім теор. ядра, що становить апарат для вивчення довільних систем керування, у К. оформилися напрямки більш прикладного характеру, які мають справу з тими чи іншими конкретними видами систем керування та галузей застосувань. На одному з перших місць тут стоїть електронна обчислю-

вальна техніка — основа тех. базис К. А в основі теорії ЦОМ і математичного забезпечення ЦОМ лежить апарат теор. К. Цей апарат широко використовують, будуючи системи автоматизації проектування ЦОМ. Програмування для ЦОМ є по суті прикладною теорією алгоритмів, а теорія різного роду пристроїв, які входять до складу ЦОМ, — прикладною теорією автоматів. Опис різного роду алгоритмічних мов і теорія трансляції та інтерпретації таких мов у ЦОМ спираються на теорію мов формальних і граматик формальних.

За своєю порівняно коротку ще історією ЦОМ пройшли великий шлях розвитку — від простих лампових машин, призначених переважно для автоматизації обчисл. робіт, до складних систем обробки даних, які будуються на базі мікроелектронної обчислювальної техніки і мають ажнайширшу сферу застосування. Великі зрушення відбулися в організації використання ЦОМ. Якщо спершу їх використовували для розв'язування окремих задач, то з початку 60-х років осн. увагу спрямовують на комплексну автоматизацію, на т. з. системний підхід до застосування ЦОМ. Суть цього підходу полягає в тому, що, по-перше, автоматизується не лише обробка інформації, а й її збирання, введення та виведення в достаточній формі, яка не потребує ніякої додаткової обробки. По-друге, в пам'яті машини завжди є комплекс програм і необхідна для їхньої роботи інформація (в складних системах керування — інформаційна модель об'єкта керування). Для організації послідовної роботи окремих програм, постачання їх необхідною інформацією та для взаємодії з людьми, які працюють на спец. пультах, призначено спец. матем. забезпечення — т. з. операційна система.

Серед галузей застосування К. та ЦОМ одне з перших місць, як і раніше, посідає наука. При системному підході великого значення набули системи автоматизації експериментальних досліджень. Розрізняють три види таких систем. У найпростішому випадку автоматизація збирання даних здійснюється завдяки тому, що вимірювальна апаратура фіксує дані на таких носіях і в такій формі, щоб їх можна було ввести в ЦОМ за допомогою спец. ввідних пристроїв без будь-якої додаткової обробки. Високого рівня автоматизації досягають, застосовуючи спец. перетворювачі, за допомогою яких знімають інформацію, перетворюють її на цифрову форму та передають (по спец. каналах зв'язку або ліній зв'язку заг. призначення) у ЦОМ у реальному масштабі часу. Якщо експериментальні установки відносно прості, одна ЦОМ може обслуговувати багато окремих лабораторій. Ще вищого рівня автоматизації досягають у складних експериментальних установках (прискорювачі, радіотелескопи тощо), де ЦОМ будують в установках як їхні органічні складові частини. Для подальшого використання експериментальної інформації, особливо тієї, що її одержано внаслідок експериментів,

які дорого коштують, або таких, що їх важко повторити, організують тривале зберігання цієї інформації в цифровій формі на машинних носіях запису інформації (*стрічки магнітні, диски магнітні тощо*).

Іншим напрямом наук застосувань ЦОМ, що робить тепер тільки перші кроки, є створення системи автоматизації дедуктивних збудов, напр., системи автоматизації доведення теорем у математиці (див. *Доведення теорем на ЕОМ*). Найперспективнішим є людино-машинні системи, в яких людина дає ідею доведення, ставить проміжні цілі, а машина здійснює пошук у заданому напрямі і, в разі успіху, оформляє одержані результати. В таких системах складовою частиною мають бути *інформаційно-довідкові системи*, які нагромаджують сукупність раніше встановлених фактів обґрунтувань їх. Автоматизація довідково-інформаційної роботи в науці має, звичайно, й самостійне значення. Нарешті, велике місце в наукових застосуваннях ЦОМ та К. займає описане вище машинне моделювання.

Велику роль К. та ЦОМ відіграють у розвитку техніки. Дедалі важливішого значення набувають системи автоматизації проектування в різних галузях техніки. Якщо доведення ЦОМ використовували для розв'язування окремих конструкторських задач розрахункового характеру, то тепер дедалі збільшуються системний підхід. При цьому за допомогою спец. операційних систем здійснюється робота з кресленнями та іншою конструкторською документацією. Конструктори, працюючи за спец. екранними пультами, можуть викликати на лів зображення окремих креслень або фрагментів їх, стежити за ходом проектування, передавати в систему різні вказівки та вносити зміни тощо (див. *Автоматизована система проектування*). Автоматизовані системи випробувань складних тех. об'єктів будують приблизно за тими самими принципами, що й *автоматизовані системи обробки експериментальних даних*.

Системи автоматизації керування технологічними процесами почали розвиватися завдовго до виникнення К. Проте тоді завдання цих систем зводилося здебільшого до авторегулювання, тобто утримання тих чи інших параметрів, що характеризують процес, у заданих межах. Поява ЦОМ і розвиток К. дали змогу перейти до розв'язування задач опт. керування. Різко зросла складність систем. При конструюванні їх почали застосовувати ідеї самонавчання та самоорганізації.

Інший напрям в автоматизації технології — програмне керування, яке має особливо велике значення в машинобудуванні та приладобудуванні.

Верстат з програмним керуванням може швидко перебудовувати свою роботу за рахунок простої зміни програми, записуваної на магнітну стрічку або перфострічку. Переміщувати й установлювати на верстатах деталі також можуть універсальні програмні авто-

мати. А коли ще й програми, які керують таким автоматизованим устаткуванням, є виходами автоматизованої системи керування, то з'являється можливість створювати цюхит заводів-автоматів, здатні швидко перебудовуватися для випуску нових видів продукції. Останнім часом збільшився інтерес до створення людиноподібних автоматів, як *роботів*, керованих ЦОМ, так і простіших пристроїв — *кіборгів*, які імітують і підсилюють рухи людей, котрі ними керують.

Завдання автоматизації технологічних процесів таке важливе й специфічне, що сукупність наук, напрямків, які забезпечують його розв'язання, об'єднують здебільшого в спец. розділі К., що його названо *кібернетикою технічною*. Завдання керувати технологією безпосередньо стикаються в завданнями керувати підприємствами в організаційно-економічному плані (планування, керування запасами, організація збуту та постачання, фінансові операції тощо). Ці завдання має розв'язувати інший розділ К., що його частіше наз. *кібернетикою економічною*. Автоматизовані системи для розв'язування таких завдань наз. системами адміністративного, або організаційного, управління. Системний підхід щодо таких систем означає не лише автоматизоване збирання інформації, а й комплексне розв'язування задач. Їхньою особливістю є наявність для всіх задач спільного поля інформації (інформаційної моделі об'єкта), яке зберігається в пам'яті системи й постійно автоматично поновлюється в міру надходження нових даних.

Автоматизовані системи адмін. управління мають цілком автоматизувати документообіг. Інакше кажучи, в ЦОМ треба вводити тільки дійсно первинні дані. Всі ті дані, які можна вивести з них, одержують у системі автоматично у вигляді тих чи інших вторинних документів. Що ж до первинної інформації, то її підготовка або пошук здійснюється в приготуванні документів первинного обліку (фінансового чи матеріального), або здійснюється автоматично за допомогою відповідних дещатів та систем керування технологією. Останнім часом намітилася тенденція до органічного злиття автоматизованих систем технологічного й адміністративного управління. Такі системи названо інтегрованими. Автоматизовані системи адміністративного управління (див. *Автоматизовані системи управління підприємством*) набувають поширення не тільки в промисловості, а й в транспорті, в будівництві, проектно-конструкторських та науково-дослідних установах, у банках тощо. Автоматизовані системи управління окремими підприємствами й установами зливаються в складні системи управління галузями нар. г-ва (див. *Автоматизовані системи управління в народному господарстві*), а надалі (для країн соціалістичного ладу) — й усім нар. г-вом у цілому. «Треба ... швидше створювати галузеві автоматизовані системи управління, — підкреслював у звітній доповіді ЦК КПРС на

XXIV з'їзді партії Л. І. Брежнєв, — маючи на увазі, що в перспективі ми повинні створити загальнодержавну автоматизовану систему збирання й обробки інформації (Матеріали XXIV з'їзду КПРС. К., 1971, с. 77). Обмін інформацією в таких системах спочатку відбувається на машинних носіях (найчастіше — на магнітних стрічках), а потім замінюється безпосереднім обміном даними між ЦОМ по каналах зв'язку. Відбувається процес дедалі більшого й більшого злиття сітки ЦОМ з системою зв'язку, що приведе в майбутньому до докорінної зміни всіх наших уявлень про завдання такої системи. Система зв'язку в майбутньому має надавати споживачам послуги не лише щодо простого передавання інформації, а й щодо зберігання її та переробки. У зв'язку з цим великий інтерес становить одне з практичних завдань, що його починає вже розв'язувати К., — створення т. зв. національних «банків» даних. Під цим розуміють нагромадження в пам'яті ЦОМ тієї чи іншої інформації, напр., усіх законів країни або даних про новітні науки й техніки, і можливість швидко автоматично одержувати довідки в пультів, розміщених у будь-яких частинах країни, через єдину систему зв'язку. Близькі завдання розв'язують у т. зв. програмованому навченні. Але, на відміну від простих банків даних, тут ЦОМ може не тільки видавати інформацію, а й ставити запитання, оцінювати відповіді на них, відслідковувати в разі потреби, до раніше проїденого матеріалу або задаючи простіші запитання.

Внаслідок особливої важливості та специфіки вивчення організму людини і насамперед її мозку, питання застосування ЦОМ і К. з цією метою виділяють здебільшого в окремий розділ К. — *кібернетику біологічну*. Зрозуміло, при цьому не виключається дослідження кіберн. методами не лише людського, а й будь-яких інших живих організмів. Крім питань комплексного моделювання організму та вивчення в інформаційному плані розумових процесів, біол. К. включає в себе й чимало питань, що стосуються медицини. Йдеться про створення штучних органів та керування ними (див. *Біоелектричне керування*), про автоматизацію діагностики, про системи для автоматизації анамнезу й мед. статистики, про національні «банки» мед. даних (історій хвороб, що містять дані про стан та зміни стану здоров'я всіх членів суспільства), тощо (див. *Медицина (інформаційна система)*).

У зв'язку з завданнями моделювати функції мозку й автоматизувати розумові процеси (див. *Штучний розум*) постає ряд принципових питань філософського характеру. Це передусім питання про межі автоматизації розумових процесів. Одним з найважливіших досягнень К. є встановлення того факту, що таких меж принципово (в суто теоретико-пізнавальному плані) не існує. Водночас у плані історичному, оскільки є різниця між людським суспільством та знаряддями, які це суспільство використовує (якими б досконалими вони не були), завжди будуть складові

частини розумового процесу, що залишаться прерогативою людини. На найвищих рівнях автоматизації їх можна буде звести до постановки заг. цілей розвитку та остаточної оцінки результатів та розв'язків, що їх одержують автоматизовані системи. Друге питання — можлива небезпека, пов'язана з помилками автоматизованих систем керування. Справа в тому, що економ. ефект, який дають автоматизовані системи, дуже зростає при збільшенні розмірів систем. Тому масштаби таких систем безперервно зростають і, відповідно, все більша й більша частина роботи щодо підготовки відповідальних рішень перекладається на машини. При цьому виникає небезпека, що через ненадійність автоматизованих систем або через помилки їхніх конструкторів та програмістів може збільшуватися можливість прийняття помилкових або навіть згубних для суспільства рішень. Такі побоювання поділяв, напр., Н. Вінер. Проте розвиток К. свідчить про необґрунтованість таких побоювань. Надійність кібернетичних систем спирається, насамперед, не тільки на надійність їхніх елементів, яка безперервно зростає, а й на виявленню К. можливість побудувати як заводно надійні системи з ненадійних елементів. Що ж до помилок конструкторів і програмістів, то за звичайних методів їхньої роботи ймовірність їхніх помилок справді зростає зі збільшенням розмірів систем. Проте й тут випереджаючий розвиток автоматизованих систем проектування разом з розвитком почуття соціальної відповідальності конструкторів автоматизованих систем є гарантією безперервного зменшення ймовірності помилкових рішень. Ймовірність помилок в рішеннях, що їх підготовляють автоматизовані системи, набагато менша, порівняно з рішеннями, одержуваними традиційними безмашинними методами.

Зрозуміло, К., як і будь-яка інша наука, не гарантована від того, що її результатами зловживають окремі групи чи класи. Але розв'язання цього питання належить до сфери соціальних наук, до проблеми побудови справедливого безантагоністичного суспільства (див. *Соціологічні питання кібернетики, Філософські питання кібернетики*).

К. — наука комплексна й інтернаціональна, бо в її розвиток роблять свій внесок учені й колективи різних країн світу. Для розв'язання проблем різних її аспектів та розділів багато зробили втіжнники й зарубіжні вчені, імена яких названо у відповідних статтях цієї енциклопедії. Обмінові інформацією, виробленню стратегічних напрямів розвитку, розв'язанню великих проблем К. та обчисл. техніки й застосуванню їх сприяють такі міжнародні організації, як *Міжнародна федерація по обробці інформації* (ІФІП), *Міжнародна федерація з автоматичного керування* (ІФАК), *Міжнародна федерація по дослідженню операцій* (ІФОРС) та *Міжнародна федерація з аналогових обчислювань* (АІКА).

На Україні К. почала розвиватися наприкінці 40-х рр., хоча ще на початку 20 ст.,

заводного до Н. Вінера, український учений Н. І. Грдина висловлював думки про взаємозв'язки між автоматикою та біологією, аналогічними тим, які спонукали Н. Вінера написати книгу «Кібернетика». У 1947 в АН УРСР було створено лабораторію моделювання й обчисл. техніки; 1951 у Києві розроблено першу в СРСР і континентальній Європі електронну цифрову обчисл. машину «МЭСМ», на базі лабораторії 1957 створено Обчислювальний центр АН УРСР на правах н.-д. інституту, який згодом реорганізовано в Ін-т кібернетики (див. *Ордена Леніна інститут кібернетики Академії наук Української РСР*). На Україні створено школи з теорії автоматів та її застосувань, тех., біол. та економічної К., системотехніки, теорії ЦОМ та АОМ. Тут розроблено багато цифрових і аналогових обчисл. машин, створено першу типову автоматизовану систему управління підприємством К. перебуває на самому вістрі науково-технічного прогресу. Роль її в народному господарстві нашої країни зростає й далі. Директивами XXIV з'їзду КПРС по п'ятирічному плану розвитку народного господарства СРСР на 1971—1975 роки передбачено «даліше розроблення проблем теоретичної і прикладної математики та кібернетики для ширшого застосування в народному господарстві математичних методів і електронно-обчислювальної техніки, автоматизації процесів виробництва і вдосконалення управління». (Матеріали XXIV з'їзду КПРС, К., 1971, с. 273).

Лит. Матеріали XXIV з'їзду КПРС, К., 1971, В. М. Мер Н. Кібернетика или управление и связь в животном и машине. Пер с англ. М., 1968. В. М. Мер Н. Кібернетика и общество. Пер с англ. М., 1964. Эшби У. Р. Введение в кибернетику. Пер с англ. М., 1959 (Біол. сер. с. 304—309). Гаусман В. М. Введение в кибернетику. К., 1966 (Біол. сер. с. 310—322). В. М. Гаусман.

**КІБЕРНЕТИКА БІОЛОГІЧНА** — напрям кібернетики, який вивчає закони збергання, переробки й передавання інформації в біологічних системах. К. б. використовує моделювання й вивчає методи аналізу й керування біол. системами. Вона не підміняє інших біол. наук, бо займається переважно матем. обробкою, побудовою моделей, переробкою інформації, а не безпосереднім одержуванням даних. Традиційними методами дослідження біол. систем, описування їх і керування ними займається біологія. Але в міру свого розвитку біол. науки дедалі дужче потребують методів кібернетики, бо принципи символічного вираження відомостей у вигляді моделей дає змогу не тільки уточнити якісні й кількісні уявлення про систему, а й одержати нові дані. К. б. використовує методи *автоматичної теорії, алгоритмічної теорії, систем загальної теорії, теорії складних систем, керування і теорії автоматичного регулювання й керування (теорії стійкості, інваріантності, оптимального керування, інформаційної теорії, операційного дослідження та ін.)*. Жива природа складна й різноманітна, тому в К. б. виділяють кілька напрямів, які вивчають різні біол. си-

стемні та їхні окремі ф-ції: мед. фізіол. і психол. кібернетику, нейрокібернетику й біоніку.

*Кібернетика медична* займається, головним чином, створюванням статистичних моделей захворювань і використовує їх для діагностики, прогнозування й лікування, а також вивчає процес управління в медицині й охороні здоров'я. *Фізіологічна кібернетика* вивчає й моделює функції клітин, органів і систем в умовах норми й патології з перспективою використання моделей для медицини. *Нейрокібернетика* моделює процес переробки інформації в нервовій системі — від нейрона до організму в цілому. *Психологічна кібернетика* моделює психічні ф-ції на базі виявлення цілісного поведінки людини. *Біоніка* є вивчаючою даною між К. б. і кібернетикою технічною й вивчає можливість використання моделей біол. процесів у техніці. В міру нагромадження в біол. науках кількісної інформації виділяються нові напрями К. б.

Створюючи кількісні моделі, в першу чергу формують мету моделювання; після цього переходять до створення гіпотез, яка становить якісний опис системи, й до вибору типу моделі, матем. методів і тех. засобів для вираження її залежно від мети моделювання, кількості та якості інформації. Останній етап — це створення моделі й дослідження її для ідентифікації з системою-об'єктом. Матем. модель біол. системи, яка дає досить добрий збіг з результатами її експериментальних випробувань при розширенні зовн. умов, можна назвати теорією роботи цієї системи (див. *Біологічні системи математичне моделювання*).

Залежно від мети моделювання моделі повинні з різними ступенем точності відображати структуру й функції системи (всієї або її частин). Для пізнання й керування ступінь точності повинен бути детальнішим, ніж для створення пристроїв, які замінюють систему, коли можна обмежитися моделюванням відношень «входи—виходи» (див. *Чорний ящик*), не претендуючи на відтворення внутр. структури й окремих функцій. Ряд особливостей біол. систем визначає вимоги до моделі й обмежує можливості моделювання. Всі біол. системи дуже складні, тому в більшості випадків можливі тільки ймовірнісні, а не точні моделі; методи класичної математики застосовні в К. б. тільки для моделювання окремих функцій і то з обмеженим ступенем точності. Біол. системи становлять складну ієрархію. Модель кожної системи може охоплювати різну кількість суміжних рівнів «згорі» і «низзу». Напр., організм можна моделювати «низзу» — з рівня молекул, клітин або органів і враховувати вплив «згорі» таких систем, як популяція, біосфера або навіть усієї біосфери. Чим більше суміжних рівнів включено в модель, тим вона точніша й тим більше якостей системи-об'єкта вона відображає.

На можному структурному рівні біол. системи (клітина, організм, популяція) можна



умовно виділяти робочі й керуючі підсистеми. Між ними циркулюють потоки не тільки матеріальних часток, а й інформації, яку виражає її енергетичний код. При моделюванні в обов'язковим відображати як матеріально-енерг., так і інформаційно-модельні властивості систем. Функції біол. систем, їхніх підсистем та елементів становлять поєднання дискретних і неперервних процесів, тому й для моделювання їх треба використовувати поєднання дискретних і неперервних методів.

Високою атрибутивною властивістю біол. систем є здатність до самоорганізації, яка виражається в зміні функцій і структури за рахунок появи нових зв'язків при одяковій кількості елементів або в зміні структури за рахунок зміни числа елементів і зв'язків між ними й утворенні нових рівнів. Як і в самоорганізації адекватно локалізується на різних рівнях структур (зміна в ДНК при мутаціях і рекомбінаціях, умовні зв'язки в нейронах кори головного мозку, творчість окремих людей у суспільстві). Для моделювання цієї якості необхідно спочатку побудову моделі з відповідного рівня, а це пов'язано з великими тех. труднощами й поки що практично неможливо.

У розпорядженні біологів ще про жодну з її складних систем немає необхідної кількості та якості інформації, яка б дала змогу вже топерстворити моделі з високим ступенем ідентичності їхньої поведінки. Щоб одержати таку інформацію, необхідні експериментальні дослідження на зовнішніх рівнях, а для обробки результатів цих досліджень — широке використання обчислювальної техніки.

Зважаючи на нестачу інформації й важкість одержування її, в К.Б. створюють евристичні моделі й відтворюють у них гіпотези про структуру й функції системи з використанням наявної інформації й доповненням нестачі її за рахунок припущень. Евристичні моделі використовують для перевірки гіпотез, для планування експериментів і для керування системою.

За характером блок-схеми моделі можна умовно поділяти на феноменологічні й структурні. У феноменологічних, або функціональних, моделях відображають часові й причинно-наслідкові відношення між дискретними явищами, які характеризують функцію біол. системи без врахування її структури. Можливі моделі різної складності: моделі, які відображають залежності дискретних входів і виходів цілої системи, розглядають як чорний ящик, та ієрархічні моделі, в яких представлено не тільки загальні для системи входи і виходи, а й дискретні функції внутр. підсистем, які при інтеграції визначають цілісну поведінку. Деталізація функцій віділення кількох рівнів, розчленування енерг. та інформаційних потоків, прив'язка до внутр. структурних елементів, уведення ймовірнісних оцінок і зворотних зв'язків хоч і дуже ускладнює моделі цього типу, зате наближає до розкриття сутності системи. Струк-

турні моделі будують на базі внутр. структури системи, вони відображають один або кілька ієрархічних рівнів (елементи, підсистеми й зв'язки). До структури прив'язують неперервні й дискретні зміни окремих функцій, з яких розраховують сумарні функції системи як цілого. Модель становить плоску або просторову сітку, яка відображає робочі й керуючі елементи системи. Структурні моделі краще пристосовані, щоб виражати сутність системи, проте складність розрахунків не дає змоги починати моделювання з низьких структурних рівнів і змушує обмежуватись відображенням окремих підсистем і окремих функцій. Крім типових феноменологічних і структурних моделей, можливі й мішані моделі, в яких окремі підсистеми або їхній певний рівень виражаються за першим, а всі інші — за другим типом. Вибір залежить від специфіки системи. Як тех. засоби для створення моделей використовують ЕЦОМ, бо вони дають змогу переробляти великий обсяг інформації, хоч програмування на них трудомістке, окремі функції й окремі підсистеми можна моделювати на аналогових обчислювальних машинах.

Окремою областю К.Б. є організація й проведення експериментів по зняттю статистичних і динамічних характеристик біол. об'єктів. До початку проведення таких експериментів здійснюється постановка задачі (визначають орган або функціональний ант, який треба вивчити, встановлюють протяжність досліду й граничні умови). Це припускає формулювання якоїсь гіпотези, яка виражається в якісних поняттях. Після постановки задачі переходять до побудови функціональної схеми об'єкта (перелічують усі входи й виходи, за основні гіпотези з них виділяють істотні). Наступний етап — планування експерименту (визначають контрольовані входи, виділяють стабілізовувані й змінні параметри, режим навантаження, місця й частоту вимірювань). Для успішного проведення експериментів дуже важливо правильно підібрати комплекс вимірювальної апаратури. Після цього проводять серію пробних дослідів, під час яких виробляють методику й визначають застосовність зроблених припущень. Закінчивши попередню підготовку, беруться за проведення осн. серії дослідів для одержання характеристик. Матем. обробку результатів здійснюють на ЕЦОМ, уводячи в неї дані за допомогою аналого-цифрового перетворювача.

Заг. принципи керування біол. системами з застосуванням методів кібернетики полягають ось у чому. Визначення мети керування, вираженої моделями початкового, проміжних і кінцевого станів системи. Мету встановлює людина, а кількісні динамічні моделі одного з типів записуються в пам'яті ЕЦОМ або виражаються аналоговою моделлю. Напр., статистичні моделі внутрішньої сфери організму настроєні на певну патологію або модель психіки. Ці моделі дають змогу прогнозувати природні зміни системи при різних початкових станах. Пев-



релічування засобів керування з програмами їхнього впливу на елементи системи, напр., дії з називанням механізму дії у вигляді зміни характеристики органів. Складання алгоритму керування. Розрахунок за моделлю зміни системи в часі при різних керуючих діях і вибирання оптимальної стратегії й тактики керування для досягнення мети. Прийняття рішення й уточнення програми керування. Напр., вибирання методу лікування за критеріями ефективності залежно від початкового стану хворого й програми послідовності застосування засобів. Контроль виконання програм керування, який враховує систему зворотних зв'язків, оцінку стану системи на проміжних стадіях і корекцію керуючих діянь залежно від ефекту керування. Це дуже важливий момент, бо можливі тільки ймовірнісні моделі біол. систем, які не дають змоги одіозначно передбачити й реакцію на керування.

Керування біологічними системами можливе в клінічній медицині — для діагностики й прогнозування розвитку хвороба, вибирання й проведення лікування аж до автомат. керування життєвими функціями при гострих патологічних станах; у фізіології — для планування й проведення експерименту; в психології — для *програмованого навчання* й навіть виконання.

Осп. тех. засобом керування біол. системами є ЕІОМ, оснащений спец. пристроями введення й виведення інформації. В деяких випадках потрібно створити особливі пристрої, які об'єднують у собі спрощену модель біол. системи й програми керування, напр., монітори, які забезпечують стеження й регулюванням серцевої діяльності.

Літ. Парня В. В., Бєзвєсний Р. М. Введення в медичнську кібернетику. М. — Прага, 1966. Мосон Н. М. Моделирование сложных систем. К. 1968. Анохин П. К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. М. 1971 (Біол.огр. с. 58—61). Шуби Ю. Р. Построение мозга. Пер. с англ. М., 1964 (Біол.огр. с. 404—417). Рашидовски Н. Некоторые медицинские аспекты математической биологии. Пер. с англ. М., 1964 (Біол.огр. с. 238—241). М. М. Анохин.

**КІБЕРНЕТИКА ЕКОНОМІЧНА** напрям кібернетики, який використовує її методи й засоби для дослідження процесів в економічних системах. К. е. вивчає процеси збирання, нагромадження, зберігання й переробки інформації про економ. об'єкти чи явища. Предметом К. е. є процеси управління економікою країни, галузі, району, пром. комплексу, виробл., окремого підприємства, цеху, ділянки, кількох верстатів чи групи людей та ін. Методи аналізу, що їх застосовують у К. е., допомагають знаходити оптимальні режими керування й управління й будувати раціональні системи обробки економ. даних, які ґрунтуються на широкому використанні обчисл. техніки. Дослідження з К. е. зводяться до вибору показників, потрібних для управління економ. об'єктами (підприємством, галуззю, групою галузей), до вибору спо-

собів одержування, передавання й обробки цих показників з якнайменшими затратами засобів, а також вибору тех. пристроїв обробки інформації на різних рівнях управління (вибір техніки зв'язку, обчислювальної техніки тощо); до виачення й рекомендації алгоритмів і програм обробки інформації, які дають змогу на основі одержаних показників знайти необхідне рішення з найраціональнішою (з економ. погляду) вигляди й довести його до виконавців, до вжиття способів контролю та обліку виконуваних рішень та ін.

У соціальному аспекті К. е. сприяє стирпанню граней між розумовою та фіз. працею, розробляючи нову технологію розумової праці в сфері управління на основі сучасного тех. оснащення. Роль К. е. в сучас. суспільстві значною мірою зростає у зв'язку з необхідністю удосконалювати економ. організацію як один з вирішальних каменів заг. процесу соціального перетворення.

Спочатку становлення К. е. було пов'язане з розробкою матем. моделей економ. систем і явищ, з використанням електронної обчисл. техніки для досліджування цих моделей і для розв'язування задач управління. Застосування матем. структур і методів багато в чому йшло по лінії використання матем. символіки й ліквідції термінологічних відмінностей. Цей напрям розвивається й тепер у рамках *математичної економіки* та *економітриї*. Матем. моделі економ. систем і явищ дали змогу краще осмислити динаміку досліджуваних систем, виробити дієві рекомендації щодо раціоналізації їхньої структури й методів економ. прогнозування й управління. Особливе значення мало визначення регулюючих факторів у таких моделях, питань стійкості, рівноваги, росту, регулюючого характеру ціл, виявлення й підкреслювання зворотних зв'язків в економіці, досліджування конфліктних ситуацій (у рамках *теорії ігор*), співвідношень між оптимальним функціонуванням і заг. мобільністю економ. систем (див. *Макромодель економічної, Мікромодель економічна, Моделі економіки, Моделі рівноваги та Моделі простання*).

К. е. займається питаннями прийняття рішень в управлінні економ. системами, застосування *моделей математичних* і одержування на основі їх машинно-формальних висновків для прийняття рішень у реальних ситуаціях і постановках, розв'язує питання мет і реценції можливого використання формальних постановок і висновків. Велику увагу приділяють методам евристичного розв'язування задач, експертного прогнозування (див. *Експертні оцінок методи в прогнозуванні*) і побудові людино-машинних систем для розв'язування економічних задач (див. *Система «людина—машина»*). Застосування таких систем, моделювання ситуацій і прийняття рішень для навчання і вироблення раціональніших форм і методів управління (ділові ігри) сприяє тому, що моделювання стає дедалі універсальнішим за-

собом удосконалювання економ. систем, проблемним чином перевірки економ. положень і доктрин.

Проте визначальним напрямом у К. є. є розробка теорії й побудова *автоматизованих систем управління (АСУ)* в нар. г-ві, яка стала можливою тільки в зв'язку зі створенням сучасних тех. засобів обробки даних, особливо систем з розподілом часу (див. *Режим розподілу часу*). Побудова АСУ в економіці є складовою частиною процесів автоматизації, які характеризують сучасну науку тех. революцію. Необхідність створення таких систем зумовлюється не тільки їхньою ефективністю в плані удосконалювання економ. систем, зростання продуктивності управлінської праці, а й у плані ефективного використання тех. засобів обробки даних та організації інформаційних процесів у цілому. Це зумовлюється й багатьма соціальними вимогами. Швидке зростання виробн., поглиблення спеціалізації, розширення кооперування виробн., оновлюваність продукції, ефективне використання ресурсів неможливі без створення АСУ. В рамках К. є. розробляють заг. питання структури, побудови й функціонування АСУ в нар. г-ві. Особливу увагу приділяють питанням ефективного збирання інформації, її представлення, іменування, інтерпретації, використання й циркуляції в АСУ. Інформація в економ. системах стає предметом глибокого вивчення. Розробка інформаційних та алгоритмічних мов, мов моделювання, інформаційно-пошукових систем та інформаційно-довідкових систем орієнтована, по суті, на об'єкти економ. характеру.

К. є. справила багато в чому визначальний вплив і на розвиток деяких нових матем. напрямів — математичного, стохастичного та динамічного програмування, дискретної оптимізації (див. *Оптимізація методів чисельні*), теорії розкладів та ін., на теор. і практичні розробки в галузі обробки даних та математичного забезпечення ЦОМ. Розвиток техніки обробки даних, заг. теорії операцій дослідження й дослідження систем також пов'язаний з напрямом розвитку й інтересами К. є. Літ.: Кобринський Н. В. Основы экономической кибернетики. М., 1969 (бібліогр. с. 253—254); Процессы регулирования в моделях экономических систем. М., 1961 (бібліогр. с. 281—292); Давган О. Введение в экономическую кибернетику. Пер. с польск. М., 1968.

О. О. Валаев, В. С. Михалевич, В. В. Штурба.

**КІБЕРНЕТИКА МЕДИЧНА** — напрям кібернетики, який вивчає проблеми, пов'язані з процесами управління в медицині й охороні здоров'я. Предметом дослідження К. м. є медична й інші види інформації, системи нагромадження й переробки інформації, системи зв'язку та керування й управління, які є в людському організмі і в системі охорони здоров'я. К. м. спирається на знання, нагромаджені медициною та охороною здоров'я, а також на матем. апарат кібернетики й можливості електронних обчислювальних машин. Тех. базою К. м. є цифрові й аналогові обчислювальні машини широкого призначення

та спеціалізовані обчислювальні машини із складними комплексами пристроїв введення та виведення інформації.

Осн. методом пізнання в К. м. є метод моделювання, оснований на глибокому аналізі процесу, який вивчають, або системи. В К. м. широкого розвитку набуло моделювання за методом *сюрного ланцюга* з його макро- та мікропідходами. Моделюючи за цим методом, вивчають зміни на вході й виході системи і за ними намагаються в'ясувати відношення між елементами системи або її можливі структури. Мета будь-якого моделювання — вивчення поведінки системи залежно від дії на неї тих чи інших факторів. Під моделлю розуміють певний штучно створений об'єкт, у відповідність якому можна поставити оригінал. Модель не є точною копією системи. Напр., стандартизована історія хвороби, яку заповнюють у процесі лікування хворого, містить інформацію про хворого, про динаміку параметрів (елементів) під час лікування хворого; у зв'язку з цим її можна розглядати як інформаційну модель цього хворого. Але оскільки ця модель лише в мозку лікаря або в ЦОМ, коли відбувається порівнювання її зі складними алгоритмами в моделях тих чи інших хвороб, які є в їхній пам'яті. Це дає змогу дати оцінку функцій багатьох систем хворого; діагностувати захворювання або комплекс захворювань; визначити ступінь ризику в призначенні ліків; прогнозувати розвиток хвороби та лікування. Т. ч., моделювання дає змогу лікареві на основі вивчення функцій системи висловити певне міркування про зміну її структури.

В СРСР К. м. як науковий напрям почала оформлятися у 2-й половині 50-х років. У 1956 створено першу модель діагностичної електронної машини, а 1957 на всесоюзній виставці в Брюсселі демонструвалася модель керуваної мозком людини штучної руки, яку розробила група інженерів та лікарів у Москві. За кордоном у цей же період було створено модель штучного електричного ока, яке дає можливість сліпому читати друкований текст за допомогою органу слуху. У цей же час з'явилися перші повідомлення про аналіз енцефалограм та електрокардіограм і про діагностику за допомогою БОМ. У 1959 в Нашихі проведено перший міжнародний конгрес в К. м. Період розвитку К. м. можна розділити на два етапи. На першому етапі розробляли переважно методи розв'язування окремих задач (діагностики захворювань, автоматизація обробки енцефалограм тощо) й визначали осн. напрями К. м. Другий етап характеризується системним підходом до розв'язування задач моделювання й керування організмом людини, системою охорони здоров'я (див. *Медицина інформаційна система*).

У К. м. залежно від застосування її методів та ідей до різних напрямів медицини сформувалося кілька наукових напрямів. Перший — кібернетика фізіологічна, яка займається вивченням та моделюванням органів і систем людини; другий напрям пов'язаний з

клінічної медициною (терапія, хірургія, кардіохірургія, неврологія, психіатрія тощо), а третій — з проблемами профілактичної медицини та управління в охороні здоров'я. Теорія й практика цих напрямів становлять єдине ціле. Окрім моделювання, в К. м. застосовують складні системи збирання та переробки інформації для управління установами охорони здоров'я (автоматизовані системи керування лікарнями, міністерствами) та лікувально-профілактичним процесом.

У **к л і н і ч н і й м е д и ц и н і** К. м. вивчає: питання теорії й принципів побудови медичних *інформаційно-пошукових систем*, які забезпечують лікувальний процес; побудови діагностичних та прогнозувальних систем і систем автоматизованого керування людським організмом в умовах патології, теорії діагнозу, мед. прогнозування, керування руховими функціями хворого за допомогою керуючої інформації, одержаної від здорової людини, стандартизації представлень, створення класифікацій і номенклатур, які забезпечують можливість застосовувати методи кібернетики в сучас. медицині. Значних успіхів досягнуто в області *біоелектричного керування*. Створені й успішно застосовуються у клініках електрокардіостимулятори, стимулятори скелетної мускулатури, протези кінцівок в біоелектричній керуванні.

У **профілактичній медицині** й **о х о р о н і з д о р о в'я** об'єктами К. м. є: розробка та створення різних інформаційних та керуючих систем, які забезпечують контроль над чистотою повітря, ґрунту, води, страви тощо; побудова єдиної системи, спрямованої на охорону здоров'я населення міст і сіл від епідемічних захворювань; розробка принципів та побудова автоматизованих систем управління апаратом та установами охорони здоров'я (міністерство, лікарні, поліклініки, адоравпункти); розробка держ. центру мед. інформації; мед. документалістика, теорія створення систем прищеплення населенню навчків санітарії та гігієни й навчання правил користування мед. системами, підготовка кадрів для роботи в галузі К. м.

Праці в галузі К. м. привели до створення багатьох приладів та пристроїв, які з успіхом використовують у клінічній та експериментальній медицині. Напр., створено системи автоматизованого та автомат. аналізу електро- та векторкардіограм, електронні діагностичні пристрої для виявлення при масових дослідженнях ЕКГ-патологій.

Застосування матем. методів та *обчислювальної техніки* в системі охорони здоров'я покликане підвищувати ефективність роботи медичних установ. Автоматизація медицини висуває ряд питань, пов'язаних з *проблемою людини — машина* в широкому розумінні цього поняття.

Літ. Амосов Н. М., Шкабара Е. А. Опыт постановки диагноза при помощи диагностических машин. «Экспериментальная хирургия и анестезиология», 1961, № 4. Парин В. В. Кибернетика в физиологии и медицине. «Вопросы философии», 1961, № 10. Браувер С. Н., Свечинский В. В.

Элементы общей теории управления в организме. «Экспериментальная хирургия и анестезиология», 1963, № 5. Амосов Н. М. Регуляция жизненных функций в кибернетике К., 1964. Парин В. В., Бавский Р. М. Введение в медицинскую кибернетику. М. — Прага, 1968.

А. О. Попов, В. Г. Мельников.

**КІБЕРНЕТИКА ТЕХНІЧНА** — напрям кібернетики, в якому на основі єдиних для кібернетики в цілому наукових ідей та методів вивчаються технічні системи керування. К. т. є теорією й практикою автоматичного регулювання та керування на сучасному етапі розвитку (див. *Автоматичного керування теорія, Автоматика*), а також наук. базою розв'язання завдань комплексної автоматизації виробництва й транспортних та інших складних систем керування (іригаційні та газорозподільні системи, атомні електростанції, космічні кораблі тощо). Складні системи керування, що в них як невідмінний елемент бере участь людина-оператор, наз. *системами автоматизованими*, на відміну від систем автоматичних, які не потребують для функціонування безпосередньої участі в них людини. Проблема *людина — машина*, в якій розглядають можливість раціонального розподілу функцій між людиною та автоматично діючими пристроями, є тепер однією з головних у К. т. (як і в кібернетичній в цілому). Саме питання про участь людини в системах керування відіграє в основному інтерес К. т. від інтересів її попередників — теорії автоматичного регулювання та керування. Найбільше дослідження функцій людини й автомата досягається в кіборгах (кібернетичних організмах), тобто пристроях, у яких певною мірою здійснено симбіоз фіз. та інтелектуальних дій людини й тех. засобів автоматики. Кіборги набувають дедалі ширшого застосування для розв'язання завдань керування об'єктами, які перебувають у таких умовах, у яких людині важко або й зовсім неможливо керувати ними безпосередньо. Напр., кіборги дедалі ширше застосовують для керування деякими процесами в металург. та хім. виробництвах, безпечними через радіаційне впроможнювання процесами в ядерних реакторах і прискорювачах заряджених частинок, у космічному й підводному просторах тощо (див. *Робот, Маніпулятор*). Участь людини в керуванні агрегатами й технологічними процесами, з одного боку, та в адміністративному управлінні, з другого, також приводить до зрощування цих двох сфер управлінської діяльності й до створення єдиної *людина-машинної системи керування*. Тому, крім фізіологічних особливостей, істотного значення став набувати і психологічний стан людини-оператора, а це зумовило в К. т. цілу галузь досліджень, яку наз. *психологією інженерною*. Головним завданням цієї галузі К. т. є розробка методів використання знань про поведінку людини під час проектування й експлуатації складних *людина-машинних систем керування* (або елементів цих систем), щоб досягти їхньої максимальної ефективності.

Розв'язуючи ряд завдань керування тех. об'єктами (навігація суден і літальних апаратів, створення вимірних знарядь та контрольних пристроїв, розробка читаючих автоматів тощо), спеціалісти в галузі К. т. прагнуть використати всі ті шляхи і прийоми, які виробила природа протягом тривалого періоду її еволюційного розвитку, і це й привело до формування великого й самостійного напрямку в К. т. — *біоніки*. Цей напрям, залежно від сфери досліджень, у свою чергу, поділяється на ряд частин та розділів (гідробіоніка, медіобіоніка та ін.).

Одним із самостійних напрямів К. т. є *розпізнавання образів*. Розпізнавальні системи мають велике наукове й практичне значення. Їх застосовують не тільки при створенні читаючих автоматів, а й при розпізнаванні та аналізі ситуацій, які характеризують стан технологічних процесів чи фіз. експериментів, при розробці медичних автоматизованих діагн. пристроїв тощо. До цього самого наукового напрямку інколи відносять і завдання *ідентифікації об'єктів керування* (хоч воно є окремим щодо проблеми розпізнавання образів), тобто завдання визначення динамічних характеристик керування об'єктом на основі спостереження та вимірювання деяких їхніх координат (параметрів) і зовнішніх збурювальних діянь. Розробка різних методів ідентифікації (і детермінованих, і статистичних) є важливим і самостійним напрямом у К. т. Так само можна розпізнавати й цикл досліджень, які проводяться в рамках К. т. в галузі теорії прогнозування, і розробку на основі цієї теорії автоматизованих прогнозуючих пристроїв.

Характерною особливістю сучасного розвитку К. т. є широке закористання обчислювальних пристроїв та обчислювальних машин (аналогових і цифрових) і при розв'язуванні дослідницьких задач, і створенні різних тех. систем керування. Щоб створити автоматизовані системи управління підприємством (АСУП) і автоматизовані системи керування технологічними процесами (АСКТП) (а це завдання дуже складне й багатогранне), необхідно застосовувати ті чи інші обчислювальні засоби. Науковою базою при цьому є К. т., *інформації теорія, системотехніка і кібернетика економічна*, причому тітку грає між цими науковими напрямками не завжди відчутна асиметрія. Якщо орієнтуватися на практику системотехнічних науково-дослідних робіт останніх років, то умовну межу між К. т. і системотехнікою можна вбачати в тому, що в К. т. більше уваги приділяють нижнім ступеням ієрархічної градації керування виробництвом — агрегатам, технологічним процесам і нехвилюючим системам (див. *Ієрархічні системи керування*), а в системотехніці приділяють увагу середнім рівням керування (адміністративне управління підприємством, комбінатом чи галуззю), а також розв'язанню завдань автоматизації процесів проектування й завдань автоматизації складних науково-експериментальних робіт (тео-

фізичних та гідрофізичних досліджень тощо).

Усі різні керування дуже тісно взаємно пов'язані. Тому в сучасних системних дослідженнях (див. *Системний підхід*) до створення тієї чи іншої системи керування підходять як до цілісної проблеми, яка охоплює всі стадії створення її (проекування, розробку, виготовлення, випробування, налагодження, експлуатацію й навіть консервацію, коли на стадіях також існують). При цьому беруть до уваги й суто технічні та адміністративно-організаційні, економічні, соціальні, правові й етичні сторони цієї проблеми. Створення АСУП потребує великої попередньої теоретичної та інженерної підготовки. Теоретична підготовка зводиться, насамперед, до *алгоритмізації виробничих процесів*, тобто до створення формальних (математичних) і неформальних (евристичних) описів самих керувань об'єктів. Для цього використовують спеціальні мови опису виробничих процесів (GSL, GISS, TSP, ALKOPOL, TEXNOL, ALTCOS та ін.). Крім того, шукають *алгоритми* (закони) керування *відстежуєми* й *системою загальом*.

Інженерна частина попередньої підготовки до створення АСУП полягає у виборі стандартних або в розробці нових тех. засобів (обчислювальних машин, пристроїв відображення інформації, пульта керування тощо), необхідних для функціонування АСУП. Насиченість систем різноманітними тех. пристроями зумовила велике значення проблеми надійності функціонування АСУП (див. *Надійність кібернетичних систем*), при цьому істотного значення набуває автомат. контроль систем керування як одне із засобів підвищення надійності. Розв'язуючи завдання підвищення надійності й загального завдання підвищення ефективності функціонування АСУП, дедалі більше уваги приділяють питанням подання людини-операторові необхідної узагальненої візуальної інформації. Для цього створено різні засоби відображення інформації, які враховують психофізіологічні можливості людини й надають їй змогу активно й ефективно брати участь у процесі керування (знакові індикатори та спеціалізовані екрани, дія яких ґрунтується на використанні оптикоелектроніки, лазерної люмінесцентної приладів, голографії тощо). Уся ця сучасна техніка систем індикування разом з тех. засобами зв'язку при створенні АСУП набуває не меншого значення, ніж і сама обчислювальна техніка, використовувана в них. Це пояснюється тим, що в більшості такого роду систем керування немає необхідної для оптим. керування апріорної інформації, і людина-оператор повинна нагромаджувати її в процесі експлуатації системи. Тому різні адаптивні системи, що їх вивчали в теорії автоматичного керування (*системи екстремального регулювання, самонастроювані та самоорганізовані*), мають не менше значення і для розробки автоматизованих систем управління, які є осн. об'єктом вивчення в К. т. У цьому виявляється повна спадковість і певною мірою навіть збіг завдань теорії автомат. керування і К. т. Це стосується

і багатьох інших віток наукового апарату, використовуваного в обох цих розділах кібернетики. Насамперед маєстися на увазі проблематика дослідження динамічних властивостей систем керування — стійкості, точності керування, завадостійкості тощо, тобто проблематика, яка є головною з наукового погляду і для теорії автоматичного керування, і для К. т., і взагалі для істинно науковий зміст.

Нааявність людини в системі керування приводить до виникнення багатьох нових завдань, розглядаваних у К. т., які раніше при визначенні повністю автоматично діючих систем не могли виникнути. Зокрема, постає потреба визначити інтелектуальну діяльність людини в процесі керування (логічний опис її функціонування, програмування геристичне, теоретико-множинні й абстрактно-алгебричні методи описування цілеспрямованої поведінки, процесу навчання тощо). У зв'язку з різноманітністю завдань, які виникають під час визначення людино-машинних систем керування, постає потреба знайти якісь інтегральні узагальнюючі методи дослідження, за допомогою яких можна було б під одним кутом зору охопити багато з цих завдань. Тому для К. т. великого значення набуває систем загальна теорія або, краще, абстрактна теорія систем, і можна твердити, що тепер розвиток К. т. йде шляхом збудови абстрактних моделей складних систем керування та визначення їх. Для цього використовують різні галузі знань: елементарну математичну, теорію множин, теорію ланцюгів математичну, ймовірнісну теорію, абстрактну алгебру тощо.

Мова теорії відношень та абстрактної алгебри дає змогу формалізувати такі поняття, як мета, прийняття рішення, цілеспрямована поведінка, адаптація, навчання, самонавчання, самоорганізація тощо. Логіко-математична мова, застосування, напр., у формі логічних схем алгоритмів, також дає змогу під єдиним кутом зору описувати різноманітні складні системи. Ними можуть бути і релейно-контактні схеми (див. *Релейно-контактні схеми теорія*), і схеми телефонної автоматичної станції і т. ін. Цією ж мовою, однак, описують і управлінську діяльність людини-оператора (диспетчера аеропорту, керівника судна, водія тролейбуса тощо). Описи складних систем керування за допомогою логічних схем алгоритмів дають змогу розв'язати лише деякі загальні питання, напр., виявити окремі принципові переваги самоорганізованих систем керування порівняно зі звичайними системами. Проте, щоб виявити інші властивості системи (точність, стійкість тощо), необхідно використати інші різні абстрактного описування систем. При цьому прагнуть знайти такий матем. апарат, який дав би змогу охопити найбільшу кількість задач, що виникають. Одним з найдавніших щодо цього є узагальнене трактування різних динамічних задач у К. т., яке використовує *стохастичний апроксимаційний метод*, або, в загальнішому випадку, ймовірнісний іте-

ративний метод. За допомогою цього методу розглянуто під єдиним кутом зору такі задачі, які раніше задавалися зовсім різнорідним, напр., проблемою оптимальності, адаптації, навчання, розпізнавання образів, ідентифікації, фільтрації випадкових процесів, надійності тощо.

У К. т. і в кібернетичі загалом великого значення набувають методи розв'язування задач, які дають змогу подолати труднощі, що виникають через наявність дуже великої кількості взаємодіючих елементів (підсистем) у відповідній складній системі (див. *Базисно-оперативні системи автоматичного керування*). «Прокляття великої розмірності» (за образами висловом амер. математика Р. Беллмана) є каменем спотикання у розв'язуванні задач стійкості, оптимальності, розпізнавання образів і дослідження скінченних автоматів та в розв'язуванні економіко-математичних задач. Ось два шляхи подолання труднощів, пов'язаних з великою розмірністю задач, — це *декомпозиційні методи* і методи агрегування. Окрім цієї проблеми, велике значення в К. т. має і *базисно-протеріальності проблема*, яка полягає у виборі компромісного рішення, тобто у виборі таких значень керуючих діянь, щоб усяке оптимальне рішення, знайдене для можливої підсистем, було оптимальним (або субоптимальним) і для всієї системи загалом. При цьому можливі і теоретико-імовірнісні, й ігрове трактування задач. Проте, хоч аналітичні методи визначення складних систем і мають велике значення для дослідження реальних систем керування виробництвом, транспортом та ін., але поки що їх практично не можна застосовувати через надмірну складність задач, і тому тепер найуніверсальнішим шляхом детальнішого вивчення складних тех. систем керування є методи моделювання.

На відміну від традиційних методів моделювання — аналогового, цифрового або гібридного (цифро-аналогового), поширених у дослідженні систем автомат. керування, у *моделюванні системи людина-машина* створюють спеціальні моделюючі комплекси або навіть моделюючі центри. В них, крім аналогових та цифрових обчислювальних машин, вводять різні пристрої відображення інформації, спеціалізовані пульти, засоби зв'язку та інші засоби, які дають змогу створити для людини-оператора умови функціонування, по змозі близькі до реальних.

Отже, симбіоз автоматично діючих пристроїв і людей є, з одного боку, осн. об'єктом досліджень, що проводиться в К. т., а з другого — універсальним засобом моделювання дійсно складних тех. та інших систем керування. В зв'язку з цим розроблено спец. мови (*СИМУЛА*, *СИМСКРИПТ*, *RTL* та ін.), призначені для моделювання автоматизованих систем управління.

Див. *Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика*. К., 1962 [Бібліогр. с. 442—448]. *Теория автоматического регулирования*, кн. 1—3, ч. 1—2. М., 1967—69 [Бібліогр. кн. 1, с. 743—763; кн. 2, с. 653—674; кн. 3, ч. 1, с. 588—604, ч. 2, с. 352—385]. *Техниче-*

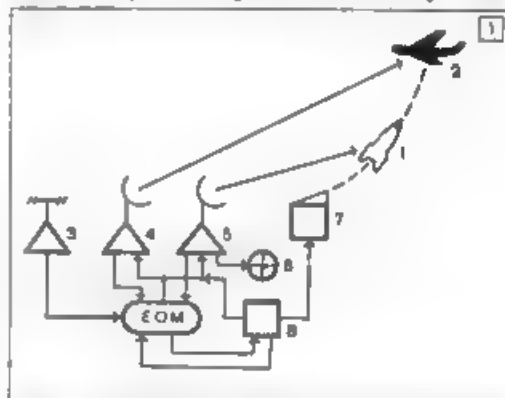
ская кибернетика в СССР. М., 1988. «Кибернетика и вычислительная техника». в. 1. Сложные системы управления. К. 1980. Цзянь Сюэ-Сянь. Техническая кибернетика. Пер. с англ. М., 1958 [библиогр. с. 447-450]. Общая теория систем. Пер. с англ. М., 1986. Техническая кибернетика за рубежом. Пер. с англ. М., 1988. Исследования по общей теории систем. М., 1988. Ф. И. Кузнецов.

# КІБЕРНЕТИКА У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ

одні з важливих напрямів застосування новітніх науково-технічних досягнень у галузі кібернетики й обчислювальної техніки в інтересах військової справи. Формування кібернетики як нової науки значною мірою пов'язане з розв'язуванням деяких завдань, що виникли в період 2-ї світової війни. Саме дослідження проблеми створення автоматизованих систем для ППО намотожнуло Н. Вінера на думку, що доцільно виділити загальні закономірності керування й зв'язку з живою природою й технікою в нову наукову галузь, яку він і назвав *кібернетиком*. Широке застосування К. у в. с. зумовило безперервне вдосконалення військової техніки та розвиток стратегії, оперативного мислення й тактики. Зростання осн. тактико-тех. показників зразків бойової техніки, підвищення маневреності й швидкості бойових машин, ускладнення умов бойового застосування їх уже до початку 2-ї світової війни привели до широкого використання деяких засобів автоматизації для керування бойовою технікою. Так, в авіації було створено прилади для автоматизованого обчислювання прицільних даних для бомбометання й повітряної стрільби, в ППО — прилади для керування вогнем зенітної артилерії, у в. с. морського флоту — системи кораблеводіння й керування вогнем корабельної артилерії. У післявоєнний період у зв'язку з виникненням і розвитком ядерної зброї та вдосконаленням засобів доставляння боеприпасів до цілей у військової справи відбулася справжня революція, яка поставила змогу докорінно перебудувати керування не лише бойовою технікою, а й військами.

Сучасний бій і операції характеризуються масованістю застосування сил і засобів, високими темпами переміщення військ, можливістю швидких і різких змін обстановки. За таких умов людина в деяких випадках не може, не вдаючись до застосування тех. засобів, своєчасно реагувати на зміни обстановки і приймати правильні рішення. Все це привело до бурхливого впровадження К. у в. с. Питання використання кібернетичної техніки й методів кібернетики в інтересах військової справи виділилися в обширну галузь, яку наз. *військовою кібернетикою*. Вона являє собою науку, що вивчає загальні закономірності процесів керування військами, бойовою технікою й засобами ураження для підвищення ефективності бойового застосування їх. Кібернетичні пристрої набувають різноманітного ефективного застосування в більшості складних систем озброєння для керування об'єктами бойової техніки та засобами ураження. Насамперед слід відзначити застосування автомат. пристроїв, обчислювальної техніки й пристроїв переда-

вання інформації в ракетних системах (комплексів). Сучасні ракетні комплекси, незалежно від їхнього призначення, насичені автоматикою, яка дає змогу скоротити до мінімуму час підготовки комплексів до пуску, підвищує надійність і точність руху ракет до цілі. Серед таких пристроїв можна відзначити, зокрема, автомати, що керують режимом подавання компонентів палива до рушійних установок, та системи керування й навігації. Незважаючи на деяку специфіку, автомат. системи керування ракетами мають усі най-



1. Схема автоматизованої системи керування ракетною системою. 1 — зенітна керуюча ракета, 2 — ціль, 3 — радіолокатор пошуку й виявлення цілі, 4 — радіолокатор супроводження цілі, 5 — радіолокатор наведення ракети на ціль, 6 — індикатор оператора, 7 — пускова установка, 8 — командний прилад.

характерні риси кібернетичних пристроїв. У них є давачі первинної інформації (напр., кутових координат ракети, лінійних прискорень тощо), пристрої для перероблення її, оформлені у вигляді малогабаритних бортових обчисл. машин або у вигляді спеціалізованих лічильно-розв'язувальних пристроїв, та виконавчі механізми. Надзвичайно насичено автоматикою й наземні пристрої підготовки, контролю й пуску ракет.

Бойову техніку сухопутних військ також дедалі ширше обладнують кібернетичними пристроями, які дають змогу підвищити точність стрільби артилерії й танків і забезпечити автомат. визначення місцезнаходження об'єктів та ін. У військах ППО для перехоплювання повітряних цілей застосовують ракетні й авіаційні комплекси, які являють собою приклади кібернетичних систем. Типова схема ракетного комплексу перехоплювання повітряних цілей (мал. 1) включає в себе радіолокаційні станції виявлення й супроводження цілей, обладнані обчисл. пристроями для визначення координат цілей, командно-обчисл. пристрої, що здійснюють розворот ракетної пускової установки на ціль і пуск ракети, і апаратуру з відповідними системами корекції її траєкторії та самонаведення на ціль.

Багатогранним є застосування кібернетики у військової авіації. Тут можна виділити

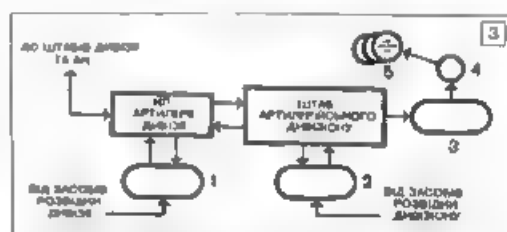
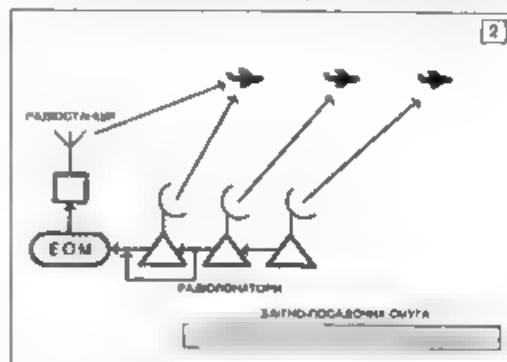
три основні галузі: 1) керування озброєнням літака (прицільні системи, системи керування бомбардувальними й артилерійськими установками, системи пуску ракет тощо); 2) керування польотом літака (автоматизування, системи регулювання двигунів, автоштурманів й бортові автомат. системи посадки); 3) регулювання руху літаків у районі аеродромів (мал. 2).

Ще різноманітнішим є застосування кібернетичних пристроїв і систем у військово-морському флоті. Сучасні надводні кораблі й підводні човни, що відзначаються великою швидкістю й високою автономністю дій, озброєні потужною ракетною, артилерійською, торпедною та бомбовою зброєю і оснащені досконалою радіотех. апаратурою, автоматизованими й автомат. засобами пошуку, виявлення й супроводжування цілей та приладами керування вогнем.

Застосування методів кібернетики для керування військами є порівняно новою галуззю практичного використання її. По суті для керування військами завжди використовували принаймні два кібернетичні принципи — програмного керування (розчленовування складних дій на елементарні, заздалегідь опрацьовування команд) і зворотного зв'язку (обов'язкове доповідання про виконання одержаного наказу). Тепер усі основні процеси, пов'язані з керуванням військами (добування даних про противника, збирання інформації про свої війська та обстановку, аналіз та опіювання обстановки, прийняття рішення й доведення його до виконавців, надзвичайно ускладнилося, а час на реалізацію їх невпинно скорочується. За цих умов комплексне застосування кібернетики для забезпечення оперативного, безперервного й гнучкого керування військами стало неминучим, і в зв'язку з цим з'явилися автоматизовані системи керування військами. Проте застосування К. у в. в. с. аж ніяк не означає зниження ролі людини в процесі керування військами. Навпаки, саме завдяки тому, що кібернетична техніка звільняє людину від трудомісткої та втомливої роботи по збиранню, зберіганню, обробці й видаванню інформації, командуючі (командири) й штаби одержують сприятливі можливості для зосередження своєї уваги на творчому розв'язуванні найважливіших питань підготовки й проведення операцій (боїв). Напр., щоб розв'язати завдання цілерозподілу, важливо заздалегідь визначити бойові засоби, що досягають тих чи інших цілей противника. Відповідні розрахунки можна виконувати обчислювальною машиною, яка результати обчислень у зручній формі передає в штаб. Дальшим етапом автоматизації в цьому напрямі є автоматизоване одержування кількох варіантів цілерозподілу як якимись-небудь заздалегідь обраними критеріями. Тоді людині лишається тільки вибрати один із варіантів та врахувати фактори, які поки що не піддаються кількісній оцінці.

Типова схема будь-якої автоматизованої

системи для керування військами включає в себе: 1) даначі первинної інформації про противника, свої війська, сталі театри воєнних дій і жетовстановку; 2) лінії передавання інформації (телефонні, телеграфні, радіо- й радіорелейні канали тощо); 3) обчисл. машини; 4) засоби для ясного відображення й документування інформації та оперативного розмножування документів. Умовно, залежно від розв'язуваних завдань, автоматизовані системи керування військами можна поділити на дві великі групи: інформаційні системи й



2. Система системи, яка забезпечує автоматизацію посадних груп літаків

2. Структурна схема автоматизованої системи ТАС-PIRE керування вогнем артилерії: 1 — ЕОМ обробки розпізнавальних даних, 2 — ЕОМ цілювпорядку; 3 — ЕОМ керування вогнем, 4 — командно-індикаторний блок, 5 — артилерійська батарея.

систем бойового керування. Інформаційні системи мають своїм завданням збирати, зберігати й надавати інформацію про противника та свої війська, про стан театру воєнних дій і метеорообстановку. В автоматизованих системах бойового керування реалізуються процеси, безпосередньо пов'язані з керуванням військами. Технічно обидві системи можна сумістити в єдину автоматизовану систему. Більшість автоматизованих систем керування військами в ієрархічних системах керування, що відображають систему керування збройними силами, прийняту в цій країні. Тому до складу систем, призначених для автоматизованого керування військами великих оперативних об'єднань, звичайно підключають кілька підсистем, що розв'язують обмеженіше коло завдань (див. мал. 3).

Однією з важливих сфер застосування К. у в. с. є тил. За допомогою сучасних обчисл. машин в органах тилу виконують найрізном-



манітніші обліково-пайтні роботи, планують використання матеріальних ресурсів тощо. У ряді випадків для керування тилом використовують спеціальні автоматизовані підсистеми. Розв'язування розрахункових та інформаційних завдань в автоматизованих системах керування військами потребує залучення точних матем. методів. Запровадження таких методів характерне для застосування К. у в. с. Всі основні процеси по керуванню військами здійснюються в умовах неповної інформації про противника, бо він завжди намагається приховати своє справжнє становище і свої наміри. Тому однією з важливих особливостей матем. методів, використовуваних у військовій справі, є їхня спрямованість на розв'язування завдань за умов ризику й невизначеності, на старанне врахування випадкових факторів. У зв'язку з цим у теор. відношенні автоматизовані системи керування військами й військова кібернетика загалом спираються на такі галузі математики, як *ймовірностей теорія, масового обслуговування теорія, математична статистика, теорія ігор та розв'язків, алгоритмі теорія* тощо.

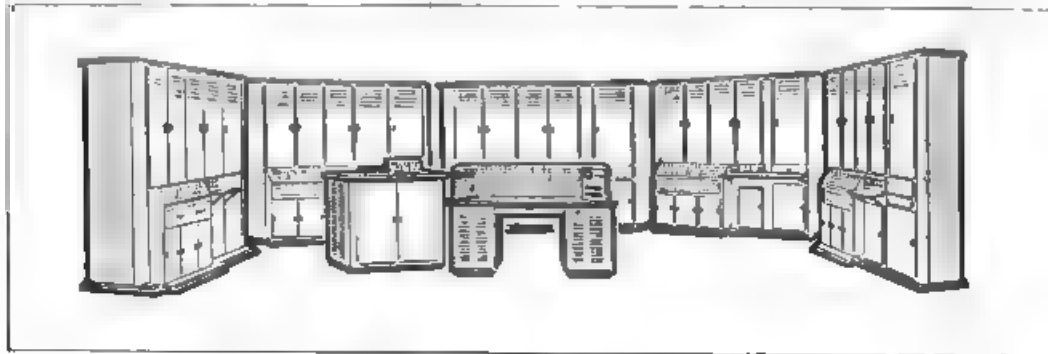
Застосування К. у в. с. в свою чергу висунуло кілька важливих наукових і тех. проблем (надійність і живучість автоматизованих систем, оптич. взаємодія людини й автомата та ін.), які можна розв'язати завдяки спільній праці військових і невійськових спеціалістів.

Літ. Гончаренко М. Н. Кібернетика в воєнному деле. М., 1963. Силик В. С. Военное приращение электронных вычислительных машин М., 1963 [Бібліогр. с. 166-167]. Петров В. П. Социально А. А. Управление ракетами М., 1963 [Бібліогр. с. 261]. Абрамов С. А., Ватраков В. А. Электронные цифровые машины и снабжение войск. М., 1964 [Бібліогр. с. 240-241]. Анурьев П. И., Татарченко А. Е. Применение математических методов в военном деле. М., 1967. Прокофьев А. В. Средства механизации и автоматизации в штабах. М., 1969. В. Г. Поступов.

гозових обчислювальних машин і моделюючих пристроїв, створення алгоритмічних мов і теорії програмування, розробки методів досліджень операцій та систем, теорії оптимальних рішень, моделювання процесів мислення, інформаційних мов і систем та математичної лінгвістики. Виходить з 1965 р. 6 раз на рік російською мовою, а також перекладається англійською мовою у США під назвою «Cybernetics».

«КІБЕРНЕТИКА» — реферативний журнал, що складається з двох випусків: «Теория вероятностей и математическая статистика. Теоретическая кибернетика» і «Техническая кибернетика». У першому випуску освітлюються питання теорії ймовірностей та матем. статистики, комбінаторного аналізу, теорії керуючих систем та її застосування, теорії інформації, дослідження операцій і матем. економіки, програмування й теорії матем. машин, матем. моделювання процесів мислення й матем. питання семіотики; у другому — кіберн. систем керування, теорії скінчених автоматів, кіборн. пристроїв, тех. застосування теорії ігор, застосування кібернетики, кібернетичні питання біології та психології. Випає журн. «К.» Всесоюзний ін-т наукової і тех. інформації (ВІНІТ) Держ. комітету Ради Міністрів СРСР по науці й техніці та Академії наук СРСР з 1964. Виходить 12 номерів на рік (рос. мовою).

«КІБЕ» — електронна цифрова обчислювальна машина загального призначення, орієнтована на розв'язування широкого кола наукових та інженерних задач. Розроблено П 1958 в Ін-ті кібернетики АП УРСР. Використано вперше в СРСР для досліджень з дистанційного керування технологіч. процесами. «К.» (мал.) — асинхронна машина з повністю автономними пристроями. У ній є оперативний ЗП паралельної дії за феритових осердях, ємність його 1024 слова, швидк. звертання до



Цифрова обчислювальна машина «Кібер»

«КИБЕРНЕТИКА» — науковий журнал, орган Кібернетичного центру Академії наук УРСР. Висвітлює загальні питання кібернетики (методології), питання математичних проблем кібернетики, теорії автоматів і алгоритмів, теорії електронних цифрових та ана-

ОЗП — 10 мксек; у машині реалізовано операції скороченого множення і ділення. Структура команд — трьохадресна. В «К.» вперше застосовано адресну мову програмування як вхідну мову транслятора. Система операцій машини — 32 операції, в т. ч. операції за ад-



ресою 2-го рангу (два. Адреса у програмуванні), та операції для задавання циклів. Форма представлення чисел — з фіксованою перед старшим розрядом комою, довжина машинного слова — постійна, 41 двійковий розряд. Режим роботи з плаваючою комою здійснювався програмно. Постійний (односторонній) ЗП ферит-трансформаторного типу з циклом звертання 7 мксек місткістю 512 слів призначений для зберігання змінно-спільних програм. Цикл роботи машини замкнений чотиритактний, тривалість такту — змінна, залежить вона від виду операції й використовуваної пам'яті. Парадальний арифм. пристрій включає двотактний негромаджувальний суматор і 3 регістри; час додавання — 6,6 мксек, ділення — 275 мксек, середня швидкість 15 000 операцій за 1 сек. Зовнішній ЗП складається з трьох магн. барабанів заг. ємністю 9000 слів з часом вибирання 120 мксек. Елементна база — лампові імпульсно-потенціальні елементи.

Дані вводяться з перфострічок, перфокарт, телеграфних ліній за'язку, пристроїв читання графіків. Пристрій виведення — електродрукувальний або перфоратор.

Лит.: Глушова В. М., Ющенко Е. Л. Вычислительная машина «Киев». К., 1962 (библиогр. с. 181-182); Дашевский Л. Н., Погребенский С. В., Шнабара Е. А. Вычислительная машина «Киев». М., 1964 (библиогр. с. 321-323).

Л. Г. Хомченко.

**КЛАС ЗАМКНЕННЯ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ** — такий клас функцій  $\mathfrak{M}$ , що: 1) разом з кожною функцією  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{M}$  до класу  $\mathfrak{M}$  належить функція  $f(y_1, \dots, y_n)$ , де коє  $y_i$  мають бути різні (замкненість щодо ототожнювання змінних); 2) разом з будь-якими  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathfrak{M}$ ,  $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \in \mathfrak{M}$  до класу  $\mathfrak{M}$  належить функція  $f(x_1, \dots, f_i(x_{i-1}, \dots, x_{i-1}), \dots, x_n)$  (замкненість щодо суперпозиції). К. з. ф. а. л. є, напр., клас усіх ф-цій алгебри логіки.

**КЛАС ІНВАРІАНТНИЙ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ** — множина  $Q$  функцій алгебри логіки, така, що: 1) кожн функція  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q$ , то до класу  $Q$  належать і всі функції, що їх одержують з  $f$  шляхом перейменування (без ототожнювання) змінних; 2) якщо функція  $f_1(x_1, \dots, x_n) \in Q$ , то до класу  $Q$  належать і всі функції, які одержують з  $f_1$  шляхом будь-якої підстановки констант на місце (не обов'язково всіх) змінних; 3) якщо функція  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q$ , то до класу  $Q$  належать і всі функції, які одержують з  $f$ , видаливши або вивівши фіктивні змінні (аміну  $x_i$  наз. фіктивною, якщо  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \equiv f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ). Множина всіх К. і. ф. а. л. має потужність континууму. Вивчення К. і. ф. а. л. дає змогу глибоко розуміти алгоритми, труднощі синтезу міним. схем, які реалізують ф-ції алгебри логіки.

**КЛАС ПЕРЕДПОВНИЙ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ** — клас замкнений функцій алгебри логіки, який не збігається з класом усіх функцій і не міститься цілком у жодному замкненому класі, що відрізняється від класу всіх функцій. В алгебрі логіки існує тільки п'ять передповних класів — класи функцій, що зберігають константу 0 та 1, клас самодійствних функцій алгебри логіки, клас монотонних функцій алгебри логіки і клас лінійних функцій алгебри логіки. Для  $k$ -значних логік усі К. п. ф. а. л. вичернюються шістьма сім'ями, але кількість цих класів  $\pi(k)$  зростає дуже швидко  $\pi(k) \sim \delta(k) \cdot k \times$

$\times 2^{\binom{k-1}{2}}$ , де  $\delta(k) = 1$  — при непарному  $k$ ,  $\delta(k) = 2$  — при парному  $k$ . Напр., відомо, що  $\pi(2) = 5$ , але  $\pi(6) = 15\,237$ , а  $\pi(7) = 7\,854\,724$ .

У термінах К. п. ф. а. л. виражаються критерії повноти. Набір ф-цій є повним, якщо він не належить цілком ні до якого К. п. ф. а. л. Але при  $k \geq 6$  ці критерії стають уже малодоступними для огляду.

Лит.: Захарова Е. Ю., Курявцев В. В., Яблоцкий С. В. О предполных классах в  $k$ -значных логиках. Доклады АН СССР, 1969, т. 190, № 3.

**КЛАСИФІКАЦІЇ ІЄРАРХІЧНІ** — класифікації, в яких кожний підклас має один і тільки один, що безпосередньо передую йому (включає його) клас — відношення сильної ієрархії. Між усіма підкласами, що входять до одного класу, існує відношення підпорядкування. К. і. інформації документальної є найважливішими видами традиційних класифікаційно-пошукових. Застосовують їх для розподілу документів наукових за галузями знань відповідно до змісту цих документів. К. і. наз. ще й бібліотечно-бібліографічними класифікаціями. Вони відрізняються від класифікацій наук точною відповідністю до формально-логічних правил побудови (для однозначного визначення змісту документа або його пошукового образу), а також відповідністю до особливостей класифікованих об'єктів (для розподілу документів не тільки за змістом, а й за типом видання, їхнім призначенням, мовою їхнього тексту тощо). Схеми цих класифікацій звичайно видають у вигляді осей таблиць і таблиць-визначників (або типових поділів). В осн. таблицях усі галузі знань та їхні розділи розміщено в логічній послідовності, причому розділи щоразу проводяться лише за однією основою. У таблицях-визначниках відображують спільні ознаки, які повторюються для багатьох документів. Усім розділам і визначникам присвоюють умовні позначення — індекси, які за структурою можуть бути номерні й ступінчасті. Як номерні індекси використовують порядкові номери підрозділів класифікації, східчасті індекси відображують її логічну структуру і провадять необмежену деталізацію схеми.

Історія К. і., зокрема бібліотечно-бібліографічних, сягає в глибоку давнину. Тепер

застосовують десятки різних схем, в яких найбільше значення мають «Десяткова класифікація» М. Дьюї (1876), «Розширена класифікація» Ч. Кеттера (1879), «Класифікація Бібліотеки Конгресу США» (1901), «Універсальна десяткова класифікація» — УДК (1905—07). УДК і досі є найпоширенішою міжнародною універсальною системою, обов'язковою для класифікації літератури в точних, природничих і тех. наук у бібліотеках. Поряд з нею в СРСР широко застосовують рад. «Бібліотечно-бібліографічну класифікацію» (в. 1—25, 1960—68). Але К. і. має не тільки достоїнства, що полягають у ясному зчитаному позначенні родо-видових відношень між поняттями, а й чимало обмежень. Ці класифікації, відповідно до формальнологічних правил побудови їх, не дають змоги легко й швидко відображувати процес інтеграції науки, встановлювати класи для нових напрямків на межі окремих дисциплін, проводити багатоспектрне індексування документів та цитат їх за будь-яким, раніше не передбаченим поєднанням характеристик. Ці обмеження можна успішно подолати у фасетних класифікаціях, початок яким поклав «Класифікація за допомогою двокрапки» ІІІ. Р. Ранганатана (1933). Замість єдиного ряду ділень у кожному основному класі, тут є кілька таблиць, кожна з яких побудована на основі якоїсь однієї характеристики або аспекту, що мають назву «фасети». Індекс, що відображає зміст документа, будується з прийнятих у кожній такій таблиці позначень, які в'єднують за допомогою двокрапки. Фасетні класифікації є кроком уперед від традиційних інформаційно-пошукових мов до дескрипторних мов.

Лит. Шамурин Е. И. Очерки по истории библиотечно-библиографической классификации, т. 1—2. М., 1955—59 [Інформація т. 1, с. 322—342, т. 2, с. 459—536]. Р. С. Гіларський.

**КЛАСИФІКАЦІЯ АВТОМАТИЧНА** — віднесення автоматичним пристроєм об'єктів з якоїсь множини до того чи іншого класу заданого (скінченно) набору класів. В основу К. а. покладено аналіз інформації про кожний об'єкт, яку вводить у пристрій. Проблема К. а. належить до проблеми *розпізнавання образів*, і в роз'язуванні її використовують багато понять і методів розпізнавання образів. Зокрема, в одному з варіантів роз'язування введена в пристрій інформація про класифікований об'єкт інтерпретується як сукупність ознак. Кожній ознаці зіставляється координата (багатоградусна чи двійкова, залежно від природи ознаки) в якомусь просторі ознак, де всякий поданий об'єкт відображується точкою. Якщо вибір ознак адекватний точці одного класу групується в компактні нагромадження з порівняно легкою апроксимованими границями або, в імовірнісній постановці, розподілом імовірностей. Поданий об'єкт, залежно від того, куди потрапить в просторі ознак відображувальна точка, класифікується згідно з прийнятим *прокласифікувальним*. К. а. застосовують у мед. і

тех. діагностиці, геофіз. розвідуванні, інформаційно-пошукових системах тощо.

В. С. Файн.

**КЛЮЧОВЕ СЛОВО** — слово чи стійке словосполучення природної мови, що його використовують для вираження певного аспекту словесного змісту документа (чи запису). При використанні методу координатного індексування пошукові образи являють собою множини К. с., які в цьому разі наз. у н і т е р м а м и. Між К. с. можуть бути відношення синонімії або умовної семантичної еквівалентності, тобто синонімії а точки зору даної інформаційно-пошукової системи. Нагромадження К. с. шляхом змістового аналізу науково-тех. текстів або алгоритмічно, напр. порівнюванням слів тексту з фіксованим списком неключових слів, є важливим етапом під час вибору вихідної лексики дескрипторних мов (інформаційно-пошукових; відібрали К. с. об'єдають потім у дескриптори. В дескрипторних словниках (інформаційно-пошукових *тезаурусах*) даються посилання від К. с. до відповідних дескрипторів. Тепер у багатьох наукових журналах наводять К. с. статей, що друкуються в цих журналах.

И. О. Кузьменко.

**КОБОЛ** — мова програмування, орієнтована на роз'язування задач обробки даних. Запис алгоритму обробки даних, або програма, має в цій мові вигляд ряду речень, складених з англ. слів, схожих за формою на англ. текст, завдяки чому можна легко опанувати правила користування мовою (в СРСР прийнято рос. варіант мови). Програма обробки даних — т. з. К.-п р о г р а м а — описується в цій мові точно заданими стандартизованим способом, і це дає змогу автоматично перекладати цю програму на внутрішню мову будь-якої машини, для якої складено спец. програму — т. з. К.-т р а н с л я т о р. Перший варіант мови розробили представники амер. фірми і опублікували 1960, у 1961 опубліковано 2-й варіант мови, 1965 — 3-й, значно розширений варіант, а 1968 — стандарт мови. Суттю обробки даних, що на неї орієнтовано К., є багаторазове повторення однотипних операцій над послідовними групами даних. Дані, які підлягають обробці, подають у К. у вигляді вхідних масивів (первісні об'єкти обробки) і вихідних масивів (результати обробки). Массив складається з певної сукупності *записів* і звичайно зберігається на магнітних стрічках, дисках або на перфокартах. На початку масиву записується т. з. мітки масиву — етикетка, що дає змогу відрізати один масив від іншого. Етикетка передусім послідовно розміщення записам масиву, після останнього з яких у масиві є вказівка про кінець масиву.

Програма в К. складається з чотирьох розділів. 1-й розділ — *ототожнення* — містить у собі назву програми та іншу інформацію, необхідну для ведення документації. 2-й розділ — *об'єднання* — визначає ЦОМ, на якій здійснюватиметься трансляція К.-програми, та ЦОМ, на якій провадитиметь-

ся виконання створеної транслятором робочої програми. В цьому розділі визначаються й новіший пристрій, на яких розміщуватиметься кожний з масивів. 3-й розділ — **д а н и х** — описує формати вхідних і вихідних даних, що підлягають обробці, та способи організації їх у масивах. За своїм змістом опис характеризує зображення даного на аркуші паперу, а не спосіб розміщення його в пам'яті машини, а саме: описується, в яких знаках це дане складається (літера, цифра і т. ін.), скільки цифр у числі, яка послідовність колонок у таблиці, скільки в ній рядків, який спосіб редагування колонок, яким зміст колонок на момент початку розв'язування задачі тощо. Формат окремої колонки таблиці задається за допомогою т. з. шаблону — рядка символів з певного набору; кожний із символів набору має строго визначений зміст, наприклад, один з них позначає входження літери, другий — входження цифри, третій — положення десяткової точки, четвертий — правила редагування даних і т. д. Поняття певного символу в рядку шаблона вказує, що на відповідній позиції в даному розміщується символ певної категорії (літера, цифра тощо) або що до символу на даній позиції слід застосувати певне правило редагування. Кожному окремому даному і кожній виділеній групі даних присвоюється певна назва і т. з. номер рівня — двозначне число, за допомогою якого задається впорядкованість даних у таблиці. Щоб зазначити, що певне дане є складником групового даного, його опис виходить за описом цього групового даного в межах одного запису і присвоюють йому номер рівня, більший за номер рівня групового даного, кожному записові відповідає найменший номер рівня 01, оскільки запис у К. є найвищою формою організації даних. У секції масивів розділу даних описуються особливості масивів, використовуваних у задачі: — організація моток у масиві, групування записів: типи записів, що є в цьому масиві; 4-й розділ — **п р о ц е д у р** — описує дії, які виконуються над даними під час обробки їх. Кожна дія задається у формі оператора, який складається з дієслова, що означає дію, й одного або й більше операндів — значень і назв (позначень) даних, які зазнають діяння операторів. Група послідовно записаних операторів, яка закінчується крапкою, називається реченням. Речення об'єднуються в параграфи, а вони, в свою чергу, можуть бути об'єднані в секції. Програміст присвоює параграфам і секціям назви (мітки), які дають змогу звернутися до відповідної ділянки програми. Оператори розрізняються на 1) оператори введення — виведення, що забезпечують обмін інформацією між зовнішнім середовищем (перфокарти, магнітні стрічки тощо) і внутрішньою пам'яттю машини: **ВІДКРИТИ** — готує масив до роботи; **ЧИТАТИ** — переносить черговий запис вхідного масиву з зовнішнього середовища в оперативну пам'ять, і після цього він стає доступним для обробки; **ПИСАТИ** — відправляє за-

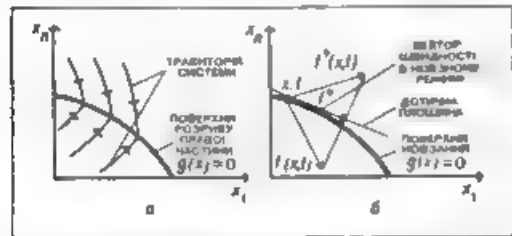
пис з оперативної пам'яті до вихідного масиву; **ЗАКРИТИ** — закінчує обробку масиву; **ПРИЙНЯТИ** — запитує частину інформації оператора та **ВИДАТИ** — видає на пульст частину інформації. 2) арифметичні оператори — виконують окремі ариф. дії (**ДОДАТИ**, **ВІДНЯТИ**, **ПОМНОЖИТИ** й **ПОДІЛИТИ**) або обчислюють за формулою (**ОБЧИСЛИТИ**). 3) оператор переміщення даних з одночасним редагуванням передаваного даного до формату приймального поля (**ПОМІСТИТИ**); 4) оператор підрахунку або заміни входжень певного символу в даному (**ПЕРЕГЛЯНУТИ**); 5) оператор сортування масиву (**СОРТУВАТИ**); 6) оператори керування послідовністю: **ПЕРЕЙТИ** — передає керування в зазначену в операторі точку програми, **ЗМІНИТИ** — змінює зазначену в програмі послідовність виконання операторів, змінюючи назву мітки в операторі переходу, **ВИКОНАТИ** — дає змогу в певній точці програми виконати деяку групу операторів заданої кількості разів, а потім продовжити виконання програми від зазначеної точки в встановленому порядку; **ЯКЩО** — перевіряє виконання заданих умов і залежно від результату перевірки встановлює порядок виконання операторів. Щоб краще відомості про дані й дії над ними (назви властивостей даних, операторів і т. ін.), в мову К. введено т. з. зарезервовані слова (близько 200 спец слів), які заборонено використовувати як назви даних і процедур. К.-програма записується на спец бланках, де кожний рядок перфорується на окремій перфокарті. Розділ процедур та розділ ототожнення не залежать від ЕОМ, на якій виконуватиметься програма, розділ обладнання повністю визначає ця ЕОМ. У розділі даних лише окремі фрази служать для повнішого використання особливостей машини, в усьому іншому й цей розділ не залежить від ЕОМ реалізації. Завдяки цьому, користувачі ЕОМ різних класів можуть легко обмінюватися програмами.

Застосування мови К. спрощує підготовку задачі для ЕОМ та налагоджування її, полегшує написання програмувати й дає змогу вести строгі документацію програм у стандартизованій формі. Успіх застосування мови привів до розробки точного опису стандарту К. й особливостей процесора. В 1967 опубліковано проект амер. стандарту мови К., що ґрунтується на мові в редакції 1965. Згідно з цією редакцією, мова має чітко виражену модульну структуру й складається з т. з. ядра, в якому є засоби для обробки даних у внутрішній пам'яті машини, й восьми модулів, кожний з яких реалізує ту чи іншу функцію процесу обробки. Модулі є такі: **о б р о б к и т а б л и ц ь** (організує звертання до індивідуального елемента зі списку аналогічних елементів чи з таблиці, всі рядки якої ідентичні за формою); **п о с л і д о в н о ї о б р о б к и** записів з масиву (включає описи засобів організації масивів та операторів, що організують обробку даних послідовно з масиву); **д о в і л ь н о ї о б**

робки записів з масиву (містить у собі опис організації масивів, розміщених у масовій пам'яті, й оператори, які дають змогу здійснити обробку даних довільну), довідник (асинхронної) обробки даних (у ньому є засоби для асинхронної обробки даних); сортування даних (містить у собі засоби, що дають змогу організувати сортування масивів); складання звітів (у ньому є конструктори мови, які дають змогу задавати формат сторінки під час видавання даних та розміщення вихідних даних на друкованій сторінці); сегментації програм (у ньому є аказіки, які дають змогу сегментувати робочу програму, складену при трансляції К.-програми, якщо перша не зміщується цілком в оперативну пам'ять) і бібліотеки (містить у собі засоби, які дають змогу включати до К.-програми складені раніше фрагменти, записані мовою К.). В кожному з модулів виділено ряд рівнів складності, й це дає змогу при розробці транслятора обирати як вихідну мову відмінювану, яка відповідає вимогам застосування і можливостям обладнання й лишається разом з цим у рамках стандарту. В Радянському Союзі розроблено транслятори з роз'ясненим варіантом мови К. для ряду вітчизняних машин. Див. також *Мова програмування*.

Літ. Ющенко Е. Л. [та ін.] КОД (Програміровальное учебное пособие). К., 1973; USA Standard CODE. New York, 1963. Д. П. Бабин.

**КОВЗНИЙ РЕЖИМ** — вид руху динамічної системи, що його описують системою диференціальних рівнянь з розривною правою частиною. К. р. характеризується тим, що рух проходить по поверхні розриву правої частини у просторі станів системи (або по перетину поверхонь). Для існування К. р. у системі  $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , де



Система з ковзним режимом. а — фазові траєкторії; б — геометрична інтерпретація доозначення

$f(x, t)$  — вектор-функція, що знає розрив на гіперплощині  $g(x) = 0$ .  $f(x, t) = \begin{cases} f^+(x, t) & \text{при } g(x) > 0 \\ f^-(x, t) & \text{при } g(x) < 0; \end{cases}$   $f^+(x, t), f^-(x, t)$  — вектор-функції, неперервні по змінній стану  $x$  і параметру  $t$  в області  $g(x) > 0$  ( $g(x) < 0$ ), досить виконати умови  $\lim_{g \rightarrow +0} \frac{dg}{dt} < 0$  і  $\lim_{g \rightarrow -0} \frac{dg}{dt} > 0$ , які гарантують зустрічність траєкторій системи в околах простору

станів, які приймають до гіперплощини розриву правої частини  $g(x) = 0$  (мал. а).

Рівняння руху системи по поверхні розриву необхідно довизначати, бо в цьому випадку не виконуються умови класичних теорем існування розв'язку дифер. рівняння. Треба, щоб доозначення розв'язку дифер. рівняння збігалось з розв'язком, який одержують при введенні в механізм, що реалізує розрив правої частини, різних малих неідеальностей, які анімують невизначеність продовження розв'язку вздовж поверхні розриву і при подальшому граничному переході до ідеального випадку. Такий підхід часто приводить до такого доозначення рівняння ковзання:

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x, t), \quad x \in \{x: g(x) = 0\},$$

де вектор швидкості  $f^0(x, t)$  шукають у вигляді:

$$f^0(x, t) = \mu f^+(x, t) + (1 - \mu) f^-(x, t), \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Цей вектор належить дотичній площині до поверхні  $g(x) = 0$  (мал. б). К. р. широко використовують при синтезі редукцій систем керування і систем керування з змінною структурою.

Д. В. Іосадзе, С. К. Король, О. С. Рихов. КОД (від лат. codex) — універсальний спосіб відображення інформації під час її аберігання, передавання та обробки у вигляді системи відповідностей між елементами повідомлень і сигналами, що за їхньою допомогою ці елементи можна зафіксувати. Застосовують К. для відображення дискретної інформації в лініях і каналах зв'язу, системах автоматичн. обчисл. пристроїв та ін. системах, використовуваних у різних галузях техніки. Відображення інформації у вигляді К. широко використовують і живі організми.

Нехай дано множину можливих елементів повідомлень  $B = \{b_i\}$ , де  $i = 1, \dots, N$ , і якийсь алфавіт  $A$  з символами  $a_j \in A$ , де  $j = 1, \dots, m$ . Скінченну послідовність символів  $a_j$  наз. словом у цьому алфавіті. Множину слів в алфавіті  $A$  наз. К., якщо її поставлено у взаємно однозначну відповідність до множини  $B$ . Кожне слово, що входить до К., наз. кодовим словом (кодовою комбінацією). Кількість символів у кодовому слові наз. довжиною слова. Для запису кодових символів  $a_j$  використовують різні позначення у вигляді цифр, букв і спец. знаків. Кількість різних значень  $m$ , що їх може набувати кожен кодовий символ, наз. основою К.

Кодове слово  $k = (a_{n-1}, \dots, a_1, \dots, a_0)$  довжини  $n$  при цьому можна розглядати як  $n$ -розрядне число в системі числення з основою  $m$ :

$$k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j m^j, \quad m^j = a_{n-1} \cdot m^{n-1} + \dots + a_1 \cdot m + a_0.$$

Кодові слова можуть мати однакову або різну довжину. Відповідно до цього К наз. рівномірним або нерівномірним.

Нерівномірні К. застосовують у системах кодування, де враховано статистичні властивості повідомлень з метою мінімізації середньої довжини слова на елемент повідомлення. Б ефективні методи кодування інформації, де враховано їхню статистичну структуру (код Півніона — Фано, код Хаффмана). Нерівномірні К. широко застосовують у телеграфії. Найвідомішим з цих К є код Морзе, призначений для кодування алфавітно-цифрової інформації від час передавання її по телеграфних каналах. Особливим класом серед нерівномірних К є К без коми (префіксні). Ці К. не потребують розділових знаків між кодовими словами, мають властивість самосинхронізації, що дає змогу однозначно поділяти кодові слова за послідовністю повідомлень.

Найпоширенішими в системах обробки та передавання інформації є рівномірні К. Основа К. здебільшого дорівнює двом (двійковий К.). Вибір такої основи здебільшого залежить від особливостей побудови систем обробки та передавання інформації, які використовують дискретні елементи з двома стійкими станами. Рівномірні двійковий К. широко використовують для відображення вхідної інформації ЦОМ і систем передавання та обробки даних. При введенні двійково-кодової інформації в ЦОМ для компактного записування часто використовують К., основи яких є цілі степені числа 2 (вісімковий, шістнадцятковий). Ці К. є прості для перетворення на двійковий і навпаки.

Для відображення числової інформації в ЦОМ великого поширення набули двійкові позиційні К. з природним розподілом ваги розрядів  $2^{n-1}, \dots, 2^1, \dots, 2^0$  (де  $n$  — кількість розрядів). Ці К. спрощають алгоритми виконання арифм. операцій з урахуванням знака і скінченності розрядної сітки операндів, застосовують спец. К. для відображення відносних чисел: прямий, обернений, доповняльний. В усіх цих К. для відображення знака використовують спец. знаковий розряд.

У прямому К. знак кодується значенням «0» для додатних чисел і «1» — для від'ємних чисел, а абсолютну величину числа зображують двійковим позиційним К. Прямий К. задовольняє вимоги автомат. одержання знака добутку й частки, його зручно використовувати при виконанні операцій множення й ділення. Проте він не забезпечує заміни віднімання чисел додаванням їхніх кодів, і це утруднює використання його від час виконання операцій додавання й віднімання. Цієї вади не мають зворотний і доповняльний К., що відрізняються від прямого К. лише способом відображення від'ємних чисел.

Обернений К. від'ємного числа утворюється, якщо замінити кожну двійкову цифру додатного числа того самого абсолютного зна-

чення, а саме «0» на «1», а «1» на «0». Якщо при підсумовуванні чисел в оберненому К. сума їх виходить за межі діапазону відображених чисел, треба від суми відняти число, кратне  $(2^n - 1)$ . З цією метою при підсумовуванні обернених К. виконують циклічне перенесення з старшого розряду в молодший. Циклічне перенесення дещо ускладнює операцію додавання чисел, бо під час переходу через нуль потрібен ще один зайвий такт підсумовування. Достойством обернених К. є простий зв'язок їх з прямими, бо перетворення прямого К. — обернений К. і навпаки є порозрядною операцією.

В доповняльному К. для відображення від'ємного числа використовують доповнення додатного числа тієї самої абсолютної величини до модуля  $2^n$ . Перевагою доповняльного К. над оберненим є спрощення операції підсумовування відносних чисел, бо при підсумовуванні доповняльних К. не потрібне циклічне перенесення в суматорі. Перетворення прямого К. на доповняльний і навпаки не є порозрядними операціями і включають, крім логічної операції інвертування числа, ще й операцію додавання з одиницею в молодшому розряді. Описані способи кодування чисел легко узагальнити й на випадок К. з основою, відмінною від 2.

Поряд з двійковим позиційним К. в ЦОМ широко застосовують і двійково-десятковий К. У цих К. кожну десяткову цифру відображують у якомусь двійковому К. Найпоширенішим є кодування десяткової цифри чотирма двійковими (тетрадою). Застосовують кілька систем кодування десяткових цифр двійковими тетрадами К. «8, 4, 2, 1», К. «2, 4, 2, 1», К. «7, 4, 2, 1», К. з надлишком 3 та ін. К. «8, 4, 2, 1» є природним відображенням десяткових цифр у двійковій системі, бо саме такою є природна вага двійкових розрядів у позиційному двійковому К. і решта К. є значеннями, але відрізняються один від одного вагою розрядів, і через це виникають деякі нові властивості. Так, К. «2, 4, 2, 1» (код Айкова) має властивість доповнювання до 9, що спрощує виконання в цьому К. арифм. операцій над відносними числами. Аналогічну властивість мають і К. з надлишком 3 (код Скібітца), в якому значення чисел зсунуто на 3 щодо природного К. «8, 4, 2, 1». А К. «7, 4, 2, 1» цікавий тим, що тетради в ньому мають не більш як дві одиниці. Застосовують і двійково-десятковий К., в яких кожна десяткова цифра кодується п'ятьма і більше двійковими. Надлишковість таких К. можна використати для контролю та корекції передавання та обробки даних. Найвідомішим К. цього класу є К. «2 з 5», що в ньому кожна кодова комбінація містить 2 одиниці й 3 нулі. К. «2 з 5» дає змогу виявляти багато характерних помилок при відображенні числа (див. Коды коректующи). Такі властивості має й двійково-десятковий К. з надлишком 11 і К. «3 з 2» (код Даймонда), які мають

щей властивості доповнювання і в цьому розумінні вони аналогічні К. з надлишком 3.

Окрім позиційних систем відображення чисел, є й не позиційні (символічні) системи. Одним з найбільш досліджених непозиційних систем є система числення залишкових класів (СЧЗК). Число  $N$  в СЧЗК зображують у вигляді впорядкованого набору залишків (лишків) за взаємно простими основами  $p_1, \dots, p_k, \dots, p_n: N \sim (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)$ , де  $a_i$  — найменший лишок  $N$  за модулем  $p_i$ . Система основ  $p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$  визначає діапазон відображення чисел  $P \sim p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ . Важливою особливістю СЧЗК є те, що раціональні арифм. операції (додавання, віднімання і множення) в цій системі проводяться незалежно по кожній основі, і це дає змогу істотно збільшити швидкість виконання цих операцій. Другою перевагою СЧЗК є те, що на ній зручно виконувати операції в контролєві і корекцією результату, бо помилки локалізовані в межах основ. Коди коректуючі в СЧЗК можна одержати внаслідок розширення системи основ, включивши до її складу спеціально підібрані контрольні основи. Осн. вадою СЧЗК є те, що на ній важко виконувати операції, що потребують знання позиційних характеристик чисел (визначення знаку, положення числа в діапазоні, переповнення тощо) і важко відображувати числа з плаваючою комою.

Іншим відомим класом К., що використовує непозиційну систему відображення чисел, є рефлекси К., з яких характерним є код Грея. В К. Грея комбінації, що відображують сусідні за величиною числа, відрізняються лише в одній кодовій позиції. Такі К. добре задовольняють вимоги аналогово-цифрового перетворення, усуваючи неодиозначність зчитування величини кута в перетворювачах з кодуємими дисками й зводять до мінімуму можливі помилки перетворення. Кодові позиції числа в кодї Грея пов'язані з відповідними позиціями цього числа в природному двійковому К. співвідношенням:  $\gamma_i = (a_{i-1} \oplus a_i)$ , де  $(\gamma_n, \dots, \gamma_4, \dots, \gamma_1)$  — відображення числа  $N$  у кодї Грея;  $(a_n, \dots, a_4, \dots, a_1)$  — відображення числа  $N$  у природному двійковому К.;  $\oplus$  — операція підсумовування (порівнювання) за модулем 2. Вадою коду Грея є складність виконання з нього арифм. операцій, тому при введенні в ЦОМ він здебільшого перетворюється на позиційний К. У системах автоматизації й спеціалізованих обчисл. пристроях застосовують і не двійкові К. У таких К. кожний кодовий символ може набувати не різних значень, що дає змогу економічніше кодувати повідомлення. Причини, що утруднюють використання недовійкових систем кодування, є технічні труднощі побудови елементів, здатних надійно зберігати й обробляти інформацію, відображену числом станів, більшим за 2. Відповідно ускладнюються й логіч. та арифм. операції в недовійкових К., але в деяких випадках такі системи

доцільно застосовувати заради оптимізації кількості використовуваного устаткування. Літ.: Карцев М. А. Арифметика цифрових машин. М., 1969 (Інформ. с. 559-575); Супрун В. А. Первичные коды. М., 1970 (Інформ. с. 155-161); Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 (Інформ. с. 783-820). О. М. Рак.

**КОД СЕМАНТИЧНИЙ** — знак інформаційної мови, що являє собою (на відміну від дескриптора у вузькому розумінні слова) похідну одиницю, яка складається з простіших одиниць — семантичних множників. К. с. забезпечує аналітичне задання відношень парадигматичних (а в деяких мовах — і синтагматичних). К. с. застосовується здебільшого в інформаційних мовах, які передають різні парадигматичні відношення між словами (підклас 3.3 парадигматичної класифікації — див. Мова інформаційно-пошукова). К. с. є в певному розумінні аналогом складного слова природної мови. Він явно відображує деякі зв'язки між поняттями. Це дає змогу на формальному рівні виявляти спільність і відмінність між об'єктами, описаними за допомогою К. с. Напр. у мові системи «БІТ» К. с.  $R_{001} X_{001} R_{101} X_{101} R_{201} X_{201} R_{301} X_{301}$  має значення «літак», а  $R_{001} X_{001} R_{101} X_{101} R_{201} X_{201} R_{301} X_{301}$  — «вертоліт». Тут букви  $X$  — семантичні множники, а  $R$  — символи, які вказують на наявність певного парадигматичного відношення між К. с. з цілому і відповідним семантичним множником. Перший код інтерпретується так: «літ. (X<sub>001</sub>) літального апарата, важчого за повітря (X<sub>101</sub>), який має (R<sub>001</sub>) силову установку (X<sub>201</sub>) і крило (X<sub>301</sub>)», другий — «літ. літального апарата, важчого за повітря, який має силову установку і несучий гвинт (X<sub>201</sub>)». Е. Ф. Скоробогатко.

**КОДИ КОРЕКТУЮЧІ** — клас кодів, які мають властивість виявляти з заданою точністю помилки, що виникають, і виправляти їх. Осн. призначення К. к. — підвищувати завадостійкість інформаційних систем. К. к. застосовують у системах передавання, зберігання та обробки дискретної інформації.

Розвиток теорії К. к. при передаванні інформації значною мірою стимулювався фундаментальною теоремою К. Шеннона для каналів з шумом, згідно з якою за допомогою належних кодів можна передавати інформацію з будь-якою швидкістю, що не перевищує пропускної здатності каналу зв'язку, так, щоб імовірність помилки після декодування була довільно малою. Надалі теорія К. к. набула широкого застосування і в задачах зберігання та обробки дискретної інформації в пристроях автоматизації й ЦОМ.

В основу побудови різних К. к. покладено принцип введення надмірності повідомлень, який полягає в тому, що при кодуванні повідомлень подають додаткову інформацію, яка надає осн. інформації повідомлень завадозахищних властивостей. При декодуванні К. к. на приймальному боці каналу передавання чи обробки інформації здійснюється зворотна операція виділення інформації повідомлення й інформації про виниклі помилки та операція виправлення їх, якщо потрібно.

Розрізняють К. к. за призначенням, морфологічною здатністю, принципами побудови та ін. ознаками. Найбільше досліджено й найпоширенішими стали блокові коди, що використовують як кодові слова послідовності з  $n$  символів каналу (блоків). Надмірність у блокові коди вводять внаслідок того, що як кодові слова використовують лише частину всіх можливих послідовностей з  $n$  символів. Цю частину слів, які становлять код, добирають відповідно до потрібної коректувальної здатності коду. За використанням принципу утворення кодових слів блокові коди ділять на подільні й неподільні. В подільних кодах кодові позиції слів ділять на інформаційні, що мають переліску кодової інформації, та перевірні, що мають надмірну інформацію, необхідну для корекції помилок, які виникають. У неподільних кодах зазначеного поділу не можна виконати й надмірність вводять внаслідок перекодовування всієї первісної інформації. При декодуванні неподільних кодів для того, щоб добути інформацію повідомлення в початковому вигляді, потрібно зворотнє перекодовування, що в год. надано неподільних кодів. Найпоширенішими є дві ймовірності К. к., хоч ряд важливих результатів теорії К. к. можна узагальнити й на коди з основами, відмінними від двійкової. При декодуванні добутого слова, можливо спотвореного шумом, приймається рішення відносно дійсного кодового слова. Це рішення є найкращою гіпотезою, що виходить з наявної інформації, й не є абсолютно вірогідним через статистичний характер гіпотез. Тому при конструюванні коду зирпальше значення має вибір моделі каналу з шумом. Відомо кілька таких моделей, серед них найпоширенішим став симетричний канал, який припускає рівноймовірними помилки різних типів. Модель цього каналу є зручним нитом. моделю й її найінтенсивніше досліджували, хоч багато реальних каналів описано з цієї моделі досить наближено.

Ін. моделлю каналу, що набула застосування в пізніших дослідженнях, є асиметричний канал, який враховує можливість появи помилок різних типів з різними ймовірностями, що характерне для багатьох реальних каналів. Описано кілька різновидів моделей асиметричного каналу, що характеризуються різними обмеженнями на ймовірність помилок різних типів (цілком асиметричні канали, канал з частковою асиметрією). Специфічною моделлю каналу з шумом, що також набула застосування в теорії завадостійкого кодування, є канал із стираннями. Особливістю цього каналу є наявність у вихідному алфавіті каналу спец. символу стирання. Спотворення вхідних символів мають характер стирання (переходять в символ стирання, що їм приписують певну ймовірність). Стираючий канал відображає властивості певних реальних каналів, у яких роз'ясувальний пристрій на виході каналу має ділянку невизначеності, що виключає всі спотворені сигнали.

Всі зазначені моделі каналів характеризують можливі спотворення довільного вхідного символу. Характер розподілу помилок у послідовності символів враховують різні моделі, серед яких можна виділити: а) модель незалежних помилок, яка припускає ймовірності спотворень різних символів послідовності постійними й незалежними (канал без пам'яті). Коректувальна здатність кодів для такої моделі визначається макс. кратністю виявлених і виправлених помилок; б) модель згрупованих помилок (пачок помилок), яка враховує кореляцію між спотвореннями послідовності символів на ділянці обмеженої довжини. Найімовірніші помилки, що їх вносить така модель, групуються в пакети (пачки), й їх можна охарактеризувати макс. довжиною пачки. В деяких моделях додаткові обмеження встановлюють і на розташування пачок за довжиною кодової послідовності. Відомі й інші моделі, що враховують кореляцію спотворень у послідовності символів (напр., списком можливих помилок).

К. к. для симетричного каналу найбільше досліджено. Теорія цих кодів широко використовує алгебр. структури (групи, кільця, поля, векторні простори тощо). Для кодів, що коректують незалежні помилки, важливу роль відіграє поняття кодової відстані. Віддаль між будь-якою парою двійкових кодових слів  $x = (x_1, \dots, x_n)$  й  $y = (y_1, \dots, y_n)$  визначається

$$\text{співвідношенням: } d(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i \oplus y_i), \text{ де}$$

$d(x, y)$  наз. хеммінговою відстанню,  $\oplus$  — операція додавання за модулем 2. Кодова відстань є найменшою хеммінговою відстанню між кодовими словами. Вона визначає коректувальні можливості коду щодо незалежних помилок відповідно до такої осн. властивості: для того, щоб код виявляв усі комбінації з  $s$  помилок і виправляв усі комбінації з  $t$  помилок, необхідно й достатньо, щоб кодова відстань дорівнювала  $(t + s + 1)$ . Широкий клас кодів для симетричного каналу становить лінійні (групові) коди, що їхня сукупність кодових слів створює абелеву групу з операції додавання за модулем 2. Групові коди належать до подільних (систематичних) кодів. Для них прийнято позначення  $(n, k)$ -код, де  $n$  — довжина кодових слів, а  $k$  — число інформаційних позицій. Представником цього класу кодів є код Хеммінга.

Код Хеммінга з виявленням однократних помилок (код з контролем на парність) утворюється додаванням до інформаційних позицій однієї перевірної позиції, значення якої дорівнює до парної суми одиниць усіх позицій кодового слова. Такий код має кодову відстань 2 й дає змогу виявляти будь-яку однократну помилку й усі помилки непарних кратностей. У коді Хеммінга для виправлення однократних помилок у перевірних позиціях розіпнують символи, які є результатами перевірок на парність спеціально пі



добраних груп інформаційних позицій. Якщо немає спотворень, перевірки цих груп на парність (співно з відповідними перевірними символами) дають нульові значення, а кожній однократній помилці відповідає своє сукупність значень перевірок, і це дає змогу однозначно ідентифікувати помилку, а, отже, й виправити її. Кодова відстань у такому коді — 3, її можна збільшити до 4 додаванням заг. перевірки на парність усіх позицій кодового слова. Одержаний т. ч. код разом з виправляючим однократним помилком дає змогу й виявляти довідні подвійні помилки.

В заг. випадку лінійні (групові) коди описують за допомогою породжувальної чи перевіркової матриці коду. Породжувальна матриця  $(n, k)$ -коду має розмірність  $n \times k$  і складається з базисних векторів, які задають лінійний векторний простір кодових векторів. Перевірочна матриця  $(n, k)$  коду має розмірність  $n \times (n - k)$ . Рядки цієї матриці визначають перевірні співвідношення між інформаційними й перевірними позиціями коду й їх також можна розглядати як базисні вектори простору, ортогонального просторові кодових векторів. Щоб одержати кодову відстань  $d$ , необхідно й достатньо, щоб будь-яка лінійна комбінація в  $d - 1$  або менше стовпців перевіркової матриці була лінійно-незалежною. Зокрема, перевірку матрицю коду Хеммінга з  $d = 3$  можна одержати, вибираючи як стовпці різні ненульові  $(n - k)$ -позиційні двійкові числа. Відомі й складніші конструкції перевірних матриць, які дають змогу одержувати коди  $d > 3$ .

Важливим класом групових кодів є циклічні коди, що відзначаються порівняно простими алгоритмами кодування й декодування та високими коректувальними можливостями. Переважна більшість найкращих К. и. для симетричного каналу належить до циклічних кодів або побудована на їхній основі. Циклічний двійковий код визначають як ідеал в алгебрі лінійних поліномів над полем коэф.  $\{0, 1\}$ . Осм. властивість циклічних кодів полягає в тому, що разом із словом  $v$  код має й усі його циклічні перестановки. Структура коду цілком визначається породжувальним поліномом  $g(x)$  степеня  $(n - k)$  або перевірним поліномом  $h(x) = (1 + x^n) \cdot g^{-1}(x)$ , степеня  $k$ , за якими однозначно можна обчислити породжувальну або перевірку матриці коду. Ін. спосіб задавання циклічних кодів ґрунтується на використанні коренів полінома  $g(x)$ , які збільшеного задають степенями якого елементів  $\alpha$ . Серед усіх відомих циклічних кодів для каналу з незалежними помилками найкращими за своїми коректувальними властивостями є коди Боуза—Чоудхурі—Хоквінґема (БЧХ). Ці коди можна побудувати в широкому діапазоні кодових довжин і кодових відстаней. Для будь-яких цілих значень  $m$  і  $t$  існує код БЧХ довжини  $n = 2^m - 1$  з кодовою відстанню  $d = 2t + 1$ , який має не більш як  $m \cdot t$  перевірних символів. Коди БЧХ задаються збільшеного коре-

лями породжувального многочлена, які в послідовним степеням примітивного елемента  $\alpha$  поля  $GF(2^m)$ :  $\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^{2t}$ . Їх ін. конструкції кодів БЧХ, зокрема породжувані й невиправдані елементами поля  $GF(2^m)$ . Коди БЧХ за своєю надмірністю при заданій кодовій відстані досить економічні й близькі до теор. границі. Код Хеммінга й ряд ін. К. и. можна розглядати як часткові випадки кодів БЧХ. Ін. важливим класом циклічних кодів є коди для каналів з пакетами (пачками) помилком. Найвідомішими кодами цього класу є коди Файра, визначувані породжувальними поліномами вигляду  $g(x) = p(x) \cdot (x^s + 1)$ , де  $p(x)$  — невільний поліном степеня  $m$ . Вони придатні для широкого діапазону довжин кодів і довжин коректованих пачок помилком. До кодів, що виправляють пачки помилком, належать і коди Ейбрамсона та коди Меласа. Широкі можливості для корекції пачок помилком мають і коди Ріда—Соломона і коди БЧХ. Спец. клас К. и. утворюють коди, що локалізують помилки. Вони є проміжними між кодами, що виявляють помилки, й кодами, що виправляють їх, бо дають змогу встановлювати місце помилки з точністю до підблока, тобто кількох кодових позицій кодового слова. Такі коди можна побудувати на основі відомих циклічних кодів. Коди, що локалізують помилки, становлять інтерес для систем передавання в перепиті, для якого використовується зворотній канал для завдання невдастійного кодування багатоблокних структур автоматів та ін.

Окрім К. и. для симетричних каналів великий інтерес являють собою й коди для асиметричних каналів. Урахування асиметрії помилком реальних каналів передавання та обробки інформації в багатьох випадках дає змогу одержати простіші конструкції К. и. або зменшити необхідну надмірність при заданій коректувальній здатності коду. Більшість конструкцій К. и. для асиметричного каналу ґрунтуються на загальних представленнях кодових слів, при яких кожну кодову позицію зважено якоюсь постійною вагою, а перевірки співвідношення в певних функціях ваги кодових слів. В основу виявлення асиметричних помилком при цьому покладено принцип змінювання ваги. Найвідомішими кодами цього типу є коди постійної ваги (коди з постійною кількістю одиниць), що їх застосовують у техніці зв'язку, перетворювальних пристроях та для кодування десяткових цифр у ЦОМ (коди  $e_2$  з 5а,  $e_3$  з 7а).

Коди для асиметричних каналів виявляють довідний збіг асиметричних помилком, проте належать до неподільних кодів їхнім аналогом серед подільних кодів є коди Бергера—Фреймана. Їх коди, що коректують асиметричні помилки й мають меншу надмірність, аніж аналогічні коди для симетричних каналів: коди Кіма—Фреймана й Варшавова—Тенгольда, що коректують однократні асиметричні помилки, код Тенгольда, що коректує



подвійні асиметричні помилки, і коди, що коректують пакки асиметричних помилок. Їх конструкції кодів, що коректують асиметричні помилки в багатоканальних системах ЦОМ і коди використовують, коли простують зони запам'ятовувальні пристрої ЦОМ і багатоканальні системи передавання інформації.

В системах обробки інформації застосовують і К. к., що називаються арифметичними. До таких кодів, окрім вимог корекції помилок, ставлять і вимоги щодо зручності виконання арифм. операцій над кодовими словами (див. *Операції над числами*). Щоб оцінити коректувальну здатність арифм. кодів, використовують відмінні від хеммінгівських поняття помилок і кодової відстані. Арифм. вагу числа  $N$  визначають при цьому як мінім. число доданків у зображенні числа у вигляді  $N = \sum a_i \cdot 2^i$ , де  $a_i \in \{0; +1; -1\}$ .

Арифм. відстань між числами  $N_1$  і  $N_2$  — арифм. вага різниці  $(N_1 - N_2)$  й дорівнює кратності помилки, що перетворює число  $N$  на  $N_1$  (або  $N_2$  на  $N_1$ ). Таке визначення відстані добре відображає специфіку помилок, що можуть виникати під час виконання арифм. операцій (типу додавання), в т. ч. можливе розмноження помилок по замкнутому переносу. При оцінці коректувальної здатності кодів до незалежних арифм. помилок арифм. відстань є повним аналогом відстані Хеммінга. Найнижчий клас арифм. кодів утворюють  $AN$  коди, в яких кодоване число  $N$  являє собою його на спеціально підібраний множник  $A$ .

Найпростішим кодом з відстанню 2, що являється подвійною арифм. помилкою, є код  $3N$ . Відомі й  $AN$ -коди, що виправляють подвійні й багаторазові арифм. помилки. Параметр  $A$  таких кодів істотно залежить від потрібної кодової відстані й діапазону кодованих чисел. У деяких застосуваннях бажано, щоб арифм. код мав властивість самоповнюватися. Цю властивість можна здобути *усюю* значень усіх кодових слів  $AN$ -коду на певну константу (за аналогією з самоповнюваними двійково-десятиковими кодами). Одержувати таким способом коди наз.  $\{AN + B\}$ -кодами.  $AN$ -коди й  $\{AN + B\}$ -коди належать, як правило, до неподільних кодів. Проте, подільні аналоги  $AN$ -кодів, що в них перевірки символи використовують лише числа  $N$  (інформаційної частини кодового слова) за модулем  $A$  чи системою модулів  $A_1, \dots, A_z$ . Найвідомішими є коди цього типу при  $A = 3; 7$ , що виявляють арифм. помилки. Ці коди використовують для контролю арифм. операцій у ЦОМ та наскрізного контролю інформаційних трактів ЦОМ. Подільні арифм. коди, що виправляють помилки, можна одержати, відповідно підбравши систему модулів  $A_1, \dots, A_z$  при  $z \geq 2$ .

Важливий клас арифм. кодів утворюють коди, що використовують представлення чисел у системі числення залишкових класів. Коректувальні властивості таких кодів ут-

ворюються внаслідок збільшення кількості основ, використовуваних для представлення чисел, порівняно з мінімальною потрібною кількістю основ при заданому діапазоні чисел. Наявність одної задмірної основи дає змогу виявляти помилки, що спотворюють лишеок за будь-якою (однією) основою, а двох надмірних основ досить, щоб виправити всі такі помилки. Достойніством К. к. в системі числення залишкових класів є їхня висока коректувальна здатність. Крім того, операції, пов'язані з корекцією помилок, у таких кодах добре суміщуються зі звичайними операціями над робочими основами.

Окрім блокових К. к., розвинуто й рекурентні К. к., які можна розглядати як особливий спосіб безперервної обробки інформації. В цих кодах перевірка символів перемешуються з інформаційними, утворюючи безперервну послідовність, що не поділяється на блоки. Рекурентні К. к. досліджено значно менше, ніж аналогічні блокові. Найбільше вивчено коди цього класу, що виправляють пакки помилок, вони мають простіші алгоритми кодування й декодування, ніж аналогічні циклічні коди.

Літ.: Варшамов Р. Р. Математические методы повышения надежности в реальных системах связи // Вестник АН СССР. Технические кибернетика, 1964, № 4; Акушевский И. Я., Юдичкин Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах, М., 1969 (Библиогр. с. 430—433); Дадиев Ю. Т. Арифметические коды, исправляющие ошибки М., 1970 (Библиогр. с. 181—184); Питерсон У. Д., Исправляющие ошибки Пер. с англ. М., 1964 (Библиогр. с. 309—310).

**КОДУВАННЯ АВТОМАТИЧНО** — кодування, описуване за допомогою узагальненого скінченного автомата, вихід якого в кожний момент часу є якесь, може, пусте слово у вихідному алфавіті. Більшість задач теорії кодування вкладається в таку схему, розглядають клас автоматних кодувань, які мають певні властивості; треба побудувати кодування з розгляданого класу, оптимальне в якомусь заданому заданому розумінні. Звичайно критерій оптимальності кодування так чи інакше пов'язаний з мінімізацією довжин вихідних слів, тоді як потрібні властивості кодування можуть бути досить різноманітними. Зокрема, такими властивостями можуть бути існування зворотного відображення (декодування), можливість виправляти під час декодування помилки різного типу, можливість простої тех. реалізації кодування й декодування і т. п.

Основи кодування теорії знав амер. учений К.-Е. Шеннон (я. 1916). Найповніше досліджено К. а. з одним станом, які наз. а. л. ф. в. і. т. н. м. кодуваннями. При алфавітному кодуванні  $\phi$  кожний букви  $a_i$  вхідного алфавіту  $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$  ставлять у відповідність якесь слово  $v_i = \phi(a_i)$  у вихідному алфавіті  $B_r = \{b_1, \dots, b_r\}$ . Довільне вхідне слово (повідомлення)  $a_1 \dots a_n$  відображається в слово  $\phi(a_1 \dots a_n) = \phi(a_1) \dots \phi(a_n) = v_1 \dots v_n$  в алфавіті  $B_r$ . Множини

$V_\Phi = \{v_1, \dots, v_m\}$  наз. кодом. Код  $V_\Phi$  наз. подільним, якщо з будь-якої рівності  $v_{i_1} \dots v_{i_n} = v_{j_1} \dots v_{j_l}$  в алфавіті  $B$ , виходить, що  $l = n$  і  $i_t = j_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ . Подільність коду  $V_\Phi$  рівносильна взаємній однозначності алфавітного кодування  $\Phi$ . Зокрема, код є подільним, якщо жодне кодове слово не є початком іншого. Такі коди (як відповідні їм алфавітні кодування) наз. префіксними. Існують подільні, але не префіксні коди. Для будь-якого подільного коду  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  в алфавіті  $B$ , виконується

нерівність  $\sum_{i=1}^m r^{-l_i} \leq 1$  (\*), де  $l_i$  — довжина слова  $v_i$ .

Справджується й обернене твердження: якщо  $(l_1, \dots, l_m)$  — набір цілих додатних чисел, для яких виконується й наведена вище нерівність, то в алфавіті  $B$  існує префіксний код  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ , в якому слово  $v_i$  має довжину  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Якщо числа  $l_i$  упорядковано за зростанням, то, згідно з Шенноном, як слово  $v_i$  можна взяти перші

після коми  $l_i$  символів розкладу числа  $\sum_{i=1}^{m-1} r^{-l_i}$

в нескінченний  $r$ -ичний дріб. Код  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  наз. сильно подільним, якщо з будь-якої рівності  $v_{i_1} v_{i_2} \dots = v_{j_1} v_{j_2} \dots$  нескінченних послідовностей у  $B$ , виходить, що  $i_t = j_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$ . Найпростішим прикладом подільного, але не сильно подільного коду є код  $\{0, 01, 1\}$ . Автомат  $\mathcal{A}$  з вхідним алфавітом  $B$  і вихідним  $A_m$  наз. декодувачем для алфавітного кодування  $\Phi$ , якщо існує таке число  $l$ , що автомат  $\mathcal{A}$  впізнає кожне слово  $a_1 \dots a_n$  через  $l$  тактів після

того, як у нього надійшло слово  $\Phi(a_1 \dots a_n)$ . Для алфавітного кодування  $\Phi$  існує декодувачий алфавіт тоді й тільки тоді, коли код  $V_\Phi$  є сильно подільним. Код  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  наз. цілком подільним, якщо в алфавіті  $B$  неможливі рівняння виду  $\beta v_{i_1} \dots v_{i_n} = v_{j_1} \dots v_{j_l} \beta$ , де  $\beta$  — непустий початок слова  $v_{i_1}$ , відмінний від  $v_{i_1}$ . Для алфавітного кодування  $\Phi$  існує дефінітивний декодувачий автомат тоді й тільки тоді, коли код  $V_\Phi$  є цілком подільним. *Лемама дефінітивний* дає змогу протягом обмеженого проміжку часу усунути вплив збоїв у вхідній послідовності або в роботі самого автомата. Щоб розпізнати показані властивості коду  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ , будуть допоміжний граф, вершина якого — непусті слова, які є й початками, й закінченнями деяких кодів слова. При цьому вершина  $\beta$  з'єднується з  $\beta'$  ребром, напрямленим від  $\beta$  до  $\beta'$ , якщо існує кодове слово  $v_i$  таке, що  $\beta = v_i \beta'$  або  $v_i = \beta \beta'$ . Побудова завершується об'єднанням усіх вершин,

відповідних кодовим словам, в одну спільну вершину, позначувану символом  $\Lambda$ . Код  $V$  є: 1) подільним, 2) сильно подільним або 3) цілком подільним тоді й тільки тоді, коли в побудованому графі немає відповідно: 1) орієнтованих циклів, які проходять через вершину  $\Lambda$ ; 2) орієнтованих циклів, у які можна потрапити з вершини  $\Lambda$ ; 3) ніяких орієнтованих циклів.

Найбільш закінчені результати в теорії кодування пов'язані з побудовою кодів, які мають мінім. надмірність при заданих значеннях вільних параметрів. Запропоновані тут конструкції використовують на практиці при стискуванні інформації та вибірці інформації з пам'яті. В найпростішому варіанті задачі припускають, що послідовні появи букв вхідного алфавіту  $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$  статистично незалежні й підпорядковані якомусь розподілу ймовірностей

$$P = (p_1, \dots, p_m) \left( p_i > 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1 \right).$$

Кожне  $K$ . а.  $\Phi$  характеризується середнім числом  $L_\Phi(P)$  букв вхідного алфавіту  $B$ , які припадають на одну букву вхідного алфавіту  $A_m$ . Для алфавітного кодування  $L_\Phi(P) =$

$= \sum_{i=1}^m p_i l_i$ , де  $l_i$  — довжина слова  $\Phi(a_i)$  в алфавіті  $B$ . Якщо  $K$ . а.  $\Phi$  є взаємно однозначним, то

$$L_\Phi(P) \geq H_r(P) = \sum_{i=1}^m p_i \log_r \frac{1}{p_i}.$$

Величину  $L_\Phi(P) - H_r(P) = \Delta_\Phi(P)$  наз. надмірністю кодування  $\Phi$  при розподілі  $P$ . Задача полягає в тому, щоб відшукати в заданому класі взаємно однозначних кодувань кодування, яке має мінім. надмірність. Оскільки при  $l_i = \lceil \log_r \frac{1}{p_i} \rceil$  [в-

иконується нерівність (\*), то за методом Шеннона можна побудувати алфавітне префіксне кодування з надмірністю, меншою за одиницю, де  $\lceil x \rceil$  — найменше ціле, не менше за число  $x$ , а  $\lfloor x \rfloor$  — ціла частина числа  $x$  (найбільше ціле, не більше за число  $x$ ).

Одним з осн. досягнень теорії кодування є метод Хаффмена — побудова префіксного алфавітного кодування, яке має мінім. надмірність у класі всіх взаємно однозначних алфавітних кодувань. Істотно зменшення надмірності можна досягти, розбиваючи повідомлення на блоки довжини  $k$  й використовуючи алфавітне кодування  $\Phi_k$  цих  $m^k$  блоків. Методом Шеннона або Хаффмена можна побудувати префіксне кодування  $\Phi_k$  блоків довжини  $k$  таке, що  $L_{\Phi_k}(P) < \frac{1}{k}$ , причому цю оцінку

не можна поліпшити за порядком (при  $k \rightarrow \infty$ ) ні для якого розподілу  $P$ , крім розподілу, при якому всі числа  $\log_r \frac{p_i}{P_j}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,

є цілими. Методи Шеннона і Хаффмена застосовні в тому разі, коли відомий розподіл ймовірностей. Для випадку невідомих ймовірностей доведено, що існує префіксне кодування  $\Phi_k$  блоків довжини  $k$  таке, що для будь-якого розподілу ймовірностей  $P$  має місце  $I_{\Phi_k}(P) < \frac{(m-1)\log_r k + c}{2k}$ .

де  $c$  — якась величина, не залежна від  $k$ . З другого боку, встановлено, що для будь-якого префіксного кодування  $\Phi_k$  блоків довжини  $k$  існує розподіл  $P$  такий, що  $I_{\Phi_k}(P) > \frac{(m-1)\log_r k - d}{2k}$ , де  $d$  — якась величина, не залежна від  $k$ .

Більшість праць із теорії кодування присвячено задачі побудови кодів, які допускають виправлення помилок (див. *Коди коректності*). Було досліджено переважно т. з. блокові коди, що являють собою підмножини  $B_r^n$  усіх слів довжини  $n$  в алфавіті  $B_r = \{0, 1, \dots, r-1\}$ . При цьому виявилось зручним розглядати алфавіт  $B_r$  як кільце лишків за мод  $r$  або як поле Галуа  $GF(r)$ , якщо  $r$  є степенем простого числа, а множини  $B_r^n$  розглядати як  $n$ -вимірний векторний простір над  $B_r$ . Код  $V \subset B_r^n$  наз. лінійним, якщо він утворює лінійний підпростір  $k$ -вимірності в просторі  $B_r^n$ . Під помилкою типу заміщення (або просто помилкою) розуміють випадковий перехід однієї букви алфавіту  $B_r$  в іншу. В просторі  $B_r^n$  вводять метрику Хеммінга, як число координат, у яких два вектори розрізняються, або, що те саме, — як мінім. число помилок, що переводять один вектор в інший. Кожний код  $V \subset B_r^n$  характеризується такими параметрами:  $n$  — довжина коду,  $r$  — основа коду,  $m$  — число векторів коду,  $k$  — вимірність лінійного коду і  $d$  — кодова відстань, яка дорівнює мінімуму віддалей між різними векторами коду. Є можливість виправити  $t$  або менше помилок у кожному векторі, що належить кодові  $V$ , тоді і тільки тоді, коли  $d \geq 2t + 1$ . Надмірність алфавітного кодування за допомогою коду  $V \subset B_r^n$  (коли вхідні букви рівномірно розподілені) характеризується величиною  $n - \log_r m$ . Тому, будуючи код з заданим числом виправлюваних помилок, бажано мінімізувати довжину  $n$  і максимізувати число елементів  $m$  (або вимірність  $k$  в разі лінійних кодів). Код, який має макс. число елементів при заданих значеннях решти параметрів, наз. максимальним.

Прикладом кодів для виправлення помилок є двійкові лінійні коди Хеммінга

$$H_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in B_2^n\}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_l^{(i)}) = (0, 0, \dots, 0),$$

де  $l = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$  і  $(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_l^{(i)})$  — вектор з 0 і 1, який є двійковим записом числа  $i$ , тобто такий, що  $\sum_{j=1}^l \sigma_j^{(i)} 2^{j-1} = i$ . Коди  $H_n$  ма-

ють параметри:  $n$  — будь-який,  $r = 2$ ,  $k = n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ ,  $d = 3$ . Слідом за кодами Хеммінга було запропоновано двійкові лінійні коди Ріда—Маллера порядку  $k$ , які можна визначити як множини стовпчиків значень функцій алгебри лишків від  $l$  змінних, що предстали поліномами степеня, не вищого за  $k$ . Ці коди мають параметри:  $n = 2^l$ ,  $r = 2$ ,

$d = 2^{l-k}$ ,  $k = \sum_{i=0}^l c_i$  і допускають мажоритар-

ний спосіб виправлення  $2^{l-k-1} - 1$  помилок.

Істотний прогрес у побудові коректуючих кодів пов'язаний з подальшою алгебраїзацією простору  $B_r^n$ , в тому разі, коли  $r$  є степенем простого числа (в цьому разі замість  $r$  писатимемо  $q$ ). Якщо кожному векторові  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  над полем Галуа  $q$  елементів  $GF(q)$  поставити у відповідність поліном  $\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$ , то будь-який лінійний код у  $B_r^n$  можна розглядати як підпростір в алгебрі поліномів за модулем  $x^n - 1$ . Код наз. циклічним, якщо він разом з кожним вектором містить усі його циклічні зсуви. Лінійний код є циклічним тоді і тільки тоді, коли він утворює ідеал в алгебрі поліномів за модулем  $x^n - 1$ . Таким чином, кожний лінійний циклічний код (ЛЦК)  $k$ -вимірності  $k$  можна розглядати як множини всіх поліномів, кратних в алгебрі поліномів за модулем  $x^n - 1$  якомусь поліному  $g(x)$  над  $GF(q)$  степеня  $n - k$ . Поліном  $g(x)$  наз. породжуючим поліномом коду. Досить плідним виявився метод побудови ЛЦК кодів, оснований на заданні коренів породжувального полінома, які лежать у певному розширенні поля  $GF(q)$ . Зокрема, ЛЦК коди Боуза—Чоудхурі—Хокінгема (коди BCH) для виправлення  $t$  помилок на довжині  $n = q^l - 1$  визначають за допомогою породжувального полінома, який має серед своїх коренів  $\xi, \xi^2, \dots, \xi^{2t}$ , де  $\xi$  — первісний елемент поля  $GF(q^l)$ . Коди BCH мають параметри:  $n = q^l - 1$ ,  $r = q$ ,  $d \geq 2t + 1$  і  $k \geq n - (2t - \lfloor \frac{2t}{q} \rfloor)$  і, якщо

$l > 1$  і  $k = n - 2t$ . При  $l = 1$  ці коди (називані кодами Ріда—Соломона) є максимальними при будь-якому  $t$ , а при  $q = 2$  і  $t = 1$  вони є циклічними аналогами макс. кодів Хеммінга довжини  $n = 2^l - 1$ . Циклічні аналоги кодів Ріда—Маллера (коди PRM) порядку  $k$  з дов-

жиною  $n = q^t - 1$  визначають за допомогою породжувального полінома, що має як свої корені всі степені  $\xi^i$  первісного елемента  $\xi$  поля  $GF(q^t)$  такі, що сума цифр у  $q$ -ічному представленні числа  $i$  менша за  $(q-1)t - k$ . Ці коди мають параметри:  $n = q^t - 1$ ,  $r = q$ ,  $d = (q - k + (q - 1) \times \left\lfloor \frac{k}{q-1} \right\rfloor) q^{t-1} - \left\lfloor \frac{k}{q-1} \right\rfloor$ , де

$T(t, i, q)$  — число впорядкованих розбиттів числа  $i$  на  $t$  цілих невід'ємних доданків, кожен з яких не перебільшує  $q - 1$ . Зокрема, код ЦРМ 1-го порядку має параметри:  $n = q^t - 1$ ,  $r = q$ ,  $d = (q - 1) q^{t-1}$ ,  $k = t$  і є максимальним. Квадратично-лишковими кодами (КЛ кодами) наз. двійкові ЛЦ коди простої довжини  $n$ , де  $n \equiv \pm 1 \pmod{8}$ , породжувальний поліном яких має корені  $\xi^i$ , де  $\xi$  — первісний корінь степеня  $n$  з одиниці, а  $i$  — квадратичний лишок за мод  $n$ . Вимірність КЛ кодів дорівнює  $k = \frac{n+1}{2}$ , а кодова відстань копарна й за-

довольняє нерівності  $d^2 > n$ , якщо  $n \equiv 1 \pmod{8}$  і  $d(2t-1) > n-1$ , якщо  $n \equiv -1 \pmod{8}$ . Відзначимо й двійкові лінійні (але не циклічні) коди довжини  $n = 2^t$  для виправлення  $t$  ( $t \geq 2$ ) помилок, які визначають за допомогою певного первісного елемента  $\xi$  поля  $GF(2^t)$  і різних елементів  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^t$ ) поля  $GF(2^t)$  так:

$$G_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in B_2^n,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\xi - \eta_i} = 0 \text{ в } GF(2^t)\}.$$

Коди  $G_n$  мають параметри:  $n = 2^t$ ,  $r = 2$ ,  $k \geq n - t$ ,  $d \geq 2t + 1$  і належать до широкого класу лінійних кодів.

Щоб а'ясувати питання про те, наскільки ті чи інші коди близькі до максимальних, розроблено оригінальні методи одержування оцінок допустимих параметрів кодів. Зокрема, для кодів, які виправляють  $t$  помилок, встановлено границі щільної упаковки

$$n \leq \frac{r^n}{\sum_{i=0}^t c_n^i (r-1)^i}, \quad (1)$$

якої досягають при  $r = q$ ,  $t = 1$ ,  $n = \frac{q^t - 1}{q - 1}$  ( $t = 1, 2, \dots$ ), а також при  $r = 2$ ,  $n = 2t + 1$ . Крім того, доведено, що цілі границі при  $r = q$  досягають ще лише для КЛ коду  $r = 2$ ,  $n = 23$ ,  $t = 3$ , а також для коду з параметрами  $r = 3$ ,  $n = 11$ ,  $t = 2$ . В разі, коли число  $t$  виправлюваних помилок досить мале порівняно з  $n$ , параметри двійкових БЧХ кодів досить близькі до границі

щільної упаковки. Проте для кодів, які виправляють фіксовану частину  $\mu = \frac{t}{n}$  помилок, істотно сильнішою (коли  $\mu < \frac{r-1}{2r}$ ) є верхня оцінка

$$n \leq \frac{(2t+1)r^n}{\sum_{i=0}^t c_n^i (r-1)^i}, \quad (2)$$

де

$$s = \left\lfloor \frac{r-1}{r} n \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2rt}{(r-1)n}} \right) \right\rfloor.$$

Найкращі коди для виправлення фіксованої частини помилок можна побудувати методом перебору. Їхні параметри задовольняють границю

$$n \geq \frac{r^n}{\sum_{i=0}^t c_n^i (r-1)^i} \quad (3)$$

а в випадку лінійних кодів — границю

$$k \geq \left\lfloor \log_q \frac{q^n}{1 + \sum_{i=0}^t c_{n-1}^i (q-1)^i} \right\rfloor.$$

Зближення оцінок (2) і (3) в однію з осн. пероза'язаних задач теорії кодування. Параметри кодів для виправлення великої кількості помилок задовольняють границю

$$n \leq \frac{rd}{rd - (r-1)n}, \text{ якщо } \frac{r-1}{r} < \frac{d}{n} \leq 1,$$

якої досягають для широкого класу кодів, зокрема, кодів ЦРМ 1-го порядку. Для довільних лінійних кодів справджується оцінка  $\sum_{i=0}^{k-1} \left| \frac{d}{q^i} \right| \leq n$ , причому для будь-яких  $n$  і  $d$

таким, що  $\frac{q-1}{q} < \frac{d}{n} \leq 1$ , існує лінійний код з параметрами  $q$ ,  $n$  і  $d$ , вимірність якого дорівнює найбільшому  $k$ , яке задовольняє цю нерівність.

Окрім задачі виправлення заданого числа помилок досліджено й задачу виправлення пачок помилок довжини  $b$ , тобто помилок типу заміщення, які бувають у межах відрізка з  $b$  послідовних символів, та задачу виправлення помилок інших типів. Серед осн. результатів, одержаних у цих напрямках, відзначимо такі. Якщо  $f(x)$  — невід'язний многочлен степеня  $t$  над  $GF(q)$ , порядок коренів якого дорівнює  $s$ , а  $h$  — будь-яке ціле, яке не діляться на  $s$ , то ЛЦ код у  $B_q^n$ , де  $n = n$ , о. к.  $(s, h)$ , з породжувальним поліномом  $f(x)$   $(x^h - 1)$  має вимірність  $k = n - h - t$  і має змогу виправити будь-яку пачку помилок довжини  $b = \min \left( t, \left\lfloor \frac{h+1}{2} \right\rfloor \right)$ .

Двійковий код  $U_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B_2^n$ ,

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{n-i} \equiv 0 \pmod{2n+1}\} \text{ дає змогу, коли}$$

$|2n+1|$  — просте число і 2 або -2 є первісним коренем за  $\text{mod } 2n+1$ , виправити будь-яку поодинокую арифм. помилку, яка полягає в зміні на  $\pm 2^i$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) числового значення кодового вектора. Двійковий код

$$W_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B_2^n,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot i \equiv 0 \pmod{n+1}\}$$

дає змогу виправити будь-яку поодинокую несприятливу помилку таку зміщення (напр., заміну символу 0 на символ 1), а також виправити будь-яку поодинокую помилку типу випадання (або вставлення) символу, супроводжувану зміщенням (відповідно збільшенням) на одиницю довжини вектора. Коди  $U_n$  і  $W_n$  близькі до максимальних у класі кодів, які виправляють поодинокі помилки вказаних типів. Практичне використання кодів з виправляним помилкам утруднюється тим, що прагнення зменшити надмірність кодів, як правило, веде до збільшення складності алгоритму декодування з виправлянням помилок. Ця обставина послужила поштовхом для глибокого дослідження можливих алгоритмів декодування відомих кодів для спрощення їх.

Великий вплив теорія кодування має на розв'язування інших задач кібернетики. Відомі приклади, коли використання тих чи інших кодових конструкцій приводило до істотного спрощення в питаннях, на перший погляд, досить далеких від традиційних задач теорії кодування. Слід сказати на використання коду Хеммінга при одержанні асимптотики мінім. числа контактів, достатнього для реалізації будь-якої функції логіки від  $n$  змінних; на використання нерівності (\*) при оцінці складності реалізації формулами одного класу функцій алгебри логіки, на використання кодів з рівними віддалами між векторами для завадостійкого кодування станів автомата асинхронного та ін. Задачі синтезу самокоректних схем контактих і самокоректних схем з функціональними елементами так само підказала теорія кодування, причому для побудови асимптотично оптимальних самокоректних схем з функціональними елементами використано коди для виправлення помилок.

Лит.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [6.6.30 гр. с. 783—820]. Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. Пер. с англ. М., 1964 [6.6.30 гр. с. 309—316]. Бертекмпф Э. Алгебраическая теория кодирования. Пер. с англ. М., 1971 [6.6.30 гр. с. 449—460].

В. Н. Тесляков

**КОДУВАННЯ СТАНІВ АВТОМАТА** — встановлення відповідності між станами автомата і наборами значень змінних, якими ці стани

кодуються К. с. а. — один з етапів синтезу автоматів структурного. Кожен кодувальний змінний відповідає елементарний автомат композитції, яка реалізує (або повинна реалізувати) первісний абстрактний автомат. Множина значень кожної кодувальної змінної збігається з множиною станів відповідного елементарного автомата. Кількість кодувальних змінних (тобто кількість елементарних автоматів) задає довжину коду. Задача К. с. а. — знайти таке кодування, яке задовольняло б певні задані умови. Ці умови, напр., можуть виражатися обмеженнями, що накладаються фіз. особливостями елементарних автоматів, вимогами надійності схеми тощо. Найпоширенішими є двійкове кодування. У цьому разі кодувальні змінні набувають значень у множині, що складається з двох елементів (двійковий структурний алфавіт), а елементарні автомати мають по два стани. Конкретними задачами кодування є, напр., задача протигонотного кодування, задача монотонного кодування і задача економічного кодування станів. Умови протигонотного кодування забороняють виникнення гонок у структурному автоматі й полягають у тому, що різні в часі перемикання елементарних автоматів не повинно впливати на результат при переході з одного стану в інший. Для монотонного кодування потрібно, щоб функції збудження структурного автомата були монотонними. Задача економічного кодування полягає у знаходженні такого кодування, яке б мінімізувало витрати апаратури при реалізації структурного автомата. Оскільки для деяких автоматів неможливо знайти кодування, яке б задовольняло задані умови, задача кодування тісно пов'язана з задачею відшукування достатніх умов існування кодування з заданими властивостями й алгоритмів перевірки цих умов. Перевірка існування та відшукування потрібного кодування, як правило, пов'язані з перебором і мають характер послідовного аналізу варіантів кодування. Ці задачі трудомісткі, тому для розв'язування їх користуються ЦОМ.

Лит.: Маденкитий Л. Н. Декодирование Е. Л. О. кодирования внутренних состояний некоторых многотактных устройств. «Кибернетика», 1966 № 1. Газарев В. Г., Пиль Ф. И. Синтез управляющих автоматов. М., 1970 [6.6.30 гр. с. 392—394]. Ю. В. Капитанов.

**КОДУВАННЯ ТЕОРІЯ** — розділ інформаційної теорії, який вивчає способи ототожнювання повідомлень із сигналами, якими відображують ці повідомлення. Кодування широко застосовують для передавання, зберігання й переробки інформації в різних системах. Завданням К. т. є найкраще в певному розумінні узгодження джерела інформації з каналом зв'язку (напр., забезпечення максимальної швидкості передавання для заданих статистичних характеристик повідомлення або забезпечення заданої завадостійкості при заданих характеристиках каналу та ін.) чи забезпечення максимальної швидкості переробки інформації при арифм. операціях та ін.). Відповідно до прийнятого критерію оптималь-

ції розрізняють кілька напрямів у К. т. Найвідомішими з них є статистичне кодування і завадостійке кодування. Об'єктами кодування можуть бути і дискретні (краще розвинуті), і безперервні повідомлення. Процес передавання дискретних повідомлень у системі зв'язку схематично можна показати так. Джерело дискретної інформації випадково вибирає повідомлення  $X_n$  з фіксованої множини  $M_1$ . У канал зв'язку надходить складний сигнал  $Y_n$ , завадогодібний вибраній з множини  $M_2$ . У каналі зв'язку сигнал  $Y_n$  під дією завад трансформується у випадковий сигнал  $Z$ . Після одержання його на виході приймального пристрою утворюється сигнал  $Y_n$ , який належить множині  $\bar{M}$ , вихідних складних сигналів. На основі аналізу сигналу  $Y_n$  приймається рішення ототожнити його з одним із повідомлень  $X_i$ , яке належить множині  $M_1$ . Якщо  $X_i = X_n$ , то передаве повідомлення прийнято правильно. Початок К. т. заклад 1948 амер. математик К. Шеннон (ж. 1916). Її сформулював і довів два основні результати, які визначили розвиток К. т. в наступні роки. Один із цих результатів стверджує, що для каналу без завад кодування дискретних повідомлень можна здійснити так, щоб середня кількість двійкових знаків на елемент алфавіту  $A$  була як завгодно близька до якоїсь, визначеної статистичними властивостями джерела, величини  $H$ , але не менша за неї ( $H$  — ентропія джерела інформації). Зазначене кодування названо статистичним (ефективним). Нехай у множині  $M_1$  є 4 незалежні елементи  $m_1, m_2, m_3$  і  $m_4$  з імовірністю появи їх відповідно  $p_1 = 0,5, p_2 = 0,25, p_3 = p_4 = 0,125$ . Побудуємо повідомлення на складний двійковий сигнал так:  $m_1 \leftrightarrow 00; m_2 \leftrightarrow 01; m_3 \leftrightarrow 10, m_4 \leftrightarrow 11$ . Якщо пропускна здатність каналу зв'язку  $C = 1000$  двійкових одиниць за секунду (*біт/с*), то на передавання одного елемента повідомлення потрібно два двійкові символи (0 або 1), а число елементів, передаваних за секунду, дорівнює 500. Число двійкових знаків, необхідних для передавання повідомлення, напр., з  $N = 10\,000$  елементів, дорівнює  $H = 20\,000$ . Наведений спосіб кодування повідомлень  $m_1 \leftrightarrow 00, m_2 \leftrightarrow 01, m_3 \leftrightarrow 10, m_4 \leftrightarrow 11$ , не є оптимальним (найкращим у розумінні наближення швидкості передавання до максимально можливої). Щоб побудувати опт. код, треба вважувати статистичну структуру джерела повідомлень. Для цього застосовують такий спосіб кодування:  $m_1 \leftrightarrow 0; m_2 \leftrightarrow 10; m_3 \leftrightarrow 110, m_4 \leftrightarrow 111$ . У цьому разі середня довжина закодированої послідовності з  $N$  елементів ( $N$  — велике число) дорівнює  $(1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 3 \cdot p_4) N = 1,75N$ . Якщо  $N = 10\,000$  елементів, то довжина закодированого повідомлення дорівнюватиме 17 500 двійкових знаків, тобто вона буде менша, аніж у попередньому випадку. Можна показати, що це значення є мінімальноможливим. Другий результат, що його одержав К. Шеннон, стверджує, що й для каналу зв'язку з

шумами існує такий спосіб кодування скінченної кількості інформації, за яким інформація передаватиметься з якою завгодно високою достовірністю, якщо тільки швидкість надходження її не перевищуватиме пропускну здатність каналу зв'язку. Реалізація цієї можливості нерозривно зв'язана з теорією й технікою *кодів коректурних* і завадостійких методів приймання. Теорема Шеннона становляють лише існування оптимальних або близьких до них кодів, але не вказують способу побудови їх. У загальному випадку умови осн. теорем Шеннона виконуються лише, якщо довжина кодованих повідомлень (кількість елементів алфавіту  $A$ , що становить один елемент множини  $M_1$ ) збільшується до нескінченності. До того ж виникає небажана велика затримка передаваного повідомлення в часі, і, крім того, доводиться ж істотно ускладнювати кодувачі й декодувачі пристроїв. Затрати, пов'язані з ускладненням цих пристроїв, можуть бути сумірними і навіть більшими за затрати на підвищення правдивості (завадостійкості) передавання внаслідок збільшення потужності передавача, розширення смуги частот каналу, ускладнення способу приймання (виділення корисного сигналу на фоні шумів у приймачі) і т. д.

Дослідження в галузі К. т. провадяться в основному в напрямі обґрунтування й розгляду умов осн. теорем Шеннона і в напрямі створення найкращих методів кодування інформації в тих ситуаціях, коли ці методи можливі, відповідно до цих теорем. Важливе значення надається пошукам способів кодування та декодування, близьких до оптимальних і досить простих при апаратурній реалізації. Методи розв'язування подібних задач (головним чином комбінаторні та алгебричні) розглянуті в ст. *Кодування автоматне*. Актуальною залишається проблема вибору опт. способу кодування за комплексним критерієм, який враховує економ. втрати, спричинювані затримкою в доставлянні інформації або завадами в каналі зв'язку і пристроїх обробки інформації, та затрати на ускладнення апаратури, зумовлені необхідністю застосовувати завадостійке кодування. Вибір опт. способу завадостійкого кодування при заданих умовах передавання (характеристиках завад у каналі зв'язку) також є складним завданням. Його, як правило, розв'язують для фіксованого методу приймання. Крім розв'язування загальних задач на оптимум, які полягають у відшукуванні кодів, що дають можливість досягти граничних значень швидкості або правдивості передавання, К. т. розглядає й ряд вузких задач, зокрема, задачу побудови коду з мінім. надлишністю повідомлень при заданій кількості елементів цього коду та його заданих коректуральній здатності. Усі загадані проблеми не можна вважати розв'язаними в повній мірі, хоч уже й є кілька практично важливих результатів, які дають можливість створити добрі системи передавання інформації.

До осн. результатів К. т. належать: методи побудови ефективних нерівномірних кодів для корельованого алфавіту  $A$  і деяких корельованих послідовностей елементів алфавіту  $A$ ; асимптотичні оцінки коректимальної адекватності коду при заданому числі  $n$  елементів у кодовому слові та обсязі коду  $N$ ; алгебраїчні методи побудови кодів, які виправляють задані різновиди помилок; методи декодування циклічних кодів; методи послідовного й мажоритарного декодування та методи побудови кодів, які дають можливість виключати й виправляти помилки при виконуваних арифм. і логіч. операціях. Результати К. т. широко застосовують в автоматиз. теорії, техніці зв'язку та радіолокації, біології (при вивченні особливостей передавання генетичної інформації) та в *лінійній математичній*. Статистичне (ефективне) і завадостійке кодування можна застосовувати не лише при передаванні інформації в просторі, а й при її арифм. і логічній обробці (див. Код), пошуку (піанаванні) та зберіганні (передаванні в часі). 6, зокрема, спроба покрити осн. результати завадостійкого кодування за теорією Шеннона й на обчислювальні канали (див. останню роботу в літ.).

Лит.: Харківська А. А. Борьба с помехами. М., 1963 [Біолог. с. 273—275]. Добрушин Р. Л. Теория оптимального кодирования информации. М.: Издательство «Наука», 1968. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [Біол. пр. с. 783—800]. Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965. Виноград С. Коуэн Дж. Нелинейные вычисления при наличии шумов. Пер. с англ. М., 1968 [Біолог. с. 111—112].

**КОЕФІЦІЄНТ ПЕРЕДАЧІ АОМ** — умовна міра зв'язності, яка визначає зв'язок між входними та вихідними сигналами розв'язуючих елементів або сукупністю їх і призначається для розв'язування деяких задач безінерційної лінійної розв'язуючої елементи характеризують коэф. передачі як такий, що дорівнює відношенню вихідного сигналу до вхідного, тому масштабна ланка, напр., має коефіцієнт передачі, який дорівнює якійсь константі. Коэф. передачі лінійного інерційного розв'язуючого елемента наз. *ш. передавальною функцією*.

Лит. див. по ст. Аналогові обчислювальні машини.

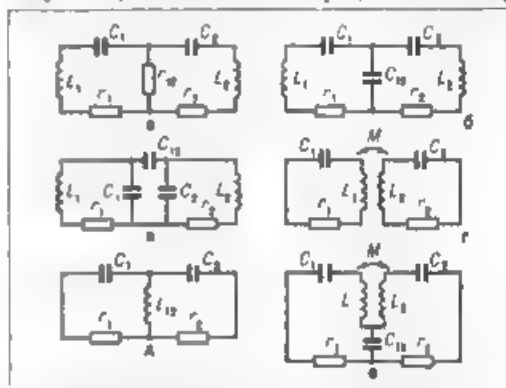
**КОЕФІЦІЄНТ ПОВНОТИ ПОШУКУ** — один з параметрів, що характеризує ефективність роботи інформаційно-пошукової системи.

К. п. п.  $R = \frac{a}{a+c}$ , де  $a$  — число релевантних документів, виданих системою у відповідь на інформаційний запит, а  $c$  — число нерелевантних документів в інформаційному масиві системи, не виданих системою. К. п. п. пов'язаний з коефіцієнтом *втрати інформації* під час пошуку  $Q$  співвідношенням  $R = 1 - Q$ . Див. Ефективність інформаційного пошуку технічна, Релевантність документа.

**КОЕФІЦІЄНТ ТОЧНОСТІ ПОШУКУ** — один з параметрів, що характеризує ефективність роботи інформаційно-пошукової системи.

К. т. п.  $P = \frac{a}{a+b}$ , де  $a$  — число релевантних документів, виданих системою у відповідь на інформаційний запит, а  $b$  — число нерелевантних документів, виданих при цьому системою. К. т. п. пов'язаний з коефіцієнтом *шуму пошукового*  $S$  співвідношенням  $P = 1 - S$ . Див. Ефективність інформаційного пошуку технічна, Релевантність документа.

**КОЛА ЗВ'ЯЗАНІ** — електричні кола (конттури), в яких процеси, що протікають в одному колі, впливають на процеси в іншому



Принципові схеми взаємозв'язаних електричних контурів з різними видами зв'язків.

кодів. Залежно від виду енергії, спільного для К. з., розрізняють магнітні, електр. і комбіновані зв'язки. Коли К. з. мають спільний резистор, зв'язок між ними наз. гальванічним (мал., а). При електричному зв'язку спільним для К. з. є електр. поле конденсаторів  $C_{12}$  (мал., б, в). Якщо у К. з. спільним є магнітний потік, то цей зв'язок наз. індуктивним (трансформаторним) (мал., г). В цьому випадку вплив здійснюється через взаємну індуктивність котушок  $L_1$  та  $L_2$  і автотрансформаторний (кондуктивний) зв'язок (мал., д), що здійснюється через спільну котушку індуктивності  $L_{22}$ . При комбінованому трансформаторно-емісному зв'язку кола впливають одне на одне за допомогою взаємної індуктивності котушок і спільного електр. поля конденсатора  $C_{12}$  (мал., е). К. з. застосовують при побудові аналогових обчислювальних машин.

**КОЛИВАННЯ ПРИХОВАНІ** — коливання в лінійних імпульсних системах керування, періоди яких кратні періодам замикання імпульсного елемента (ІЕ). Якщо на вході ІЕ є сигнал, у якому є коливання з частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$ , що відрізняються на  $2\pi n/T$  ( $T$  — період замикання ІЕ,  $n$  — ціле число), то існування таких коливань не можна встановити за реакцією імпульсної системи в дискретні моменти часу, бо інформація про її стан надходить лише в моменти замикання ІЕ. Цю особливість вводять стробоскопічним ефектом. Як відомо, частотні характеристики імпульсних систем  $W(j\omega)$

(див. Частотні характеристики систем автоматичного керування) є періодичними ф-ціями  $\bar{\omega}$  з періодом  $2\pi$  ( $\bar{\omega} = \omega T$ ). Цим зумовлена їхня однакова реакція на періодичні сигнали з різними частотами, кратними  $2\pi$ . Щоб позбутися К. п., треба, щоб найбільша частота спектра вхідного сигналу  $\bar{\omega}_0$  була набагато менша за частоту замикання елемента  $\bar{\omega}_n = 2\pi$  і, згідно з теоремою Котельникова, не перевищувала:  $\bar{\omega}_0 < \pi - \frac{\bar{\omega}_n}{2}$ . У замк-

нених імпульсних системах часто буває важко наперед встановити періоди коливань, які можуть виникнути в них. Проте й у цьому разі є умова відсутності К. п., яку накладають на полюси  $\bar{\omega}_0$  передаточної функції  $W(\bar{\omega})$  розімкненої системи:  $|\operatorname{Im} \bar{\omega}_0| < \pi$ . Фіз. суть цієї умови полягає в тому, що період інтервалу замикання  $1/T$  має бути менший за будьякий період власних коливань неперервної частини системи.

**КОДМОГОРОВА РІВНЯННЯ** — рівняння, які описують перехідні ймовірності в теорії марковських процесів.

**КОМАНД МОДИФІКАЦІЯ** — автоматична зміна команд програми в процесі виконання її. В команді може бути змінено будь яку її частину: код операції, адресу та ознаки. Здобільшого модифікують адресу частини команди при обробці даних, розміщених у різних місцях пам'яті, для налаштування програми за місцем і т. ін. За допомогою К. м. вдається будувати компактні програми. Технічно К. м. можна реалізувати з використанням індиксних *register*, за допомогою непрямої адресації (*indirect addressing*) і т. д.

**КОМАНД СИСТЕМА** — сукупність усіх можливих типів команд, реалізованих у даній цифровій обчислювальній машині, розглядувана відповідно до закону композиції, за допомогою якого їх конструюють з кодів операцій і адрес. Мовою К. с. задають програму для ЦОМ. К. с. характеризуються кількістю типів операцій, прийнятими командами форматами тощо. Машини, в яких набори операцій функціонально однакові, можуть мати різні К. с., які відрізняються одна від одної, напр., форматами, прийнятими законом композиції тощо. Всі команди машини можуть мати одну фіксовану довжину. Деякі машини мають команди двох, трьох і більше стандартних розмірів. Їх машини зі змінною структурою команд. Вибираючи К. с., враховують простоту тех. реалізації та зручність програмування ЦОМ. Щоб зменшити затрати на створення математичного забезпечення ЦОМ, розробляють чимало машин, сумісних за програмуванням, тобто таких, що мають ту саму або близькі К. с.

**КОМАНДА МАШИНИ** — елементарний припис цифровій обчислювальній машині, що передбачає виконання певних операцій. У К. містяться інформація, яка визначає дію ма-

шини протягом деякого відрізка часу. К. має таку інформацію: 1) код операції; 2) імена (назви) об'єктів, які беруть участь в операції; 3) адресу результату; 4) адресу наступної К.

**КОМАНДИ ФОРМАТ** — опис машинної команди та структурних частин її. Формат вказує на організацію команди й метод записування інформації. В межах однієї системи команд можуть бути К. ф., які відрізняються структурою частин і довжиною командного слова.

**КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ** — частина математики, в якій об'єктом дослідження є множини, що складаються з дискретних (відособлених) елементів. Множини можуть бути різними: скінченні, нескінченні, такі, що допускають усюди впорядкованість елементів, і такі, що мають складнішу структуру. Специфіка методів К. а. полягає в застосуванні двох видів операцій: відбору підмножин (їх наз. вибірками) і операції впорядкування. Ці операції наз. комбінаторними. Задачі К. а. поділяють в основному на три типи. В задачах 1-го типу розв'язують питання про кількість можливих розв'язків, тобто потрібних вибірок чи розміщень (конфігурацій). У задачах 2-го типу — про існування розв'язків і їхні можливості. В задачах 3-го типу — про способи відшукування опт. розв'язків, тобто таких, яким властива екстремальність щодо заданої властивості. На розвиток К. а. великою мірою впливають застосування математики, напр., матем. обробка результатів експериментів. К. а. становить загальну теор. основу т. з. дискретної математики (багатьох матем. методів мінералогії, графік теорії, програмування цілочасового, скінченних ґрун тощо). Оперативну частину К. а. становлять такі методи: безпосереднього підрахунку кількості вибірок, твірних функцій, логічні, екстремальні, геометричні та ін. методи.

Методи безпосереднього підрахунку кількості вибірок відомі здавна. Вони становлять зміст т. з. елементарної комбінаторики. Цими методами знаходять числа  $r$ -вибірок, що їх одержують з  $n$  елементів відповідної множини. Вибірки поділяють на  $r$ -сполучення, коли беруть до уваги лише елементи, які складають вибірку, безвідносно до їхнього взаємного розміщення, і  $r$ -перестановки, коли враховують і порядок слідування елементів. Методи безпосереднього підрахунку різноманітні. Виведення відповідних формул баується, в основному, на двох логіч. правилах: а) правило суми: нехай  $n$  є множини  $S$  вибірку  $A$  можна одержати  $p$  способами, а вибірку  $B$  —  $q$  способами. Вибірки  $A$  й  $B$  не можна одержати одночасно. В такій ситуації вибірку  $A$  чи вибірку  $B$  можна одержати  $p + q$  способами; б) правило добутку: якщо  $n$  є множини  $S$  вибірку  $A$  можна одержати  $p$  способами, а після неї  $q$  способами одержати вибірку  $B$ , то вибірки  $A$  й  $B$  в зазначеному порядку можна здійснити  $pq$  способами.



З формул елементарної комбінаторики основними є

$$P(n, r) = n(n-1)\dots(n-r+1)$$

(число  $r$ -перестановок без повторення елементів),

$$P = n^r$$

(число  $r$ -перестановок з повторенням елементів);

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(число  $r$ -сполучень),

$$C = \binom{n+r-1}{r}$$

(число  $r$ -сполучень, коли допущено повторення елементів);

$$A = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

(число впорядкованих розбиттів  $n$ -множини на неперетинні підмножини, що складаються відповідно з  $r_1, r_2, \dots, r_k$  елементів). Є дуже багато формул елементарної комбінаторики й різноманітних прийомів одержування їх.

Метод твірних функцій сформувався в працях Л. Ейлера і П. Лапласа. Застосовують його не тільки в К. а., а й у теорії чисел, *імовірностей* *теорії* та в алгебрі. За його допомогою визначають послідовності об'єктів, напр.,  $r$ -вибір з даної множини, або їхніх чисел. Значення методу полягає в тому, що він дає змогу оперувати не з окремими комбінаторними об'єктами, а з класами їх, а це має певні практичні переваги.

Твірна  $\phi$ -цім для числа  $r$ -сполучень

$$A(t) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r = (1+t)^n = \prod_{\lambda} (1+t)^{a_{\lambda}}$$

твірна  $\phi$ -цім для класу самих  $r$ -сполучень елементів, які тут позначено  $a_1, \dots, a_n$ , має вигляд

$$A(t) = \prod_{\lambda=1}^n (1 + a_{\lambda} t) = \sum_{r=0}^n a_r t^r,$$

де  $a_r$  — симетричні  $\phi$ -цім, які становлять шукані сукупності  $r$ -сполучень. Якщо деякі елементи  $a_{\lambda}$  повторюються, відповідні біноми виду  $(1 + a_{\lambda} t)$  замінюють долями, складеними з тих членів стандартного полінома  $\sum_{r=0}^n a_r t^r$ , в яких степені параметра  $t$  дорівнюють числу (або числам) повторень. Твірну  $\phi$ -цім для числа  $r$ -перестановок одержують у вигляді

$$(1+t)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r = \sum_{r=0}^n P(n, r) \frac{t^r}{r!} = E(t).$$

У тому разі, коли допускають повторення елементів у перестановках, стандартний полі-

ном вибирають у вигляді  $\sum_{r=0}^n \frac{t^r}{r!}$ . А нацисати

формули, де фігурували б самі лише перестановки, неможливо через те, що не можна розрізнити порядок співмножників у добутках.

Існує велика різноманітність видів твірних  $\phi$ -цім, зумовлена різноманітністю класів виборів. Апарат оперування з твірними  $\phi$ -цім виявляється здебільшого дуже громоздким. Для надання йому більшої алгоритмічності до цього часу нагромаджено порівняно багато засобів: спец. оператори, символічні числення, спец. числа і спец.  $\phi$ -цім. Ступінь загальності, досягнутої методом твірних  $\phi$ -цім у К. а., характеризується тим, що зараз вдається будувати твірні  $\phi$ -цім для нееквівалентних комбінаторних об'єктів (теорія Нойса та її узагальнення). Ці об'єкти можна наділяти вагами, тобто числовими характеристиками, які визначаються умовами задачі, в понятті еквівалентності можна вводити через групу підстановок.

Логічні методи в К. а. служать для аналізу структури скінченних дискретних множин і для розв'язування питання про існування (чи неіснування) розв'язку комбінаторних задач. Вони характеризуються тим, що в них передізування постулатів перед логічним аналізом, який не завжди ще приводить до регулярних алгоритмів.

Комбінаторні задачі, в яких треба поділяти множини елементів на підмножини залежно від того, чи мають елементи задану сукупність властивостей чи не мають, розв'язують здебільшого методом включення й виключення.

Оси.  $\phi$ -ла, яка виражає суть методу: нехай дано  $n$ -множину елементів і  $N$ -множину властивостей  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , які кожен з елементів  $n$ -множини може мати в якійсь комбінації. Символ:  $\bar{p}_k$  означає відсутність властивості  $p_k$ . Тоді множину елементів, які не мають жодної з заданих властивостей, знаходять за  $\phi$ -дою

$$\begin{aligned} n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N) &= n - \sum_{i=1}^N n(p_i) + \\ &+ \sum_{i,j} n(p_i, p_j) - \dots + (-1)^N \times \\ &\times n(p_1, p_2, \dots, p_N). \end{aligned}$$

Ця  $\phi$ -ла показує, що для того, щоб одержати множину елементів, указану в лівій частині рівності, треба з усієї  $n$ -множини виключити елементи, які мають хоча б одну з заданих властивостей. Але при цьому елементи, які мають дві властивості, виявляються виключеними двічі. Тому їх треба повернути і т. д. Отже, метод полягає в тому, що попереміно відкидають і повертають підмножини, це й відображено в його назві. Метод узагальнено на випадки, коли йдеться про будь-які вибірки властивостей, і на випадок, коли елементи наділено вагами.

Аналізуючи структуру множин, які розглядають разом з певною сукупністю їхніх підмножин, часто застосовують метод заміни підмножин їхніми представниками. В К. а. розроблено необхідні й достатні умови існування систем різних, загальних та ін. видів представників, а для деяких з них знайдено алгоритми знаходження їх. Застосування методу систем представників численні й різноманітні, напр., у теорії сіток при дослідженні допустимості потоків.

Розглянемо клас задач про розподіл елементів  $n$ -множини по  $t$  комірках. Обумовимо, що елементи повинні розподілятися пачками по  $r$  елементів у кожній. Розподіл має бути такий, щоб забезпечити потрапляння в якусь  $i$ -у комірку  $q_i$  елементів ( $i = 1, \dots, t$ ). У теоремі Рамсея (1930) доведено, що існує мінім.  $N(q_1, q_2, \dots, q_t; r)$  множина, починаючи з якої заданій розподіл виявляється забезпеченим. Але й досі відомого регулярного алгоритму для визначення числа  $N(q_1, q_2, \dots, q_t; r)$  не знайдено.

Екстремальні методи К. а. Нехай задано  $n$ -множину елементів. На ній визначено множину  $P$  комбінаторних об'єктів:  $r$ -перестановок,  $r$ -сполучень, скінчених послідовностей тощо. На цій множині задано функцію  $F$ . Треба знайти екстремум цієї функції або ж відшукати ті елементи (чи той елемент) множини  $P$ , на яких цей екстремум досягається. Напр.,  $n$ -множина населених пунктів, віддалі між кожною парою яких відома. Треба з-поміж усіх можливих маршрутів знайти для листової мінімальний.

Для розв'язування задач такого типу треба, по-перше, мати в розпорядженні множину значень функції  $F$  і вміти перебирати їх і, по-друге, розробити метод порівняння цих значень. Щоб полегшити розв'язування таких задач, розробили й застосовують багато алгоритмів. Сильна ідея всіх методів полягає в заміні повного перебору всіх варіантів частинними переборами меншого обсягу. Варія для здійснення цієї ідеї немає, очевидно, іншого шляху, як відкидання під множини, про які наперед відомо, що вони не містять шуканого екстремуму, і заужування сфери перспективних варіантів до розмірів, які допускають неважке перебирання. Методи при цьому виходять досить різноманітні, визначаються вони структурою відповідних множин. Найширше застосовують такі три групи методів: локальних оптимізацій, випадкового пошуку, гілок і границь. У зв'язку з тим, що розв'язування екстремальних комбінаторних задач пов'язане з перебором значних обчисл. труднощів, сукупність відповідних методів склалася в окрему галузь обчисл. математики — дискретне програмування.

Таблицно-схемні методи К. а. застосовують для дослідження комбінаторних розміщень. В основі уявлення про ці розміщення лежить заг. поняття системи інцидентностей. Дві множини утворюють та-

ку систему, якщо між їхніми елементами встановлено відношення інцидентності, яке виражається поняттями: «належить», «містить», «лежить на...», «проходить через...» залежно від інтерпретації. Зображують системи інцидентності двоакірними розміщеними таблицями. В К. а. вивчають властивості деякої ширшої класу таблиць, які в інтерпретаціях комбінаторних задач.

У дослідженнях комбінаторних розміщень велику роль відіграє апарат спец. матриць. Нехай дано  $n$ -множину  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  і  $m$ -вибірку  $\Pi$  підмножин:  $M(S) = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ . Побудуємо  $(m \times n)$ -матрицю  $A = (a_{ij})$ :  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , в якій  $a_{ij} = 1$ , якщо  $s_j \in S_i$ ,  $0$ , в інших випадках.

Одержана бінарна матриця дає повний опис системи інцидентності. За допомогою таких матриць часто не тільки інтерпретують, а й доводять теореми і розв'язують задачі К. а. Залежно від типу комбінаторних задач, розв'язуючи їх, використовують різні типи матриць: переставні, шпарних порівнювань, матриці Адамара, стохастичні та інші. Сучасні узагальнення цієї теорії залючують виявлення класів спец. матриць та інваріантів. Є багато типів комбінаторних таблиць і схем, які мають велике практичне й теор. значення, напр., латинські прямокутники й квадрати, системи трійок Штейнера і Кірмана. Великим класом таблиць, який активно досліджують, є блок-схеми.

Блок-схеми вводять так: нехай  $v$ -множина елементів  $m_i$  (напр., даних експерименту):  $i = 1, 2, \dots, v$ . Елементи цієї множини розміщено у  $b$  стовпцях блоках, які є підмножинами  $M_1, M_2, \dots, M_b$  початкової множини. Їхні перелічування не обов'язково пусті. Число елементів у блоці  $M_i$  назовемо його місткістю і позначимо  $k_i$ . Кожен елемент може бути в кількох блоках. Нехай  $r_i$  — число блоків, що містять елемент  $m_i$ ,  $\lambda_p = \left( \binom{v}{p} \right)$  — число блоків, у яких з'яв-

ляється  $p$ -а неупорядкована пара елементів. Отже, блок-схема є комбінаторне розміщення, параметрами якого є  $v, b, k_j, r_i, \lambda_p$ . Якщо замість пар розглядають трійки чи інші вибори елементів, то такі розміщення наз. тактичними конфігураціями. Є велика різноманітність видів блок-схем. Латинські квадрати — приклад повних блок-схем, тобто таких, у яких у кожному блоці містяться всі елементи множини ( $k_j = v$ ,  $j = 1, 2, \dots, b$ ). Системи трійок Штейнера — частинні види неповних ( $k_j < v$ ) зрівноважених ( $\lambda_p = \lambda = \text{const}$ ,  $k_j = k = \text{const}$ ,  $r_i = r = \text{const}$ ) блок-схем, для яких  $k = 3$ ,  $\lambda = 1$ . Дослідження в області блок-схем зосереджуються тепер навколо проблем існування (чи неіснування) окремих видів блок-схем,

значення їхніх властивостей, знаходження ефективних методів побудови їх. При дослідженні цих таблиць використовують результати теорії чисел, *теорії теорії*, теорії матриць, опуклих тіл тощо. При цьому виявляється спільність теоретичних, по суті комбінаторних, основ ряду розділів сучас. математики.

Геометричні методи К. а. входять в геом. інтерпретації комбінаторних ситуацій на допоміжній множині точок, відрізків тощо. Послідовно застосовуючи в К. а. такі інтерпретації, виділяють спец. види геом. систем ідентичностей. Елементи, які взято за початкові, невизначувані, названо так: «точки»  $P$  і «лінії»  $L$ . Відношення ідентичності  $P \in L$  конкретизовано так: «точка  $P$  лежить на лінії  $L$ » або «лінія  $L$  містить точку  $P$ ». Ці системи, врешті, було підпорядковано системам аксіом типу аксіом геометрії. Уточнення й додаткові пояснення або видозміни вихідних тверджень приводять до різних видів скінченних геометрій, до проблем комбінаторної топології, дискретної геометрії, проєктивної геометрії, геом. теорії чисел, теорії графів і комбінаторної геометрії. Наявність простіших геом. комбінаторних систем є скінченні площини, тобто системи ідентичності двох скінчених множин (точок і ліній), підпорядкованих системі аксіом проєктивної геометрії. Проте теорію й цих комбінаторних систем ще не розроблено, зокрема, немає умов існування скінчених площин. З багатоманітних систем геом. ідентичностей велику увагу привертають ті системи, де ідентичність вводить між множиною елементів і деякими множинами пар цих елементів.

Більшу частину розглянутих вище методів К. а. було розроблено для тих задач, об'єкти яких допускали лінійну впорядкованість своїх елементів. Проте заг. комбінаторна теорія не передбачає необхідності такого обмеження. Послідовний, систематичний розвиток комбінаторних методів для множин загальної природи — одне з головних завдань сучас. К. а. Відношення порядку (символ  $\leq$ ) у множинах вводить формально за допомогою аксіом: а) рефлексивності:  $a \leq a$  для будь-якого  $a \in S$ ; б) рівності: якщо  $a, b \in S$  і  $a \leq b$ ,  $b \leq a$ , то  $a = b$ ; в) транзитивності: якщо  $a \leq b$  і  $b \leq c$ , то  $a \leq c$ . Додавання четвертої аксіом про відсутність непорівнянних елементів: г) для будь-яких  $a, b \in S$ , або  $a \leq b$ , або  $b \leq a$  означає вже множину, впорядковану скрізь, чи ланцюг.

Трьма першими аксіомами визначаються частково впорядковані множини: кількість таких множин  $S(2) = 3$ ;  $S(3) = 19$ ;  $S(4) = 219$ ;  $S(5) = 4231$ , а поміж них неізоморфних:  $S_1(4) = 16$ ;  $S_2(5) = 63$ . Для  $n > 6$  результатів ще не одержано.

Дослідження в галузі частково впорядкованих множин провадяться переважно на множинах усіх підмножин скінчених множин і на множинах усіх натуральних чисел, де відношення порядку  $a \leq b$  означає, що  $a$  ділить  $b$ . Серед можливих типів частково

впорядкованих множин велику увагу приділяють *структурам*.

К. а. розвивається на межі ряду областей математики. Протягом свого розвитку він зазнавав сильних впливів. Взаємопроникнення методів доходило іноді до того, що К. а. помилково відносили до якогось із розділів математики, який сформувався до того часу.

Лит.: Рибинська К. А. Введення в комбінаторний аналіз. М. 1972 [бібліогр. с. 249–250]. Каліфа А. Introduction à la combinatoire en vue des applications. Paris, 1958. Холл М. Комбінаторика. Пер. с англ. М., 1970 [бібліогр. с. 418].  
К. О. Рибинська.

**КОМБІНАЦІЙНА СХЕМА** — правильна схема, побудована з елементів, що є *автожестами без пам'яті*. Правильною наз. схему без *теоретичних зв'язків*, з'єднання елементів у якій виконано за правилами, що відповідають (у функціональному відношенні) операції суперпозиції функцій. Відповідно до цього й оператор, що його реалізує К. с., є певною функцією *алгебри логіки*. Осн. задачами теорії К. с. є задачі аналізу й синтезу цих схем. Задача аналізу полягає в зааходженні заг. конструктивного прийому (*алгоритму*), що дає змогу за будь-якою К. с. побудувати вихідні ф-ції цієї схеми і на яким визначити залежність сигналу на виході з  $n$  виходів від сигналів на входах. Розв'язування цієї задачі полягає в записуванні суперпозицій, що їх визначають в'єднання елементів схеми. Задача синтезу зводиться до представлення функцій, які реалізує К. с., у вигляді суперпозиції ф-цій, що їх реалізує певний набір перед заданим набір логічних елементів ЦОМ. Така задача має розв'язок лише в тому разі, якщо задана множина логіч. елементів становить функціонально повну систему. Для розв'язування задачі застосовують апарат алгебри логіки, що набув розвитку в межах *логіки математичної*. У цьому разі вимога функціональної повноти системи логіч. елементів виконується, якщо функції, реалізовані цими елементами, становлять функціонально повний набір.

К. с. з кількома виходами завжди можна зобразити як певну композицію схем, у кожній з яких є лише один вихід. Завдяки цьому розв'язування задачі синтезу схем з довільним числом виходів можна звести до розв'язування задачі синтезу К. с. з одним виходом, а ця задача, в свою чергу, зводиться до задачі побудови формули алгебри логіки, що має собою вихідну ф-цію схеми. Дуже близька до неї задача побудови оптимальних з погляду тих чи інших критеріїв К. с. веде до задачі мінімізації відповідних аналітичних уявлень. Хоч на практиці дуже часто обмежуються побудовою аналітичного представлення вихідної ф-ції К. с. та її оптимізацією, розв'язання цих задач є лише частковим розв'язанням заг. задачі синтезу К. с. і в заг. випадку може також виявитися потреба розв'язувати такі задачі: виразити аналітичні представлення ф-цій, реалізованих К. с. і певною заданою системою операторів, забезпечувати потрібну якість фіз.

характеристик схем, порівнювати різні варіанти схем.

Представляти вихідну ф-цію К. с. з допомогою певної заданої системи операторів необхідно в тому разі, коли система ф-цій, що її реалізує застосовувана в процесі побудови К. с. система елементів, не збігається з базисною системою ф-цій, використовуваною під час побудови аналітичного представлення функції (запр., як пошуку систему використовують систему елементів, що реалізує функцію штрих Шеффера, а як базис — систему, яка складається з функцій — диз'юнкції, кон'юнкції та інверсії). Розв'язування цієї задачі полягає в записуванні ф-ції, що її реалізує К. с., як суперпозиції ф-цій, які реалізують логіч. елементи. Внаслідок повноти системи логіч. ф-цій ця задача має розв'язок завжди, але пероведення в операторний запис аналітичного представлення, оптимального з погляду будь-якого критерію, в заг. випадку не веде до одержання запису, оптимального з погляду цього самого критерію. Потрібна якість фіз. характеристики забезпечується представленням схеми у вигляді структури, що складається з операторів, що їх реалізують окремі логіч. елементи цієї системи, перевіркою того, чи задовольняє схема умови правильності відображення значень логіч. змінних у відповідній їм області фіз. значень, а також підрахунком часових ф-цій схеми. Необхідність представляти схеми у вигляді структури зумовлена тим, що операторний запис ф-ції виходу К. с. не враховує навантажених характеристик логіч. елементів, а також потреби взаємної синхронізації їх, а, отже, не дає повного уявлення про реальну схему. Зазначене представлення ґрунтується на нумерації операторів з урахуванням навантажених характеристик відповідних логіч. елементів. Під час нумерації з кожним оператором виставляють пару чисел: номер каскаду, в якому стоїть елемент, і номер елемента в каскаді. Розроблено заг. принципи побудови К. с. з довільною значністю структурного алфавіту. Найбільше практичне значення має теорія К. с. в двоцифровій структурній алфавітом.

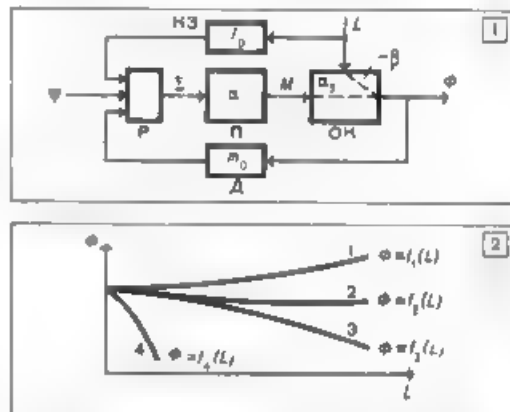
Літ. Глушков В. М. Синтез цифрових автоматів. М., 1982 [Бібліогр. с. 464-469]. Рабинович З. А., Калитонкова Ю. В. Общие принципы синтеза комбинационных схем. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1983 т. 2, № 4. Ю. Л. Ісаченко.

**КОМБІНОВАНА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАШИНА** — те саме, що й *гібридна обчислювальна машина*.

**КОМБІНОВАНА СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ** — система, яка використовує одночасно принципи керування за відхиленням (принцип негативного зворотного зв'язку) і принцип керування за збуренням. Першими К. с. а. к., які об'єднують обидва ці принципи, були системи регулювання напруги й струму навантаження електр. генераторів. Зв'язок за збуренням — струмом навантаження генераторів часто наз. кожним з двох зв'язків в автоматичних системах

регулювання напруги. Іншим прикладом К. с. а. к. є система регулювання швидкості обертання ротора електродвигуна (автоматизований електропривод). Тут зв'язок за відхиленням регульованої величини — швидкості обертання від заданої доповнюється зв'язком за основним збуренням — моментом навантаження двигуна. Широкого застосування набули К. с. а. к. тиску пари, в яких зв'язок за відхиленням тиску пари від заданого значення доповнюється зв'язком за витратою пари.

Структурну блок-схему К. с. а. к. наведено на мал. 1.



1. Структурна схема комбінованої системи автоматичного керування: ОН — об'єкт керування, Р — регулятор, І — підсилювач, КЗ — компенсуючий зв'язок, Д — давач,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, \mu_0$  — коефіцієнти підсилювання, закон регулювання  $\Sigma = \Psi - \mu_0 \Phi$ ,  $\Phi = f_1(L)$ ,  $\Phi$  — регульована величина  $\Psi$  — задане значення,  $L$  — збурення, М — керуюче ділення. 2. Статична характеристика комбінованої системи: 1 — від об'єкта, 2 — астигматична ластовина, 3 — додатний статизм, 4 — об'єкт без регулятора.

Одна з переваг К. с. а. к. полягає в можливості достатньо широко змінювати нахил статичної характеристики системи  $\Phi = f(L)$ , де  $\Phi$  — регульована величина, а  $L$  — осн. зовнішнє збурення (мал. 2). Така можливість забезпечується відповідним вибором коефіцієнта зв'язку за збуренням  $\mu_0$ . Вибір нахилу статичної характеристики (статизму системи) не пов'язаний із заг. коефіцієнтом підсилення контура зворотного зв'язку. К. с. а. к. може мати великий нахил характеристики  $\Phi = f(L)$  за високим коефіцієнтом підсилення системи. Зокрема, таке налаштування необхідне для стійкої паралельної роботи електр. генераторів (або парових котлів) на спільне навантаження, яке розподіляється пропорційно нахилам статичних характеристик систем регулювання кожного з генераторів (або котлів). Друга перевага К. с. а. к. виявляється при розв'язуванні проблем динаміки й точності. За допомогою відповідних налаштувань параметрів замкнутого й розімненого контурів можна незалежно забезпечити потрібну якість перехідного процесу при потрібному статизмі. Відповідним вибором параметрів К. с. а. к.

можна досягнути виконання умов *інваріантності систем автоматичного керування*.

Виконання умов інваріантності дає можливість усунути усталену складову похибку лінійної системи керування, що її спричинюють збурення, за якими здійснюють компенсацію зв'язки (досягають повної або абсолютної інваріантності). Похибка, що її спричинюють інші збурення, зв'язком за даних збуренням не усувається. Фіз. пояснення повного усунення похибки пов'язане з наявністю в системі двох каналів для передачі дії збурення на дану інваріантну величину. Тут можлива і недокомпенсація, і перекомпенсація похибки (від'ємний статизм). Виконання умов інваріантності не впливає на умови стійкості системи, бо компенсуючі зв'язки розмкнені. Цю властивість властивістю ортогональності умов інваріантності й умов стійкості. Дуже близькими за властивостями до К. с. а. к. є системи автомат. регулювання, в яких можна здійснити т. в. непряме викривлення збурень (див. *Диференціальна система автоматичного керування*). Широкі можливості у виборі статичних і динамічних властивостей при налаштуванні К. с. а. к. визначають їхню основу перевагу порівняно з некомбінованими системами.

Теорія К. с. а. к. має специфічні проблеми. Зв'язок на збуренням є чисто детермінованим, тобто потребує точного розрахунку значень параметрів системи для кожного об'єкта керування. А на параметри зворотного зв'язку за відхиленням регульованої величини не накладають таких жорстких вимог. Цей зв'язок реалізується у вигляді т. а. коректора. Коректор повинен компенсувати дію всіх завад, яких не враховують у розрахунок зв'язку на збуренням, і всі неточності цього розрахунку. Загальна ідея комбінованого керування поширюється на ряд «великих», або складних систем керування. В кожній такій системі звичайно можна виділити детерміновану частину, яка піддається детальному аналізу, розрахункові й жорсткому плануванню, й індетерміновану, для якої такий аналіз практично неможливий.

Лит. Кулебак В. С. О поведении непрерывно возмущаемых автоматизированных линейных систем // Доклады АН СССР. Новая серия, 1949, т. 64, № 5; Кулебак В. С. О выборе оптимальных параметров автоматических регуляторов в следящих системах // Доклады АН СССР. Новая серия, 1951, т. 77, № 2; Иваницкий А. Г. Технические характеристики. К., 1962 (Библиогр. с. 412-416); Иващенко О. Г., Комаров Б. О. Недокомпенсация, абсолютная инвариантность и перекомпенсация в системах автоматического регулирования. «Автоматика», 1964, № 2.

О. Г. Иващенко.  
**КОМБІНОВАНІ МНОЖИЛЬНО-ДІЛІЛЬНІ ПРИБОРИ** — див. *Множительно-дильные приборы*

**КОМІРКА ЗАПАМ'ЯТОВУВАЛЬНОГО ПРИБОРОЮ** — сукупність запам'ятовувальних елементів нагромаджувача (длинами запам'ятовувального середовища), призначена для зберігання одного слова (числа). К. з. п. характеризується числом розрядів (*бітс*), тобто макс. кількістю двійкових розрядів

слова, яка одночасно може зберігатися в ній у свою чергу, кількість К. з. п. визначає ємність ЗП. Здебільшого записування (зчитування) слова в К. з. п. провадиться шляхом визначення часово-просторових координат за присвоєною їй адресою. Можуть бути й інші способи шукання інформації, записаної в К. з. п., напр., асоціативний (див. *Запам'ятовувальний пристрій асоціативний*). Довжина К. з. п. здебільшого дорівнює довжині маш. слова або кратна їй, а термін «комірка пам'яті», який використовують у програмуванні, ототожнюється не з К. з. п., а з частиною її або з кількома К. з. п., які відповідають довжині маш. слова.

Ф. Н. Зинко.

**КОМІТ** — мови програмування, орієнтована на описування задач *лінійних математичної та машинного перекладу*, а також для інших задач логічного характеру. Розроблено її в США. 6 варіант К., розширений засобами мови **ФОРТРАН**. Оброблювану К. інформацію (напр., текст) поділяють у робочому полі на частини — константи, позначувані символами (напр., текст, фраза, слово, частина слова), кожна з яких може мати одну числову чи мідьку логіч. ознак. Програму записують на К. як послідовність правил. Правило може складатися з 5 частин: назва, вміст (обов'язковий), ліва частина, права частина, координувальна частина (необов'язковий). Правило визначає порядок обробки послідовності розміщених у робочому полі конституент, що їх задає ліва частина правила. Пошук адекватного ланцюжка в робочому полі має асоціативний характер. Конституенти ланцюжка лівої частини й робочого поля вважають адекватними, якщо збігаються їхні символи й відповідно дотримуються вкладених ознак та їхніх значень. У правій частині правила зазначають, як обробити знайдений ланцюжок конституент. Можна переставляти, закреслювати та додавати нові конституенти в робочому полі й переносити, закреслювати та перелічувати ознаки конституент тощо. В координуючій частині можна зазначати будь-яку кількість наступних операцій: 1) введення — виведення в кількох форматах; 2) керування потоком інформації, що надходить у диспетчер і з нього; 3) керування операціями пошуку в списку (список становить собою ряд правил, у лівій частині яких може стояти лише одна конституента без ознак; списки можна використовувати для словників); 4) укрупнення і подрібнення конституент робочого поля; 5) операції з «поліціями», що відіграють роль адресної пам'яті, а разом з правилами списку дають змогу вводити мову вищого рівня.

Лит. Ингве В. Х. Язык для программирования задач машинного перевода. В кн.: Информатический сборник, № 6. М., 1963.

Н. О. Валандина.

**КОМПАНІ ІНТЕРНАСЬОНАЛЬ ПУР Л'ІНФОРМАТІК** (Compagnie International pour l'Informatique) — головна монополія електронно-обчислювального машинобудування у Франції. Засновано її 1966. Виготовляє обчисл. машини сімейства «IRIS».

«IRIS-50» — машина 3-го покоління з універсальним матем. забезпеченням, призначена для керування, наукових розрахунків та обробки інформації в реальному масштабі часу; швидкодія — 4 млн. логіч. операцій за 1 сек. «IRIS-80» є машиною загального призначення для роботи в режимі розподілу часу, має 4 центр. процесора паралельної дії з швидкодією кожного — близько 1 млн. операцій за 1 сек. В 1971 випущено малогабаритну машину 3-го покоління — «Мітра 15».

Лит. Зейдекберг В. К., Матвеев Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970.

**КОМПАУНДУЮЧІ ЗВ'ЯЗКИ В АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМАХ** — канали для формування та передавання на вхід об'єкта регулювання (керування) діянь, функціонально пов'язаних безпосередньо зі збуреннями, що діють на об'єкт, з метою зменшення (компенсації) впливів цих збурень на регульовані координати об'єкта чи встановлення певних залежностей між регульованими координатами й збуреннями. Назву запозичено з галузі електромашинобудування, де для компенсації реакції якоря машини великого поширення набули т. а. пристрої компаундування збудження за струмом навантаження (компаундні обмотки, компаундувальні трансформатори струму з випрямлячем тощо в електр. машинах). К. з. в а. с. є основою принципу регулювання за збуренням (принцип компенсації). На відміну від *автоматичного регулювання* К. з. в а. с. не впливають на стійкість системи, але поступають перед ними з точністю регулювання. Тому К. з. в а. с. застосовують тоді, чим, у комбінованих системах автоматичного керування, причому здійснюють їх, як правило, тільки щодо збурень, доступних для вимірювання. У загальному випадку в К. з. в а. с. є вимірювач (датчик) збурення і, якщо потрібно, його похідних, перетворювальні пристрої та підсилювачі. Іноді функції вимірювання, перетворення й підсилення можуть сушитися в одному чи більше пристроях. За своїми характеристиками К. з. в а. с. можуть бути як лінійними, так і нелінійними, зв'язаними з постійними й змінними параметрами.

Параметри К. з. в а. с. визначаються умовами задачі регулювання. При розв'язуванні задач компенсації вибір параметрів проводиться на основі ідей теорії інваріантності. Але виконання умов цілковитої компенсації (абсолютної інваріантності) здебільшого обмежено умовами фіз. здійсненості параметрів К. з. в а. с. У зв'язку з цим у реальних системах цілковитої компенсації чи перекомпенсації принципово легко досягти лише в установлених режимах. Для також *інваріантності систем автоматичного керування*.

Лит., Івахненко О. Г. Кібернетичні системи з нелінійними керуваннями. К., 1963 [Бібліогр. с. 471—479]. Уланов Г. М. Регулювання по збуренню. М.—Л., 1960 [Бібліогр. с. 106—108]. Івахненко О. Г. Електромашинобудова. К., 1957 [Бібліогр. с. 440—442].

О. М. Костин.

**КОМПЕНСАЦІЙНИЙ СПОСІБ НАСТРОЮВАННЯ ТА ВИМІРЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ** — спосіб введення вхідних даних, а також вимірювання результатів розв'язування задачі на *аналоговій обчислювальній машині* (АОМ), який полягає в порівнюванні настроюваної або вимірюваної величини з відомою величиною-еталоном. В АОМ порівнювані величини звичайно є різницями потенціалів (напругами). При цьому у випадку введення первісних даних на настроювані порівнювані величини правлять

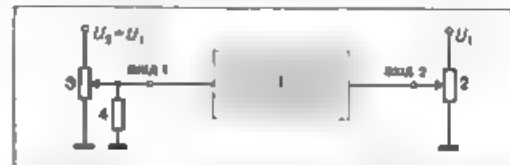


Схема установки вимірювання коефіцієнта передачі потенціометра компенсаційним методом: 1 — нуль-індикатор, 2 — прецизійний потенціометр, 3 — настроюваний потенціометр, 4 — опір навантаження,  $U_2$  — еталонна напруга;  $U_1$  — опорна напруга

напруги, пропорційні відповідним даним (напр., коефіцієнтам передачі розв'язувального підсилювача). Порівнювання здійснюється за допомогою *нуль-органа*, що являє собою, як правило, гальванометр або ламповий вольтметр. За нуль-орган може правити і осцилограф або спец. пристрій, який реагує на різницю настроюваної або вимірюваної величини еталонної. Основні вимоги до нуль-органа: він не може бути додатковим навантаженням ні для настроюваного (вимірюваного) джерела, ні для еталонного; чутливість його має бути не гірша як 10 мВ (для АОМ зі шкалою 100 в).

Компенсаційний спосіб вимірювання напруг особливо ефективний для електр. кіл постійного струму, бо в цьому разі забезпечується точність вимірювання порядку 0,01% і вище (у спец. випадках похибка може бути доведена до 0,001—0,003%). Така точність і те, що в момент відлічування струм через нуль-орган не протікає, є основними перевагами компенсаційного способу над способами прямого вимірювання, чим і пояснюють широке використання його в АОМ. На мал. показано типову схему встановлення коефіцієнта передачі потенціометра (з урахуванням навантаження) компенсаційним способом. Заданий коефіцієнт передачі встановлюється на прецизійному потенціометрі з дільбом, а напруга з нього подається на вхід 2 нуль-органа. Настроюваний потенціометр, напруга якого подається на вхід 1, регулюється так, щоб нуль-орган показував нуль. У великих АОМ ця процедура виконується з застосуванням спеціальної системи автоматично за 1—3 сек, причому похибка настроювання десятикратних потенціометрів не більша як 0,02%. Осн. причинами виникнення похибок є обмежена чутливість нуль-органа і неточність задавання еталонного джерела напруги. Вимірюючи результати розв'язування (з ста-

тичному режимі), вхід  $I$  нуль-органу підмикають до вимірювального джерела, а потім, обертаючи лімб прецизійного потенціометра, добиваються нульового показання нуль-органу. Множенням відліку за лімбом на величину *еталонної напруги* одержують шукачу напругу.

І. В. Єрмілов.

**КОМПЛЕКСУВАННЯ МАШИН** — об'єднання двох або більше обчислювальних машин (ОМ) в одну систему (комплекс) для сумісної роботи з метою надати цій сукупності ОМ властивостей, яких кожна з цих машин окремо не мала. Розрізняють три основні види К. м.: комплексування ЦОМ, комплексування АОМ і побудову комплексів з АОМ і ЦОМ.

а) Комплексування ЦОМ здійснюють на різних рівнях залежно від призначення комплексу, цілей комплексування й складу обладнання. За К. м. на різних зонах пристроїв будь-яка в машині комплексу може адаптуватися до будь-якого з зон, пристроїв. Можливе комплексування й на такому рівні, коли «усуспільнюються» *оперативні запам'ятовувальні пристрої* (ОЗП) машини комплексу. Процеси обміну інформацією між машинами при цьому істотно пришифуються. Найглибший зв'язок між машинами комплексу встановлюється тоді, коли в перехресні канали між ОЗП, арифметичними пристроями й навіть блоками керування суміжних машин. ЦОМ комплексують, щоб збільшити загальну продуктивність створеної внаслідок К. м. обчислювальної системи, підвищити ефективність використання окремих ОМ і блоків їх та надійність роботи системи. В різних варіантах К. м. досягають ефектів функціональної спеціалізації, розпаралелювання, спільного запам'ятовувального пристрою, резервування, взаємного контролю; усе це — т. зв. ефекти комплексування.

Ефект функціональної спеціалізації полягає в суттєвому скороченні часу розв'язування широкого класу задач. Досягають цього, покладаючи в процесі роботи системи різні спец. ф-ції на відповідні цим ф-ціям машини (потужності). Розрізняють обчисл., обмінні, інтерпретуючі та ін. потужності. До обчисл. потужностей належать ЦОМ із швидкодіючими арифм. пристроями; за обмінні потужності вважають ЦОМ з численними потужними каналами зв'язку з зовнішніми пристроями й пристроями обміну, добре пристосовані для того, щоб виконувати такі операції. Машини з добре розвинутою схемою інтерпретації вхідної мови, які ефективно працюють у *діалогов режимі* з оператором, — це інтерпретуючі потужності. певні ЦОМ можна одночасно спеціалізувати в кількох напрямках і, відповідно, застосовувати їх як різні потужності.

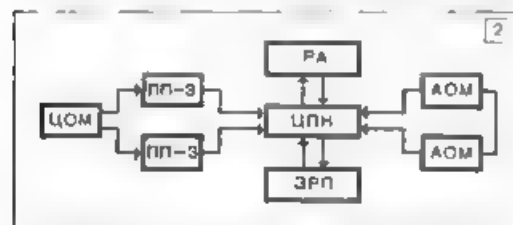
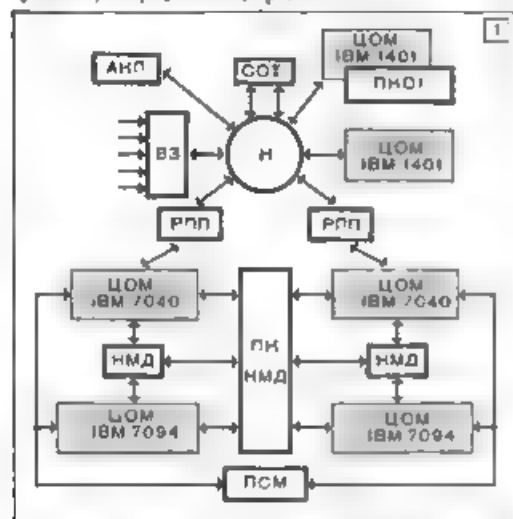
Ефект розпаралелювання полягає в економії машинного часу, його досягають, одночасно виконуючи на різних машинах паралельні гілки одного алгоритму. Ефект спільного запам'ятовувального пристрою виявляється в гнучкості розподілу

обсягу пам'яті й збільшенні ефективності його використання. Стосовно оперативного ЗП цей ефект підсилюється від розширення можливостей розпаралелювання алгоритмів. У разі «усуспільнення» зовнішніх ЗП ефект посилюється при функціональній спеціалізації. Ефект резервування полягає в підвищенні надійності роботи системи шляхом підміни машини, яка вийшла з ладу з якоїсь причини, іншою, справною. Ефект взаємного контролю — це скорочення середнього часу виявлення й усунення несправності з машини, коли є змога покласти завдання контролю й діагностики несправностей при відмові однієї з ЦОМ на справні машини комплексу.

Узгоджену роботу машин, об'єднаних у комплекс, забезпечує частково спец. апаратура, частково програмування. Чим глибше зв'язки між машинами комплексу, тим складніше реалізувати їх апаратно. Коли в комплексі є машини, які різняться за формою команд, за елементною базою і т. п., потрібні додаткові пристрої з'єднання й узгоджування. Узгоджування машин з різними мовами машинними здійснюють, головним чином, двома шляхами: моделюванням однієї машини на іншій і перекладом програм на проміжну символічну мову. В першому випадку узгодження здійснюють за допомогою односторонніх швидкодіючих запам'ятовувальних пристроїв («імунізаторів»), у яких кожна команда «старої» програми перекладається на відповідні команди «нової» програми. У другому — ахільна мова комплексу перекладається як спец. проміжну мову, в певному розумінні близьку всім машинним мовам комплексу. Обидва між машинами відбувається саме цією мовою. Основу програмного узгодження роботи машин комплексу становить сукупність спец. програм, яку наз. *операційною системою* комплексу; вона організовує мультипрограмильний режим роботи окремих ОМ і всього комплексу загалом, керує введенням — виведенням, дійсним комутацією зон, і оперативної пам'яті, реалізує функціональну спеціалізацію, розпаралелювання алгоритмів, резервування й контроль.

Комплексувати ЦОМ можна в обчислювальних центрах (ОЦ) загального призначення, де є, напр., надпотужні універсальні ЦОМ і кілька середніх і малих машин. Мали машини виконують, звичайно, досить прості функції: обслуговування зони, пристроїв і пульта оператора, сортування даних і контролю, окрім того, розв'язують невеликі задачі. Потужну ЦОМ використовують при цьому так, щоб усі її найскладніші функціональні блоки максимально завантажувати. К. м. істотно збільшує продуктивність ОЦ, сприяє рівномірному й ефективному завантажуванню його обладнання й раціональному використуванню його потужностей. Зростає не тільки кількість і обсяг розв'язуваних задач, а й збільшується їхня складність і різноманітність. ЦОМ комплексують і в спеціалізованих

ОЦ, таких, що обслуговують найбільші аеропорти, системи протиповітряної оборони, системи керування космічними польотами і т. п. У таких випадках необхідність К. м. викликана великим обсягом розв'язуваних задач і труднощами розв'язування істотної частини їх у реальному масштабі часу. Крім того, в більшості таких систем настільки зростають вимоги до надійності роботи ОЦ, що машини повинні працювати в дуплексному (подвійне резервування) і навіть у триплексному (потрійне резервування) режимах



1. Схема координатно-обчислювального центру в м. Пассадені (США).  
2. Блок-схема аналого-цифрового комплексу «АЦНС-1».

Прикладом комплексу ЦОМ є Центральний обчислювальний комплекс (ЦОК) координатно-обчислювального центру в м. Пассадені (США) — однієї з основних ланок у системі наземного забезпечення космічних польотів на Місяць та інші планети (мал. 1). ЦОК включає в себе дві ЦОМ великої продуктивності типу «IBM-7094», дві ЦОМ середньої продуктивності типу «IBM-7040», дві малі ЦОМ типу «IBM-1401», нагромаджувачі на магнітних дисках (НМД), розподільно-перетворювальні пристрої (РПП) й ряд допоміжних блоків. Обидві «IBM-7094» використовують як основні обчисл. потужності. Машини «IBM-7040» правлять за обмінні потужності й, окрім того, виконують функції контролю всіх елементів ЦОК. Машини «IBM-1401»

виступають у ролі інтерпретуючих потужностей, обслуговуючи пункт керування обміном інформації (ПКОІ) й пристрої виведення й відображення інформації. РПП сукупно з «IBM-7040» забезпечують обмін даними з 48 зовн. пристроями різної швидкодії. Максимальна швидкість обміну РПП і ЦОМ становить 62 500 слів за 1 сек. НМД мають ємність по 54 млн. знаків і служать для зберігання вихідних й необроблених даних від «IBM-7094», а також робочих програм і констант. Пристрій керування НМД (ПН НМД) дає можливість здійснювати одночасний обмін з однією ЦОМ «IBM-7094» й однією ЦОМ «IBM-7040». Пристрій спрямовує машини (ПСМ) забезпечує обмін між машинами «IBM-7094» й «IBM-7040» 36-розрядними паралельними кодами; його викликають на запит будь-якої з цих машин і використовують, насамперед, щоб передавати керівку інформацією між робочими програмами машин, і, окрім того, для контролю при сумісному використанні НМД. Зв'язок між пристроями ЦОК і зовн. системами, до складу яких входить апаратура контролю за польотом (АКП), система обробки телеметричної інформації (СОТ) й вузол зв'язку (ВЗ), здійснюється за допомогою комутатора (К). Щоб забезпечити надійність роботи ЦОК, передбачено можливість складання з елементів комплексу кількох різних конфігурацій дублювання й резервування, одну з яких і вибирають залежно від вимог до надійності й часу відновлювання працездатності ЦОК у поточний момент.

б) Необхідність комплексувати ЦОМ з АОМ викликана появою ряду задач, для розв'язування яких потрібні й велика точність універсальних цифрових машин, і велика швидкість аналогових (див. Аналогова обчислювальна машина). Ці задачі можна поділяти на три групи. До першої групи належать задачі моделювання в реальному масштабі часу динаміки об'єктів, описуваних системами диференціальних, у яких змінні змінюються в різних швидкостях і в різних діапазонах. Точність розв'язування таких задач визначається, головним чином, точністю представлення повільно змінюваних змінних. Прикладом таких об'єктів може бути дітальний апарат. Координати його центру мас змінюються набагато повільніше за змінні, які описують його рух відносно центру мас. Позитивного ефекту від К. м. у цьому разі досягають завдяки тому, що частину системи рівнянь, яка описує швидко змінювані змінні, моделюють на АОМ, а іншу частину — на ЦОМ. До другої групи задач належать задачі, пов'язані з випробуваннями у процесі проектування різних конструкцій і алгоритмів роботи цифрової керуючої машини зі включенням окремих реальних вузлів системи керування чи керуваного об'єкта. Наявність реальних пристроїв у моделі потребує реального масштабу часу її роботи (його з багатьох випадків можна здійснити лише за допомогою АОМ). Разом з тим моделювати цифрову керуючу машину доцільно в цьому разі тільки на ЦОМ. Тре-



та група задач — це задачі, в яких система дифер. рівнянь є складовою частиною ітераційного циклу. Такими задачами є, наприклад, оптич. керування або задачі статистичного моделювання. Використання для розв'язування системи дифер. рівнянь АОМ з підвищеним масштабом часу дає змогу істотно скоротити час розв'язування таких задач.

Склад аналого-цифрового комплексу (АЦК) визначається його призначенням. У загальному випадку цей комплекс містить такі частини: аналогову частину, цифрову частину, пристрій спряження й центр. пульс керування. До складу АЦК можуть входити й допоміжні вузли: індикаційні й реєструючі блоки, вузли узгодження, імітуючі блоки й т. ін. Цифрова частина може мати одну ЦОМ або й комплекс ЦОМ різного класу й призначення. В аналогову частину теж може входити одна чи кілька АОМ. Потужність і тип комплексованих машин визначаються обсягом і характером задач, що їх мають розв'язувати. Осн. функціями пристрою узгоджування є перетворення форми інформації з цифрової на аналогову й навпаки, синхронізація роботи машин і керування всіма блоками й частинами АЦК з метою координувати їхню сумісну роботу й найбільше автоматизувати процес розв'язування задач. Блок керування й синхронізації забезпечує реалізацію циклічних програм і подання одноразових команд і, крім того, здійснює прив'язування системи до реального часу. З центр. пульса керування організовують звертання до різних блоків АЦК й реалізують різні режими роботи комплексу. Такими режимами можуть бути режими пуску, зупини, підготовки задачі, переведення системи на автономну роботу окремих машин, автономної перевірки й налаштування пристрою спряження й режим тестової перевірки всього АЦК. Характерною особливістю роботи в АЦК є необхідність програмування аналогової й цифрової частини комплексу і способу їхньої взаємодії. В разі, коли аналогова частина не допускає автомат. введення інформації, відповідну частину задачі вводять безпосередньо комутацією на набірну плату АОМ і ручним встановлюванням потрібних параметрів. А якщо автомат. введення в аналогову частину можливе, всю програму розв'язування задачі вводять до цифрової частини, яка надає повністю керує аналоговою частиною й перед розв'язуванням задач, і у процесі розв'язування.

На мал. 2 подано схему аналого-цифрового комплексу «АЦМС-1», побудованого на базі трихадресної універсальної ЦОМ середньої потужності й двох аналогових машин типу «МН 18». Комплекс «АЦМС-1» призначено для розв'язування нелінійних звичайних дифер. рівнянь у реальному масштабі часу й розраховано на зв'язок з реальною апаратурою (РА). Щоб збільшити ефективність розв'язування задач в АЦК, створено умови часткової автоматизації операцій введення й виведення даних, контролю результатів набору й

розв'язування задач. Роботу обчисл. пристроїв організовує єдина система керування ЦПК. В системі наявні три основні сигнали керування: «пуск», «зупини» і «початковий стан», що їх використовують у всіх пристроях комплексу. Осн. режим комплексу — розв'язування й контроль блоків. Пристрій перетворення інформації ПП-3 здійснює перетворення машинних змінних, які надходять з аналогової частини у вигляді величин напруги, на цифровий код і навпаки. Комплекс «АЦМС-1» дає змогу моделювати в реальному масштабі часу процеси, в яких швидкість зміни сигналів не перебільшує швидкості зміни синусоїди з амплітудою 50 в і частотою 5 м. При цьому, наприклад, точність розв'язання задачі подовжнього польоту літака на один-два порядки вища за точність розв'язання її на аналогових машинах. Розв'язування тієї самої задачі лише на цифровій машині з тією самою точністю потребує збільшення масштабу часу в десять раз.

а) Комплексування АОМ найчастіше пов'язано зі специфічними для АОМ обмеженнями, накладуваними на порядок системи розв'язування рівнянь, на кількість нелінійностей і змінних коеф. тощо. У цьому разі К. м. веде до простого збільшення обчисл. потужності. При цьому здійснюється побудова моделі системи рівнянь, у якій складовими частинами є блоки двох чи більше аналогових машин. Жодних істотних заходів для стиккування й узгодження роботи машин у цьому разі вживати не доводиться. Проте в деяких випадках комплексування вузько спеціалізованих аналогових машин дає якісний ефект. Наприклад, комплекс з гідролінійного інтегратора «ІГ-1» і електронного інтегратора «ЕІ ДА-П 60» дуже ефективно використовують для розв'язування задач неконвективного теплообміну в шарі. Процес розв'язування розбивають на послідовність часових інтервалів, у кожному з яких спочатку методом електродинамічних аналогій розв'язують на «ЕГДА-8-60» гідродинамічну частину задачі, а потім, виходячи з одержаного результату, методом гідротеплових аналогій на «ІГ-1» виконують розрахунок теплового поля в цьому часовому інтервалі (див. «ЕГДА»). Моделювання на спеціальних середовищах.

Лит. Голубев-Новожильов Ю. С. Многомашинные комплексы вычислительных средств. М. 1967 (библiогр. с. 402—415); Кудряшов И. А. (та ін.) Аналоговые и комбинированные электронные вычислительные машины. Л., 1969 (библiогр. с. 446—448); Глушков В. М. (та ін.). Некоторые основные направления развития цифровой вычислительной техники. М., 1970 (библiогр. с. 91—96).

Л. А. Назаренко.

**КОМПЛЕКТ ПЕРФОРАЦІЙНИЙ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ** — набір пристроїв, які виконують основні та допоміжні операції при обробці інформації. В комплекті використовують у взаємозв'язку групи пристроїв: 1) підготовки перфокарт (перформатори, контролери, перформатори репродуктивні, акумулятивні, підсумкові); 2) впорядкування масивів перфокарт (сортувальні та розкладально-підбиральні машини); 3) матем. обробки ін-

формації, нанесеної на перфокарти (табулятори й перфатори обчислювальні електронні); 4) друкування даних, нанесених на перфокарти (розшифровуючі машини для перекладання інформації на перфокарти й на друку). Продуктивність перфаторів обчисл. пристроїв неоднакова, тому їх використовують у такому кількісному співвідношенні, яке забезпечує макс. завантаження високопродуктивного пристрою — табулятора. В складі типового К. п. о. є один табулятор, одна сортувальна машина, три перфатори й два контролери. Потреба й кількість цих пристроїв у комплекті визначається залежно від обсягу й характеру оброблюваної інформації. К. п. о. належать до устаткування машиннолінійних станцій і обчисл. центрів. Призначений для автомат. виконання масових лінійних і лінійно-записувальних операцій під час обробки інформації. Використовувати його доцільно там, де кількість результативних чисел у кілька разів менша за кількість введених або прийнятих даних. Ім Застосування К. п. о. для механізації обліково-обчисл. робіт значно зменшує строки складання звітів, введення, приєднання документооборот, поліпшує якість облікових даних, продуктивність праці працівників обліку стає удвоє-втри вищою, ніж при ручній техніці обліку.

**КОМУНІКАЦІЙНИЙ ПРОЦЕСОР** — пристрій, що забезпечує обмін інформацією між обробляючими системами та споживачами. Осн. функції К. п.: комутація каналів зв'язку, кодування інформації та перетворення форми представлення її, контроль даних, первинна обробка даних (напр., редагування тощо). К. п. керують спец. програми та сигнали центр. процесора системи.

**КОНКУРЕНЦІЙНІ МОДЕЛІ** — моделі стану економічної системи за умов ринкової конкуренції, які відображають взаємодію між попитом, пропозицією та цінами на товари. Стан рівноваги системи полягає в тому, що попит не повинен перевищувати пропозиції на ринку, він встановлюється для ціл  $\{p^*\}$ , обсягів попиту  $\{x_1^*, \dots, x_m^*\}$  і пропозиції  $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  при виконанні таких обмежень. По-перше, кожен  $i$ -й виробник відпускає план. затрат — випуску  $X_i^*$ , які забезпечують максимум прибутку в цінах рівноваги  $(p^*, x_j^*) = \max (p^*, x_j)$  для  $i = 1, 2, \dots, n$  і  $x_j \in X_j$ , де  $X_j$  — множина найрізноманітніших планів затрат — випуску  $j$ -го виробника. В такій моделі математичний розглядється лише відносна ціна, тому вектор цін нормовано так:  $p = (p_1, \dots, p_r)$ ,  $p_r = 1$ ,  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ .

По-друге, кожен  $i$ -й споживач максимізує корисність придбаних товарів  $U_i(x_i)$  серед усіх можливих векторів споживання за умови, що витрати на придбання товарів не перевищують одержуваного прибутку:  $(p^*, x_i) <$

$< (p^*, x_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (p^*, x_j^*)$ , де  $x_i$  — вектор товарів, що їх має  $i$ -й споживач на початковий період;  $\alpha_{ij}$  — частка  $i$ -го споживача в прибутку  $j$ -го виробника, обумовлена договором (напр., наявністю акцій). По-третє, попит усіх споживачів задовольняється товарами, що вироблені в системі й наявні на початковий період. При цьому будь-який товар, що надходить понад наявний попит, має нульову ціну:  $y^* < x^* + x^*$ ,  $(p^*, y^* - x^* - x^*) = 0$ , де вектор  $y^*$  відображає сумарний попит усіх споживачів, тобто  $y^* = \sum_{i=1}^m y_i^*$ ; вектор  $x^*$  — сумарний обсяг виробл. в системі, тобто  $x^* = \sum_{j=1}^n x_j^*$ ; вектор  $x^*$  — заг. обсяг товарів у системі для початкової торгівлі  $x^* = \sum_{i=1}^m x_i^*$ .

Лит. Карзак С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1984 (Библиогр. с. 788—819).

П., С. Архангельский, Т. І. Приходько, С. Д. Фесенко.

**КОНСТРУКТИВНИЙ АНАЛІЗ**, рекурсивний аналіз, обчислювальний аналіз — назва, що об'єднує різні методи в основах математики й математичному аналізі. Як правило, будуючи К. а., ставлять за мету всі або кілька принципів цілей: 1) побудова системи аналізу, спеціально орієнтованої на реальні конструктивні та обчислювальні можливості (яким часто відповідає на 2-й план під час традиційної теоретико-множинної побудови аналізу); 2) вивчення принципів меж обчисл. можливостей в аналізі, вивчення ефективності в аналізі (зокрема, дослідження питання про те, якими первинними даними можна ефективно знаходити ті чи ін. об'єкти аналізу); 3) вивчення обчислювальних об'єктів аналізу (обчислення дійсних чисел, обчислення функцій над ними тощо), в тому розумінні, в якому, напр., в алгебрі вивчають групи. Дослідження, що в тій, можна дуже грубо поділити на 2 типи: такі, що їх впровадять у межах традиційного аналізу, й дослідження, формально не залежні від нього. Перший напрям досліджень представлено рядом праць, у т. ч. основоположними працями А. Тюрінга, С. Банаха й С. Мазура та Я. Шпекера, в яких було, по суті, вироблено сучасні концепції обчислювального дійсного числа. До 2-го типу належать дослідження з інтуїціоністського аналізу, що виникли в зв'язку з інтуїціоністською програмою побудови математики, яку висунув Л. Е. Брауер, та істотно вплинули на формування задач і методів К. а., рекурсивний аналіз Р. Гудстейна та оригінальна й далеко просунута система К. а., яку розвивав останнім часом Б. Бішоп. У Радянському Союзі починаючи з 50-х ро-

ків 20 ст. інтенсивно розробляли систему К. а., що належить до 2-го типу досліджень і є частиною заг. програми конструктивної побудови математики (див. *Конструктивний напрям у математиці*). Основоположний виклад у розвитку цієї системи (коротко її називають «конструктивний аналіз») ввели А. А. Марков (син), М. О. Шанін та їхні учні. Будучи частинною конструктивною математикою, К. а. зберігає її характерні риси. Зокрема, розгляди обмежуються конструктивними об'єктами (здебільшого словами в деяких алфавітах або об'єктами, що допускають очевидне кодування словами) й провадяться в межах абстракції потенційної здійсненості в встановлених спец. конструктивних правил розуміння матем. суджень. При цьому зовсім виключається використання абстракції *актуальної нескінченності*. Її інтуїтивне поняття «ефективності» пов'язується з одним із точних понять алгоритму (в більшості праць, які належать до розглядуваної системи К. а., використовують поняття нормального алгоритму). В межах К а одержано велику кількість результатів, цінних і з погляду проблематичних мети 1-ї, і з погляду цілей 2-ї і 3-ї. По суті доведено, що засобами конструктивної математики можна побудувати теорію рядів, інтегрування за Ріманом і Лебегом, функцій комплексної змінної, узагальнених ф-цій та ін. Добути конструктивні теорії і схожі на однойменні традиційні теорії, і помітно відрізняються від них, проте відмінності ці проявляються не стільки в конкретних питаннях, пов'язаних із застосуванням аналізу, скільки в теор. концепціях (таких, напр., як концепція компактності тощо).

Фундаментальними поняттями К. а. є поняття конструктивного дійсного числа (КДЧ) й конструктивної ф-ції дійсної змінної. Конструктивні дійсні числа можна вводити різними (не завжди еквівалентними) способами. Одним із природних шляхів є шлях, аналогічний канторівській побудові дійсних чисел у традиційному аналізі. Спочатку вводять натуральні числа, як слова в двоцифровому алфавіті  $\{0, 1\}$  вигляду  $0, 01, 011, \dots$ . Аналогічно визначають раціональні числа, як слова якогось типу в алфавіті  $\{0, 1, -\}$ . Визначають відношення порядку й рівності над раціональними числами та арифм. операції над ними. Конструктивною послідовністю натуральних чисел (КПНЧ) наз. нормальний алгоритм, який переробляє всяке натуральне число на натуральне. Аналогічно трактують і поняття конструктивної послідовності раціональних чисел (КРПЧ). Схеми нормальних алгоритмів однозначно кодують словами в алфавіті  $\{0, 1\}$ , код цього алгоритму наз. його *записом*. КПНЧ  $\alpha$  наз. регулятором фундаментальності КРПЧ  $\beta$ , якщо для будь-яких натуральних  $l, m \in \mathbb{N}$ , таких, що  $l, m \geq \alpha(n)$ , справедлива нерівність  $|\beta(l) - \beta(m)| < 2^{-n}$ . КРПЧ наз. фундаментальною, якщо можна побудувати її регулятор фундамен-

тальності. Конструктивним дійсним числами наз. раціональні числа й слова в алфавіті  $\{0, 1, \diamond\}$  вигляду  $U \diamond V$ , де  $U$  — запис якоїсь КРПЧ, а  $V$  — запис КПНЧ, яка є регулятором фундаментальності цієї КРПЧ. Описане поняття КДЧ добре узгоджується з інтуїтивним уявленням про обчислені дійсні числа як про об'єкти, що допускають ефективну як загодно точну апроксимацію раціональними числами. Для КДЧ можна визначити природним способом відношення порядку й рівності та арифм. операції (причому ці останні задаються алгоритмами). Система КДЧ з цими відношеннями рівності й порядку та арифм. операціями стає полем. Далі можна ще висхід в розгляд конструктивні докльовності КДЧ (КПДЧ) і визначити з тому самому порядку ідей, що й націг, поняття фундаментальної КПДЧ і поняття конструктивної збіжності КПДЧ до даного КДЧ. Відносно такого поняття збіжності система КДЧ виявляється повною: існує алгоритм, який знаходить, виходячи з запису всякої фундаментальної КПДЧ  $y$  і запису її регулятора фундаментальності, КДЧ, до якого (конструктивно) збігається  $y$ . Методом, аналогічним канторівському, можна довести й теорему про конструктивну незчисленність множин усіх КДЧ, яка полягає в тому, що здійсненням є алгоритм, який переробляє запис усякої КПДЧ на КДЧ, відмінне (в розумінні рівності КДЧ) від усіх членів цієї КПДЧ. Теорема про повноту ладає значної схожості конструктивній і класичній теорії границь, яка особливо виражається в питаннях збіжності тих чи (ін. конкретних, використовуваних в аналізі послідовностей і рядів). Але тут є й істотні відмінності, що виявляються, напр., у такому результаті Б. Шпекера: можна побудувати зростаючу КПРЧ  $\beta$ , таку, що завжди  $0 < \beta(n) < 1$ , і, незважаючи на це,  $\beta$  не є фундаментальною (і, отже, не збігається конструктивно ні до якого КДЧ).

Поняття конструктивної функції (КФ) є природним уточненням інтуїтивного поняття точкової обчисленої ф-ції над обчислюваними дійсними числами. Конструктивною ф-цією (однієї дійсної змінної) наз. нормальний алгоритм — такий, що для будь-яких однакових КДЧ  $x$  і  $y$ , якщо  $F$  застосований до  $x$ , то застосований і до  $y$ , і  $F(x) \neq F(y)$  — рівні КДЧ. В термінах КФ можна виставити елементарні ф-ції (показникова ф-ція, тригоном. ф-ції тощо), які мають звичайні властивості; для КФ можна розвинути теорії диференціювання, інтегрування за Ріманом тощо, які є близькими до традиційних. Разом з тим, можливі й незвичайні з традиційного погляду ф-ції: напр., існує скрізь визначена КФ, неперервна на одиничному сегменті й обмежена на ньому. Не має аналогів у традиційному аналізі й теорема, за якою всяка КФ конструктивно неперервна в будь-якій точці, в якій її визначено.

Система понять і методи К. а., даючи змогу істотно просунутися з погляду мети 1-ї, зручна й для виявлення обчислювальних

зв'язків в аналізі, бо багато теорем К. а. з або твердженнями про здійсненість алгоритмів, які будують деякі конструктивні об'єкти за тими чи ін. первісними даними, або твердженнями, що такі алгоритми неможливі. Встановлено нерозв'язність великої кількості природних масових проблем аналізу. Результати цього типу (їх зовсім немає в курсах традиційного аналізу) мають теор. і практичну цінність, бо вони виявляють потенційні обчислювальні тупики й спряжують чіткому усвідомленню принципових меж обчислювальних можливостей. Напр., доведено неможливість таких алгоритмів (у розумінні одного з точних понять алгоритмів): 1) розпізнавання для довільного конструктивного дійсного числа (КДЧ), дорівнює воно нулеві чи ні; 2) такого, що знаходить для кожної вбіжної конструктивної послідовності раціональних чисел те КДЧ, до якого вона збігається; 3) такого, що знаходить для кожної сумісної системи лінійних рівнянь (над полем КДЧ) або-небудь розв'язання її; 4) такого, що знаходить для кожної неперервної, кусково-лінійної, знакозмінної функції її корінь; 5) що знаходить для всякої неперервної, кусково-лінійної на одиничному сегменті функції її інтеграл Ріманна за цим сегментом. Теорема неможливості алгоритмів часто супроводжується з К. а. теоремами про існування алгоритмів, які розв'язують розглядані задачі за повнішими первісними даними (порівняйте теорему про повноту КДЧ і 2-й приклад) або з довільною, наперед заданою точністю (напр., можна побудувати алгоритм, який знаходить для кожної скрізь визначеної знакозмінної конструктивної функції  $f$  і кожного  $\varepsilon$  в КДЧ  $x$ ,  $\varepsilon$  так, що  $|f(x, \varepsilon)| < 2^{-n}$ ). Зіставлення таких результатів дає змогу в ряді ситуацій одержати уявлення про те, як можна коректно ставити ту чи ін. алгоритм. проблему.

Лит. «Труды математического института им. В. А. Стеклова АН СССР» 1959, т. 52, 1962, т. 67, 1964, т. 72; 1967, т. 91. Н е в з л а Г. О философии математики. Пер с англ М.—Л. 1934. Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. «Proceedings of the London Mathematical Society», 1936, series 2, v. 42, part 3; Turing A. M. A correction. «Proceedings of the London Mathematical Society», 1937, series 2, v. 43; Specker E. Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. «The Journal of symbolic logic», 1949, v. 14, № 3; Max U. S. Computable analysis. «Rozprawy matematyczne (Warszawa)», 1963, t. 33 (bibliogr. s. 109—110); Г у з с т е й н Р. Л. Рекурсивная математическая логика. Пер с англ М., 1970.

Б. А. Кумисер.

**КОНСТРУКТИВНИЙ НАПРЯМ У МАТЕМАТИЦІ.** конструктивна математика — напрям досліджень, головне завдання якого — перебудова найважливіших частин традиційної (класичної) математики відповідно до таких методологічних принципів. 1) Системи матем. об'єктів, що їх вивчають у таких теоріях, завжди описують як системи конструктивних об'єктів. 2) Центр місце належить вивченню відповідностей, заданих за допомогою алгоритмів. 3) Твердження про існування матем. об'єкта, який задовольняє

якусь умову, вважають доведеним лише тоді, коли вказано спосіб побудування такого об'єкта.

Під системою конструктивних об'єктів розуміють систему, описану так: а) описано деякі підправні матем. об'єкти, що їх розглядають як елементарні, нерозчленовувані на частини; б) перелічено деякі способи комбінування первісних об'єктів між собою; в) вказано умову, яку задовольняють ті й лише ті комбінації первісних об'єктів, що їх вважають елементами системи; г) зазначено умову, за якої два елемента системи вважають рівними. При цьому використовують абстракцію потенційної здійсненості, тобто процес побудування комбінацій початкових об'єктів представляють не зв'язаними ніякими обмеженнями в просторі, часі чи матеріалі. З другого боку, ця особливість теорій, що належать до К. м. у м., виключає розгляд сукупностей елементів якоїсь системи конструктивних об'єктів безвідносно до якого-небудь способу описування цих сукупностей, що потребує застосування абстракції актуальної нескінченності. У конструктивній математиці допустимими є дані в класичній математиці визначення понять цього числа, раціонального числа, полінома з раціональними коеф., але недопустимими є дані в ній визначення дійсного числа, ф-ції, множини тощо. Відносно до п. 2 термін «функція» пов'язаний лише з тими відповідностями, що їх описано задаванням алгоритму, який дає змогу ефективно знайти (побудувати) значення ф-ції за значенням аргументу. Аналогічно розуміють термини «послідовність», «відображення», «функціонал» тощо. Тому деякі способи задавання відображень, використовувані в класичній математиці, не застосовують у конструктивній. Відповідно до п. 3 в конструктивній математиці вважають неприпустимими «ствітло» доведення існування, як, напр., відомі доведення теореми Вейерштраса про обмеженість неперервних ф-цій за допомогою теореми Больца-Вейерштраса й основної теореми алгебри за допомогою теореми Ліувіля про цілі ф-ції. Аналогічно, якщо доводять твердження про те, що всякий матем. об'єкт якогось типу задовольняє одну з кількох умов, то потрібно вказати спосіб, який дає змогу дізнатися, яка з умов виконується. Дослідження конструктивного розуміння матем. суджень і конструктивних доведень є предметом спец. розділу матем. логіки (див. *Логіка конструктивна*). Вимоги до доведень, які ставлять у конструктивній математиці, близькі до інтуїціоністських (див. *Інтуїціонізм*), але в деяких пунктах відрізняються від них. Дослідження основоположників інтуїціонізму Л. Брауера та ін., разом з дослідженнями норв. математика Т. Сколема (н. 1887) з теорії рекурсивних ф-цій та англ. математика А. Тьюрінга (1912—1954) з теорії алгоритмів, є одним з ідейних джерел К. м. у м. Філософсько-матем. погляди сучасних конструктивістів дають деякі від інтуїціоністської філософії. Проте

К. н. у м. цікавий незалежно від будь-яких позицій у загальній філософії математики

В принципі кожній теорії класичної математики відповідає аналогічна теорія конструктивної математики; під цим часто розуміють конструктивне дифер. числення, конструктивну теорію множин тощо. Співвідношення між системами понять класичної теорії та відповідної конструктивної теорії іноді досить складне. Іноді одному поняттю класичної теорії відповідають два поняття конструктивної теорії й навпаки. В деяких випадках поняття класичної математики взагалі не має конструктивних еквівалентів, і навпаки, деякі поняття, визначені в конструктивній математиці, не мають еквівалентів у класичній. Такий самий характер має й відповідність між теоремами класичної та конструктивної теорій. Іноді, щоб довести конструктивний аналог класичної теореми, потрібно вастосувати цілком нові ідеї. Праці, присвячені конструктивізації класичної математики, які належать здебільшого до варіанта конструктивної математики, що сформувався в 50-х рр. у працях рад. математика А. А. Маркова (ж. 1903) та його учнів, стосуються питань теорії ф-цій дійсної змінної та функціонального аналізу (див. *Конструктивний аналіз*). Крім того, вже в праці, присвяченій конструктивізації теорії ф-цій комплексного змінного, теорії узагальнених ф-цій, теорії ймовірностей, теоретико-множинної та комбінаторної топології та деяких ін. теорій. Різні теорії зазнають змін неоднаковою мірою: елементарна теорія чисел і комбінаторика переносяться в конструктивну математику практично без змін, а в теорії множин залишається лише порівняно невелика частина (яка включає, проте, все, що стосується аналізу). Загалом дослідження, що належать до К. н. у м., дають змогу зробити висновок, що матем. теорії, важливі для вастосувань математики, в основному можна побудувати в межах конструктивної математики

Год. перевага конструктивного способу побудови математики над класичним полягає в тому, що конструктивна математика дає змогу досить просто з'ясувати питання про те, за якими початковими даними можна побудувати розв'язування тієї чи ін. матем. задачі: тут за формулюванням теореми про існування матем. об'єкта відразу можна сказати, за якими початковими даними цей об'єкт можна побудувати, а відсутність ефективних і неефективних доведень, що на неї вказують іноді в класичній математиці, не приводить до цілковитого розв'язання цього питання. Як правило, конструктивна теорія видається набагато громіздкішою й складнішою, ніж відповідна класична теорія. Ця громіздкість є осн. вадоліком конструктивного підходу до побудови математики порівняно з класичним. Проте останнім часом досягнуто певних успіхів у розробленні методики викладу конструктивних теорій, які дають підставу вважати згадану громіздкість

в основному наслідком того, що в конструктивній математиці ще не розроблено адекватної форми викладу. Дослідження в конструктивній математиці великою мірою стимулювали розвиток *логіки математичної та алгоритмічної теорії*. Встановлено в результаті цих досліджень можливість побудувати осн. розділи математики різними способами має велике принципове значення. Дальші дослідження щодо цього спрямовуються г. ч. на те, щоб з'ясувати, чи не може конструктивна математика замінити класичну. Процеси такого роду відбувалися в історії математики (напр., атомістичну геометрію Демокріта заступила геометрія Евкліда). Незважаючи на успіхи, досягнуті К. н. у м., кількість прихильників його не дуже велика.

Лит.: Марков А. А. О конструктивной математике. — Шапиро Н. А. Конструктивные вычисления и конструктивные функциональные пространства. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1982, т. 87. Bishop E. Foundations of constructive analysis. New York, 1967. Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. Пер. с англ. М., 1970. В. О. Лифшиц.

**КОНТРОЛЬ ДІЯТЯ КОРПОРЕЙШЕН** (Control data corporation) — американська фірма, що спеціалізується на випуску електронних цифрових обчислювальних машин великої продуктивності для наукових розрахунків. Загнана 1957. З 1960 випускає ЦОМ на транзисторах, сімейство «CDC-3000» з продуктивністю 300—800 тис. операцій за 1 сек., і сімейство «6000» з продуктивністю 1,5—3,5 млн. операцій за 1 сек. ЕОМ «CDC-6600» була першою обчисл. машиною, яка використовувала для підвищення продуктивності мультипроцесорну структуру з одного центру. І десять доповнених спеціалізованих процесорів. У 1969 фірма випустила одну з найбільших у світі ЦОМ (див. «CDC-7600») продуктивністю понад 10 млн. операцій за 1 сек. У 1970 закінчили розробляти надпотужну ЦОМ «Star-100», яка виконує до 100 млн. операцій за 1 сек, має інформаційний банк ємністю до 100 млн. бітів і систему введення — виведення з пропуском здатністю 100 млн. знаків за 1 сек. У машині реалізовано принцип потокової обробки в структурі з кількох спеціалізованих процесорів і використано інтегральні схеми. З 1972 розпочато випуск програмноосереджених ЦОМ «Cyber-70». Моделі «72», «73» й «74» відповідають моделям «6400», «6500» і «6600», але співвідношення продуктивності й вартості в них у 1,5—2 рази краще і їх можна використовувати з одним і двома процесорами. Висока продуктивність у них досягається завдяки використанню периферійних процесорів (до 20) для керування периферійними пристроями, коли канали введення — виведення до 24. Остання машина сімейства «Cyber-76» аналогічна моделі «CDC-7600». Усі машини сімейства побудовано на дискретних компонентах, вони використовують операційну систему «Score». Лит.: Зейдлерберг В. К. Матвейко Н. А., Тарасов Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970. Sipri C. J. Computer dictionary and handbook. Indianapolis — New York, 1968. Ю. П. Селіванов.

**КОНТРОЛЬ АОМ** — сукупність операцій, пов'язаних з перевіркою роботи АОМ, локалізацією її відмов, запобіганням їм та прогнозуванням. За цільовим призначенням операції контролю АОМ поділяють на групи:

1) **Попередній контроль** здійснюють перед використанням машини та розв'язуванням набраної на ній задачі. Він полягає в загальній перевірці готовності АОМ до роботи (перевірка джерел живлення машини, працездатності й точності налагодженості операційних блоків, правильності функціонування систем керування, контролю й реєстрації та розв'язування контрольних задач) і в контролі набору задач в АОМ.

2) **Оперативний контроль** — це контроль за правильністю роботи АОМ у процесі розв'язування задачі. Висновок про роботу АОМ під час розв'язування часто роблять на основі повільного виду контролю — контролю правильності розв'язання. До основних методів оперативного контролю належать інтуїтивний, функціональний та схемний. Інтуїтивний метод ґрунтується на глибокому знанні оператором машини суті досліджуваної на АОМ задачі. При цьому оператор безпосередньо за характером поведінки вихідних характеристик досліджуваної системи може оцінити роботу АОМ. Функціональний метод, до якого в основному належить контроль розв'язання за узагальненими характеристиками досліджуваного на АОМ процесу (напр., за частотою коливань для коливальних систем), і контроль методом надлишкових змінних, пов'язаний зі введенням надлишковості на різні первісних рівнях або на рівні функціональних блоків схеми моделювання, використовують переважно для контролю змінних задач і змінних блоків. Схемний метод — контроль справності окремих блоків і систем машини: джерел живлення і підсилювачів постійного струму (перешагнення, дрейф нульового рівня).

3) **Діагностичний контроль** здійснюють для локалізації причини відмов, яку виявлено в процесі попереднього та оперативного контролю. Для локалізації несправностей машини використовують як інтуїтивні способи, ґрунтовані на високій кваліфікації оператора АОМ, так і формальні методи пошуку, які найпростіше реалізувати в режимі статичного контролю. Діагностику відмов АОМ можна проводити й на основі методу надлишкових змінних.

4) **Профілактичний контроль**, виконуваний для збільшення середнього часу безвідмовної роботи АОМ, звичайно здійснюється в обсязі зазначеної вище заг. перевірки готовності АОМ до роботи з застосуванням граничних режимів роботи й з використанням спец. випробувальних пултів для старанної перевірки блоків машини.

Лит.: Игнатьев В. В. О решении дифференциальных уравнений в системах с контролем и коррекцией. В кн.: IV Всесоюзная конференция-семинар по теории и методам математического моделирования. К., 1964. Вычислительная техника. Справочник Пер. с англ., т. 1, М., 1964. Г. И. Бердakov.

**КОНТРОЛЬ НАБОРУ ЗАДАЧ В АОМ** — сукупність операцій, пов'язаних з перевіркою правильності підготовки до розв'язування схеми моделювання, що її набрано на АОМ. Перший етап — перевірка правильності з'єднань, виконаних на набірному полі машини, звичайно здійснюється візуально, арида — автоматично. Осн. методом К. п. з. в АОМ є статичний контроль, який полягає в зіставленні напруг, що діють на виходах блоків схеми моделювання, з їхніми розрахунковими значеннями при заданні контрольних значень змінних задач, що її набирають на АОМ, у режимі перисного стану машини. У схемі моделювання в режимі статичного контролю немає зворотних зв'язків, які приводять до нерозрізнених станів при появі помилок у схемі. Це дає змогу використати заг. методи контролю та діагностики неперервних і комбінаційних систем, які легко піддаються формалізації та автоматизації.

Для повільної перевірки схеми моделювання (перевірки реактивних елементів, стійкості, для попередньої оцінки точності розв'язку тощо) використовують методи динамічного контролю, найпростішим видом якого є перевірка сталих часу й заг. працездатності інтеграторів, яка виконується в режимі інтегрування за постійної вхідної напруги й фіксованого часу. Перевірка схем, які відтворюють дробово-раціональні передавальні функції, здійснюється порівнянням розрахункових динамічних характеристик схем з експериментальними. Складнішим видом контролю є перевірка схеми моделювання по частинах, динамічні характеристики яких відомі, або поступовим ускладнюванням схеми, починаючи з простого замкненого контура з відомими характеристиками. В багатьох випадках важливим етапом є перевірка стійкості схеми при нульових початкових значеннях похідних і порівняння пробного розв'язку з розрахунковим в усталеному режимі. Щоб перевірити правильність обраного масштабу часу, цей масштаб збільшують (здебільшого у 2 рази) і порівнюють розв'язки, одержані у двох різних масштабах.

Лит.: Шапоров О. М. Техника работы на электронных моделирующих установках. Л., 1964. Вычислительная техника. Справочник Пер. с англ., т. 1, М., 1964. Г. И. Бердakov.

**КОНТРОЛЬ ПРОГРАМНИЙ** — контроль за допомогою спеціальних програм, який встановлює відсутність систематичних помилок у роботі машини чи окремих її пристроїв, правильність програм для ЦОМ, відсутність випадкових помилок (збоїв) у роботі машини та правильність обчислень. К. п. відсутності систематичних помилок у роботі машини провадять випробувальними програмами під час налаштування машини або перевірки її. К. п. правильності програм ЦОМ є однією з форм налаштування програми на машині, його здійснюють спец. налаштовувальні програми. К. п. відсутності збоїв у роботі машини виконують групи команд, що їх включають до програми розв'язування задачі. Прикладами такого К. п. є повторне обчислення, яке





стосовують переважно для перевірки цілості інформації при груповому передаванні чи зберіганні її. К. п. полягає в тому, що після передачі числа або після певного періоду зберігання їх обчислюється сума цих чисел (як правило, підсумовування здійснюють в циклічній переносом), яку потім порівнюють з обчисленою раніше сумою. Незбіг сум є ознакою помилки.

**Г. І. Вербица.**  
**КОНТРОЛЬНИК** — пристрій для виявлення помилок, допущених при перфорації перфокарт. К. виконують такі операції: контролюють перфорацію перфокарт згідно з даними на документах; контролюють чисті поля перфокарт; пропускають перфокарти без контролю на одну або кілька колонок; автоматично відмічають перевірені колонки перфокарт і придатні перфокарти; автоматично розкладають придатні й браковані перфокарти; підраховують, скільки перфокарт пропущено через машину. К. використовують у комплекті перфорацийного обчислювального вилчани. К. моделі К45-6 перевіряють правильність цифрових отворів 45-колонкових перфокарт, К. моделі К80-6 — 80-колонкових перфокарт; КА80-2 використовують для перевірки правильності отворів на перфокартах.

**С. П. Куценко.**  
**КОН'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА** — див. *Логічний вираз нормальних форм.*

**КОН'ЮНКЦІЯ** — булева функція двох аргументів. Позначають її знаком  $\&$  або  $\cdot$ , задають такою таблицею істинності:

| X | Y | X & Y |
|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0     |
| 0 | 1 | 0     |
| 1 | 0 | 0     |
| 1 | 1 | 1     |

К. відповідає в розмовній мові сполучникові «і». Вона комутативна, асоціативна й дистрибутивна щодо диз'юнкції слабкої й разом з нею та з запереченням К. використовують у нормальних формах представлення булевих ф-цій. Логічні перемикальні елементи, що реалізують ф-цію К., наз. схемами збігу, або вентилями, їх широко застосовують у схемах ЦОМ.

**КООРДИНАЦІЙНО-КЕРУЮЧИЙ ЦЕНТР ПІДПРИЄМСТВА** — див. *Автоматизовані системи управління підприємством, Інформаційно-обчислювальний центр підприємства.*

**КОРЕКТУЮЧІ ПЕРЕСТРОЙ** — пристрої в системах автоматичного керування (САК), які забезпечують задані показники якості роботи цих систем. К. п. класифікують за способом викання в САК — на послідовні (їх виконують у пряме коло системи), зустрічно-паралельні (їх виконують у шпцевий жорсткий зв'язок), паралельні і К. п., які здійснюють зв'язки за збуреннями (задаваннями) (див. *Корекція систем автоматичного керування*), за характером перетворюваного сиг-

налу — на неперервні (на постійному струмі), дискретні й на змінному струмі, за видом залежності вихідних сигналів К. п. від вхідних — на лінійні й нелінійні; за способом здійснення — на пасивні й активні; за принципом дії — на електричні, електромеханічні й механічні.

Найпростішими К. п. є пасивні чотириполюсники, які складаються з резисторів і ємностей і реалізують такі *передавальні функції*:

1)  $W_1(p) = \frac{k_1 p}{1 + T_1 p}$  — реальна диференціальна ланка ( $k_1$  — коэф. передачі,  $T_1$  — стала часу,  $p$  — оператор Лапласа),

2)  $W_2(p) = \frac{k_2 (1 + T_2 p)}{1 + T_3 p}$  при  $T_3 > T_2$  — реальна диференціальна ланка, при  $T_2 > T_3$  — ланка інтегровальної дії ( $k_2$  — коэф. передачі,  $T_2$ ,  $T_3$  — сталі часу);

3)  $W_3(p) = \frac{k_3}{1 + T_4 p}$  — інерційна ланка;  $\frac{k_3 (1 + T_4 p)}{(1 + T_5 p)(1 + T_6 p)}$  — інтег-

диференціальна ланка.  $T_5 > T_4 > T_6 > T_7$ .

Першу реальну диференціальну ланку як К. п. застосовують лише при зустрічно-паралельній корекції (ЗПК). Решту ланок можна використати при послідовній і паралельній корекціях. Складнішими, з погляду тех. реалізації, є активні К. п., яких значайно реалізують на *відслідковуючій операційній*. Великі можливості є в нелінійних К. п. завдяки тому, що їхні параметри залежать від величини вхідного сигналу. Так, при великих сигналах розугодження нелінійний К. п. зменшує демпфування системи, а це призводить до розширення смуги пропускання і, отже, до різкої реакції системи, а при зменшенні сигналу розугодження збільшує демпфування, внаслідок чого звужується смуга пропускання системи, сповільнюється реакція системи і цим зменшується величина перерегулювання. Для корекції імпульсних систем застосовують і неперервні, й імпульсні К. п. Неперервні К. п. відповідно змінюють характеристичні частини системи, яка перетворює неперервні сигнали. Імпульсні К. п. можна здійснювати у вигляді імпульсних фільтрів або цифрових обчислювальних пристроїв. Специфічними К. п. імпульсних систем є К. п., які змінюють форми керуючих імпульсів. Є різні методи розрахунку зазначених вище К. п. (див. *Дискретних систем автоматичного керування синтез, Неперервних систем автоматичного керування синтез*).

К. п. за збуреннями (задаваннями) можна реалізувати, якщо є змога виміряти відповідні *збурювальні діяння* безпосередньо або, в деяких випадках, посередньо, застосувавши т. з. «диференціальні вилки» (див. *Диференціальна система автоматичного керування*). Про розрахунок цих К. п. див. *Інваріант-*



ність систем автоматичного керування і командуючі зв'язки в автоматичних системах. Г. Ф. Зайцев, Ф. Ф. Константинов.

**КОРЕКЦІЯ ДРЕЙФУ НУЛЯ** — зменшення змін вихідної напруги підсилювачів постійного струму при незмінному вхідному сигналі, спричинених нестабільністю джерел живлення й параметрів елементів підсилювачів та впливом ряду ін. факторів, які важко контролювати. Розрізняють ручну, параметричну й автоматичну К. д. н. Ручна К. д. н. привадиється періодично шляхом зміни параметрів компонентів (опорів) схеми. При параметричній К. д. н. у схемах підсилювачів передбачено елементи, зміни параметрів яких під дією деяких факторів, що спричиняють дрейф, привадиють до компенсації цього дрейфу. З методів автоматичної К. д. н. дуже поширеним став метод, при якому в підсилювачі використовується додатковий бездрейфовий канал підсилення на змінному струмі з застосуванням модуляції та демодуляції вхідного сигналу. К. д. н. застосовується в аналогових обчислювальних машинах. В. В. Васильєв.

**КОРЕКЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ** — змінювання динамічних властивостей систем автоматичного керування (САК), щоб забезпечити потрібні показники якості процесу керування (запаси стійкості, точність, час регулювання тощо). Здійснюється шляхом зміни параметрів САК (коефіцієнта підсилення розімкненої системи, сталих часу тощо) або її структури. Корекція системи може забезпечуватися й за допомогою виникання додаткових (коректуючих) пристроїв у прямі коло системи (послідовна корекція), в місцевий зворотний зв'язок (аустрійно-паралельна корекція), паралельно одному з елементів системи (паралельна корекція) чи застосування комбінованого принципу керування, тобто виникання коректуючого кола за осн. збурювальним діянням (навантаженням) у стабілізаційних системах або задавальним діянням у слідкуючих системах.

Послідовна корекція дає змогу ввести в закон керування складові, пропорційні похідним та інтегралом від сигналу помилки. Складові, пропорційні похідним, зменшують час регулювання, але збільшують чутливість системи до завад, а пропорційні інтегралом — підвищують точність, але зменшують запаси стійкості. Аустрійно-паралельна корекція, здійснювана шляхом виникання в систему місцевого зворотного зв'язку (33), дає змогу, як правило, при жорсткому ЗЗ зменшити час регулювання, а при гнучкому ЗЗ — зменшити коливаність перехідного процесу, тобто наблизити його до монотонного. В деяких випадках застосовують паралельну корекцію, підсилення коректуючого пристрою паралельно одному з елементів системи. Найпоширенішим методом синтезу послідовних, аустрійно-паралельних і паралельних коректуючих елементів є метод, який ґрунтується на застосуванні логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи.

Корекція за допомогою введення в систему додаткового сигналу за задавальним або збурювальним діянням дає змогу підвищити точність роботи системи. На відміну від зазначених способів корекції елементів цього кола містяться поза основним замкненням контуром системи і їх наз. *командуючими зв'язками в автоматичних системах*. К. с. а. н. за збуренням, розрахована за умовами інваріантності, дає змогу реалізувати точні інваріантні системи (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*).

Лит. Кухтенко А. Н. Проблема інваріантності в автоматичн. К., 1963 (бібліогр. с. 384 - 471). Теорія автоматичного регулювання, кн. 2. М., 1967 (бібліогр. с. 653 - 874).

Г. Ф. Зайцев, Ф. Ф. Константинов.  
**КОРЕЛЯТОР**, *корелометр*, *корелограф* — спеціалізований пристрій для автоматичного обчислювання *автокореляційних функцій* і *взаємних кореляційних функцій* стаціонарних процесів (або процесів, які можна вважати до стаціонарних). Звичайно термін К. застосовують для визначення будь-якого перетворювача, вихідний сигнал якого можна розглядати як *кореляційну функцію* вхідних сигналів. Такі К. широко застосовують у радіотехніці, техніці автоматичного керування тощо. К., який обчислює якусь сукупність значень кореляційної функції, відповідну певному інтервалові зміни її аргументу (часових затримок) і має вимірювальний прилад для відлічування цих значень, звичайно наз. *корелометром*. К., який забезпечує автомат. реєстрацію графіків кореляційної ф-ції (корелограм) на яких небудь носіях (паперовій стрічці, мінострічці), наз. *корелографом*.

За апаратурного обчислювання кореляційних ф-цій стаціонарних випадкових процесів припускають, що цим процесам притаманна властивість ергодичності (див. *Ергодична теорія*). Це дає змогу використовувати в К. усереднення за часом. Обчислення кореляційних ф-цій потребує нескінченно великого інтервалу усереднення, але на практиці доводиться обмежуватися інтервалом скінченної тривалості, тобто К. обчислює не кореляційну ф-цію випадкового процесу, а її оцінку

$$A_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{x}(t - \tau) dt$$

де  $T$  — інтервал усереднення,  $\dot{x}(t) = x(t) - m_x$  — центроване значення випадкового процесу  $x(t)$ ,  $m_x$  — математичне сподівання випадкового процесу  $x(t)$ . Тривалість інтервалу усереднення залежить від спектрального складу досліджуваного випадкового процесу і необхідного ступеня точності обчислення кореляційних ф-цій.

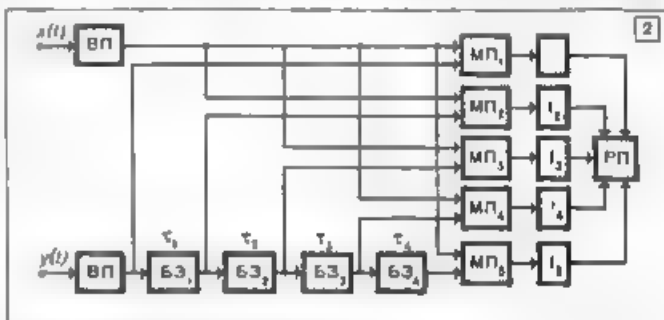
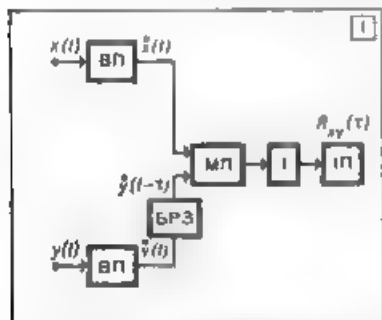
Аналогічно обчислюють взаємну кореляційну ф-цію випадкових процесів  $x(t)$  і  $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{y}(t - \tau) dt,$$

де  $\bar{x}(t)$  і  $\bar{y}(t)$  — центровані значення випадкових процесів  $x(t)$  і  $y(t)$ .

З огляду на те, що практично можна реалізувати лише додатні затримки  $\tau$ , обчислюючи автокореляційну ф-цію, її значення визначають лише для додатних  $\tau$ , але це не має істотного значення, бо  $A_{yx}(-\tau) = A_{xy}(\tau)$ . Визначаючи значення взаємної кореляційної ф-ції  $R_{xy}(\tau)$  для від'ємних  $\tau$ , враховують, що  $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$ . Це дає змогу міняти

місцями однієї точки кореляційної ф-ції,  $N$  — кількість обчислених точок. Для паралельного способу обчислювання  $K$ , будують у вигляді багатоканального пристрою з кількістю каналів, яка дорівнює кількості одночасно обчислюваних точок кореляційних ф-цій. Кожен канал містить свій множильний пристрій МП і усереднювальну (інтегрувальну) ланку І, а також пристрій затримки, який забезпечує запізнювання, відповідно даній точці кореляційної ф-ції. Спрощену



1. Блок-схема мультиплікаційного корелятора РП — вхідний пристрій.  
2. Блок-схема мультиплікаційного корелятора паралельної дії, який обчислює в'язі точок кореляційної функції ВЗ<sub>1</sub>, ..., ВЗ<sub>4</sub> — блоки запізнювання, РП — реєструючий пристрій

місцями вхідні сигнали  $K$ ,  $x(t)$  і  $y(t)$  й визначати значення взаємної кореляційної ф-ції  $R_{yx}(\tau)$  за додатних  $\tau$ .

Найпоширенішими є  $K$ , в яких обчислюють кореляційні ф-ції з використанням наведених вище формул. У цих  $K$  вхідні сигнали (затриманий і незатриманий) перемножуються, через це їх наз. мультиплікаційними  $K$ , або  $K$ , з множення вхідних сигналів. Мультиплікаційні  $K$  для обчислювання взаємної кореляційної ф-ції (має, 1) здійснює перетворення вхідних сигналів  $x(t)$  та  $y(t)$  на відповідні фіз. величини (наприклад, струм, світловий потік) з попередньою обробкою їх (центрування, масштабування за рівнем або за часом тощо); відносний зсув (затримку) одного з сигналів на час  $\tau$  у блоці регульованого запізнювання БРЗ (див. *Запізнення блоку*); перемноження двох сигналів  $x(t)$  та  $y(t - \tau)$  у множильному пристрої МП; усереднення одержаного добутку протягом інтервалу часу  $T$  в усереднювальній (або інтегрувальній) ланці І (див. *Пристрій інтегрувальний*); показ або реєстрацію обчислених значень кореляційної ф-ції, які відповідають заданим значенням аргументу  $\tau$  за допомогою індикаторного, або реєструючого, пристрою ІП.

Процес обчислювання кореляційних ф-цій може здійснюватися і послідовно, і паралельно. В першому випадку обчислювання виконують послідовно, точка за точкою, для кожного заданого значення  $\tau$ . Щоб одержати всю криву кореляційної ф-ції, операції обчислювання повторюють для різних значень  $\tau$ , при цьому  $\tau$  може змінюватися і неперервно, і дискретно. Повний час обчислювання  $T_{\Sigma} = T(N + 1)$ , де  $T$  — час усереднення в обчис-

люванні блок-схему мультиплікаційного  $K$  паралельної дії зображено на мал. 2. Використання схем паралельної дії пришвидшує час аналізу, проте істотно ускладнює схему  $K$ .

Разом з мультиплікаційним  $K$  значно поширились і  $K$ , в яких операцію множення здійснюють за допомогою двох пристроїв піднесення до квадрату (квадраторів) з використанням виразу

$$xy = \frac{1}{4} [(x + y)^2 - (x - y)^2].$$

Іноді  $K$  будують, використовуючи один квадратор. У такому разі обчислення кореляційних функцій проводять за формулою

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) \pm y(t - \tau)]^2 dt = \\ = R_x(0) + R_y(0) \pm 2R_{xy}(\tau).$$

$K$ , в яких використано квадратори, наз. інтерференційними. Є й інші методи обчислювання кореляційних ф-цій: компенсаційний метод, метод діаграм розсіювання та ін. Значно поширився метод апроксимації кореляційних ф-цій за допомогою системи ортогональних ф-цій, у якому визначають коефіцієнти розкладання кореляційної ф-ції в певний ряд (напр., за поліномами Лагерра тощо).

Залежно від форми представлення сигналів при обчислюванні кореляційних ф-цій розрізняють  $K$  аналогові (неперервної дії) й цифрові (дискретної дії). Відомий ще ряд гібридних  $K$ , в яких використовують і аналогову, й цифрову форми представлення сигналів. Найпоширеніші — аналогові  $K$ , порівняно прості будовою, які забезпечують задовільну

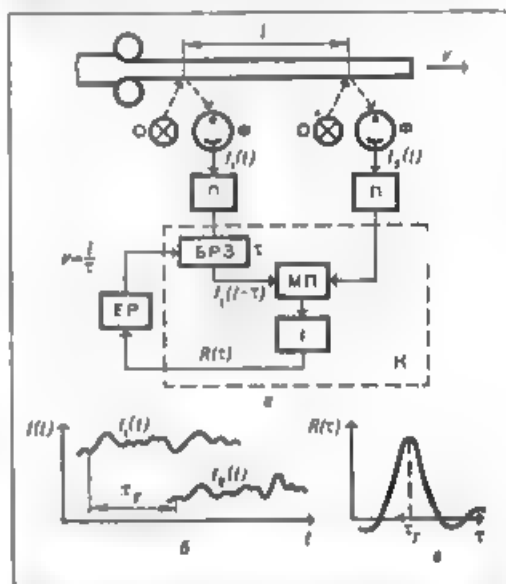
точність обчислювання ф-цій (похибка — порядку кількох відсотків). Цифрові К. дають змогу одержувати значно вищу точність порівняно з аналоговими, але вони складніші.

Розглянуті методи і схеми обчислювання кореляційних ф-цій часто використовують з квантуванням досліджуваних сигналів і за часом, і за рівнем. Значного поширення почали набувати К. в грубому квантуванні сигналів за рівнем — релейні, полярні (знакові) К. і К. Стілітське, які обчислюють відповідно релейні кореляційні функції, кореляційні функції полярні, стілітське кореляційні функції. В релейних і полярних К. відповідно один або два вхідні сигнали піддають квантуванню за двома рівнями з використанням інформації лише про знак першого сигналу. Завдяки використанню в них елементів дискретної техніки, релейні й полярні К. відзначаються схемною простотою. Так, замість багатомірних пристроїв у них використовують прості схеми збігу, а замість блока регульованого запізнювання — регістри зсуву з регульованою частотою тактових (пробувних) імпульсів. Обчислювані при цьому релейні й полярні кореляційні ф-ції відрізняються від справжніх оцінок кореляційних ф-цій на величину якоїсь методичної похибки, яку можна врахувати, грабуючи К. Разом з тим простота таких К. робить їх досить перспективними в багатьох галузях техніки (автом. керування, техніка зв'язку, технічна діагностика, кореляційні екстремальні системи та ін.). У К. Стілітське один з двох досліджуваних сигналів грубо квантується за кількома рівнями (звичайно за 3—4), а другий лишається неамплітудним. Квантований сигнал піддають часовій затримці й перемножують з неамплітудним за допомогою звичайних схем збігу. К. Стілітське поєднують простоту будови з достатньо високою точністю обчислювання кореляційної ф-ції (при п'яти рівнях квантування похибка становить лише частки відсотка). Схеми й конструктивні особливості різних К. досить різноманітні. Так, є пневматичні, електромеханічні, фотоелектронні, оптичні й електронні К. (електронні найпоширеніші).

Літ. С хвицька Е. С. Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск 1964 [6.б.логр. с. 202—218]. Калл Г. А. Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов. М., 1963 [6.б.логр. с. 150—158]. Чеголин П. И. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. М., 1969 [6.б.логр. с. 373—394]. Гриванов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н. Автоматические цифровые корреляторы. М., 1971 [6.б.логр. с. 234—248]. Мырский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., 1972 [6.б.логр. с. 437—452]. Ланге Ф. Корреляционная электроника. Пер. с нем. Л., 1963 [6.б.логр. с. 426—442]. С. Ф. Назаровский.

**КОРЕЛЯЦІЙНА ЕКСТРЕМАЛЬНА СИСТЕМА** — система екстремального регулювання, завданням якої є підтримувати екстремальне значення вихідного сигналу корелятора (взаємну кореляційну функцію його вхідних сигналів). Розрізняють одновимірні К. е. с., в яких максимізується кореляційна функція залежить від одного аргументу (часового

зсуву між вхідними сигналами корелятора), і багатовимірні, в яких ця функція є функцією кількох (двох і більше) аргументів (просторових зсувів і поворотів суміщуваних зображень). За приклад найпростішої одновимірної К. е. с. може бути автомат. кореляційний вимірювач швидкості руху металу під час прокатки (мал.). На поверхню металу, який рухається з швидкістю  $v$ , проєктують у вигляді двох різних світлових штрихів зображення вимом двох освітлювачів О, які перебувають на відстані  $l$  один від одного.



Кореляційна екстремальна система для вимірювання швидкості руху прокату. а — блок-схема, б — вхідні сигнали корелятора, в — вихідний сигнал корелятора.

Фотодавачі Ф сприймають зміну яскравості цих світлових штрихів, зумовлену нерівномірною поверхневою структурою металу. Одержувані на виході фотодавачів випадкові сигнали  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$ , пропорційні яскравості штрихів, відсилаються підсилювачами П й подаються на вхід корелятора К (його окреслено згуртовано). Корелятор складається з блока регульованого запізнювання БРЗ, множильного пристрою МП та інтегратора І. До виходу корелятора підімкнено вимірний прилад. Вхідні сигнали корелятора подібні за формою, але сигнали правого фотодавача відстає за часом на величину транспортного запізнювання  $\tau_p$  (мал., б):

$$f_2(t) = f_1(t - \tau_p), \quad \tau_p = \frac{l}{v}.$$

Вихідний сигнал корелятора  $R(\tau)$  (мал., в) являє собою оцінку взаємної кореляційної функції вхідних сигналів

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t - \tau) f_2(t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t - \tau) f_1(t - \tau_r) dt.$$

Він максимальний при  $\tau = \tau_r$ , тобто при рівності введеного регульованого запізнювання  $\tau$  транспортному запізнюванню  $\tau_r$  сигналу, зніманого з правого фотодавача. Т. ч., корелятор являє собою об'єкт регулювання з екстремальною характеристикою. Результатор екстремальний ЕР підмикають до виходу корелятора, він діє як БРЗ тах, щоб автоматично підтримувалося наж значення взаємної кореляційної функції  $R(\tau)$ . При цьому  $\tau = \tau_r$ .

$v = \frac{1}{T}$ , а значення швидкості відлічують безпосередньо по шкалі БРЗ. Отже, в К. в. с. об'єктом регулювання є корелятор, регульованою величиною — вихідний сигнал корелятора, а регулюючим діянням — сигнал, який керує БРЗ.

Осп. областями застосування К. в. с. є автоматизація керування виробничим процесом (у металургії, хімії, харчовій пром-сті, енергетиці і т. п.) й навігація (космічна й морська). Одновимірні К. в. с. використовують адебільшого як вимірники параметрів руху різних об'єктів — швидкості (автомат. кореляційні вимірювачі швидкості), віддалі (кореляційні радіолокатори й ехолоти), напрямку (кореляційні пеленгатори) та витрат різних рідин, сипких і газоподібних речовин і багатоконпонентних сумішей (кореляційні витратоміри). В таких К. в. с. параметри руху визначають вимірюваннями часових інтервалів (відносного часового жуму) між двома випадковими сигналами. Для вимірювання застосовують компенсаційний метод, при якому вимірювану величину (часовий інтервал) порівнюють з якоюсь еталонною величиною (каліброваною часовою затримкою). Цей метод дає змогу здійснювати вимірювання з дуже високою точністю (відносна похибка вимірювання становить частки процента). Багатовимірні К. в. с. застосовують як автомат. орієнтатори при русі об'єктів по радіолокаційних картах місцевості й по зоряних картах, а також у пристроях для автомат. настроювання електронної апаратури. Дію цих систем оснований на сумішуванні двох зображень (еталонного й порівнюваного) шляхом автомат. відшукування максимуму їхніх кореляційних ф-цій. Як еталонне зображення використовують спец. карту заданого маршруту руху об'єкта, з якою порівнюють, наприр., зображення ділянки місцевості, одержуване на екрані радіолокатора, встановленого на рухомому об'єкті. При цьому кожне з порівнюваних зображень розглядають як двовимірну реалізацію якоїсь стаціонарної випадкової функції (розподіл коефіцієнта яскравості або прозорості). Для обчислювання взаємної кореляційної функції сумішування зображень використовують оптичні корелятори. Достоїнствами К. в. с. є велика точність, безконтактність (відсутність безпосереднього контакту

з об'єктами, параметри руху яких вимірюються), можливість пасивно одержувати вхідні сигнали (тобто використовувати природну інформацію, яка є безпосередньо в самих рухомих об'єктах, не опромінюючи їх зовн. джерелом), можливість працювати напівактивно (використовувати випадкові сигнали, відбиті рухомих об'єктом) та ін.

Лит.: Красовский А. А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М., 1963 (Библіогр. с. 435—481). К. Лубовский С. Ф. Автоматические корреляционные измерители скорости. К., 1963. Мезведер Г. А., Тарасенко В. П. Вероятностные методы исследования экстремальных систем. М., 1967 (Библіогр. с. 447—454). Понен енструма (Математические методы и автоматические системы). Томск, 1969; Самонастраивающиеся системы. Справочник. К., 1969 (Библіогр. с. 527—528).

**КОРЕЛЯЦІЙНА ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ** — теорія, яка розглядає методи обчислювання кореляційних функцій після лінійних і нелінійних перетворень випадкових процесів. Застосовують її в автоматичного керування теорії, в статистичній радіотехніці, радіолокації, теорії зв'язку та в інших галузях техніки. Нехай  $\xi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  — дійсний випадковий процес і нехай  $a(t) = M\xi(t)$  — його математичне сподівання. Кореляційною ф-цією процесу  $\xi(t)$  наз. функцію, залежну від двох змінних

$$R(t, s) = M[\xi(t) - a(t)][\xi(s) - a(s)].$$

Для стаціонарних випадкових процесів кореляційна ф-ція  $R(\tau)$  залежить від одного змінного  $\tau = t - s$ . Нехай  $\xi(t)$  і  $\eta(t)$  — дійсні стаціонарні й стаціонарно пов'язані випадкові процеси, визначені при  $-\infty < t < \infty$  з матем. сподіваннями відповідно  $a(t)$  і  $b(t)$ . Взаємною кореляційною ф-цією процесів  $\xi(t)$  і  $\eta(t)$  наз. ф-цію

$$R_{\xi\eta}(t - s) = M[\xi(t) - a(t)][\eta(s) - b(s)].$$

Розглянемо дійсний випадковий процес  $\xi(t)$  з нульовим матем. сподіванням і кореляційною ф-цією  $R(t_1, t_2)$ . Кореляційну ф-цію  $B(t_1, t_2)$  процесу  $\eta(t)$  на виході лінійної системи з імпульсною передаточною ф-цією  $h(t, s)$  визначають з виразу

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2, s_2) R(t_1, s_1) h(t_2, s_1) ds_1 ds_2.$$

Нехай  $\xi(t)$  — процес типу «білого шуму» з енергетичним спектром  $2N_0$ . Кореляційна ф-ція процесу  $\eta(t)$  на виході диференціальної схеми СЧ данцюжка з передавальною ф-цією

$$\varphi(\lambda) = \frac{i\lambda RC}{1 + i\lambda RC}$$

має вигляд

$$B(\tau) = N_0 \delta(\tau) - \frac{N_0 \alpha}{2} e^{-\alpha |\tau|},$$

$$\text{де } \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Лінійну систему зі змінними в часі параметрами наз. параметричною. Такою системою є, напр., лінійні затримки, робота якої описується виразом  $\eta(t) = \xi[t - f(t)]$ , де  $f(t)$  — задана ф-ція часу. В цьому разі кореляційна ф-ція процесу  $\eta(t)$  має вигляд

$$R(t_1, t_2) = R[f(t_2) - f(t_1) + t_2 - t_1].$$

Параметричними системами є й амплітудний модулятор, інтегровальний АС-ланцюжок зі змінними параметрами тощо. Параметричну систему, параметри якої змінюються випадково, наз. лінійною системою з випадковими параметрами. Такими системами є, напр., більшість радіонавігів зв'язку.

Важливим розділом К. т. в п. є нелінійні перетворення випадкових процесів. Для обчислювання кореляційних ф-цій випадкових процесів на виході нелінійних систем широко використовують метод характеристичних ф-цій, метод розширення випадкового процесу в ряд і метод Вінера. Метод характеристичних ф-цій передбачає спец. вид перетворення Лапласа нелінійної ф-ції, яка описує систему тоді, коли на вході діє *зауважимо* *випадковий процес із нульовим матем. сподіванням і нормованою кореляційною ф-цією*  $R(\tau)$ . Методом розширення випадкового процесу в ряд розглядають квадратичний перетворювач наступною лінійною фільтрацією одержаного процесу. Метод Вінера є ефективним методом обчислювання кореляційної ф-ції процесу на виході нелінійної системи. В основі цього методу лежить можливість ортогонального зображення нелінійного оператора, який описує розглядувану систему. Якщо вхідний процес є *марковським процесом*, широко застосовують методи, основані на використанні диф. та інтегр. рівнянь. К. т. в п. застосовують з апаратних методів аналізу випадкових процесів. За прикладами можуть вважатися корелометри — прилади для вимірювання кореляційних ф-цій фіз. процесів, кореляційні приймачі виявлення радіотехн. сигналів тощо (див. *Корелятор*).

Літ.: Левина В. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. т. 1 М., 1966. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. М., 1965 [Бібліогр. с. 196—201].

О. М. Демченко.

**КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ** — мішаний центральний момент 2-го порядку двох випадкових функцій; для дійсного випадкового процесу  $\xi(t)$ ,  $t \in \lambda$  її визначають за рівністю  $R(t, s) = M \xi(t) \xi(s) = M \xi(t) \cdot M \xi(s)$ ,  $t, s \in \lambda$ , де  $M$  — символ математичного сподівання. Ф-цію  $R(t, s)$  часто наз. автокореляційною функцією. Взаємною К. ф. дійсних випадкових процесів  $\xi(t)$  і  $\eta(t)$ ,  $t \in \lambda$  наз. ф-цію  $R_{\xi\eta}(t, s) = M \xi(t) \eta(s) = M \xi(t) \cdot M \eta(s)$ ,  $t, s \in \lambda$ . К. ф.  $R(t, s)$  дійсна й невід'ємно визначена, вона характеризує енерг. властивості процесу  $\xi(t)$ . Див. також *Кореляційна теорія випадкових процесів*.

**КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ПОЛЯРНА** (зв'язкова) — функція, яка характеризує ступінь зв'язку між знаками стаціонарного

випадкового процесу  $x(t)$  в моменти часу  $t_1$  і  $t_2$  (у цьому разі її наз. полярною *автокореляційною функцією*). Функцію, яка характеризує ступінь зв'язку між знаками стаціонарного випадкового процесу  $x(t)$  в момент часу  $t_1$  і знаком іншого випадкового стаціонарного й стаціонарно зв'язаного з ним процесу  $y(t)$  в момент часу  $t_2$ , наз. полярною *взаємною кореляційною функцією*. Ці функції визначають відповідно за виразами

$$R_{xx}^{**}(t_1, t_2) =$$

$$= M [\operatorname{sgn} (x(t_1) - m_x(t_1)) \operatorname{sgn} (x(t_2) - m_x(t_2))],$$

$$R_{xy}^{**}(t_1, t_2) =$$

$$= M [\operatorname{sgn} (x(t_1) - m_x(t_1)) \operatorname{sgn} (y(t_2) - m_y(t_2))],$$

де  $R_{xx}^{**}(t_1, t_2)$  — полярна автокореляційна функція випадкового процесу  $x(t)$ ;  $R_{xy}^{**}(t_1, t_2)$  — полярна взаємна кореляційна функція випадкових процесів  $x(t)$  й  $y(t)$ ;  $M$  — символ операції матем. сподівання;  $m_x(t)$ ,  $m_y(t)$  — матем. сподівання процесів  $x(t)$  й  $y(t)$ . К. ф. п. набувають значення в межах від  $-1$  до  $+1$ . Якщо розглядувані процеси  $x(t)$  й  $y(t)$  є ергодичними (див. *Ергодична теорія*), то для обчислювання К. ф. п. можна використовувати усереднення в часі відповідно до виразів

$$R_{xx}^{**}(\tau) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \operatorname{sgn} \dot{x}(t) \operatorname{sgn} \dot{x}(t + \tau) dt$$

$$R_{xy}^{**}(\tau) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \operatorname{sgn} \dot{x}(t) \operatorname{sgn} \dot{y}(t + \tau) dt.$$

де  $\tau = t_2 - t_1$ ,  $\dot{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ ,  $\dot{y}(t) = y(t) - m_y(t)$ .

Якщо процеси  $x(t)$  й  $y(t)$  нормальні й мають нормальний (гауссівський) сумарний розподіл, то нормовані автокореляційна  $R_{xx}(\tau)$  і взаємна кореляційна  $R_{xy}(\tau)$  функції цих процесів зв'язані відповідно з полярною автокореляційною  $R_{xx}^{**}(\tau)$  і взаємною кореляційною  $R_{xy}^{**}(\tau)$  функціями співвідношеннями

$$R_{xx}(\tau) = \sin \left[ \frac{\pi}{2} R_{xx}^{**}(\tau) \right],$$

$$R_{xy}(\tau) = \sin \left[ \frac{\pi}{2} R_{xy}^{**}(\tau) \right].$$

К. ф. п. застосовують у техніці автомат. керування, зв'язку, радіолокації й ін. галузях.

Літ.: Козубовський С. Ф. Загальна теорія квантування за рівнем та її застосування до визначення кореляції. «Атоматика», 1963, № 4; Veitman В. Р., Kwakernaak H. Theorie und Technik der Polaritätskorrelation für die dynamische Analyse niederfrequenter Signale und Systeme. «Regelungstech-

п.к.в., 1961, Вд. 8, № 5; Вельтман Б. П., вад. лек. Вое А. Применение релейного коррелятора и коррелятора совпадения знамен в автоматическом регулировании. В кн.: Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 1 М., 1965.

С. Ф. Калубовський.

**КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АПАРАТУРНИЙ АНАЛІЗ** випадкових процесів — автоматичне обчислювання автокореляційних функцій та взаємних кореляційних функцій випадкових процесів за допомогою спеціалізованих обчислювальних приладів — кореляторів (корелометрів, корелографів). Метою К. а. а. є дослідження кореляційних зв'язків між різними випадковими величинами та функціями або між значеннями тієї самої випадкової функції при різних значеннях аргументу. К. а. а. може здійснюватися або після закінчення процесу шляхом автомат. введення в корелятор інформації, раніше зафіксованої на яких-небудь носіях (папері, магніт. стрічці, кінострічці, перфострічці та ін.), або одночасно з досліджуванним процесом (у реальному масштабі часу) шляхом введення в корелятор поточних значень сигналів, що надходять з дачавців або перетворювачів, безпосередньо пов'язаних з процесом (оперативний кореляційний аналіз).

Випадкові процеси при К. а. а. зазнають квантування за часом або (і) за рівнем. Внаслідок квантування за часом реалізація випадкового процесу набуває вигляду випадкової послідовності, зручної для введення в цифровий корелятор. Квантування неперервної реалізації випадкового сигналу за рівнем призводить до представлення цього сигналу у вигляді функції ступінчастої, для обробки якої можна застосовувати елементи дискретної техніки, щоб істотно спростити апаратуру, потрібну для К. а. а. (при незначній втраті точності аналізу).

Методи К. а. а. можна класифікувати як за видом матем. операцій, які покладено в їхню основу (усереднення за часом, усереднення за множиною, перетворення Фур'є для спектра потужності сигналу), так і за способом виконання операцій (аналоговий і дискретний); до дискретного можна віднести й методи релейної та полярної кореляції і *Співпадіння кореляційних функцій*.

К. а. а. широко застосовують у радіоелектроніці й техніці зв'язку — для визначення характеристик сигналів і систем передавання інформації, в акустиці — для вивчення шумів різної природи, в автомат. керуванні — для визначення динамічних характеристик керування об'єктів, у біології та медицині — для аналізу електроенцефалограм та електрокардіограм, в авіонавігації — для вимірювання висоти й швидкості польоту літаків тощо.

Лит. Сивидиць Б. С. Автоматическое коррелирование и их применение. Новосибирск, 1964 [Бібліогр. с. 202—216]. Маркелов Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., 1972 [Бібліогр. с. 437—452]. Бадя Г. А. Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов. М., 1968 [Бібліогр. с. 150—158]. Лавге Ф. Корреляционная электроника. Пер. с нем. Л., 1963 [Бібліогр. с. 426—442].

С. Ф. Калубовський.

**КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗПІЗНАВАННЯ** — правило вирішувальне в розпізнаванні образів, згідно з яким розпізнаваний об'єкт відноситься до того з класів  $j = 1, \dots, J$ , для якого скалярний добуток вектора ознак розпізнаваного об'єкта  $x = (x_1, \dots, x_n)$  й нормованого еталонного вектора класу  $e_j(\beta) = (e_{j1}(\beta), \dots, e_{jn}(\beta))$ , що залежить від параметрів  $\beta$  допустимих перетворень еталонів, досягав абсолютного максимуму і  $x$  належить до класу  $j^*$ , якщо  $f(x, j^*) = \max_j f(x, j)$ , де функція  $f(x, j) = \max_{\beta \in B_j} \sum_{i=1}^n x_i e_{ji}(\beta)$ . Тут  $B_j$  — множина зна-

чень параметрів  $\beta$  допустимих перетворень еталона  $j$ -го класу. Нормування еталонного вектора таке, що за будь-якого перетворення  $\beta$  сума його компонент дорівнює нулеві, а модуль (довжина вектора) — одиниці. К. м. р. використовують, напр., для розпізнавання машинописних знаків одного типу шрифту (ознаками  $x_1, \dots, x_n$  тут є ступені зачорненості клітин двовимірної сітківки (растра), на яку проєктують розпізнаваний знак. Еталони (до нормування) — це «типові» в певному розумінні зображення кожного із знаків алфавіту на сітківці. Параметр допустимих перетворень задає всі можливі зсуви (шрифти) еталона по сітківці.

К. м. р. можна розглядати як варіант т. з. кусково-лінійних методів розпізнавання образів, коли замість прямого перелічування еталонів кожного класу задається їхня параметрична залежність у вигляді еталонної області  $E_j = \{e_j(\beta) / \beta \in B_j\}$ . Близькість до неї в якійсь заданій метриці визначає схожість (див. *Схожість і метрики*) розпізнаваного об'єкта з об'єктами цього класу. Осн. перевага К. м. р. — інваріантність до заданих допустимих перетворень еталонів та інваріантність до перетворень вектора ознак з вигляду  $\alpha_1 x + \alpha_2$ , де  $\alpha$  — вектор з одиничними компонентами,  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  — довільні величини ( $\alpha_1 > 0$ ). В розгляданому прикладі це забезпечує інваріантність методу до т. з. «оптичних» перетворень розпізнаваних знаків (рівномірного змінювання зачорненості клітин сітківки й контрастності ліній знака) й до переносу знаків по сітківці.

К. м. р. можна вивести як статистичний алгоритм розпізнавання (див. *Статистичні методи розпізнавання*), якщо ввести певні припущення про статистичні характеристики розпізнаваних об'єктів і вважати за опт. алгоритм, у якому будуються оцінки макс. правдоподібності для всіх параметрів допустимих перетворень еталонів кожного класу.

К. м. р. чи близькі до нього методи було реалізовано в деяких сучасних читаючих автоматах (напр., у вітчизняному автоматі ЧАРС або амер. автоматі CDC 915 Page Reader). При розпізнаванні машинописних букв одного типу шрифту К. м. р. дає змогу одержати середню частоту помилок порядку  $10^{-3}$  —  $10^{-5}$ .

Лит. Читальні автомати і розпізнавання образів. К., 1965. У м. д. с. Р. Оптичне читання устроїства Пер с англ. М., 1969.

Г. Л. Гімелфарб.

**КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ЧИТАЮЧИЙ АВТОМАТ** — див. *Читальний автомат кореляційний*.

**КОРЕЛЯЦІЯ** в теорії ймовірностей і — стохастична (ймовірнісна) залежність між випадковими величинами, яка має, взагалі кажучи, строго функціонального характеру. Найпростішою й найуживанішою числовою характеристикою кореляційної залежності між випадковими величинами  $\xi$  й  $\eta$  є математичними сподіваннями  $a_\xi$  і  $a_\eta$  і дисперсіями  $\sigma_\xi^2$  й  $\sigma_\eta^2$  відповідно є т. з. коефіцієнт  $R$ , визначуваний ф-лою

$$R = \frac{M(\xi - a_\xi)(\eta - a_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta},$$

де  $M$  — символ матем. сподівання. Якщо  $\xi$  й  $\eta$  незалежні (у ймовірному розумінні, див. *Незалежність у теорії ймовірностей*), то  $R = 0$ . Завжди  $|R| \leq 1$ , причому  $|R| = 1$  тоді й тільки тоді, коли  $\xi$  й  $\eta$  лінійно залежні (в останньому випадку  $\eta =$

$= R \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (\xi - a_\xi) + a_\eta$ ). У заг. випадку величина  $\eta = R \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (\xi - a_\xi) + a_\eta$  має най-

краще лінійне наближення для величини  $\eta$  в тому розумінні, що

$$M(\eta - \eta^*)^2 = \min_{C_1, C_2} M(\eta - C_1 \xi - C_2)^2,$$

де мінімум беруть за найрізноманітнішими сталими  $C_1$  і  $C_2$ . Якщо  $R = 0$ , то величини  $\xi$  й  $\eta$  наз. некорельованими. Якщо  $\xi$  й  $\eta$  — незалежні, то вони й некорельовані. Обернене твердження в заг. випадку неправильне; проте, якщо величини  $\xi$  й  $\eta$  мають сумісний нормальний розподіл, то з некорельованості  $\xi$  й  $\eta$  випливає їхня незалежність. Коеф.  $R$  величин  $\xi$  й  $\eta$  характеризує лише міру їхньої лінійної залежності: він може дорівнювати 0 навіть тоді, коли між величинами  $\xi$  й  $\eta$  є строго функціональна (зрозуміло, нелінійна) залежність. Нехай  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  — незалежні спостереження пари випадкових величин  $\xi, \eta$ . У математичній статистиці як наближене значення невідомого коеф.  $R$  між величинами  $\xi$  й  $\eta$  використовують т. з. статистичний коефіцієнт  $K$ .

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y},$$

$$\text{де } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

а  $\bar{y}$  і  $S_y^2$  визначаються аналогічно за спостереженнями  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . При великій кіль-

кості спостережень  $r$  статистичний коеф.  $K$  є близький до теор. коеф.  $R$ . А. У матем. статистиці розроблено методи оцінок точності визначення  $R$  за  $r$ . Див. також *Корелятор*, *Кореляційна функція*. М. П. Слободенюк.  
**КОРЕНЕВОГО ГОДОГРАФА МЕТОД** — метод розрахунку лінійаризованих систем перування залежності за траєкторіями коренів характеристичного рівняння системи при зміні якого-небудь параметра налаштування (здебільшого коефіцієнта підсилення). Запропоновали цей метод 1948 незалежно один від одного К. Ф. Теодорчик (СРСР) і В. Івенс (США). Кореневим годографом наз. геом. місце коренів характеристичного рівняння замкнутої системи при зміні коеф. підсилення  $K$  від 0 до  $\infty$ . Якщо зобразити передавальну функцію розімкнутої системи у вигляді  $W_{\text{роз}}(p) = KW(p)$ , де  $K$  — коеф. підсилення, то рівняння, еквівалентне характеристичному рівнянню замкнутої системи, можна записати так:

$$K \cdot W(p) = -1. \quad (1)$$

Замінивши  $p$  на  $j\omega$ , одержимо вираз для модуля й аргумента

$$|KW(j\omega)| = 1, \quad \arg |W(j\omega)| = \pm \pi(2h+1) \quad (2)$$

( $h=0, 1, \dots$ ),

що лежить в основі К. г. м.

Запишемо передавальну функцію розімкнутої системи у вигляді:

$$KW(p) = K \frac{Q(p)}{R(p)},$$

де  $Q(p)$  має  $m$  коренів  $N_1, \dots, N_m$  (нулів), а  $R(p)$  —  $n$  коренів  $P_1, \dots, P_n$  (полісів), які треба задати.  $Q(p)$  і  $R(p)$  можна зобразити:

$$Q(p) = q \prod_{i=1}^m (p - N_i), \quad R(p) = r \prod_{i=1}^n (p - P_i),$$

звідки

$$KW(p) = K \frac{q}{r} \frac{\prod_{i=1}^m (p - N_i)}{\prod_{i=1}^n (p - P_i)}. \quad (3)$$

Кожен із співмножників (3) представляє на комплексній площині вектор, який проведено від точки  $P_i$  (або  $N_i$ ) до довільної точки  $p$  під відповідним кутом до дійсної осі:  $\varphi_i$  — для полісів або  $\Psi_i$  — для нулів (мал. 1). Якщо точка  $P_n$  є одним з коренів характеристичного рівняння замкнутої системи (1), то згідно з (2) й (3) мають виконуватися співвідношення

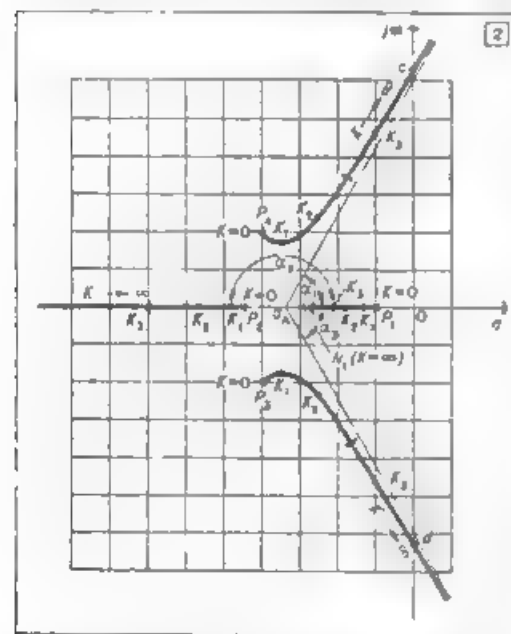
$$\sum_{i=1}^m \Psi_i - \sum_{i=1}^n \varphi_i = \pm \pi(2h+1) \quad (4)$$

і

$$K = \frac{r}{q} \frac{l_1 \dots l_n}{l_1^0 \dots l_m^0}, \quad (5)$$

де  $l_1^0 \dots l_m^0$  і  $l_1 \dots l_n$  — довжини векторів  $(P_1 - P_1)$  і  $(P_n - N_1)$  відповідно.

Для побудови годографа осн. значення мас рівняння (4), куди вираз для коэф. підсилення (5) не входить. Тому, якщо знайдено корінь рівняння (1) за допомогою виразу (4), то значення  $K$  знаходять з (5) і наносять поряд з відповідною точкою годографа. Сукупність точок  $P_n$  на площині  $p = \sigma + j\omega$  утворює гілок кореневого годографа при зміні  $K$  від 0 до  $\infty$ , причому кількість його гілок дорів-



нює порядкові системи. Але безпосередньо відшукувати рівняння (1) за допомогою виразу (4) важко. В. Івєс розробив прості правила, що дають змогу спростити побудову кореневого годографа. Нехай передавальна функція розімкненої системи має вигляд

$$W_{\text{роз}}(p) = K \times \frac{(p - N_1)}{(p - P_1)(p - P_2)(p - P_3)(p - P_4)} \quad (6)$$

причому розміщення полюсів  $P_1 + P_2$  і нуля  $N_1$  на комплексній площині показано на мал. 2 (хрестинками і кружечком відповідно). Застосуємо спочатку такі правила. 1) Відраки дійсної осі, по яких переміщуються дійс-

ні корені при зміні  $K$  від 0 до  $\infty$  є гілками кореневого годографа й містяться в тих частинах осі, праворуч від яких розташоване непарне заг. число дійсних нулів і полюсів розімкненої системи. 2) Гілки, що не лежать на дійсній осі, симетричні їй. 3) Гілки кореневого годографа починаються при  $K = 0$  в полюсах  $P_i$ . При  $K \rightarrow \infty$  гілки закінчуються в нулях  $N_j$ , а решта  $n - m$  — прямують до нескінченності. Це дає змогу зразу визначити дві гілки кореневого годографа:  $P_1 - N_1$  і  $P_2 - \infty$  (мал. 2). Гілки, що починаються в полюсах  $P_3$  і  $P_4$ , будуть симетричні відносно дійсної осі й закінчуються також на нескінченності. 4) Асимптоти гілок, що йдуть при  $K \rightarrow \infty$  до нескінченності, розходяться променями з точки  $A$  на дійсній осі з абсцисою

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{j=1}^m N_j}{n - m} \quad (7)$$

під кутами  $\alpha_i$  до дійсної осі, причому

$$\alpha_i = \frac{2i + 1}{n - m} \pi; \quad (i = 0, 1, \dots, n - m - 1). \quad (8)$$

У нашому прикладі кількість асимптот  $n - m = 3$ , тому з точки з абсцисою  $\sigma_A$  проведимо три промені під кутами  $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$ ,

$$\alpha_1 = \pi \text{ і } \alpha_2 = \frac{5}{3} \pi \text{ (або } \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} \text{) (мал. 2).}$$

5) Точки перетину кореневого годографа з уявною віссю знаходять або за допомогою *стійкості критерію* (Гурица, Рауса, Найквіста або Михайлова), або за допомогою безпосереднього застосування рівняння фаз (2), і це є кращим для системи високого порядку. Це саме рівняння використовують і для визначення кутів входу кореневого годографа в комплексні нулі й виходу з комплексних полюсів. Куту входу в дійсні нулі й виходу з дійсних полюсів дорівнюють  $0^\circ$  або  $180^\circ$ . За цим правилом знаходять точки  $c$  і  $d$  на уявній осі та кута, під якими гілки виходять з полюсів  $P_3 - P_4$ . Зазначені правила дають змогу побудувати всі гілки кореневого годографа. Після цього слід визначити значення  $K$  уздовж годографа. Для цього в будь-яку точку  $P^0$  на одній з гілок проводять вектори  $(P^0 - P_i)$  і  $(P^0 - N_j)$  та обчислюють  $K$  за формулою (5). Розроблено також методи, що дають змогу побудувати кореневий годограф за логарифм. частотними характеристиками.

Кореневий годограф дає змогу визначати осн. динамічні параметри системи: границю стійкості (перетин його з уявною віссю), ступінь стійкості (дійсна частина найближчого до уявної осі кореня); ступінь коливальності (відношення уявної частини до дійсної для



найближчого до уявної осі кореня); декремент загасання (величина, обернена ступеневі коливальності) для будь-якого заданого значення коэф. підсилення  $K$  (або ін. параметра налаштування); час перехідного процесу й перерегулювання за величиною коренів, найближчих до уявної осі. К. г. м. можна використати при синтезі *коректуючих пристроїв*. В спец. приладі й апаратура, що дають змогу автоматизувати процес побудови кореневого годографа.

Лит.: Ударман Э. Г. Метод кореневого годографа в теории автоматических систем М. 1972 166 стр., с. 442-446. Траксел Дж. Синтез систем автоматического регулирования. Пер. с англ. М., 1958.

**КОРЕНІВ АЛГЕБРАІЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ.** Знаходження всіх коренів алгебр. многочлена є однією з допоміжних задач, що трапляються найчастіше і виникають при розв'язанні таких важливих задач, як стійкість руху та ін. Розглянемо докладно лише два найефективніші способи знаходження коренів на цифрових та гібридних обчисл. машинах.

Для великих ЦОМ необхідні такі методи знаходження коренів многочлена, які, з одного боку, були б універсальними, тобто такими, що підходять для будь-яких коэф. (комплексних чи дійсних), не залежали б від вхідних даних (початкового наближення тощо), для реалізації їх потрібні були б тільки коэф. многочлена (мінімум інформації); з другого боку — були б швидкозбіжними. Побудувати такі методи можна, створюючи «гібриди» між методами спуску і методом Ньютона; це пов'язане з відсутністю у поверхні  $F(x, y) = |f(z)|^2$ , де  $f(z)$  — многочлен ( $z = x + iy$ ), *виступаючі локальних*, відмінних від коренів.

Нехай  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$  і для якогось  $z$

$$f(z) \neq 0; \quad f'(z) \neq 0; \quad f''(z) \neq 0; \quad \dots;$$

$$f^{(l-1)}(z) = 0; \quad f^{(l)}(z) \neq 0.$$

Тоді, використовуючи розвинення в ряд Тейлора, одержимо

$$f(z+h) = f(z) + \frac{f^{(l)}(z)}{l!} h^l + O(|h|^{l+1});$$

$$\bar{f}(z+h) = \bar{f}(z) + \frac{\bar{f}^{(l)}(z)}{l!} \bar{h}^l + O(|\bar{h}|^{l+1}).$$

Помноживши ці рівності одна на одну, одержимо

$$|f(z+h)|^2 = |f(z)|^2 +$$

$$= 2 \frac{|\bar{f}(z) f^{(l)}(z)|}{l!} [ |h|^l \cos(l\varphi + \alpha) + O(|h|^{l+1}) ],$$

(1)

де  $\varphi = \arg h$ ;  $\alpha = \arg (\bar{f}(z) f^{(l)}(z))$ . При досить малому  $|h|$  знак лівої частини рівності (1) визначається знаком  $\cos(l\varphi + \alpha)$ . Він від'ємний

$$\text{при } \frac{\pi(4k+1) - 2\alpha}{2l} < \varphi < \frac{\pi(4k+3) - 2\alpha}{2l},$$

тобто для кожної фіксованої точки  $z$  в  $l$  секторів спадання і  $l$  секторів зростання ф-ції  $F(x, y)$ , де  $l$  — порядок першої з похідних, яка відрізняється від нуля, ф-ції  $f(z)$  у точці  $z$ . Найшвидше спадання  $|f(z)|^2$  (найшвидший спуск) буде при  $\cos(l\varphi + \alpha) = -1$ ;  $l\varphi + \alpha = \pi$ ;

$$\arg h = \varphi = \frac{\pi - \alpha}{l} = \frac{\pi - \arg(\bar{f}(z) f^{(l)}(z))}{l} =$$

$$= -\arg \left[ \left( -\frac{1}{f(z) f^{(l)}(z)} \right)^{1/l} \right];$$

$$\text{отже} \quad h = z \left( -\frac{f(z)}{f^{(l)}(z)} \right)^{1/l}. \quad (2)$$

де  $l > 0$ . З (1) очевидно, що при  $l$  достатньо малому та  $h$ , вибраному відповідно до рівності (2), справджується нерівність  $|f(z+h)|^2 < |f(z)|^2$ . Замінивши  $z$  на  $z_k$ ,  $l$  на  $l_k$  і  $h$  на  $z_{k+1} - z_k$ , одержимо

$$z_{k+1} = z_k + t_k \left( -\frac{f(z_k)}{f^{(l_k)}(z_k)} \right)^{1/l_k}, \quad (3)$$

де  $l_k$  — порядок першої з похідних, яка відрізняється від нуля, ф-ції  $f(z)$  у точці  $z_k$ .

При  $l_k = 1$  маємо (метод Возводина)

$$z_{k+1} = z_k - t_k \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}. \quad (4)$$

Таким чином, узявши в рівнянні (3) одне із значень кореня степеня  $l_k$  а комплексного числа, одержимо одну ітеративну схему і для стаціонарної, і для нестаціонарної точок.

Оскільки в рівнянні (3)  $t_k$  наперед невідомо, то використовують такий ітеративний процес:

$$t_k^0 = \min \left( \frac{t_k}{\sqrt[l_k]{l_k}} \right),$$

$$\left( \frac{(t_k + 1) |f^{(l_k)}(z_k)|^{1/l_k}}{|f(z_k)|^{1/l_k} |f^{(l_k+1)}(z_k)|} \right); \quad (5)$$

$$z_k^i = z_k + t_k^i \left( -\frac{f(z_k)}{f^{(l_k)}(z_k)} \right)^{1/l_k};$$

якщо

$$|f(z_k^i)| > |f(z_k)|, \text{ то } z_k^{i+1} = z_k^i / 2;$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Зрозуміло, що можна знайти такий номер  $j$ , для якого справджуватиметься нерівність

$|f(z_k^j)| < |f(z_k)|$ . У цьому випадку беремо

$z_{n+1} = z_n^j$ . Ітеративний процес (3) та (5) збігається з будь-якого початкового наближення до одного з коренів алгебр. многочлена. У зв'язку з тим, що  $l_n = 1$ , поблизу шуканого кореня міститься оскіл цього кореня, в якому збігається метод Ньютона. Тому процес (3) і (5) після скінченної кількості ітерацій  $K$  перейде в метод Ньютона

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad (6)$$

тобто збігатиметься з квадратичною швидкістю (для некротних коренів). Відшукавши один з коренів  $z^{(0)}$ , визначають

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{z - z^{(0)}} \text{ і знаходять корінь многочлена}$$

$n-1$ -ого степеня  $f_1(z)$  і т. д., поки не буде визначено всі  $n$  коренів алгебр. многочлена.

Визначений спосіб можна узагальнити на розв'язування такої задачі: знайти  $\inf |f(z)|$  в даній області  $D$ , де  $f(z)$  — многочлен. Для цієї задачі й будь-який локальний екстремум є екстремумом глобальним. Відшукуючи напрям спадання  $|f(z)|$  в  $D$ , необхідно з усіх можливих напрямів спадання  $|f(z)|$ , що випливають з ф-ли (1), визначити напрям, уповодж якого можливим є скінченний рух у границях  $D$ . Крок  $t_k$  необхідно підпорядкувати виборі, щоб точки  $z_k$  залишалися в  $D$  (докладніше про такого типу алгоритми див. у ст. *Можливі напрямки метод*). Ефективно реалізувати К. а. м. с. о. на ЦОМ неможливо без урахування всіх видів похибок, пов'язаних з даною задачею. Абс. похибку  $\Delta_1$  за рахунок неточності задання коеф. многочлена в околі кореня  $z_0$  оцінюють за виразом

$$\Delta_1 \approx \frac{1}{|f'(z_0)|} (|z_0|^n |\Delta a_0| + |z_0|^{n-1} |\Delta a_1| + \dots + |\Delta a_n|),$$

де  $\Delta a_i$  — абс. похибки коеф.  $a_i$ . Якщо всі  $|\Delta a_i|$  не перевищують  $|\Delta|$ , то

$$\Delta_1 \approx \frac{(1 - |z_0|)^{n+1}}{(1 - |z_0|) |f'(z_0)|} \cdot |\Delta|.$$

Абс. похибку методу  $\Delta_2$  можна оцінити за ф-лою

$$\Delta_2 \approx \left| \frac{f(z^{(0)})}{f'(z^{(0)})} \right|$$

(для некротних коренів). Абс. похибку заокруглення при обчислюванні многочлена  $f(z^{(0)})$  за схемою Горнера оцінюють як

$$\Delta_3 < \frac{1 - |z^{(0)}|^n}{1 - |z^{(0)}|} \cdot 2^{-\tau-1} \text{ при представленні}$$

чисел у формі в фіксованому коді та

$$\Delta_3 < \sum_{i=0}^n |a_i z^{(0)i-1}| \cdot 1.06(2n+1) \cdot 2^{-\tau-1} \text{ при}$$

$n \cdot 2^{-\tau} < 0,1$  при представленні чисел у формі з плаваючою комою, де  $\tau$  — кількість двійкових

розрядів мантис машин. представлення числа. Один з доцільних планів відшукування коренів з урахуванням наведених похибок полягає ось у чому. Після того, як орієнтовно знайдено величину одного з коренів, треба обчислити похибку  $\Delta_1$ . Виходячи з цього, задають якусь величину  $\Delta_2$ , вважаючи для визначеності, що вона не перевищує  $\Delta_1$ . Орієнтуючись на потрібну величину  $\Delta_2$ , можна визначити точність, з якою треба проводити обчислювання, напр., кількість розрядів  $\tau$  для машини зі змінною розрядністю. Якщо машина має сталу розрядність і метод розв'язування фіксований, то похибка заокруглення відіграє таку саму роль, як і похибка  $\Delta_1$ .

Найпоширенішим в К. а. м. с. о. на гібридних обчислювальних машинах є метод зведення до задачі відшукування мінімумів ф-ції  $\Phi(x, y) = \Psi(f(z))$ , де  $\Psi(f)$  — додатно визначена, неперервана разом зі своїми похідними ф-ція вигляду  $\sqrt{\beta^2 + f_1^2} + \sqrt{\beta^2 + f_2^2}$ ,  $f_1$  та  $f_2$  — дійсні ф-ції,  $f = f_1 + i f_2$ ,  $\beta$  — достатньо мала стала величина. Ф-ція  $\Phi(x, y)$  має в кожній точці таку кількість секторів спадання і зростання, який є найменший порядок похідної многочлена  $f$ , що відрізняється від нуля  $\Phi(x, y)$  не має локальних мінімумів, які відрізняються від глобального. Для відшукування коренів на гібридних обчисл. машинах застосовують методи швидкого спуску, зокрема, методи похоронного спуску з різними точок простору відшуканих змінних, і це зумовлено тим, що відшукати корені різних точок (час пошуку значайно — 0,5 сек) можна швидко і шукання коренів відбувається досить наочно. На зовн. пристрої гібридних обчисл. машини зручно спостерігати траєкторії пошуку коренів в різних точок простору відшуканих змінних, перетини ф-ції  $\Phi$  площинами  $\Phi = C$  і т. п. Для обчислювання будь-якого многочлена тут можна обмежитися такими операціями, як лінійна комбінація та множення ф-цій, в також суперпозиція ф-цій. Для конструювання ф-л многочлена за допомогою таких операцій вводять додаткові рівняння, напр., для многочлена 4-го степеня  $z^4 + p_1 z^3 + p_2 z^2 + p_3 z + p_4 = 0$ ,  $p_m = q_m + i r_m$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ ;  $z = x + i y$ , за допомогою додаткових рівнянь знаходять елементи комплексного числа  $z^2 = x_2 + i y_2$ ,  $z^3 = x_3 + i y_3$ ,  $z^4 = x_4 + i y_4$ , після чого  $f_1 = x^4 - y^4 + q_1(x_2 - y_2 y) - r_1(x_2 y + x y_2) + q_2 x^2 - r_2 y^2 + q_3 x - r_3 y + q_4$ ,  $f_2 = 2 x^2 y_2 + q_1(x_2 y + x y_2) + r_1(x_2 x - y_2 y) + q_2 y^2 + r_2 x^2 + q_3 y + r_4$ .

Лит. Загуски В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений М. 1960 [библиогр. п. 210–213]. Введение В. В. Применение метода спуска для определения всех корней алгебраического многочлена. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, т. 1, № 2; Кац И. С., Майергольц М. Д. Решение нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений в комплексной области. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967, т. 7, № 3.

Г. І. Грездов, В. В. Іванов, М. Д. Майергольц.

**КОРЕНІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЇ ЗМІННОЇ СПОСОБИ ОБЧИСЛЮВАННЯ.** Найпоширенішим на практиці є трансцендентні рівняння (див. *Різнень класифікація*) вигляду

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

де неперервні функції  $f(x)$  комплексної змінної  $x$  можна як завгодно близько апроксимувати многочленом  $P_n(x)$  при достатньо великому степені  $n$ . Укажемо на умови, при яких за наближені розв'язки рівняння (1) можна взяти корені  $P_n(x)$  — розв'язки алгебр. рівняння  $P_n(x) = 0$ . Нехай  $\varphi(x)$  визначено в області  $D$ , причому  $D$  містить усі розв'язки рівняння (1), тобто корені  $f(x)$ , і нехай  $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n$ ,  $x \in D$ . Позначимо через  $x_n$  який-небудь корінь  $P_n(x)$ . Якщо  $x_n$ , починаючи з якогось  $n$ , потрапляє в  $D$  і збігається до  $\bar{x}$ , коли  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , то  $\bar{x}$  є коренем  $f(x)$ . Нехай тепер  $\bar{x}$  — який-небудь корінь  $f(x)$ ,  $\bar{x} \in D$ , і нехай  $D$  — замкнена обмежена множина. Позначимо через  $F$  множини значень  $\varphi(x)$  на  $D$ . Якщо  $f(x)$  відображає  $D$  на  $F$  взаємно однозначно, то існує обернене відображення, неперервне на  $F$ . У цьому випадку й за умови, що  $x_n$ , починаючи з якогось  $n$ , потрапляє в  $D$ , в будь-який окіл  $\bar{x}$ , що лежить у  $D$ , потрапить якийсь корінь  $P_n(x)$  для достатньо великого  $n$ . Умова  $x_n \in D$  може не виконуватися. Тоді на  $x_n$  треба взяти точку, в якій  $|P_n(x)| = \min_{x \in D} |P_n(x)|$  (див. *Некоректно поставлені задачі способи розв'язування*). Отже, в ряді досить заг. випадків задачу наближеного розв'язування рівняння (1) можна звести до задачі апроксимації  $f(x)$  многочленами і до задачі наближеного відшукування коренів многочленів (див. *Корені алгебричних многочленів способи обчислення*).

Якщо  $\varphi(x)$  дійсного змінного  $x$  має на відрізку  $[a, b]$  першу похідну  $f'(x)$ , що має, можливо, лише розриви 1-го роду, то відшукати всі розв'язки рівняння (1) на  $[a, b]$  можна так. Вибирають число  $M$ , що задовольняє співвідношення

$$M > \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|, \quad (2)$$

як початкове наближення  $x_0$  беруть точку  $a$  і здійснюють ітеративний процес

$$x_{k+1} = x_k + \frac{|f(x_k)|}{M}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

який збігається до найближчого справа від  $x_0$  розв'язку рівняння (1). Відшукавши один з розв'язків рівняння (1)  $x^{(1)}$  з заданою точністю  $\varepsilon$ , вибирають нове початкове наближення  $x_0 = x^{(1)} + \varepsilon$  і знову здійснюють ітеративний процес (3) і т. д. доти, поки не буде зна-

йдено всі розв'язки на відрізку  $[a, b]$ , тобто до виконання нерівності  $x > b$ .

Зазначені способи раціонально застосовувати для відшукування всіх коренів  $f(x)$  з певною точністю. Одним з найпоширеніших методів уточнення коренів  $f(x)$  є метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

якому властива квадратична швидкість збіжності (для некротних коренів).

Останнім часом підвищився інтерес до методу сітних:

$$x_{k+1} = \frac{x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ці пов'язані з тим, що порядок швидкості збіжності методу сітних  $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ , а на кожній ітерації, крім першої, на відрізок від методу Ньютона, обчислюють одне значення  $\varphi(x)$ .

Для уточнення розв'язку рівняння (1) швидко застосовують ітеративний метод Ейткіна — Стеффенсена

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^3(x_k)}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))}$$

якому властива квадратична швидкість збіжності. Обчислювання  $\varphi(x)$ , корінь якої відшукується, часто є трудомістким, тривалим і дорогим. Тому виникає задача побудови оптим. алгоритмів пошуку коренів.

Розв'язування трансцендентного рівняння (1) з неперервною  $\varphi(x)$  на відрізку  $[a, b]$  обчислювальні машини зводиться здебільшого до задачі відшукування мінімуму додатно визначеної  $\varphi(x) = \varphi(f(x))$ . Мінімуми  $\varphi(x)$  відшукують тими самими способами, що й у випадку алгебр. многочленів.  $\varphi(x)$  на гібридній обчисл. машині будують на наборі алгебр. і трансцендентних неперервних  $\varphi(x)$  (лінійна комбінація,  $x_1^2, x_1 x_2$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $|x|$ ,  $\max(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\min(x_1, x_2, x_3)$  та ін.), зводять додаткові рівняння. На пристроях виведення гібридної обчисл. машини зручно спостерігати траєкторії пошуку розв'язку, перетини  $\varphi(x)$  площинами  $F(x) = C$  тощо.

Розв'язуючи деякі трансцендентні рівняння заг. вигляду на гібридних обчисл. машинах, застосовують метод введення до розв'язування системи неперервних трансцендентних рівнянь. Конструктивний аналіз багатьох  $\varphi(x)$ , заданих аналітично, веде до представлення  $f(x)$  у вигляді  $f(x) = \varphi(x, x_1, \dots, x_m)$ , де  $\varphi$  — неперервна  $\varphi(x)$  змінних  $x, x_1, x_2, \dots, x_m$ ,  $x_i = x_i(\varphi_i(x))$ , має неперервну обернену  $\varphi(x)$   $\varphi_i(x) = \varphi_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Застосувавши вираз для оберненої  $\varphi(x)$   $\varphi_i(x)$ , одержимо систему  $m + 1$  трансцендентних рівнянь  $\varphi(x, x_1, \dots, x_m) = 0$ ,  $\varphi_i(x_i) =$

—  $\Psi_1(x) = 0, \dots, \Psi_m(x_m) - \Psi_m(x) = 0$  з  $m+1$  генідомими Ліва частина системи неперервна за змінними  $x, x_1, \dots, x_m$ , якщо неперервними є  $\Phi$ -ції  $\Psi_i(x)$ . Якщо  $\Psi_i(x)$  не задовольняють умов неперервності, над кожною з них виконують таку ж саму процедуру, як і в  $\Phi$ -цію  $f(x)$  і т. д., доки цілком не усунуть розривні й багатозначні  $\Phi$ -ції.

Більшість рівнянь, що трапляються на практиці, містять наближені числа. Здебільшого розв'язують осн. рівняння, тобто числа, що в його запису, в процесі розв'язування вважають за точні. Як показує дослідження некоректних задач, іноді буває правильнішим розв'язувати якесь допоміжне регуляризуюче рівняння. Нехай задано наближене рівняння має вигляд

$$f(x, a_1(\pm \Delta a_1), a_2(\pm \Delta a_2), \dots, a_m(\pm \Delta a_m)) = 0,$$

де  $x$  — невідоме,  $a_i(\pm \Delta a_i)$  — наближені числа, що їх задано з точністю до  $\Delta a_i$ . Тоді осн. рівняння має вигляд

$$f(x, a_1, a_2, \dots, a_m) = 0.$$

Це рівняння в околі кожного однократного кореня  $x^0$  визначає  $x$  як неявну  $\Phi$ -цію від  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Знайдемо диференціал цієї неявної  $\Phi$ -ції

$$dx = \frac{1}{f'_x(x^0)} \left( -\frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_m} da_m \right).$$

Якщо похибки  $\Delta a_i$  достатньо малі, то спадкова похибка визначення кореня з осн. рівняння

$$\Delta_1 x^0 \approx \frac{1}{|f'_x(x^0)|} (|f'_{a_1}| \Delta a_1 + |f'_{a_2}| \Delta a_2 + \dots + |f'_{a_m}| \Delta a_m)$$

Знайшовши наближений корінь  $\bar{x}^0$ , корисно для контролю обчислень наближу методу  $\Delta_2 \bar{x}^0$ . Для цього можна скористатися з  $\Phi$ -хи

Ньютона:  $\Delta_2 \bar{x}^0 \approx \left| \frac{f(\bar{x}^0)}{f'(\bar{x}^0)} \right|$ . Щоб уникнути падку кратних коренів, корисно ще застосовувати  $\Phi$ -л Ньютона для обчислювання коренів

$$\frac{f(x)}{f'(x)}:$$

$$\Delta_2 \bar{x}^0 \approx \left| \frac{f(\bar{x}^0) f'(\bar{x}^0)}{f'(\bar{x}^0)^2 - f(\bar{x}^0) \cdot f''(\bar{x}^0)} \right|.$$

Доцільно вимагати, щоб  $\Delta_2 \bar{x}^0 < \Delta_1 \bar{x}^0$ . Похибку  $\Delta_2 \bar{x}^0$ , яка виникає внаслідок реалізації

вибраного алгоритму на обчисл. машині, треба оцінювати залежно від особливостей цієї машини (див. *Похибок обчислювальн. теорії*).

Лит. Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. М., 1980 (бюллет. с. 210—213). Червоусько Ф. Д. Оптимальный алгоритм поиска корня функции, вычисляемой приближенно. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1983, т. 8, № 4. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. Пер. с англ. М., 1963 (бюллет. с. 209—214).

Г. І. Грездов, В. В. Іванов, М. Д. Майсєрєдє.

**КОРИСНОСТІ ТЕОРІЯ** — буржуазна економічна теорія, яка визначає вартість матеріальних благ їхньою граничною корисністю для споживача. Найбільшого розвитку К. т. набула в працях представників т. з. австрійської школи економістів. Матем. варіант К. т. сформулювали в середині 19 ст. англ. економіст У. С. Джевонс і австр. економіст Л. Вальрас. К. т. виходить з раціональної поведінки індивідуума, який прагне максимізувати задоволення від володіння різними благами. В міру збільшення кількості певного блага задоволення від володіння останньою його одиницею зменшується. За К. т., корисність останньої одиниці й визначає вартість та ціну будь-якої одиниці даного блага. В матем. інтерпретації заг. величина корисності є  $\Phi$ -цією кількості даного блага, а гранична корисність визначається першою похідною цієї  $\Phi$ -ції. К. т. зазнавала критики не лише в марксистській, а й у буржуазній економ. літературі. Визначення вартості граничною корисністю підійняє суб'єктивно-психологічними факторами об'єктивну основу вартості — кількість суспільно необхідної праці на виробництво товару. Орієнтація на індивідуума, взятого поза суспільними відносинами, виключає можливість лаун. аналізу економіки, бо виробництво, обмін та розподіл нерозривно пов'язані з панівним суспільним ладом і виробничими відносинами. Заперечення суб'єктивістської теорії граничної корисності не означає відмови від кількісного аналізу споживчих вартостей та суспільної корисності різних матеріальних благ, а це необхідно, зокрема, для побудови критерію оптимальності в моделях оптим. планування нар. господарства.

Л. Л. Терехов.  
**КОШІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** Задача Коші (з. К.) для системи звичайних дифер. рівнянь (з. д. р.) сформулювалась у зв'язку з необхідністю розв'язувати деякі типові задачі природознавства. Ці задачі є, як правило, задачами з початковими умовами для канонічних систем; їх здебільшого перетворюють до вигляду з. К. для нормальної системи з. д. р. Нижче розглянуто деякі способи розв'язування останньої задачі.

У квадратурах з. К. для з. д. р. розв'язується досить рідко. Особливий інтерес щодо цього становить випадок, коли система з. д. р. є лінійною. У заг. випадку питання про побудову наближень розв'язку з. К. для з. д. р.

пов'язують з питанням про існування цього розв'язку. Теорему існування звичайно доводять або методом послідовних наближень Пікара, або методом ляманних Ейлера; умову єдиності можна вибрати або в формі Ліпшица, або в іншій формі за рамками теореми існування.

Метод Пікара набув дальшого розвитку в методи двобічних наближень Чаплигіна, центр. частиною якого є теорія дифер. рівняностей. Проте методи Пікара і Чаплигіна, якщо реалізують їх на ЕОМ з фіксованою розрядною сіткою, можуть приводити до жорстких обчислень. Найчастіше звичайними методами наближеного розв'язування з. К. для з. д. р. на ЕОМ з фіксованою розрядною сіткою є т. з. різницеві методи, які виникли в результаті узагальнення методу Ейлера. Ідея цього методу полягає в тому, що з. К. для рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

зводять до з. К. для різницевого рівняння

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) \quad (2)$$

яке наз. тепер рівнянням Ейлера, де  $y_k$  — наближ. значення для  $y(x_k)$  — точного розв'язку з. К. для з. д. р. (1),  $x_k = x_0 + kh$ ,  $h > 0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Розглядаючи з. К. для рівняння (2) передусім як метод наближеного розв'язування з. К. для з. д. р. (1), Ейлер намагався уточнити його. З цією метою він побудував асимптотичне розв'язання

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + h y'(x_{k-1}) + \dots + \frac{h^s}{s!} \times \\ \times y^{(s)}(x_{k-1}) + O(h^{s+1}), \quad (3)$$

де  $h$  — крок інтегрування,  $x_k$  — вузли сітки. За допомогою цього розв'язання йому вдалося зрозуміти причину зв'язної точності методу, визначуваного рівнянням (2), оскільки його одержують з (3) при  $s = 1$ , відкинувши залишковий член і замінюючи  $y(x_k)$  через  $y_k$ , і накреслити шляхи усунення їх. Проте методи вищих степенів (степенем методу наз. найвищий ступінь многочлена, для якого метод є точний), побудовані за допомогою розв'язання (3), виявились громіздкими через складність обчислень, необхідних для одержання  $y''$ ,  $y'''$ , ...

Щоб обминути задачу вище трудність, англ. матем. Дж. Адамс у результаті інтегрування з. д. р. (1) вздовж шуканого розв'язку й замикн. підінтегральних ф-цій інтерполяційним многочленом у формі Лагранжа (див. *Інтерполяція функцій*) одержав асимптотичне розв'язання, аналогічне (3)

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + h \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_{k-1}, y(x_{k-1})) + \\ + O(h^{n+2}), \quad (4)$$

де  $n$  — ступінь інтерполяційного многочлена,  $\beta_i$  — числа, що їх одержують у результаті інтегрування коефіцієнтів Лагранжа. Із (4) одержують т. з. ф-л Адамса, які наводяться в різницевій формі

$$y_k = y_{k-1} + h \left( f_{k-1} + \frac{1}{2} \nabla f_{k-1} + \right. \\ \left. + \frac{5}{12} \nabla^2 f_{k-1} + \frac{3}{8} \nabla^3 f_{k-1} + \frac{251}{720} \nabla^4 f_{k-1} + \right. \\ \left. + \frac{95}{288} \nabla^5 f_{k-1} + \frac{19087}{60480} \nabla^6 f_{k-1} + \dots \right)$$

— явна або екстраполіційна, і

$$y_k = y_{k-1} + \\ + h \left( f_k - \frac{1}{2} \nabla f_k - \frac{1}{12} \nabla^2 f_k - \frac{1}{24} \nabla^3 f_k - \right. \\ \left. - \frac{19}{720} \nabla^4 f_k - \frac{3}{160} \nabla^5 f_k - \frac{863}{60480} \nabla^6 f_k - \dots \right)$$

— неявна або інтерполяційна,

де  $\nabla^i f_k$  — різниця назад,  $f_k = f(x_k, y_k)$ .

Аналогічно одержують ф-лу Ністрема

$$y_k = y_{k-2} + h \left( 2f_{k-1} + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{k-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \nabla^3 f_{k-1} + \frac{29}{90} \nabla^4 f_{k-1} + \frac{14}{45} \nabla^5 f_{k-1} + \dots \right) \\ - \text{явна і ф-лу центральних різниць} \\ y_k = y_{k-2} + h \left( 2f_{k-1} + \frac{1}{3} \nabla^2 f_k - \right. \\ \left. - \frac{1}{90} \nabla^4 f_{k+1} + \frac{1}{756} \nabla^6 f_{k+2} - \dots \right) -$$

неявна.

Дві останні ф-ли наз. ф-лами типу Адамса. За явним ф-лом звичайно проводять обчислення з кроком  $h$  і повторне обчислення з кроком  $gh$  ( $g = \frac{1}{2}$  або  $g = 2$ ); крок вибирають за умовою, щоб одержувані внаслідок цього наближені розв'язки відрізнялися один від одного не більше, як на наперед задану величину. Неявні ф-ли становлять основу передбачально-виправляючих методів, методів Адамса: за явною ф-лою ведуть обчислення з кроком  $h$  (передбачення), потім за неявною ф-лою степеня, на одиницю більшого за ступінь явної ф-ли, з кроком  $h$  роблять виправлення. Крок  $h$  вибирають за умовою, щоб передбачення і виправлення «розв'язок» відрізнялися один від одного не більше, як на наперед задану величину. Ф-ли Адамса і наведені вище ф-ли типу Адамса та ін. того самого типу фіксованого степеня в ординативній формі можна записати так:

$$A_h y_k \equiv \sum_{i=0}^m \alpha_i y_{k-i} - h \sum_{i=1}^n \beta_i f_{k+i-1} = 0, \quad (5)$$

де  $i, m, n$  — цілі числа,  $m > 0$ ,  $n \geq 0$ ;  $\alpha_i$ ,

$\beta_1$  — дійсні числа, а  $\alpha_0 \neq 0$ ,  $\alpha_m \neq 0$ ,  $\beta_0 \neq 0$ ,  $\beta_n \neq 0$ . Початкові значення для ф-л (5), яких бракує, вибирають так, щоб різниця між двома початковими значеннями мала принаймні порядок  $O(h)$ . Значення  $\alpha_i$  і  $\beta_i$ ,  $m$  і  $n$  одержують або внаслідок перетворення ф-л Адамса і ф-л типу Адамса, або методом невизначених коеф. при заданих  $m$  і  $n$ , виходячи з вимог: 1) розв'язності рівняння (5) з відповідними початковими значеннями; 2) збіжності методу, що його визначають за ф-дою (5) з відповідними початковими значеннями; 3) максимальності ступеня апроксимації рівняння (1) рівнянням (5), тобто з вимогою, щоб у розвиненні  $A_h u(x_h) = O(h^{s+1})$  натуральне  $s$  було максимальним. При  $i < 0$  одержують явні ф-ли, при  $i = 0$  — неявні, при  $i > 0$  — неявні з забіганням уперед; при  $m = 1$  і  $i = -1$  або  $i = 0$  — ф-ли Адамса.

В зв'язку з тим, що різницеве рівняння (5) має порядок, взагалі кажучи, вищий від перший, виникає питання про стійкість методу, означуваного ф-дою (5), розв'язування якого зводиться до вимоги, щоб різницевий

оператор  $\sum_{i=0}^m \alpha_i u_{h-i}$  був стійким або умовно

стійким за Ляпуновим. При  $m = n$  і  $i \leq 0$  стійкі методи вигляду (5) можуть бути щонайбільше  $n$ -степеня  $n+1$ ; при парному  $n$  можливі стійкі ф-ли степеня  $n+2$ , напр.,

ф-ла Сімпсона:  $y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3} (y_k + 4y_{k-1} + y_{k-2})$ , степінь якої дорівнює 4.

Щоб подолати труднощі, яка виникла в Л. Ейлера, нім. математики К. Рунге і В. Кутта побудували ще одно асимптотичне розвинення для  $y(x_h)$

$$R_h u(x_h) = u(x_h) - u(x_{h-1}) - \rho_1 k_1(h) - \dots - \rho_r k_r(h) = O(h^{s+1}), \quad (6)$$

де  $r$  — задане натуральне число,  $k_1(h) = h f(\xi_1, \eta_1)$ , при цьому  $\xi_1 = x_{h-1} + \alpha_1 h$ ,  $\alpha_1 = 0$ ;  $\eta_1 = y_{h-1} + \beta_1$ ,  $\beta_1 = k_1(h) + \dots + \beta_{i-1} k_{i-1}(h)$ ,  $\beta_i = 0$ ; а  $\rho_1, \alpha_1$  і  $\beta_1$  — деякі дійсні числа, які одержують з вимоги, щоб у розвиненні (6) натуральне  $s$ , яке наз. степенем методу, було максимальне (ці числа визначаються, взагалі кажучи, неоднозначно). Нижче наведено приклади ф-л Рунге — Кутти:

$$\begin{aligned} \text{при } r=2, s=2: \rho_1 &= \frac{1}{3}, \rho_2 = \frac{3}{4}, \alpha_2 = \\ &= \frac{4}{3}, \beta_{21} = \frac{2}{3}; \text{ при } r=3, s=3: \rho_1 = \\ &= \frac{4}{9}, \rho_2 = \frac{1}{3}, \rho_3 = \frac{2}{9}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \\ &= \frac{3}{4}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = 0, \beta_{32} = \frac{3}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } r=4, s=4: \rho_1 &= \frac{1}{8}, \rho_2 = \frac{1}{3}, \rho_3 = \\ &= \frac{1}{3}, \rho_4 = \frac{1}{8}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_4 = 1, \\ \beta_{21} &= \frac{1}{2}, \beta_{31} = 0, \beta_{32} = \frac{1}{2}, \beta_{41} = \beta_{42} = 0, \\ \beta_{43} &= 1. \end{aligned}$$

Важливою позитивною особливістю методів Рунге — Кутти порівняно з методами Адамса і типу Адамса є те, що вони допускають розрахунки на нерівномірних сітках, а передумовою методів Адамса і типу Адамса є рівномірні сітки. Якщо задано нерівномірну сітку  $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \dots < x_n < b)$ , яка дробить відрізок  $[a, b]$ , то числа  $h_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  наз. кроками сітки  $\sigma$  і  $h = \max_k h_k$  — її нормою. Додатне чис-

ло  $\lambda$  і додатну неперервно-диференційовану на  $[a, b]$  ф-цію  $\varphi(x)$  наз. відповідно параметром і ф-цією розподілу кроків сітки  $\sigma$ , якщо  $h_k = \lambda \varphi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$  і  $h_{n-1} > \lambda \varphi(x_{n-1})$ . Для довільної сітки існує ф-ція розподілу кроків, за якої параметр дорівнює її нормі. Ф-ли Рунге — Кутти завжди явні, і через це кроки сітки інтегрування за ними можна знаходити способом «обчислювання і переобчислювання».

Для методу Адамса, стійкого (умовно стійкого) методу типу Адамса або методу Рунге — Кутти степеня  $s$  на відповідній довільній сітці при достатній гладкості вектор-функції  $f$  справджується мажорантна апріорна оцінка похибки методу

$$\delta_h = y(x_h) - y_h = O(h^s). \quad (7)$$

яка є рівномірною відносно  $h$  й забезпечує збіжність кожного з наведених методів. Вона не придатна для розраховування кроків через її грубість. Точнішою оцінкою похибки зазначених методів є апріорна асимптотичне розвинення

$$\delta_h = \lambda^s C \int_{x_0}^{x_h} \Omega(\xi, x_h) \Psi(\xi, y(\xi)) \varphi^s(\xi) d\xi + O(h^{s+1}), \quad (8)$$

яке справджується при достатній гладкості вектор-функції  $f$ , де  $C$  — константа, що є функціоналом від застосовуваного методу,

$\Omega(\xi, x)$  — матрицант матриці  $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y(x)}$ ,  $\Psi(x, y(x))$  — значення дифер. оператора  $\Psi(f)$  уловж графіка  $(x, y(x))$ , що його визначають за рівністю

$$A_h y(x_h) = h^{s+1} \cdot C \cdot \Psi(x_h, y(x_h)) + O(h^{s+2})$$

для методу Адамса або типу Адамса й за рівністю

$$R_h y(x_h) = h^{s+1} \cdot C \cdot \Psi(x_h, y(x_h)) + O(h^{s+2})$$

для методу Рунге — Кутти; для методу Адамса або типу Адамса треба вважати, що  $\lambda$  дорівнює крокові  $h$  рівномірної сітки при  $\varphi(\xi) \equiv 1$ . Апостеріорне асимптотичне розв'язання похибки зазначених методів можна одержати з розв'язання (8), замінивши в ньому точний розв'язок  $y(x)$  кусково-лінійним континуальним заповненням наближеного розв'язку  $y_h$  (континуальним заповненням сіткової  $\Phi$ -ції  $y_h$  наз.  $\Phi$ -цію  $\varphi(x)$ , яка задовольняє умови  $\varphi(x_h) = y_h$ ).

Доведено, що серед неязних стійких  $\Phi$ -л типу Адамса найвищого степеня при парному  $n$  не існує  $\Phi$ -ли, для якої константа  $C$  у розв'язанні (8) досягає мінімуму, тобто оптим.  $\Phi$ -ля типу Адамса. Проте можна побудувати  $\Phi$ -ли типу Адамса, близькі до оптимальних.

При інтегруванні з. К. для з. д. р. (1) на відрітку  $[a, b]$  методом Рунге — Кутти можна побудувати сітку  $\sigma = (\lambda, \varphi_h)$ , що за сукупості сіток, які задовольняють умову нормування

$$\int_a^b \frac{dx}{\varphi(x)} = b - a \text{ забезпечує мінімум функції}$$

$$\text{палу } \int_a^b \Omega(\xi, b) \Psi(\xi, y(\xi)) |\varphi'(\xi)| d\xi \text{ на умо-$$

ви, що  $\Phi$ -ція  $\Psi(\xi, y(\xi))$  не змінює знака на відрітку  $[a, b]$ . Такі сітки наз. асимптотично оптимальними. Якщо після цього параметр  $\lambda$  вибрати так, щоб узгодити сітку  $(\lambda, \varphi_h)$  міра похибки відповідного наближеного розв'язку не перевищувала наперед заданої величини, то одержимо асимптотично оптим. сітку, яка забезпечує асимптотично гарантовану міру похибки наближеного розв'язку (див. *Похибки обчислювань теорія*).

Розглядаючи на ЕОМ з фіксованою розрядною сіткою той чи інший з описаних вище методів розв'язування з. К. для з. д. р. (1), через похибки заокруглень замість сіткової  $\Phi$ -ції  $y_h$  одержують сіткову  $\Phi$ -цію  $y_h^*$ , яку наз. числовим розв'язком розглядуваної задачі. Різниця  $d_h = y_h - y_h^*$  є похибкою внаслідок заокруглень, а різниця  $D_h = y(x_h) - y_h^* = -\delta_h + d_h$  — повною похибкою числового розв'язку. При цьому вважають, що неусузна похибка, яка виникає через похибки вхідної інформації, дорівнює нулеві, бо розв'язувану з. К. розглядають поки що як точно поставлену.

Традиційний підхід до врахування похибки внаслідок заокруглень, який зроблено в *обчислювальній математиці*, полягає в тому, що здійснюється така організація обчислювання, при якій міра похибки методу виявляється значно більшою, ніж міра похибки внаслідок заокруглень. Цей принцип можна сформулювати як вимогу, щоб головний член асимптотичного розв'язання повної похибки збігався з головним членом асимптотичного розв'язання

$$\text{похибки методу: } D_h = \lambda^s \cdot C \cdot \int_{x_0}^{x_h} \Omega(\xi, x_h) \times$$

$\times \Psi(\xi, y(\xi)) \varphi'(\xi) d\xi + O(\lambda^{s+1})$ . Зрозуміло, це становить умову вибору кроків сітки наближеного інтегрування. Чисельні експерименти на модельних задачах підтверджують існування таких кроків, які прийнято наз. асимптотичними.

З усього цього випливає, що вибір сітки при інтегруванні з заданою мірою похибки з. К. для з. д. р. описаними вище методами пов'язаний з великими труднощами. Тому виникли двобічні різниці методів типу Адамса і типу Рунге — Кутти. З них розглянемо другі, бо перші не привели до задовільних алгоритмів. Перевага двобічних методів полягає в тому, що коли за наближений розв'язок з. К. для рівняння (1) взяти пісуму двобічних наближень, то їхня різниця становитиме тонку мажоранту оцінку похибки цього наближення.

Двобічні методи типу Рунге — Кутти одержують з вимоги, щоб в асимптотичному розв'язанні

$$L_h y(x_h) \equiv h^{s+1} \cdot \alpha \cdot \Psi(x_h, y(x_h)) + O(h^{s+1}) \quad (9)$$

натуральне  $\lambda$  набувало макс. значення і  $\alpha$  було параметром. Парі двобічних  $\Phi$ -л одержують, якщо  $\alpha$  надають значення протилежних знаків з однаковими модулями. Двобічності наближень досягають, коли вибирають досить малі кроки (і, можливо, й значення  $\alpha$ ), зходячи з вимоги, щоб знак розв'язання (9) збігався зі знаком його головного члена. Крім того, вибирають кроки (і значення  $\alpha$ ), враховують такі вимоги: міра обчисл. похибки чисельного розв'язку має бути істотно менша за міру похибки методу і міра повної похибки чисельного розв'язку повинна мати гарантовану оцінку. Наведемо приклади двобічних  $\Phi$ -л:

$$\begin{aligned} \text{при } r=2, s=1, \Psi[f] = f_x; \alpha = \frac{1}{24}, \rho_1 = 0, \rho_2 = \\ = -1, \alpha_2 = \frac{11}{24}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{24}, \rho_1 = \\ = 0, \rho_2 = 1, \alpha_2 = \frac{13}{24}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } r=3, s=2, \Psi[f] = f_x f_y + f_x f_y^2; \alpha = 1, \\ \rho_1 = \frac{1}{6}, \rho_2 = \frac{1}{6}, \rho_3 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \\ = -\frac{1}{2}, \beta_{21} = 1; \beta_{31} = \frac{7}{4}, \beta_{32} = -\frac{5}{4}, \alpha = \\ = -1, \rho_1 = \frac{1}{6}, \rho_2 = \frac{1}{6}, \rho_3 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = 1, \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}, \beta_{21} = 1, \beta_{31} = -\frac{5}{4}, \beta_{32} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Багато пар  $\Phi$ -л в одному алгоритмі використовують у зв'язку з необхідністю «обминати» нулі оператора  $\Psi[f]$ .

Поняття неусувної похибки за своєю природою виходить за рамки обчисл. математики, бо аміна  $\Pi$  пов'язана зі зміною похибки вхідної інформації, що  $\Pi$  одержують, як правило, експериментально. А оцінка неусувної похибки може бути корисна при визначенні доцільної похибки, з якою треба розв'язувати розглядувану задачу.

Основа для одержання оцінок неусувної похибки становлять т. з. рівняння у варіаціях. Нехай  $\bar{z}$  К. для з. д. р.

$$y' = \tilde{f}(z, y) \quad (10)$$

означає «точний» матем. опис якоїсь природничонаукової задачі, а  $\bar{z}$  К. для з. д. р. (1) — наближений і заданий  $\Pi$  опис. Нехай  $\tilde{y}(x)$  — точний розв'язок згаданої з. К. для з. д. р. (10). Тоді рівняння у варіаціях для рівняння (1) записують так:

$$u' = F(z, y(x), u) \cdot u + \tilde{f}(z, \tilde{y}(x) - y(x), u) \quad (11)$$

де  $u(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$ ,  $F$  — матриця  $N$ -го порядку, елемент  $F^{(i,j)}$  якої дорівнює нулеві, якщо  $u^{(j)} = 0$ , а якщо ні, то  $F^{(i,j)}$  дорівнює відповідній частинній похідній різниці функції  $\tilde{f}(z, y)$  за змінною  $u^{(j)}$ ,  $N$  — розмірність вектора  $u$ . Оскільки на практиці досить часто в. К. для рівняння (10) відрізняється від з. К. для рівняння (1) лише початковими умовами, доцільно назвати способи оцінки вектор-функції  $u(x)$  при  $\tilde{f}(z, y) - f(z, y) \equiv 0$ . У цьому випадку досить тонкі оцінки можна одержати або за допомогою чисельних модифікацій методу двобічних наближень Чаплигіна з урахуванням необхідних конкретних властивостей рівняння (11), або за допомогою 2-го методу Ляпунова, якщо якась норма будь-якого розв'язку рівняння (11) монотонно не зростає, або за допомогою іншого тонкого методу, що враховує конкретні властивості рівняння (11). Нехай  $G(z, u)$  — симетрична квадратична форма від  $u$  з коефіцієнтами, можливо, залежними від  $z$ , що являє собою квадрат названої норми, а  $M(z)$  — максимум повної похідної від  $G(z, u)$  по  $z$  згідно з рівнянням (11), обчислений в обмеженій замкненій частині простору, що містить розв'язок  $u(x)$ . Тоді справедливим є оцінка

$$|u^{(i)}(x)| \leq (G(x_0, u(x_0)) \times \times A_{N-1}^{(i)}(z)/A_N(x))^{1/2} \exp \frac{1}{2} \int_{x_0}^x M(\xi) d\xi, \\ i = 1, \dots, N,$$

де  $A_N(z)$  — дискримінант форми  $G(z, u)$ ,  $A_{N-1}^{(i)}(z)$  — мінор, що його одержують із  $A_N(z)$ , викресливши  $i$ -ий рядок і  $i$ -ий стовпчик. У випадку, коли  $\tilde{f}(z, y) - f(z, y) \neq 0$ , для одержання тонких оцінок вектор-

функції  $u(x)$  можна застосовувати вже згадані методи або узагальнення їх.

Для розв'язування з. К. для з. д. р. з високою точністю можна застосовувати аналогові пристрої. З. К. для системи канонічних рівнянь, кожне з яких в рівняннях 2-го порядку, трапляється досить часто. В зв'язку з цим для таких з. К. розроблено неопосереднені способи наближеного розв'язування, аналогічні розглянутому вище.

Лит. Горбунов А. Д. Разностные уравнения и разностные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967, Гайдварян С. С. О выборе оптимальной сетки при численном интегрировании задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Вопросы точности и эффективности численных алгоритмов, в. 2. К., 1969; Бакин А. до Н. С. Лекции по численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Материалы Междугородной летней школы по численным методам, в. 2. К., 1970 (Библиогр. с. 127-133). О. Д. Горбунов.

**КРАЙНЯ ТОЧКА**, вершина опуклої множини  $X$   $n$ -іміного простору  $E$  — така точка  $x$ , яку не можна зобразити у вигляді  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ , де  $x_1 \neq x_2$  — деякі точки множини  $X$ ,  $0 < \lambda < 1$ . К. т. наз. ще екстремальною точкою опуклої множини.

Напр., у скінченновимірному евклідовому просторі  $E^n$  К. т. є вершини многогранника, точки границі кулі. Множина  $X$  може не мати К. т. (напр., відкрита куля). У просторі  $E^n$  всяка непорожня замкнена обмежена опукла множина  $X$  має К. т.; кожну точку множини  $Y$  можна зобразити у вигляді опуклої лінійної комбінації К. т. Ю. М. Дакішвілі.

**КРАЙОВА ЗАДАЧА** — задача одержання розв'язку диференціального рівняння (або системи рівнянь) у заданій області при заданих додаткових умовах на розв'язок у точках її границі. Ці обмеження мають вигляд однієї або кількох рівностей і наз. крайовими умовами (м. у.). Матем. рівняння К. з. для систем звичайних диф. рівнянь порядку  $N$  можна записати так:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad g(x_0, x) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

де перше  $f$ -ла означає векторний запис системи, 2-а — векторний запис м. у., а  $x_0 = x(0)$ ,  $x_1 = x(1)$ . Вимірність  $r$  вектора  $g(x_0, x_1)$  може й не збігатися з  $N$ . При  $r < N$  К. з. наз. жодовим значенням, при  $r = N$  — визначеною, а при  $r > N$  — перекви значеною. В застосуваннях найчастіше маємо справу з випадком, коли  $r = N$ , оскільки в цьому випадку є широкі класи К. з., що мають єдиний розв'язок. А загалом К. з. може й не мати розв'язку. Практично апріорі встановити існування розв'язку К. з., як правило, досить складно. Якщо м. у. мають вигляд  $g_1(x_0) = 0$ ,  $g_2(x_1) = 0$ , то К. з. наз. задачею з розщепленим м. у. На практиці трапляються задачі для систем звичайних диф. рівнянь, у яких додаткові обмеження складніші за (1), напр.:



$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad g(x_0, x_1, x_2, \dots, x_l) + \int_a^b \varphi(\tau, x) d\tau = 0, \quad (2)$$

де  $x_i = x(t_i)$ ,  $t_i$  — задані точки на  $[0, 1]$ , а  $\varphi(\tau, x)$  — задана вектор-функція. Такі задачі наз. у загальному випадку К. а. Якщо  $\varphi \equiv 0$ , то задача (2) наз. багатоточковою К. а., а задачу (1), яка є окремим випадком задачі (2), наз. двоточновою К. а. Задача з к. у.  $g(x_0) = 0$ , заданою лише в одній точці  $t_0 \in [0, 1]$ , наз. одноточновою К. а. Розв'язування такої задачі зводиться до відшукування всіх розв'язків системи  $g(x_0) = 0$  і наступного розв'язу-

вання задач Коші  $\frac{dx}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0^*$ .

Задачу (2) можна просто звести до форми (1), але зі збільшенням порядком системи диф. рівнянь. Якщо  $f(t, x)$ ,  $g(x_0, x_l)$  лінійні по  $x$ ,  $x_0, x_l$ , то К. а. наз. лінійною. Загальний вигляд лінійної К. а. такий:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad Bx_0 + Cx_l = d, \quad (3)$$

де  $A, B$  і  $C$  — задані матриці, а  $f$  і  $d$  — задані вектори. Одним з основних джерел К. а. є варіаційні задачі, що виникають при дослідженні фіз. систем із зосередженими параметрами. Умови мінімуму найпоширеніших функціоналів у вигляді одновиірних інтегралів являють собою з багатьох випадках рівняння К. а. *Понтрягін принцип максимуму* дає змогу зводити до К. а. і неklasичні варіаційні задачі, коли об'єкти обмежень на керування замкнені, — т. з. задачі на побудову оптим. керувань. К. а. для звичайних диф. рівнянь виникають і при розв'язуванні К. а. для рівнянь з частинними похідними методом прямих і при різних ін. способах зведення багатовиірних К. а. до одновиірних. Лінійні однорідні К. а. (тобто задачі типу (3) при  $f = 0$  і  $d = 0$ ) одержуємо при дослідженні власних частот коливань фіз. систем.

К. а. для рівнянь з частинними похідними трапляються звичайно у зв'язку з рівняннями еліптичного типу, оскільки такі задачі мають широке практичне застосування в механіці пружного тіла, гідромеханіці, при дослідженні теплопередавання й електромагнетизму та в ін. галузях фізики (див. *Еліптичного типу диференціальні рівняння з частинними похідними способи розв'язування*). Але матем. К. а. можна сформулювати для будь-якого рівняння з частинними похідними або системи таких рівнянь. У застосуваннях часто формулюються К. а. для самоспряженого еліптичного рівняння 2-го порядку

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f, \quad (4)$$

де  $k$  і  $f$  можуть залежати і від просторових координат, і від розв'язку з його похідними. Поширеність рівняння (4) пояснюється тим, що вона виражає закон збереження маси або енергії для нескінченно малого об'єму. За тиском к. у. розрізняють 1-у, 2-у і 3-ю К. а. для рівняння (4). В 1-й К. а. (задачі Діріхле) задаються значення розв'язку на границі  $\Gamma$  області  $\alpha = \beta$ , в 2-й (задачі Неймана) — значення норм. похідної на  $\Gamma$ :  $\frac{\partial u}{\partial n} = \beta$ , а в

3-й К. а. — умова  $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \beta$  на  $\Gamma$ . В усіх трьох ф-лах  $\alpha$  і  $\beta$  — це ф-ції координат точок границі, але вони можуть залежати й від розв'язку та його похідних. Для рівняння (4) трапляється ще й мішана К. а., в якій в. у. належать до різних типів на різних ділянках границі, і задача ві скінсною похідною,

в якій к. у. на  $\Gamma$  мають вигляд:  $\frac{\partial u}{\partial s} + \alpha u = \beta$ , де  $s$  — напрям, що не збігається з напрямом нормалі до  $\Gamma$ . Окремим випадком рівняння (4) є рівняння Лапласа (при  $k \equiv 1$  і  $f \equiv 0$ ), Пуассона (при  $k \equiv 1$ ,  $f$  не залежну від розв'язку  $u$ ) і Гельмгольца (при  $k \equiv 1$ ,  $f \equiv cu + d$ , де  $c, d$  можуть залежати лише від координат). Якщо коеф. рівняння (4) і к. у. не залежать від розв'язку, то К. а. наз. лінійною. К. а. для еліптичних рівнянь вищого за 2-й порядку виникають у задачах механіки пружного тіла і в гідромеханіці в'язкої рідини. Якщо порядок рівняння  $2n$ , то для визначеності задачі необхідно задати на границі області  $k$  к. у. На тих ділянках границі, які заздалегідь не визначено й які визначають у процесі розв'язування К. а., кількість к. у. має бути на одиницю більшою. К. а. із наперед невідомою границею трапляються при дослідженні течії рідини в вільних поверхнях або кількох немішуваних рідин, при дослідженні теплопередавання в фазових переходах речовини (плавленням, випаровуванням і т. ін.). К. а. для систем рівнянь еліптичного типу виникають у механіці пружного тіла, в магнітогідродинаміці, в задачах термопружності, тобто взагалі там, де необхідно досліджувати взаємний вплив різних фіз. процесів. Крім того, такі К. а. виникають і з варіаційних задач для фіз. систем з розподіленими параметрами. Умови існування розв'язку К. а. досліджено достатньо мірою лише для задач із простими к. у. Термін К. а. застосовують інколи й для граничних задач теорії ф-цій комплексної змінної.

Лит. див. до ст. *Крайових задач способи розв'язування*, В. С. Шаманський.

**КРАЙОВИХ ЗАДАЧ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** Крайовою задачею (к. а.) називають сукупність двох систем інтегро-диференціальних рівнянь (для *Рівнянь класифікації*) й функціональних співвідношень, які відносяться до скалярної чи векторної невідомої функції  $u(z, \bar{z})$ , із яких першу систему (1) визначено в якійсь області  $\Omega$  змінних  $z, \bar{z}$  ( $z_1, \dots, z_n$ ), а другу (2) — на частині або на

всій границі  $\Sigma$  області  $\Omega$ , а також, може, на деяких підмножинах  $\Sigma_1 \subset \Sigma$  розмірності, меншої за розмірність  $\Omega$ . Для визначеності вважатимемо, що система (1) має вигляд

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = L(t, \bar{x}, \bar{u}, D\bar{u}, S\bar{u}), \quad (1)$$

де  $\bar{u}(t, \bar{x}) = (u_1(t, x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(t, x_1, \dots, x_m))$ ,  $L$  — векторна ф-ція своїх аргументів,  $D = (D_1^{a_1}, \dots, D_m^{a_m})$ ,  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $D_i^{a_i} = \frac{\partial^{a_i}}{\partial x_i^{a_i}}$ ,  $\sum_{i=1}^m a_i \leq p$  ( $p$  — порядок системи),  $S\bar{u} = \int \int \int k(t, \bar{x}, \bar{u}) d\bar{x} dt$  — інтегральний оператор, у якому інтегрування здійснюється по всіх чи по частині змінних  $t, \bar{x}$ . Область  $\Omega$  є відкритим циліндром у просторі  $t, x_1, \dots, x_m$  із основою  $Q$ , яка міститься в площині  $t = 0$ , віссю, паралельною осі  $t$ , й бічною поверхнею  $\Gamma$  (див. мал.). У цьому разі говорять, що  $\Omega$  є топологічним добутком  $Q$  на відкритий інтервал

$$H = \{0 < t < T\}; \quad \Omega = Q \times H; \quad \Gamma = \gamma \times H, \\ \gamma = \partial Q$$

(границя  $Q$ ). Обмеження для функції  $\bar{u}$  мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} l(t, \bar{x}, \bar{u}, D\bar{u}, S\bar{u}) &= 0, \quad t, \bar{x} \in \Gamma, & (a) \\ \bar{u}(0, \bar{x}) &= \bar{u}_0(\bar{x}), & \bar{x} \in Q & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $l$  — векторна ф-ція всіх аргументів, визначена на  $\Gamma$ , оператори диференціювання  $D$  мають порядок  $p$ , як правило, менший, ніж  $p$ ,  $S$  — якийсь оператор, визначений на  $\Gamma$ . Рівняння (1) й (2) описують нестационарну крайову задачу (п. к. з.), або задачу Коші, рівняння (1) — розвиток якогось процесу; рівняння (2a) визначають крайові умови, умо-

ванням; розмноження нейтронів у реакторі тощо).

Інтегро-диф. рівняння (1) відповідає континуальній моделі математичної (див. Чисельні методи) фіз. процесу, крайові умови (2a) ефективно описують взаємодію фіз. системи з навколишнім середовищем, початкові дані (2b) описують початковий стан системи. Якщо оператори  $L, l, S$  є ф-ція  $\bar{u}(t, \bar{x})$  не залежать від  $t$ , то умову (2b) відкидають і приходять до стаціонарної крайової задачі (с. к. з.). Якщо оператори  $L, l, S$  є лінійними, то й п. к. з. є лінійною, в протилежному разі — нелінійною. У випадку лінійної п. к. з. рівняння (1) і (2) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = z(t, \bar{x}) \bar{u} + \bar{f}(t, \bar{x}), \quad t, \bar{x} \in \Omega, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} l(t, \bar{x}) \bar{u} &= \bar{g}(t, \bar{x}), & t, \bar{x} \in \Gamma, & (a) \\ \bar{u}(0, \bar{x}) &= \bar{u}_0(\bar{x}), & \bar{x} \in Q, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

де оператори  $L(t, \bar{x})$  і  $l(t, \bar{x})$  лінійні, ф-ції  $\bar{f}(t, \bar{x})$ ,  $\bar{g}(t, \bar{x})$  (ф-ції крайових умов) і  $\bar{u}_0(\bar{x})$  (ф-ція початкових даних) нав. вхідними даними п. к. з. (3), (4). Лінійку п. к. з. (3), (4) нав. коректно поставленою, якщо розв'язок  $\bar{u}(t, \bar{x})$  задачі (3), (4) єдиний і неперервно залежить у якісь нормі, матриці, або взагалі топології від вхідних даних задачі. Коли  $\bar{f}(t, \bar{x}) = 0$ ,  $\bar{g}(t, \bar{x}) = 0$ , п. к. з. (3), (4) є однорідною й оправдується принципом суперпозиції: разом з розв'язками  $\bar{u}_1(t, \bar{x})$ ,  $\bar{u}_2(t, \bar{x})$  задачі (3) розв'язком буде також  $C_1 \bar{u}_1(t, \bar{x}) + C_2 \bar{u}_2(t, \bar{x})$ . У цьому разі  $\bar{u}(t, \bar{x})$  представляють у вигляді

$$\bar{u}(t, \bar{x}) = S(t) \bar{u}_0(\bar{x}), \quad (5)$$

де  $S(t)$  — лінійний обмежений оператор у якомусь банаховому просторі  $B$  (див. Простір абстрактний) ф-ції  $\bar{u}(\bar{x})$ , які задовольняють крайову умову  $l(\bar{u}) = 0$ ; при цьому для кожного  $t \in H$ ,  $\bar{u}(t, \bar{x}) \in B$  правильним є співвідношення

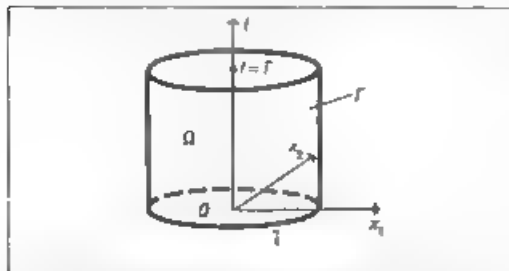
$$\|S(t)\|_B \leq M(T) < \infty. \quad (6)$$

Коли  $\bar{f}(t, \bar{x}) \neq 0$ , то за достатньо гладких коэф. і вхідних даних рівняння (3), (4) правильним є представлення

$$\bar{u}(t, \bar{x}) = S(t, t_0) \bar{u}_0(\bar{x}) + \int_{t_0}^t S(t, \tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}) d\tau, \quad (7)$$

де  $S(t_2, t_1)$  — оператор переходу, який задовольняє співвідношення

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(t_2, \bar{x}) &= \\ &= S(t_2, t_1) \bar{u}(t_1, \bar{x}), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, & (a) \\ S(t_2, t_1) &= S(t_2, t_2) S(t_2, t_1), \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq T, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



Область інтегрування нестационарної крайової задачі у фазовому просторі  $t, x_1, x_m$ .

ви (2b) — початкові дані. П. к. з. описують здебільшого поведінку якоїсь фіз. системи (атом, молекула; ансамбль атомів і молекул, з яких складається тверде, рідке чи газоподібне тіло; вакуум, заповнений випроміню-

$\lim_{t_1 \rightarrow t_1+0} S(t_1, t_1) = I$  (тотожний оператор). При цьому  $S(t, 0) = S(t)$ .

Оск. метод розв'язування задачі Коші (3), (4) полягає в апроксимації її скінченновимірними задачами Коші. Це роблять різними способами. До класичних методів належить метод Рунге — Гальоркіна (метод проектування), до лінійних — метод прямих і метод скінчених різниць.

Останнім часом намітилося зближення класичних методів проектування зі скінченнорізницею на основі т. з. варіаційно-різницевих схем. У зв'язку з розвитком ЕОМ скінченнорізницевий метод став науніверсальнішим для розв'язування систем (3), (4). Особливо ефективний він для нелінійних систем (1), (2), бо дає змогу автоматично в процесі розв'язування задачі лінеаризувати  $P$ . Скінченнорізницеві методи дають змогу розв'язувати н. к. з. крок за кроком за допомогою прямої або непрямої схем. В останньому випадку доводиться розв'язувати на кожному кроці задачу с. к. з. Т. ч., в деяких схемах розв'язування н. к. з. зводиться до повторного розв'язування с. к. з.

Пряме розв'язування с. к. з., тобто зведення с. к. з. до задачі Коші, можливе лише в найпростіших випадках. Так, задача

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - k^2(x)u = f(x); \quad \frac{du(0)}{dx} = 0; \quad u(1) = 1 \quad (9)$$

зводиться до сукупності трьох задач Коші:

$$\frac{dl}{dx} = k^2(x) - l^2(x), \quad l(0) = 0; \quad (10a)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) - l(x)y, \quad y(0) = 0; \quad (10b)$$

$$\frac{du}{dx} = l(x)u + g(x), \quad u(1) = 1. \quad (10c)$$

Задачі (10) інтегрують на відрізку  $[0, 1]$ , перші дві в напрямлі зростання  $x$ , останню — в зворотному напрямлі. Всі три задачі стійкі. Такий метод розв'язування с. к. з. наз. методом дифер. прогонки, або методом дифер. факторизації. Більше аживаною є скінченнорізницева прогонка, або скінченнорізницева факторизація, яку застосовують до різницевого аналога с. к. з. За виконання певних умов одновимірну скінченнорізницеву с. к. з.

$$\Delta \bar{u} = \bar{f} \quad (11)$$

розв'язують методом векторної або скалярної прогонки. Тут  $\Delta$  є одновимірний скінченнорізницевий аналог оператора

$$L = \sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k}{dx^k}, \quad (12)$$

де  $a_k$  — квадратні матриці розмірності  $m$  у просторі змінних  $u_1, \dots, u_m$ . Застосування

векторної прогонки до розв'язування одновимірної с. к. з., як правило, є економічним у тому розумінні, що кількість операцій, яка припадає на точку сітки, обмежена сталою, залежною від оператора  $\Delta$ , а не від кількості  $N$  точок сітки. Пряме перенесення методу одновимірної прогонки на багатовимірні с. к. з. призводить до т. з. методу матричної прогонки. Однак цей метод не економічний, бо кількість ітерацій, яка припадає на точку сітки, залежить від заг. кількості точок сітки  $N$  і зростає як додатний степінь  $N$ . В окремих випадках можна представляти багатовимірну с. к. з. як якусь задачу Коші. Іноді в рівнянні (1) с. к. з.

$$L\bar{u} + \bar{f} = 0 \quad (13)$$

одну змінну, напр.  $x_1$ , можна виділити, так що (13) набуває вигляду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = \Phi \bar{u} + \bar{f}. \quad (14)$$

де оператор  $\Phi$  не залежить від  $D = \frac{d}{dx}$ . Якщо при цьому  $\Gamma$  містить вісь  $x$ , і крайові умови на осі  $x_1$  визначають  $\bar{u}_0(x_1, \dots, x_m)$ , то на відповідній структури оператора  $\Phi$  і крайових умов на  $\Gamma$ , що забезпечують коректність задачі, с. к. з. можна прямо розв'язати як задачу Коші. В такий спосіб можна розв'язати, напр., задачі обтікання тіла надавукоюм потоком ідеальної рідини чи задачі обтікання в'язким потоком у наближенні призматичного шару. Здебільшого для розв'язування с. к. з. вдаються до ітераційних методів, більшість яких ґрунтуються на аксіоматичних властивостях розв'язків н. к. з.

Відомо, що розв'язки  $u(t, \bar{x})$  задачі Коші для рівняння теплопровідності в стаціонарних крайових умовах

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \Delta u + f(x), \quad t, \bar{x} \in \Omega; & (a) \\ u(t, \bar{x}) &= g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \gamma; & (b) \\ u(0, \bar{x}) &= u_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in Q & (b) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

має таку асимптотичну властивість:

$$u(t, \bar{x}) \rightarrow u(\bar{x}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (16)$$

При цьому функція  $u(\bar{x})$  не залежить від вибору  $u_0(x)$  і є розв'язком с. к. з.

$$\left. \begin{aligned} a^2 \Delta u + f(\bar{x}) &= 0, \quad \bar{x} \in \Omega & (a) \\ u(\bar{x}) &= g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \gamma & (b) \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Отже, розв'язок с. к. з. (17) можна одержати граничним переходом (16) з розв'язку н. к. з. (15). Асимптотична властивість (16) справджується щодо розв'язків багатьох н. к. з., в т. ч. й нелінійних, і використовують її для одержання розв'язків відповідних с. к. з. Такий метод наз. методом стаціонування.

ня (встановлення). В методі встановлення ітераційна схема розв'язування с. к. з. може просто збігатися зі скінченнорізницевою схемою інтегрування відповідної ш. к. з. Явні схеми скінченнорізницевого розв'язування є простими в реалізації, але потребують великої затрати машинного часу. Неявні схеми простої апроксимації (див. *Дробових кроків метод*) можна реалізувати з будь-яким кроком у часі, однак при цьому на кожному кроці знову доводиться розв'язувати с. к. з. аналогічного виду. Щоб уникнути цього й одержати економічну схему інтегрування, вдаються до методу набл. факторизації, поєднуючи її зі схемою універсального алгоритму. Так, якщо  $L$  — сильно еліптичний оператор, то с. к. з.

$$Lu + f(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in Q, \quad u(\bar{x}) = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \gamma \quad (18)$$

становиться у відповідність релаксаційний процес

$$\left. \begin{aligned} \Psi \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(\bar{x}), \quad t, \bar{x} \in Q; & (a) \\ u(t, \bar{x}) &= g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \gamma, & (b) \\ u(0, \bar{x}) &= u_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in Q, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

де  $\Psi$  — релаксаційний оператор факторизованої структури

$$\Psi = \prod_{i=1}^s \Psi_i, \quad \Psi_i = I + \alpha L_i, \quad (20)$$

де  $\Psi_i$  — оператори легко оборотні, адебіаційного одновимірні. І такі, що процес із дискретним часом

$$\Psi \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = Lu^n + f^n \quad (21)$$

збігається для всіх  $\tau$ . Гранична ф-ція  $u(\bar{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \bar{x})$  не залежить від  $u_0(\bar{x})$  і дає розв'язок с. к. з. (18).

Для розв'язування с. к. з. з постійними коэф. успішно застосовують класичні методи точкових джерел, зосереджених навантажень тощо, які ведуть до розв'язку с. к. з. у вигляді суперпозиції елементарних розв'язків, відповідних зосередженим у точці умовам (умови типу д-ф-ції). Цей метод приводить до інтегр. рівнянь 1-го й 2-го роду для ф-цій джерел  $\Phi(\bar{x})$  на границі

$$g(\bar{x}) = \int K(\bar{x}, \bar{s}) \cdot \Phi(\bar{s}) d\bar{s} + \alpha \bar{\Phi}(\bar{x}), \quad \bar{x}, \bar{s} \in \gamma, \quad (22)$$

де ядро  $K(\bar{x}, \bar{s})$  може бути й сингулярним. При  $\alpha = 0$  маємо інтегр. рівняння Фредгольма 1-го роду, а при  $\alpha \neq 0$  — рівняння Фредгольма 2-го роду.

Після дискретизації рівняння (22) приходять до системи лінійних рівнянь (недостатньо обумовленої, коли  $\alpha = 0$ ), яку розв'язують прямими або ітераційними методами. Формально рівнянцевий аналог (22) має меншу вимірність, ніж різницевий аналог (21), однак розв'язування цих систем є порівнянним

в часі, бо в (22) є повністю заповнена матриця, тоді як у (21) є лише матриці з кількома ненульовими діагоналями.

Слід виділити особливий клас с. к. з., — задачі на власні значення й задачі зі змінним спектром. В с. к. з. на власні значення міститься параметр  $\lambda$ , на часткових значеннях якого с. к. з. втрачає єдиність розв'язку; ці значення  $\lambda$  називаються власними значеннями с. к. з.; множина власних значень утворює спектр задачі. Так, якщо  $L$  — самоспряжений додатний оператор

$$L = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (23)$$

то в с. к. з.

$$Lu = \lambda u, \quad \bar{x} \in Q, \quad u(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \gamma \quad (24)$$

є дискретний алічений спектр дійсних значень  $\lambda_n$  (асі додатні) й відповідна йому система взаємортогональних власних ф-цій  $u_n(\bar{x})$ , які є розв'язком с. к. з. (24).

Скінченнорізницевий аналог (24) приводить до задачі лінійної алгебри про повний спектр симетричної матриці, для якої є ефективні методи розв'язування. Іноді треба знайти власне значення з певною екстремальною властивістю (максимальне або мінімальне за модулем, за дійсною або уявною частиною тощо). В цьому разі застосовують також методи встановлення.

С. к. з. зі змінним спектром відповідають задачі (24), коли спектр оператора  $L$  знакозмінний. Тоді застосовують ітераційні методи й складнішої структури, напр. багатопарові з вибором параметра релаксації.

До важливих нелінійних с. к. з. приходять, відшукуючи стаціонарні й автомоделі розв'язку в газовій динаміці. В цьому разі диф. рівняння, якими описано автомоделі розв'язування, мають, як правило, особливості в граничних точках і в асидальгидь вельдомих точках усередині. Заг. теорії таких крайових задач ще не розроблено.

Лит. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., 1963 [Бібліогр. с. 877—734]. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., 1968, Тихонов А. Н. Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1968. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967 [Бібліогр. с. 189—193]. Яненко Н. Н. Введение в разностные методы математической физики, ч. 1. 2. Новосибирск, 1968 [Бібліогр. ч. 2, с. 379—383]. Ромашенко В. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М., 1964 [Бібліогр. с. 385—392]. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1971 [Бібліогр. с. 510—512]. Годунов С. Н. Уравнения математической физики. М., 1971. Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А. Итерационные методы в квадратичных функционалах. Новосибирск, 1972 [Бібліогр. с. 178—203]. Курант Р. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М., 1964 [Бібліогр. с. 793—813]. Уильямсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. М., 1970 [Бібліогр. с. 559—564].

М. М. Яценко.

**КРАЙОВІ УМОВИ** — обмеження у вигляді одного чи кількох рівнянь, заданих у точках границі крайових задач.

**КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ СПОСОБИ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЮВАННЯ** — див. *Кубатурні формули*.

**КРИТЕРІЙ ЯКОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ** — сукупність прийнятних (постульованих) показників, які дають змогу оцінювати якість роботи систем автоматичного керування (САК). Критерії ці можна розділити на дві великі групи. До однієї групи, універсальної, входять інтегральні критерії — функціонали, числові значення яких правлять на міру якості САК. Критерії цієї групи вживаються частіше. Друга група критеріїв ґрунтується на задаванні певного розташування полюсів системи і застосовують її виключно для оцінювання якості лінійних систем. На відміну від безпосередніх оцінок показників якості, К. я. с. а. ж. зв'язані певними залежностями з параметрами САК, і це дає можливість використовувати їх, розв'язуючи задачі синтезу.

Досить поширеною є оцінка якості за узагальненим інтегральним критерієм  $I = \int_0^T f(x) dt$ , де  $f(x)$  — функція змінних, що

характеризують стан системи, напр., від величини перехідної складової похибки  $x(t)$  та її похідних, керуючих діями та ін. З цього критерію залежно від виду  $f(x)$  можна одержати оцінки для різних окремих випадків, напр.:

1)  $f(x) = 1$  (тоді  $I = \int_0^T dt$  — час перехідного процесу),

2)  $f(x) = x(t)$  (тоді  $I = \int_0^T x(t) dt$ ,  
 $f(x) = |x(t)|$   $I = \int_0^T |x(t)| dt$  }

— інтегральні оцінки;

3)  $f(x) = x^2(t)$  (тоді  $I = \int_0^T x^2(t) dt$  — квадратична похибка).

Для лінійних систем більшість оцінок наведеного типу можна одержати без прямого інтегрування дифер. рівнянь САК та побудови перехідних процесів. Проте для нелінійних систем ці оцінки не можна застосовувати, не розв'язуючи рівняння системи і не будуючи кривої  $x(t)$ , а це обмежує застосування їх. Аналогічні К. я. с. а. ж. використовують, оцінюючи дискретні системи (див. *Дискретні системи автоматичного керування синтез*). Коли на САК діють випадкові збурення, за найпоширеніший критерій якості динамічної точності править середня квадратична похибка, яка в характеристиці розглянутих можли-

вих значень випадкової величини відносно їхнього середнього значення і яку визначають як додатне значення квадратного кореня з дисперсії випадкової величини.

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx},$$

де  $m_x$  — математичне сподівання  $x$ ,  $p(x)$  — щільність імовірності.

Для стаціонарної випадкової ф-ції  $\sigma_x$  визначають аналогічно, але з усередненням у часі

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x(t)]^2 dt}$$

де  $T$  — довжина відрізка на експериментальній кривій  $x(t)$ . Разом з цими оцінками при синтезі систем з випадковими діями використовують питомий ризик, загальний ризик тощо (див. *Дуальне керування*).

Критерії розподілу коренів дають змогу, якщо відомі корені характеристичного рівняння (полюси передаточної функції) й корені чисельника оператора замкненої системи (нулі передаточної функції), одержати деякі характеристики перехідного процесу. Можлива й обернена задача — так розташувати корені на комплексній площині, навіть не знаючи їхніх величин, щоб перехідний процес задовольняв певні вимоги. Осн. критеріями тут є затісання  $\eta$ , яке являє собою абсолютну величину дійсної складової кореня, розташованого ближче від інших до уявної осі, і кошикальність  $\mu = tg \varphi$ , де  $2\varphi$  — кут, що охоплює сектор комплексної напівплощини з вершиною в початку координат; у середині й на границі кута містяться всі корені. Обидві ці величини можна визначати без розв'язування характеристичних рівнянь. Критерії  $\eta$  та  $\mu$  можна зв'язати певними співвідношеннями як з параметрами системи, так і з осн. характеристиками перехідного процесу. Застосовують також різні частотні критерії, основані на використанні перетворень Фур'є та Лапласа для одержання узагальнених частотних характеристик, які визначають перехідний процес за ненульових початкових умов у широкому класі ділень. При цьому як початкові дані можна використати не тільки дифер. рівняння, а й експериментально одержані частотні характеристики. В окремому випадку нульових початкових умов ділення типу функції ступінчастої

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega$$

показники якості оцінюються за властивостями дійсної частотної характеристики  $P(\omega)$  без обчислення інтеграла. Зв'язок критеріїв з показниками перехідного процесу звичайно здійснюється у вигляді нерівностей.

Лит., Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., 1960. Красовский А. А., Песелов Г. С. Основы автоматизации в технической кибернетике. М.—Л., 1962 [Библиогр. с. 596—600]. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966 [Библиогр. с. 594—618]. Теория автоматического регулирования, кн. I. М., 1967 [Библиогр. с. 743—763].

О. Л. Циликин.

**КРИТЕРІЙ СЕМАНТИЧНОЇ ВІДПОВІДНОСТІ** — набір правил, за якими в даній автоматизованій інформаційно-пошуковій системі формально визначається ступінь семантичної близькості пошукового образу документа й пошукового припису, щоб зробити висновок про релевантність документа щодо інформаційного запиту. К. с. в. містить здебільшого інформацію про потрібну для релевантності порогову величину ступеня семантичної близькості.

Найпростіший К. с. в. передбачає цілковитий збіг пошукового образу документа з пошуковим приписом. Прикладом застосування такого К. с. в. можуть бути інформаційно-пошукові системи (ІПС), побудовані на використанні алфавітно-предметних і бібліотечно-бібліографічних класифікацій, хоча в них застосовують і критерій збігу початку пошукового образу документа (цифрового чи буквенно-цифрового індексу) з індексом запиту. Критерій «ша збігу» рідко застосовується в ІПС, побудованих на використанні дескрипторних мов; найпоширенішим простим К. с. в. в ІПС дескрипторного типу є критерій «ша входження», який потребує, щоб у складі пошукового образу документа були всі дескриптори пошукового припису. Проте вимога про цілковитий збіг пошукового образу документа з пошуковим приписом (або цілковите «входження» дескрипторів припису) обмежує можливість реального ІПС. Тому більша частина розроблених К. с. в. для існуючих ІПС враховує можливість часткового збігу пошукового образу документа з пошуковим приписом. При цьому для релевантності документа щодо інформаційного запиту потрібно, щоб був не лише частковий збіг, а й ступінь такого збігу, що перевищує порогове значення. Якщо величина часткового збігу пошукового образу документа з пошуковим приписом, можливо коректована в процесі функціонування ІПС, досягає заданого значення, то документ вважається релевантним і видається у відповідь на інформаційний запит. Є багато варіантів К. с. в., що зумовлюються особливостями інформаційно-пошукової мови, використовуваної в ІПС, та конкретними завданнями, що їх розв'язує дана ІПС.

А. К. Пастухина.

**КРИТИЧНИЙ ШЛЯХ** — послідовність технологічно взаємопов'язаних робіт сіткового плану-графіка, що з'єднує початкову й кінцеву події й має максимальну «довжину» (під довжиною тут розуміють сумарну тривалість усіх робіт, які входять до послідовності). Напр., сітковий графік (мал.) має два К. шл.: перший проходить через  $v_1, v_2, v_3$ , другий — через  $v_2, v_4$  (цифри поруч зі стрілками означають тривалість робіт, зоб-

ражуваних цими стрілками). Поняття К. ш. використовують під час керування комплексом робіт, виконуваних згідно з сітковим планом-графіком. При цьому роботам, які лежать на К. ш., приділяють особливу увагу, бо будь-яка затримка у виконанні якоїсь з них призводить до зриву строку закінчення всього комплексу робіт. Такий метод планування і керування наз. інколи методом «критичного шляху».

І. К. Цинуров.



Сітковий графік.

**КРІОГЕННІ ЕЛЕМЕНТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ** — елементи, основані на використанні явища надпровідності. Існує кілька типів їх перистори, перистатрони, кріотрони, кодоотрони, кріосари, кріосистори, тунельні кріотрони та ін. Найперспективніші — кріотрони й тунельні кріотрони.

**КРІОТРОН** — надпровідниковий пристрій, опір мерованого елемента якого змінюється залежно від величини мерованого магнітного поля. Використовується як один з кріогенних елементів обчислювальної техніки. Спочатку (з 1955) К. виконували у вигляді дрової конструкції, напр., з танталового стрижня, що був зентилем, та обмотки на ньому, виготовленої, напр., з ніобієвого дроту, — вона виконувала функції затвора. З 1957 застосовують плівкові К. (мал. 1), що являють собою розділені ізоляцією перетинні плівки — зентиль (а) і затвор (б), які містяться над екраном (в); останній поліпшує прямокутність перемікальної характеристики К. і збільшує його швидкодію. Використовують переважно плівкові К.; дротяні застосовують лише як засіб для моделювання нових кріотронних пристроїв. У тунельному К. за допомогою струму в плівковому затворі здійснюється подавлення тунельного ефекту між двома іншими плівками. Широкому впровадженню тунельних К. перешкоджають технологічні труднощі виготовлення їх.

К. можна використовувати для побудови найрізноманітніших схем, застосовуваних в обчисл. техніці: логічних — перемикачів, дешифраторів, суматорів комбінаційних і т. ін.; запам'ятовувальних — елементарних микром адресного й асоціативного ЗП, тригерів, регістрів і нагромаджувальних акумуляторів, підсилювачів малих сигналів, формування входних та керуючих сигналів; вимірних та перетворювальних схем, суміжних з обчислювальними системами, давачів магнітного поля й низьких температур, генераторів і перетворювачів частоти тощо. Надзвичайно простий за конструкцією, К. має перемікальні характеристики, аналогічні харак-

теристикам електронних ламп або напівпровідникових приладів. Форму цих характеристик можна змінювати, змінюючи деталі конструкції К. або співвідношення між розмірами вентилів і затвора. Напр., К. з надпровідним екраном під вентилями має ступінчасту перемикальну характеристику, необхідну для схем релейного типу і формуваців, а К. без екрана — лінійну характеристику, необхідну для підсилювальних, перетворювальних

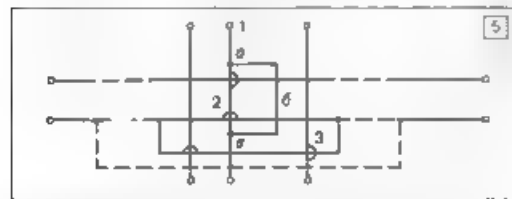
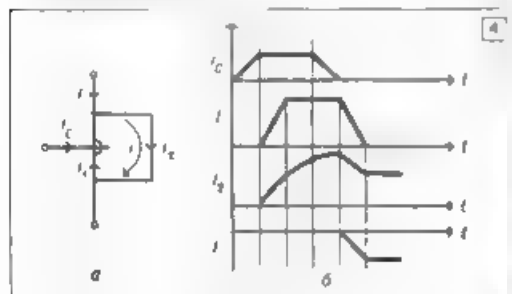
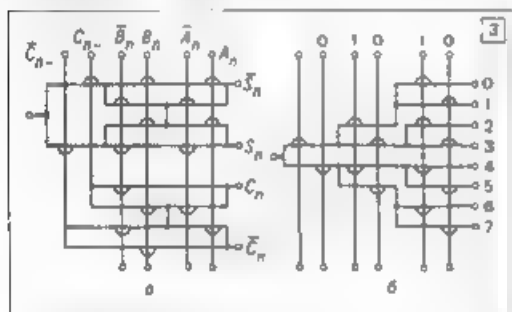
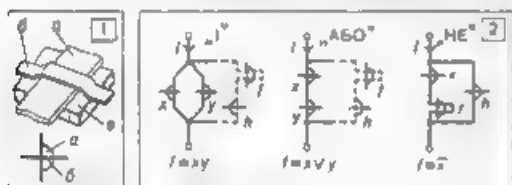
та вимірювальних схем. Змінюючи відношення ширини вентиля К. до ширини його затвора, можна змінювати коефіцієнт підсилення. Можна й керувати коефіцієнтом підсилення за допомогою додаткового магнітного поля зміщення і т. ін.

На основі К. звичайно реалізують функції двомазначної логіки. При побудові двомазначних логічних елементів двома значеннями логічних змінних відповідають такі два режими роботи К.: опору вентиля немає (стан надпровідності) і є (стан надпровідності зруйновано). Перший стан забезпечується, якщо струму в ватворі немає або величина його менша за критичну; другий — коли струм затвора більший за критичний. Хоч абсолютна величина опору вентиля у другому стані дуже мала ( $10^{-3}$  —  $10^{-5}$  ом), вона перевищує опір надпровідного вентиля в нескінченне число разів.

На мал. 2 показано способи реалізації логічних операцій «І», «АБО» та «НІ» в схемах на основі К. Аналогічно можна реалізувати й інші функціонально повні набори. В схемах, зображених на мал. 2, використано принцип витіснення струму надпровідності в лівій гілці контура в праву, коли послідовно вхідних сигналів  $x$  та  $y$  відповідає одиничне значення функції  $f$ . Вихідний сигнал у схемах «І» й «АБО» — це струм у правій гілці, який можна використати як струм ватворів К. напалитання, в схемі «НІ» — це струм у лівій гілці. Специфічна особливість таких елементів полягає в тому, що після виникнення вхідних сигналів  $x$  та  $y$  елементи не повертаються до первісного стану, тобто струм із правої гілки не може спонтанно перемикатися в ліву. Для повернення будь-якого з цих елементів до первісного стану цей струм можна витіснити сигналом повернення  $\bar{f}$  за допомогою допоміжного К. Можливий і інший принцип побудови логічних схем, при якому окрім сигналів змінних  $x, y, \dots$  використовують ще й сигнали їхніх інверсій  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$

На мал. 3 показано схеми комбінаційного суматора (а) та дешифратора (б) на К., побудованих в використанням цього принципу. В 1962 було доведено принципову можливість побудови ЦОМ повністю з К. і обумовлено специфіку її організації, проте будувати з К. арифметичні та керуючі блоки машини нецелюцільно. Тому основна галузь застосування логічних кріотронних елементів — це блоки керування адресним та асоціативним кріотронним З П й самі комірки адресного та особливо запам'ятовувального пристрою асоціативного

Для зберігання інформації в кріотронній схемі основним є спосіб, оснований на використанні циркуляції струму надпровідності в замкненому надпровідному контурі протягом якого завгодно часу. Такий струм називають персисторним. Записування персисторного струму в контур пояснено на мал. 4. Струм запису  $I$  спочатку надходить до правої гілки, індуктивність якої в кілька разів більша, ніж у лівій гілці, але її активний



1. Конструкція (а) і умовне позначення (низу) кріотрона.
2. Приклади логічних елементів «І», «АБО» й «НІ» на кріотронах.
3. Схеми комбінаційного суматора (а) і дешифратора (б) на кріотронах: А і В — координати;  $C_{n-1}$  — перенос із попереднього розряду;  $C_n$  — перенос у наступний розряд;  $\Sigma_n$  — сума.
4. Схема перисторного контура (а) і струмові діаграми (б) в ньому.
5. Схема асоціативного запам'ятовувального елемента на кріотронах.

опір завжди дорівнює нулеві, а в лівій гілці надпровідність у момент записування руйнується струмом  $i_2$ . Після зняття  $i_2$  перерозподілу струмів між гілками не відбувається, якщо величина струму  $i_2$  менша за власний критичний струм у правій гілці. Але в момент виникнення струму  $i$  електромагнітна енергія, запасена в індуктивності правої гілки, перерозподіляється по всьому контуру, внаслідок чого в ньому замикається персисторний струм  $i_2 = -i_1$ , який може існувати до моменту записання  $K$  струмом  $i_2$ . Зображений на мал. 4, а персисторний контур є основою *пам'ятовувального пристрою* адресних та асоціативних пристроїв. Крім персисторного контура, до складу цих пристроїв вводять додаткові  $K$  для адресного керування зчитуванням і записуванням інформації, а в асоціативному ЗП — ще й для виконання логічних операцій, пов'язаних з асоціативним пошуком, логічного порівнювання, накладання заборони (маски) тощо. На мал. 5 показано схему асоціативного *пам'ятовувального* елемента на чотирьох  $K$ . Тут контур *або* — персисторний. У його гілці *не* провадиться порівнювання записаної інформації з ознакою опиту, який надходить по шині 1. При незбігу записаної інформації з ознакою опиту замикається кріотрон 2. Зчитування здійснюється за допомогою кріотрона 3.

Проведення пристроїв на  $K$  в об'єкти техніку стримується слабо розвинутою технологією виготовлення великих *інтегральних схем*. Такі пристрої становитимуть практичний інтерес, якщо вони за своїми характеристиками значно переважатимуть аналогічні пристрої на некріотронних елементах. Напр., якщо асоціативні ЗП матимуть ємність  $10^4$  біт, а адресні —  $10^6$  біт і частоту звертання — порядку мегагерца. Це стане можливим, коли за один технологічний цикл виготовлятимуться плати, що мають сотні тисяч елементів. Див. Калі Я. С., Михайлов Г. А., Рахубовський В. А. Макет ЦВМ на кріотронних об'єктах управління. «Механікація та автоматизація управління», 1968, № 3; Ченцова Р. А. Кріотроніка «Электронная техника Серия 15 Кріотронная электроника», 1989, т. 1, Алфеев В. Н. Кріотронная электроника «Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника», 1976, т. 13, № 10; Бреммер Дж. Сверхпроводящие устройства Пер. с англ. М., 1964; Гейзленд Р. Кріоэлектронное гибридное запоминающее устройство сверхбольшой емкости с произвольной выборкой «Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике США», 1968, т. 58, № 10.

Г. О. Артеменко, І. Д. Войтович, Г. О. Михайлов.  
КРОК КВАНТУВАННЯ див. Квантування.  
КУБ ФЕРЯТОВИЙ — блок *оперативного запам'ятовувального пристрою*, призначений для зберігання інформації, складено його з *матриць запам'ятовувальних* з феромагн. осердями, плівковими магнітопроводами тощо.

КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ — формули виду

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N C_i f(x^{(i)}), \quad (1)$$

де  $\Omega$  — область інтегрування в  $n$ -вимірному евклідовому просторі (див. *Простір абст-*

*рактний*),  $p(x)$  — фіксована функція (*вагова функція*),  $f(x)$  належить достатньо широкому класові функцій,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , точки  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  називаються вузлами і числа  $C_i$  — коефіцієнтами  $K$ . ф. Вузали звичайно належать  $\Omega$ , але ця вимога не є необхідною. Сума в (1) є узагальненням суми Рімана і наз. *вага* у багатовимірному сумі. При  $n = 1$  ф-ла (1) і сума в правій частині наз. *квадратурними* Кубатурну суму й беруть за наближене значення інтеграла з лівої частини ф-ли (1).

Один із способів одержування  $K$ . ф. оснований на інтерполяції (див. *Інтерполяція функцій*). Виберемо  $M(m, n) = (m + n)! / m!n!$  точок  $x^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, M(m, n)$ ) в  $\Omega$ , які не лежать на алгебр. гіперповерхні порядку  $m$ . Побудуємо інтерполяційний многочлен степеня  $m$  ф-ції  $f(x)$  за  $M$  значеннями в  $x^{(i)}$  й запишемо наближену рівність

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{M(m,n)} L_i(x) f(x^{(i)}), \quad (2)$$

де  $L_i(x)$  — многочлен впливу вузла  $x^{(i)}$ . Він дорівнює 1 в  $x^{(i)}$  і 0 — в решті вузлів. Помноживши обидві частини рівності (2) на  $p(x)$  та інтегруючи по  $\Omega$ , одержимо  $K$ . ф. виду (1), у якій  $N = M(m, n)$  і

$$C_i = \int_{\Omega} p(x) L_i(x) dx. \quad (3)$$

Вважають, що існують  $\int_{\Omega} p(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} dx$

( $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — невід'ємні цілі числа), які називаються моментами  $p(x)$ .  $K$ . ф.,  $M(m, n)$  вузлів якої не лежать на алгебр. гіперповерхні порядку  $m$ , а коеф. визначаються рівністю (3), наз. *інтерполяційною*.

Коеф.  $C_i$  можна знайти й з лінійної алгебр. системи, яку одержимо, якщо запишемо, що  $K$ . ф. точна для всіх одночленів степеня, меншого за  $m$  або рівного йому, від  $n$  змінних. Це ґрунтується на тому, що інтерполяційна  $K$ . ф. є точною для таких многочленів. Обернене твердження:  $K$ . ф. з  $M(m, n)$  вузлами, точна для многочленів степеня, меншого за  $m$  або рівного йому, є інтерполяційною, — не завжди правильне. Наведемо відповідну теорему. Для того, щоб  $K$ . ф. (1), точна для многочленів степеня, не вищого за  $m$ , була інтерполяційною, необхідно й достатньо, щоб ранг матриці  $\{\varphi_1(x^{(i)}), \varphi_2(x^{(i)}), \dots, \varphi_M(m,n)(x^{(i)})\}_{i=1}^N$  розміру  $N \times M(m, n)$ ,

дорівнював  $N$ . Тут через  $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$  позначено одноклени від  $n$  змінних, занумеровані так, що одноклени меншого степеня мають менший номер, а одноклени одного й того самого степеня занумеровано як завгодно. Зокрема,  $\varphi_1(x) = 1$ .



Якщо  $\Omega \in p(x)$  мають симетрію, то в деяких випадках вдається побудувати К. ф., точні для многочленів степеня, меншого за  $m$  або рівного йому, з меншою за  $M(m, n)$  кількістю вузлів. Зменшення кількості вузлів досягають шляхом спец. вибору їх.

Для найпростіших областей, зокрема для куба, кулі, симплексу  $\Omega \in p(x) = 1$ , можна побудувати К. ф.  $n$ -кратним застосуванням квадратурних ф.-л. Напр., якщо  $\Omega$  — куб:  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то за допомогою, скажімо, квадратурної ф.-л. Гаусса з  $k$  вузлами  $t_i$  й коеф.  $A_i$  одержимо К. ф.

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k A_{i_1} \dots A_{i_n} f(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}),$$

яка має  $k^n$  вузлів і є точною, коли  $t = x_1^{\alpha_1} \times \dots$

$\times x_n^{\alpha_n}$ , де  $0 \leq \alpha_i \leq 2k - 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Вадюю таких формул є швидке збільшення кількості вузлів при зростанні  $n$ .

Серед К. ф., точних для многочленів степеня, меншого за  $m$  або рівного йому, великий інтерес становлять ті, які мають найменше вузлів. У разі, коли  $m = 1, 2$ , такі ф.-л. побудовано за будь-якого  $n$  і для довільних  $\Omega \in p(x) \geq 0$ ; при цьому найменша кількість вузлів дорівнює 1 у першому випадку, і  $n + 1$  — в другому. При  $n \geq 3$  найменша кількість вузлів залежить від області  $\Omega \in p(x)$  симетрією й  $p(x) = 1$  найменша кількість вузлів дорівнює  $2n$ , а для симплексу  $\Omega \in p(x) = 1$  вона дорівнює  $n + 2$ . Ціми двома прикладами й вичерпується випадок  $m = 3$  за будь-якого  $n$ : при  $m \geq 3$  й  $n \geq 2$  К. ф. з найменшою кількістю вузлів не відомі навіть для областей окремого виду. При  $n = 2$  випадок, коли  $m = 3$ , досліджено для довільної  $\Omega \in$  невід'ємної  $p(x)$ , во такі повні результати одержано для  $m = 4, 5$ .

Наведемо ще два результати про знак коеф. К. ф. за припущення, що  $p(x) \geq 0$  в області  $\Omega$ . Якщо  $\Omega$  обмежена й замкнена, то існує К. ф. з  $M(m, n)$  вузлами, точна для многочленів степеня, меншого за  $m$  або рівного йому,

і така, що вузли належать  $\Omega$  і коеф. невід'ємні. Питання про фактичну побудову такої ф.-л. залишається відкритим. Якщо К. ф. точна для многочленів степеня, меншого за  $m$  або рівного йому, то серед її коеф. є не менше як  $M(1, n)$  додатних, де  $1 = [m/2]$  — ціла частина числа  $m/2$ . Звідси випливає, що  $M(1, n)$  — нижня межа для кількості вузлів такої ф.-л.

Нехай  $X$  — банахів простір функцій, заданих на  $\Omega$ , такий, що залишковий член К. ф.  $(1) \neq 0$  (різниця між інтегралом і кубатурною сумою) є лінійним функціоналом в  $X$ . Норму функціоналу

$$\|I\| = \sup_{\|f\|=1} |I(f)|$$

характеризує якість К. ф. для ф.-цій простору  $X$ .

Інший підхід до побудови К. ф. ґрунтується на мінімізації  $\|I\|$  як ф.-ції вузлів  $x^{(i)}$  і коеф.  $C_i$  шуканої К. ф. (за фіксованої кількості вузлів). Навіть при  $n = 1$  цей підхід здійснено лише в найпростіших окремих випадках. Для будь-якого  $n$  важливі результати одержані рад. математик С. Л. Соболєв (н. 1908). Ці результати пов'язані з мінімізацією  $\|I\|$  як ф.-ції коеф.  $C_i$ , при цьому припускають, що вузли  $x^{(i)}$  фіксовані й утворюють правильну ґратку. Як  $X$ , зокрема, беруть

простір  $L_1^n(E_n)$ , де  $n \geq \frac{n}{2}$  й шукана К. ф. повинна бути точною для всіх многочленів степеня, меншого за  $m$ . Для обчислювання кратних інтегралів застосовують і метод статистичних випробувань — т. з. *Монте-Карло метод* і метод, який ґрунтується на використуванні теорії чисел. Див. Буздаленко Н. П. [та ін.] Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло) М., 1982 [Бібліогр. с. 313–327]; Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе М., 1983 [Бібліогр. с. 214–218]; Соболєв С. Л. Лекции по теории кубатурных формул, ч. 1–2. Новосибирск, 1984–85 [Бібліогр. ч. 1, с. 191]; Крылов В. И. Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1988 [Бібліогр. с. 324–360]; Крылов В. И. Приближенный вычисление интегралов. М., 1987. Г. П. Мисюевских



**ЛАГ І ТАГ СИСТЕМИ** — різновиди Поста числень, які характеризуються специфічними правилами виведення. ЛАГ системи мають правила виду  $e_1, \dots, e_{i\beta} \rightarrow E_i$ , які застосовують так: якщо перші  $\beta$  букв слова є  $e_1, \dots, e_{i\beta}$ , то з нього стирають першу букву, тобто  $e_1$ , і справа до цього слова дописують слово  $E_i$  ( $E_i$  може бути й пустим). ТАГ системи мають правила виду  $e_i \rightarrow E_i$ ; крім цих правил, для них показано ще й якесь ціле додатне число  $\beta$ . Застосування правил виведення в ТАГ системах полягає ось у чому: якщо слово починається буквою  $e_i$ , то з нього стирають перші  $\beta$  букв і справа приписують слово  $E_i$ . Якщо довжина первісного слова  $\leq \beta$ , то правила виведення до цього не застосовні.

З кожною системою правил виведення пов'язуються такі дві основні проблеми: 1) проблема зупинки: чи є рекурсивною чи ні сукупність усіх тих слів, починаючи з яких процес застосування правил виведення обривається; 2) проблема адекватності: чи для кожного слова є рекурсивною сукупність усіх тих слів, які одержують за скінченне число застосувань правил виведення.

В такі ЛАГ і ТАГ системи, для яких проблема адекватності є алгоритмічно нерозв'язною. Нехай  $\bar{e}$  — макс. довжина правих частин правил виведення,  $\bar{e}$  — їхня мінім. довжина. Показано, що при  $\beta = 2$ ,  $\bar{e} = 3$  і  $\bar{e} = 1$  існує ТАГ система з нерозв'язною проблемою зупинки і при  $\beta = \bar{e} = 2$  така сама ЛАГ система. Д. м. Wang H. Tag systems and Lag systems. *Mathematische annalen*, 1963 В 152, в 1.

**ЛАГРАНЖА ЗАДАЧА** — варіаційна задача на умовний екстремум. Формулюється так: серед кривих  $y(x)$ , що задовольняють дифер. рівняння зв'язку

$$\Phi_1(x, y, y') = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (1)$$

$y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \leq n$  і граничні умови

$$\Phi_2(x_1, y(x_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad k \leq n+1;$$

$$\eta_j(x_2, y(x_2)) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad p \leq n+1$$

видумати таку, на якій функціонал  $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$  досягає екстремального значення. Щоб розв'язок задачі мав місце, ф-ції

$f, \Phi_1, \Phi_2, \eta_j, f$  повинні задовольняти певні вимоги (див. *Больца задача*, *Задача з рухомими кінцями*). Замість дифер. рівнянь зв'язку (1) обмеження можуть задаватися рівняннями  $g_i(x, y) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \leq n$ ; кінці  $x_1$  і  $x_2$  можуть бути фіксованими. Л. а. — окремий випадок задачі Больца, тому її теорія переноситься на Л. а. За допомогою правила множників (див. *Лагранжа правило множників*) Л. а. зводиться до задачі без обмеження.

Лит. див. до ст. *Варіаційне числення*.

**ЛАГРАНЖА ПРАВИЛО МНОЖНИКІВ** — метод розв'язування задач на умовний екстремум, що полягає в побудові системи рівнянь, яку повинні задовольняти екстремуми функції  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , на множині  $\Omega$ , озаначуваній системою рівнянь  $g_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , де  $m \leq n$ . Розглянемо задачу знаходження точки  $x^*$ , для якої

$$f(x^*) = \min \{f(x) | x \in \Omega\}. \quad (1)$$

Нехай у точці  $x^*$  хоча б один з визначників  $m$ -го порядку матрици

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

не дорівнює нулеві. Щоб вектор  $x^* \in \Omega$  був розв'язком задачі (1), необхідно, щоб знайшлось  $m$  чисел  $u_1, \dots, u_m$ , які разом з вектором  $x^*$  задовольняють таку систему з  $m+n$  рівнянь з  $m+n$  невідомими:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Ф-ція  $F(x, u) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x)$  наз.

функцією Лагранжа, а числа  $u_1, \dots, u_m$  — множниками Лагранжа.

**Р. А. Поляк М. 6. Принцип ЛАНЦЮГ** графа — послідовність вигляду  $Q = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} \dots x_{i_{l-1}}x_{i_l}$ , де ребра  $u_1, u_2, \dots, u_l$  всі різні й ребро  $u_i$  з'єднує (в будь-якому напрямі) вершини  $x_{i_{l-1}}$  та  $x_{i_l}$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) графа  $L = (X, U; P)$ . Вершину  $x_0$  наз. початковою, вершину  $x_l$  — кінцевою, а число  $l \geq 0$  — довжиною Л. л. наз. простим, якщо всі його вершини різні. Л., який містить усі ребра графа, наз. ейдеровим, а простий Л., що містить усі вершини графа, — гамільтоновим. Якщо в послідовності  $Q$  кожне ребро  $u_i$  — це дуга, що йде з  $x_{i_{l-1}}$  в  $x_{i_l}$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), то Л. наз. орієнтованим (допустивши порядок з дугами ще й петлі, одержимо

шлях). Якщо в  $Q$  дозволити повторення ребер, то одержимо маршрут. Див. також *Графічна теорія*. Г. О. Димча, О. О. Зисман

**ЛАНЦЮГ ЗАОКРУГЛЕННЯ** — спеціальне устаткування в суматорах, призначене для заокруглювання одержуваного результату, щоб зменшити похибки при виконанні арифм. операцій. При цьому похибка результату виконання операцій не перевищує половини значення молодшого розряду числа. Л. з. складається звичайно з одного тригера й ланцюга переносу між цим тригером і молодшим розрядом суматора. При зсуві манти праворуч на тригері Л. з. запам'ятовується старша з цифр зсунутої частини манти та межі сітки. Під час наступного підсумовування ця цифра у вигляді переносу надходить до молодшого розряду суматора. Див. *Арифметика в плаваючому коді*. Операції над числами. Л. О. Поспелов.

**ЛАНЦЮГ ПЕРЕНОСУ** — спеціальний тракт у суматорах і лічильниках цифрових обчислювальних машин для передавання цифри переносу з одного розряду в інший. У суматорах послідовних Л. п. становить затримку, виникнову у вигляді елемента зворотного зв'язку в однорозрядній підсумовувальній схемі. У суматорах паралельних Л. п. складається з багатьох каналів із затримками між виходами однорозрядних підсумовувальних схем і входами схем сусідніх старших розрядів. Збільшенню швидкості паралельних суматорів завдячують послідовний характер формування переносів і виникнення наскрізних переносів (що виникають послідовно у кількох сусідніх розрядах), внаслідок чого значно збільшується час підсумовування. Щоб уникнути втрат часу хоч від наскрізних переносів, у суматорі часто поряд з Л. п. з молодшого в сусідній старший розряд конструюють ланцюги групового переносу за кілька розрядів (усереднені групи переносів у кожному розряді виникає одночасно, а між групами може бути організований або наскрізний перенос, або одночасний перенос). Встановлено, що матем. сподівання довжина макс. переносу в дійсних паралельних суматорах дорівнює до величини, що дорівнює  $\log_2 n$ , де  $n$  — число розрядів суматора; тому число розрядів у групі беруть з урахуванням значення  $n$ . Для прискорення переносів часто використовують спеціальні суматори (надпаралельні й паралельно-паралельні). Оскільки  $\log_2 n \ll n$ , частіше при проектуванні суматорів використовують асинхронний принцип керування закінченням підсумовування. В цьому випадку конструюють спеціальну схему, яка визначає момент завершення переносів.

Лит.: Рабинович З. Л. Елементарные операции в вычислительных машинах. Н., 1966 [біоіогр. с. 299—301]. Карцев М. А. Арифметика цифровых машин. М., 1969 [біоіогр. с. 559—575].

Л. О. Поспелов.

**ЛАНЦЮЖОК** — скінченна послідовність символів. Поняття «Л. з.» запроваджене в *алгебраїчній математичній*, тотожне поняттю *слово* в теорії алгоритмів.

**ЛАПЛАСА ДИСКРЕТНІ ПЕРЕТВОРЮВАННЯ** — перетворення, що становляють зв'язок між оригіналами й зображеннями решітчастих функцій. Пряме Л. д. п. функції решітчасті  $f[n]$  і зсунутої решітчасті  $f[n, s]$  визначаються відповідно такими співвідношеннями:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-qn} \quad (1, a)$$

$$F^*(q, s) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, s] e^{-qn}, \quad (1, b)$$

Тут  $q = sT$  — комплексне число, яке наз. параметром Л. д. п.;  $T$  — інтервал дискретності решітчасті  $f[n]$ ;  $s$  — параметр звичайного перетворення Лапласа.

Значення  $\operatorname{Re} q = \sigma_q$ , для якого при  $\operatorname{Re} q > \sigma_q$  ряди (1) збігаються, а при  $\operatorname{Re} q < \sigma_q$  — розбігаються, наз. абсцисою збіжності. В (1) решітчасті функції  $f[n]$  і  $f[n, s]$  наз. оригіналами, а функції комплексної змінної  $F^*(q)$  і  $F^*(q, s)$  — зображеннями. Співвідношення (1) скорочено записують у вигляді.

$$F^*(q) = D\{f[n]\} \leftrightarrow f[n] \quad (2, a)$$

$$F^*(q, s) = D\{f[n, s]\} \leftrightarrow f[n, s] \quad (2, b)$$

де  $D$  — символ Л. д. п., а  $\leftrightarrow$  — знак відповідності між оригіналом і зображеннями.

Часто користуються ще й такими перетвореннями:

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] z^{-n} \quad (3, a)$$

$$F^*(z, m) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT, mT] z^{-n}, \quad (3, b)$$

де  $z = e^{sT}$ , їх наз. відповідно з-перетворенням та модифікованим з-перетворенням і позначають так:

$$F^*(z) = z\{f[nT]\} \leftrightarrow f[nT] \quad (4, a)$$

$$F^*(z, m) = Z_m\{f[nT, mT]\} \leftrightarrow f[nT, mT]. \quad (4, b)$$

Крім односторонніх Л. д. п., які наведено вище, користуються й двосторонніми Л. д. п., які визначаються (1) або (3), коли підсумовування здійснюється в межах  $-\infty \leq n \leq +\infty$ . Якщо оригінали дорівнюють нулеві при  $n < 0$ , то двостороннє Л. д. п. збігається з одностороннім.

Будь-яку решітчасту ф-цію  $f[n]$  (з постійним інтервалом дискретності) можна подати як суму  $N$  решітчастих ф-цій  $f_j[n]$ , що їх наз. компонентами з пропуском:

$$f[n] = \sum_{j=0}^{N-1} f_j[n] \quad (5)$$

де

$$f_j[n] = \begin{cases} f[n] & \text{при } n = j + kN; \\ 0 & \text{при } n \neq j + kN; \end{cases}$$

$$j = 0, 1, \dots, N-1; \quad k = 0, 1, \dots; \quad N > 2,$$

$z$  — перетворення цих компонент, або т. з.  $z$ -перетворення з пропуском, яке визначають за формулою (2). Його можна зобразити у вигляді

$$F_j^*(z) = z f_j[n] = \sum_{n=0}^{\infty} f_j[n] z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(j + kN) z^{-j - kN}. \quad (6)$$

Це перетворення можна визначити і за зображенням початкової решітчастої ф-ції

$$F_j^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\omega} \frac{\omega^j z^{-1}}{1 - \omega^N z^{-N}} d\omega, \quad (7)$$

де  $F(\omega) = F^*(z)|_{z=\omega}$ , а  $\Gamma$  — замкнений контур, який відокремлює особливості  $\frac{F(\omega)}{\omega}$  та  $\frac{1}{(1-\omega)^N}$ .

Досліджуючи дискретні системи з амплітудно-імпульсною модуляцією 2-го роду (див. Модуляція імпульсна), інколи застосовують т. з.  $p$ -перетворення, яке є звичайним перетворенням Лапласа ф-цій  $f_p(t)$ , що їх визначають так:

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } nT \leq t < (n+m)T, \\ 0 & \text{при } (n+m)T \leq t < (n+1)T, \end{cases}$$

$$0 < m < 1. \quad (8)$$

Перетворення, яке встановлює зв'язок між зображеннями  $F_p(s)$  та  $F(s)$  функцій  $f_p(t)$  і  $f(t)$ , відповідно позначають через  $P\{F(s)\}$  і визначають за такою ф-лою.

$$F_p(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(v) \frac{1 - e^{-m(s-v)T}}{(s-v)[1 - e^{-T(s-v)}]} dv, \quad (9)$$

де  $F(v) = F(s)|_{s=v}$ , а  $\Gamma$  — контур інтегрування, який охоплює лінійні всі полюси  $F(v)$ .  $p$ -перетворення поширюється й на функції  $f_n(t)$ , які визначають так:

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t_n \leq t < t_n + h_{n+1}, \\ 0 & \text{при } t_n + h_{n+1} \leq t < t_{n+1}, \end{cases} \quad (10)$$

$$h_{n+1} \leq t_{n+1} - t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

і використовують при аналізі дискретних систем із скінченним часом зняття даних,

у яких одночасно відбувається частотно-широтно-і амплітудно-імпульсна (2-го роду) модуляція.

Обернення Л. д. п., що дають змогу за зображеннями визначити оригінали, одержують за формулами обернення

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F^*(q) e^{qn} dq; \quad (11, a)$$

і

$$f[n, c] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F^*(q, c) e^{qn} dq \quad (11, б)$$

де  $c > 0$ .

Для зображень, які являють собою дробово-раціональні ф-ції за  $e^z$  (або  $z$ ), застосовують формули розкладання, аналогічні таким у звичайному перетворенні Лапласа, застосовують і методи, які ґрунтуються на розширенні зображень у ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}. \quad (12)$$

При цьому в (12) членові  $c_k z^{-k}$  відповідає значення решітчастої ф-ції в момент часу  $n = k$ , тобто  $c_k = f[n]|_{n=k}$ . Зв'язок між зображеннями за Лапласом і Л. д. п. встановлюють співвідношеннями

$$F^*(q, c) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi i r)c} F(q + 2\pi i r), \quad (13, a)$$

$$F^*(q) = 1/2 f[0] + \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(q + 2\pi i r) \quad (13, б)$$

і

$$F(q) = \int_0^1 e^{-qs} F^*(q, s) ds, \quad (14)$$

які записують зводі у вигляді.

$$F^*(q, s) = D\{F(q)\}, \quad (15, a)$$

$$F(q) = D^{-1}\{F^*(q, s)\}. \quad (15, б)$$

Співвідношення, подібні (11) та (13) — (15), властиві й  $z$ -перетворенням. Подібно до (15, б) для позначення обернених перетворень використовують символи  $D^{-1}$ ,  $z^{-1}$ ,  $Z_m^{-1}$ ,  $P^{-1}$ . У практичних розрахунках широко використовують таблиці зображень для найпоширеніших функцій, що дає змогу знаходити оригінали без звертання до загальних формул зворотного Л. д. п.

Л. д. п. використовують при дослідженні дискретних систем автомат. керування, наближеному дослідженні неперервних систем, розв'язуванні різницевих рівнянь тощо. Див. Цимпич І. З. Теорія лінійних імпульсних систем. М., 1963 [бібліогр. с. 326—363]. Проблеми теорії імпульсних систем управління. Інженер. науки. М., 1968 [бібліогр. с. 173—174]. Фрад-лянд Я. Е. Імпульсні системи регулювання з періодично змінюючися параметрами. В кн. Тру-

ды I Міжнародного конгреса Міжнародної федерації по автоматичному управлінню, т. 2. М., 1961, Д. ж у р л 3. Інноваційні системи автоматичного регулювання. Пер. з англ. М., 1963 (бібліогр. с. 445-450), Д. ж у р л 3. Рук водство к практичному примененню преобразованія Лапласа и Z-преобразованія. Пер. с нем. М., 1971.

Ю. В. Кременько.

**ЛЕЖАНДРА — КЛЕБША УМОВА** — необхідна умова екстремуму для варіаційних задач, одержана з використанням другої варіації функціоналу. Формулюється вона так: для того, щоб функціонал  $I(y) =$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \text{ визначений на кривих}$$

з фіксованими кінцями, досягав на кривій  $C$  мінімуму (максимуму), необхідно, щоб уздовж цієї кривої виконувалися умови

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0 (< 0). \text{ Л.—К. у для Больца за-}$$

дачі: щоб функціонал  $I(y)$  досягав мінімуму на припустимій кривій  $C$ , що задовольняє правило множників, необхідно, щоб уздовж

$$\text{неї виконувалася нерівність } \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_j} \delta_k \delta_j > 0$$

при будь-яких  $(\delta_1, \dots, \delta_n) \neq 0$ , що задоволь-

$$\text{няють рівняння } \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \delta_k = 0.$$

Лит. див. до ст. Варіаційне числення.

М. М. Демичев.

**ЛІНГВІСТИКА МАТЕМАТИЧНА** прикладна математична дисципліна, основне завдання якої — розробка точних методів вивчення природних мов, а інакше, розробка метамов лінгвістики.

Виконання Л. м. у 2-й пол. 50-х рр. 20 ст. зумовлене самонапором внутр. потребами лінгвістики, стимулював його і розвиток автоматичного перекладу (див. *Машинний переклад*), що вимагав уточнення лінгвістичних понять. Крім автомат. перекладу, методи Л. м. застосовують і в інших галузях лінгвістики. Л. м., хоч і не є частиною власне лінгвістики, розвивається в щільному контакті з нею, разом з тим усередині Л. м. виникають і самостійні проблеми, що не завжди мають безпосереднє застосування в лінгвістиці. В Л. м. широко використовують методи *алгебри теорії, автоматів теорії та алгебри*.

Природно уявляти функціонування мови як процес перетворення деяких об'єктів (їх можна назвати «смысловами») на об'єкти іншої природи — «тексти», і навпаки. З міркувань змісту ці перетворення можна розглядати на етапах. Напр., при одному з найглубочіших членувань якийсь етап може полягати в переході від «смыслів» до «синтаксичних структур» — наборів елементів речень, з'єднаних «синтаксичними зв'язками», але ще не розміщених у лінійну послідовність. На наступному етапі виходить лінійна послідовність слів, а потім слова перетворюються на *ланцюжки звуків* (див. *Модель «смысл ↔ текст»*). Для формального описування такого процесу треба побудувати матем. поняття, які були б моделями «смыслів», «текстів» і результатів проміжних етапів (щоб моделі

«працювали», ці об'єкти повинні бути конструктивними). Етапи перетворення природно моделювати ефективними відображеннями відповідних множин об'єктів одна в одну. Але картина ускладнюється тим, що значне перетворення неодиозначне, і таким самим є всі чи майже всі (залежно від способу членування) проміжні етапи. Це зумовило одвіз до найважливіших особливостей мови — явищем синонімії, тобто можливістю передавати той самий зміст різними засобами. Тому, щоб моделювати ці етапи, доводиться будувати замість детермінованих систем (алгоритмів) недетермінованих (числень), які дають змогу для кожного об'єкта одного «рівня» перечислювати відповідні йому об'єкти наступного «рівня», а також перечислювати для кожного об'єкта всі синонімічні йому об'єкти того самого «рівня». Такі числення відомі під назвою *грамматич формальних*. Незначна модифікація поняття формальної грамматики дає системи, що дозволяють перечислювати множини «правильних» об'єктів одного рівня, тобто таких, з якими можна регулярним способом зставляти будь-які об'єкти попередніх рівнів та множини пар об'єктів «сусідніх» рівнів (напр., речення і його «синтаксичну структуру»), які відповідають одне одному. Саме такі варіанти формальних граматики у наш час розроблено найбільше. При побудові формальних граматики, крім осн. об'єктів, що моделюють елементи різних рівнів (напр., слова), доводиться використовувати допоміжні об'єкти, які в відношенні на множинах основних об'єктів або класифікації осн. об'єктів (напр., граматичні категорії). У зв'язку з цим виникає необхідність формального вивчення таких відношень і класифікацій.

Отже, можна виділити три аспекти формального описування мови: описування будови мовних об'єктів різних рівнів, описування деяких спец. відношень і класифікацій на множинах цих об'єктів і описування перетворень одних об'єктів на інші, а також будови множин «правильних» об'єктів. Цим аспектам відповідають три осн. розділи Л. м.: 1) розробка й вивчення способів описування структури відрізків мови; 2) вивчення формальної будови лінгвістично значимих відношень і класифікацій на множинах мовних об'єктів (побудовані для цього формальні системи здебільшого наз. *аналітичними моделями мови*) і 3) теорія формальних граматики.

Теорію способів описування структури відрізків мови можна в матем. відношенні охарактеризувати як певне спец. відгалуження *теорії*, бо відповідні структури є, як правило, графі або полібри до графі об'єктів. Так, для описування синтаксичної структури речення використовують т. з. *дерева підпорядкування* (синтаксичного) — *дерева з додатковим відношенням лінійного порядку* (яке відповідає порядковій слів у реченні). Дуги дерев підпорядкування здебільшого позначають символами типів відношень (напр. «предикативне» — відношення

між присудком і підметом, означальне — відношення між означуваним і означеним та ін.). Поняття дерева підпорядкування формалізує звичайні «шкільні» уявлення про синтаксичні зв'язки. Але навіть така проста формалізація дала змогу виявити надто важливий лінгвістичний факт — т. з. явище проєктивності, яке полягає в тому, що, як правило, між двома словами є і б, такими, що є підпорядковує б, не може бути жодного слова, яке не було б підпорядковане безпосередньо чи посередньо слову а (випадків недодержання цього правила порівняно небагато, і їх можна закономірно пояснити). Іншим способом подавання синтаксичної структури речення є системи складників, які також представлені у вигляді дерев. На ближчих до смислу рівнях уже не вдається обійтись деревами (доводиться використовувати графі загальнішого вигляду). Останнім часом інтенсивно розробляють способи описування рівнів, проміжних між синтаксичними і єсо то смисловими, але достатньою мірою розроблених засобів описування єсо смислового рівня поки що нема.

Теорія аналітичних моделей мови використовує, як правило, нескладний матем. апарат (найпростіші поняття *лазім математичної*, теорії множин та алгебри, зокрема, теорії підгруп). Конструкції цієї теорії починаються від наборів «непорядкованих» даних і завершуються побудовою (на обов'язково ефективною) систем, що в певному розумінні описують будову мови; це дає підставу вважати такі конструкції «моделлями діяльності лінгвіста». Одним з гол. завдань теорії аналітичних моделей мови є формалізація традиційних лінгвістичних категорій як от частини мови, відміню, рід, флексія та ін. Існуючі способи формалізації («моделі») цих категорій можна поділити на два типи. У моделях 1-го типу вихідні набори — це множини ланцюжків, тобто різніло впорядкованих послідовностей елементів. У моделях граматичних категорій ці ланцюжки інтерпретуються як «граматично правильні речення» (до набору вихідних даних можна включати вказівки й на яву неправильність деяких ланцюжків).

Моделі 2-го типу, які з'явилися в середині 60-х рр. 20 ст., і в разі граматичних категорій дають змогу одержати дужче адекватне наближення до традиційних понять, мають за вихідні дані набори відомостей про здатність одних елементів підпорядковувати собі інші. Напр., кожен відмінок українського (російського) іменника описується як сукупність форм іменників, якими в певному точному розумінні однаково керують інші слова. За допомогою аналітичних моделей зв'язують не тільки відношення *парадигматичні*, а й *відношення синтагматичні*. Такі моделі також можна поділити на два типи за характером вихідних даних (про це йшлося вище).

Близькою до теорії аналітичних моделей мови є теорія лінгвістичного дешифрування, що займається будівництвом процедур, які за-

стосовують щодо «непорядкованих» емпіричних даних про мову і які схожі в цьому на аналітичні моделі, але, на відміну від аналітичних моделей, завжди ефективні й за їхньою допомогою можна одержувати не тільки абстрактні визначення, а й конкретні відомості про структуру конкретних мов. Дешифрувальні алгоритми, як правило, складніші за аналітичні моделі. Прикладами можуть бути алгоритми виділення голосних і приголосних у тексті.

Теорія формальних граматик посідає центр. місце в Л. м., бо саме вона дає засоби для визначення власне функціонування мови. Водночас вона виразняється з-поміж інших відділів Л. м. більшою складністю апарату (схожого на апарат теорії алгоритмів і заг. теорії автоматів, з якими в ній є багато точок зіткнення) і значатно більшою складністю матем. задач, які виникають у ній. Формальні граматика найглубочіше вивчених типів являють собою системи («пристрої»), які дають змогу породжувати або розпізнавати множини ланцюжків, що їх інтерпретують здебільшого як множини граматично правильних речень деяких мов, і з'являють з ланцюжками, що входять у ці множини, описи їхньої синтаксичної структури в термінах систем складників або дерев підпорядкування. Найбільше значення з цих граматик мають *граматики породжувальні*, які запровадив амер. вчений Н. Хомський. Осно. частиною породжувальної граматики є скінченна система правил підстановки, можна з яких дає змогу замінити в довільному ланцюжку якийсь певний підланцюжок (ліву частину правила) іншим певним підланцюжком (праву частину правила). Ліві й праві частини правил містять символи двох типів: основні, які можуть бути в породжуваних граматикою реченнях (інтерпретують їх як слова), і допоміжні, що бувають тільки на проміжних стадіях породження (їх інтерпретують як символи граматичних категорій). Породження (вивід) речення полягає в послідовному застосуванні правил, причому вихідний ланцюжок, з якого починається вивід, складається з одного спец. допоміжного символу ( $S$ ), що його наз. початковим і інтерпретують як символ категорії «речення».

Множина ланцюжків осно. символів, що їх виводять з початкового символу, наз. мовою, яку породжує граматика. Залежно від виду правил виділяють різні типи породжувальних граматик: граматик складників (НС-граматик), безконтекстні, автоматні та ін. Найбільше значення для лінгвістичного застосування мають НС-граматики (у яких на кожному кроці фактично замінюється тільки один символ), бо вони дають змогу природно з'являти виводжувані в них ланцюжки з системами складників. Спеціальні граматик — безконтекстні й автоматні — також становлять великий лінгвістичний інтерес. Важливу роль у теорії породжувальних граматик відіграє визначення різних класів граматик, проміжних між НС-граматиками та безконтекст-

ними і між безконтекстними та автоматними, та з'ясування співвідношень між відповідними класами породжувальних мов.

Матем. значення породжувальних граматик полягає в тому, що вони є одним із засобів ефективного задавання множин. Клас мов, що їх породжують такі доволні граматички абстрактно з класом рекурсивно перелічних множин. Особливий інтерес із цього погляду становлять НС-граматички, безконтекстні й автоматні граматички, бо породжувальними мовами примітивно рекурсивні і до того ж входять до найнижчих класів існуючих ієрархій примітивно рекурсивних множин за складністю обчислювання (ці мови можна вважати «просто побудованими»), і згодом їх цілком вистачає для багатьох важливих матем. застосувань. У зв'язку з цим істотно значення має вивчення класів автоматів, які еквівалентні тим чи іншим класам граматик, тобто описують ті самі мови. Зокрема, автоматні граматички еквівалентні *автоматам скінченним*, безконтекстні — *автоматам з магазинною пам'яттю* (див. *Автомат мовознавства*), НС-граматички — *лінійно обмеженим Тьюрінґа машинам*, тобто таким машинам Тьюрінґа, які переробляють мови ланцюжком, не виходячи за межі тієї ділянки стрічки, де її записано спочатку.

Одним з важливих напрямів теорії породжувальних граматик є вивчення складності виводів. Складність виводу в граматиці можна вимірювати різними способами, а яких найуніверсальнішим є два — за кількістю кроків виводу (такою складністю) і за обсягом використовуваної «пам'яті», тобто за макс. довжиною проміжного ланцюжка виводу (визначна складність). Властивість одержати ряд верхів і нижніх оцінок часової й смислової складності виводу в граматиках різних класів (причому найскладніше одержувати нижні оцінки), а також деякі відомості про можливість будувати для тих чи інших граматик еквівалентні (тобто такі, що породжують ті самі мови) з простішими виводами, і про міру зростання складності при переході від якоїсь граматики до еквівалентної їй граматики простішого вигляду. Для НС-граматик є ще й специфічні характеристики складності виводу: глибина за інте, ступінь самовстановлення, тісно пов'язані зі складністю систем складників, які зіставляють з виводжуваними ланцюжками. Ці характеристики мають важливе значення для лінгвістичного застосування. Для безконтекстних граматик важливою характеристикою виводу є активна смисловість — макс. кількість входжень допоміжних символів у проміжний ланцюжок виводу.

Теорія складності виводів у граматиках багато в чому паралельна теорії алгоритмів складності, але не є копією її. Крім складності виводів, вивчають і складність самих граматик, яку можна вимірювати, напр., сумою довжин двох і трьох частин правил або кількістю допоміжних символів. До згаданих напрямів відносять і вивчення складності

розпізнавання мов, що їх породжують граматички різних класів. Тут розв'язують задачі такого типу: для того чи іншого класу граматик зазначають оцінки складності роботи автомата якогось заданого виду (напр., машиною Тьюрінґа з даною кількістю стрічок і головок), що розпізнає мову, породжувану граматикою цього класу (розпізнавати мову означає для кожного ланцюжка, поданого на вхід автомата, давати відповіді на питання, чи належить він мові). Складність роботи автомата можна при цьому вимірювати кількістю кроків або обсягом затрачуваної пам'яті. Так, будь-яку безконтекстну мову розпізнає машина Тьюрінґа з однією стрічкою і однією головкою, яка витрачає на роботу з будь-яким ланцюжком довжиною  $n$  не більш як  $n^2$  кроків.

Один із розділів теорії породжувальних граматик — теорія керування виводом; вона вивчає будову множин, породжуваних граматиками при накладанні тих чи інших обмежень на виводи. Можливість використати це доволі, а тільки якісь певні виводи краще відображає ситуацію, що є в природній мові. Оскільки завдання полягає тут у встановленні співвідношень між класами мов, породжуваних граматиками різних типів а різними обмеженнями. Прикладом граматик з обмеженнями на виводи може бути т. з. матрична граматика, правила якої мають такий самий вигляд, як у безконтекстній, але вони згруповані в скінченні послідовності (причому, одне правило може траплятися кілька разів в одній послідовності, і в різних). І правила кожної послідовності дозволяється застосовувати тільки всі підряд і в заданому порядку. Клас мов, що їх породжують матричні граматички, є строго проміжним між класами безконтекстних мов і НС-мов. Значне місце в теорії породжувальних граматик займають алгоритми, проблеми, зокрема проблеми існування алгоритмів, що за граматикою певного класу розпізнають, чи має породжувана нею мова ту чи іншу властивість. Дуже часто такі проблеми розв'язуються негативно. Так, у класі НС-граматик є «цікавих» щодо змісту властивостей мов розпізнаваних є тільки властивості типу «міститься даний ланцюжок»; а такі властивості, як «бути пустим», «бути скінченним», «мати пусте доповнення», «мати скінченне доповнення», «бути безконтекстною мовою», в цьому класі не розпізнавані. У класі безконтекстних граматик пустота і скінченність мов розпізнавані, а пустота й скінченність доповнення залишаються нерозпізнаваними. Крім граматик Хомського, є й інші види граматик для описування множин ланцюжків — граматички залежностей, що зіставляють з ланцюжками дерева підпорядкування, *граматички категоріальні*, в яких інформація про синтаксичну будову мови міститься не в правилах, а залежить від особливої структури допоміжного словника, та ін. Розробляють і концепції граматик для переробки не ланцюжків, а графів — найчастіше дерев, а іноді й об'єктів загальнішої при-

роди. Використання таких граматик для описування природних мов дає змогу розглядати окремо синтаксичну структуру речення і лінійний порядок слів, які за змістом належать до різних рівнів, і тим самим адекватніше моделювати функціонування мови. Прикладом можуть бути т. з. лексико-синтаксичні  $\Delta$ -граматики. У них перероблюються об'єкти в дерева з позначками на вершинах (інтерпретованими як лексичні одиниці) і на дугах (їх інтерпретують як типи синтаксичних зв'язків). Правила, як і в граматиках Хомського, є правилами підстановки.  $\Delta$ -граматики призначені для перетворення одних дерев на інші, але їх можна використовувати й для породження дерев.

Л. м. широко застосовують не тільки для дослідження природних мов, а й у побудові та вивченні штучних мов, зокрема, мов програмування. Див. також *Мова моделі евристичної*.

*Лит.* Кулягін О. С. Об одном способе определения грамматических правил на базе теории множеств. «Проблемы кибернетики» 1958 и 1. Сухотин В. В. Авторские лингвистические дешифры. Я. кн. Проблемы структурной лингвистики М., 1964. Рентин И. И. Метод моделирования в теории главных связей. М., 1967 [Бібліогр. с. 277—290]; Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической лингвистики М., 1969 [Бібліогр. с. 188—192]; Гладкий А. В. Формальные грамматики. М., 1971 [Бібліогр. с. 3—9, 358]; Хомский А. Н. Синтаксические структуры. В кн. Новое в лингвистике, в. 2. М., 1962; Horroff J. E., Ullman J. D. Formal languages and their relation to automata. London, 1969 [Бібліогр. с. 233—236]. О. В. Гладкий

**ЛІНГВІСТИКА ПРИКЛАДНА** — розділ лінгвістики, що має безпосередні практичні застосування. Під практичними застосуваннями розуміють: створення і вдосконалення систем писемності для неписьемних народів (напр., в СРСР у 20-х роках створювали алфавіти для народів, що не мали до революції писемності); складання двомовних, багатомовних, термінологічних, орфографічних і деяких інших словників; питання шекладу, зокрема науково-технічного тексту, дешифрування невідомих писемностей (див. *Дешифрування тексту*); стилістичне опрацювання та редагування текстів, деякі питання методики викладання мов, машинний переклад з однієї штучної мови на іншу, автомат. синтез усної мови (створювання читаючих *автоматів* та ін.); створення мов (інформаційних для різних галузей науки; мов для *засоби* людини з обмежувальною машиною; словників частотних, шоркордажів і *тезисів*, *реферуваних автоматично* та *анотуваних автоматично* текстів). Л. п. використовує традиційні лінгвістичні методи (описовий, порівняльний, порівняльно-історичний та ін.) і нові методи (структурні та математичні) з використанням сучасних технічних засобів, зокрема ЕЦОМ. Нові методи в Л. п. інтенсивно розвиваються з 50-х років під впливом потреб науково-технічного прогресу — необхідності формалізувати та впорядкувати мовні засоби передавання інформації, щоб зробити доступними для огляду великі масиви

інформації. Ці нові методи вторгаються і в традиційні розділи Л. п. (використання ЕЦОМ для дешифрування невідомих писемностей та для створення різних типів і профілів словників). Сучасна Л. п. міцно базується на теор. мовознавчих дослідженнях і характеризується зв'язком з іншими науками: математикою, фізикою (зв'язок лінгвістики з акустикою при автомат. синтезі усної мови), зоопсихологією і зоосеміотикою, історією та археологією (дешифрування невідомих писемностей). Надалі можливі ширші зв'язки з медициною (вивчення особливостей мови при діагностиці деяких захворювань), криміналістикою (встановлення авторства на основі лінгвостатистичних методів) та ін. Має місце й значний зворотний вплив, коли методи, що виникали для розв'язування прикладних задач, перетворюють у важливі загальнолінгвістичні концепції (уявлення про породжувальні процедури, граматичні трансформації, моделі глибокого синтаксису і породження тексту за заданою смисловою структурою та ін.).

Ф. О. Нікітіна

**ЛІНГВІСТИЧНА СТАТИСТИКА** — галузь мовознавства, яка займається аналізом кількісних характеристик мови й мовлення. Осн. первісним матеріалом Л. с. є текст, що його розглядають як послідовність лінгвістичних одиниць фіксованого рівня (текст можна розглядати як послідовність букв, фонем, складів, морфем, слівосформ і речень). Вивчають статистичні характеристики розподілу лінгвістичних одиниць у мовному тексті й на основі цих даних формують висловлювання про систему мови та механізм породження тексту. Найважливіші поняття (напр., поняття генеральної сукупності та вибірки) і матем. апарат Л. с. запозичує у *математичної статистики*. Так, вибіркою можуть бути або тексти, або лінгвістичні форми. Відповідно до цього змінюється й уявлення про генеральну сукупність: нею може бути сукупність текстів чи одиниць, які є в них. Крім того, як різні генеральні сукупності можна розглядати й інвентарі лінгвістичних форм. У цьому разі можна лінгвістична форма є вибіркою (з повтореннями) в інвентарі форм одного з попередніх рівнів, напр., будь-які речення можна розглядати як вибірку слів в інвентарі слівосформ або як вибірку морфем в інвентарі морфем, або як вибірку звуків мови з інвентаря фонем. Залежно від характеру досліджуваних лінгвістичних одиниць розрізняють *фонетичну статистику*, яка займається статистичним вивченням закономірностей вживання звуків мови, фонем, складів тощо, *морфологічну статистику*, яка займається статистичним вивченням уживання різних морфологічних форм (основ, суфіксів, моделей слів, частин мови тощо), *лексичну статистику*, яка займається статистичним вивченням закономірностей вживання слів та словосполучень. *Стилістична статистика* встановлює статистичними методами особли-



вості функціональних, жаврових та індивідуальних стилів. Крім зазначених розділів, у Л. с. виділяють ще й типологічну статистику, яка займається виробленням кількісних типологічних ознак мов, і хронологічну статистику (глотохронологію), яка розробляє методи визначення часу розходження мов. У всіх розділах Л. с. використовують поняття частоти лінгвістичної форми як міри живності її.

Л. с. як наук. дисципліна виникла у зв'язку з прагненням розширити сукупність структурних характеристик лінгвістичних форм характеристикою живності їх. При цьому виходили з припущення, що будь-якій лінгвістичній формі властива апріорна ймовірність бути актою в тексті. Ця ймовірність і має характеризувати живність даної лінгвістичної форми. Для відшукування ймовірностей використовують вибірковий метод статистики, за яким одержують наближену оцінку живності лінгвістичної форми у вигляді її відносно частоти. Л. с. вивчає не лише відносно частоти лінгвістичних форм та їхніх класів, а й такі характеристики форм, як їхній розмір (довжина), подвійність (сила зв'язку), розподіл у тексті. Відмінність між текстами може полягати в різному складі форм і в різній уживаності їх. Це використовує стилістична статистика, яка впроваджує методи порівнювання текстів за складом та уживаністю форм і одержання оцінок ступеня відмінності між текстами. Тексти різними мовами характеризуються неоднаковою відносною частотою уживання різних елементів, і це використовують у типологічній статистиці для розроблення методів типологічного зіставлення мов та одержання оцінок для т. з. типологічних індексів. Напр., відношення кількості морфем до кількості слів у тексті може бути мірою синтетики мови (це відношення назв. індексом синтетичності). Так, індекс синтетичності в'єтнамської мови, в якій слова практично однорморфемні, становить 1,06, в ескімоської — 3,72. Між ними розміщуються англійська (1,68), російська (≈ 1,90) і українська (≈ 1,80) мови. Окрему галузь Л. с. становлять дослідження, в яких використовують методи теорії інформації. У Л. с. сформульовано такі специфічні лінгвістичні задачі, як знаходження обсягу словника тексту за довжиною тексту, знаходження обсягу повного словника письменника за вибіркою з текстів цього письменника, оцінка ступеня неоднорідності текстів на різних рівнях, характеристика статистичної структури тексту, встановлення зв'язків між статистичними характеристиками лінгвістичних форм різних рівнів тощо. Під час розв'язування цих задач виникли проблеми вивчення лінгвістичних розподілів. У дослідженні структури мови використовують і якісні, і кількісні характеристики її елементів, і це дає змогу глибше зрозуміти механізм мови й принципи породження її. Дані про живність елементів мови, насамперед слів, широко використовують у таких прикладних галузях, як викла-

дання мов, текстологія, стенографія, машинний переклад, зв'язок тощо. Див. також *Мовна інформаційна експериментальна*.

Лит.: Фрункіна Р. М. Статистические методы изучения текстов. М., 1964 [бібл.огр. с. 111–114]; Перебийніс В. П. Частота и сопоставительский анализ современного украинского языка. К., 1965 [бібл.огр. с. 33]; Статистичні параметри стилів. К., 1967; Шайкевич А. Я. Опыт статистического выделения функциональных стилей «Новосіа лінгвістична», 1964, № 1; Писотровський Р. Г. Информационные характеристики языка. Л., 1968 [бібл.огр. с. 108–112]; Перебийніс В. С. Кількісні та якісні характеристики системи фемем сучасної української літературної мови. К., 1971; Рымленко Г. В. Лінгвістична статистика. Краткий очерк и библиографический указатель. Алма-Ата, 1970; Головин Л. П. Язык и статистика. М., 1971 [бібл.огр. с. 161–168]; Guiraud P. Problèmes et méthodes de la statistique linguistique. Dordrecht, 1959; Hordard G. The advanced theory of language as chance and chance. Berlin — Heidelberg — New York, 1966.

В. М. Андриченко.

**ЛІНІЙНА ФОРМА**, лінійний функціонал, коектор — скалярна лінійна функція векторного аргумента. Нехай  $V$  — лінійний простір над полем  $K$ . Ф-ція  $e(x)$ , означена на  $V$  її значеннями в  $K$ , назв. Л. ф. (лінійним функціоналом на  $V$ ), якщо для всіх  $x, y \in V$  і  $\alpha \in K$  виконуються рівності  $e(x+y) = e(x) + e(y)$ ;  $e(\alpha x) = \alpha e(x)$ . У випадку скінченновимірного  $V$  та обраного базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$  для  $V$  Л. ф.

$e(x)$  виражається у вигляді  $e(x) = \sum_{i=1}^n e_i \xi_i$ ,

де  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — координати вектора  $x$  у вибраному базисі. В узагальненні такого подання, у функціональних просторах Л. ф. задають значайно інтегралами. Л. ф. на  $V$  самі утворюють для операції додавання і множення на скаляр лінійний простір  $\hat{V}$ , який назв. спряженим (або двоїстим) щодо простору  $V$ . Для скінченновимірних  $V$  простір  $\hat{V}$  ізоморфний первісному просторові  $V$ . У випадку функціональних чи топологічних лінійних просторів окремо розглядають ті Л. ф., що є неперервними в топології простору, двоїстим простором у такому разі вважають сукупність неперервних функціоналів. Л. ф. і оператори лінійні — один з головних розділів алгебри лінійної, їх часто застосовують у геометрії, функціональному аналізі та прикладних розділах математики, а також у кібернетці. Зокрема, напр., у задачах лінійного програмування й теорії ігор іноді буває потрібно знайти такий розв'язок системи лінійних рівностей, який мінімізує деяку задану Л. ф., яка описує «якість» цього розв'язку.

Л. А. Валерійчук.

**ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ** — сукупність способів, які забезпечують відшукування вектора  $x$  із системи рівнянь

$$Ax = y, \quad (1)$$

де  $A$  — квадратна матриця і  $y$  — права частина системи рівнянь. У заг. запису  $x = A^{-1}y$  і при  $y \neq 0$  розв'язок існує, якщо  $\det A \neq 0$ . Практично Л. а. с. р. с. р. розрі-

няють залежно від структури вихідних даних (матриці  $A$  й вектора  $y$ ), порядку матриці  $A$  й типу використовуваних ЕОМ. Л. а. с. р. с. р. мають винятково велике значення в практиці обчислювання. Це пояснюється головним чином тим, що лінійне щодо шуканих коеф. наближення найрізноманітніших моделей математичних досліджуваних реальних процесів, яке приводить до лінійних алгебр. систем (Л. а. с.), виявляється зручним у застосуванні й нерідко достатнім щодо потрібної точності. Задачі розв'язання Л. а. с. виникають, зокрема, при обробці експериментальних даних за методом найменших квадратів, наближеному розв'язуванню лінійних інтегр. і дифер. рівнянь методом скінченних різниць та варіаційними методами, в методах послідовної ліноаризації при розв'язуванні нелінійних операторних рівнянь тощо.

Розглянемо Л. а. с. р. с. залежно від характерних для практики відмінностей в обсязі та структурі початкових даних.

1. Л. а. с. (1) має матрицю, близьку до виродженої, а саме: зміни елементів матриці  $A$  в межах точності задавання їх може привести до чисто виродженої матриці  $A_0$  ( $\det A_0 = 0$ ). Такі задачі наз. некоректні й складаються з двох частин. На практиці зазначені задачі виникають найчастіше тоді, коли реальний процес описується системою рівнянь з чисто виродженою матрицею, але в результаті неминучих похибок вимірювань одержана наближена система (1) має матрицю, яка вже відрізняється від чисто виродженої. Можливий і випадок, коли  $\det A = 0$ , в наближений вектор  $y$  не задовольняє умов розв'язності. Інакше кажучи, така система не має класичного матем. розв'язку. Для побудови розв'язків некоректно поставлених задач, навіть якщо вони розв'язні, використовуються абсолютно неприйнятні чисельні методи, які дають математично точні розв'язки заданої системи (1). Це пояснюється тим, що в даній ситуації розв'язок системи дуже чутливий до малих змін початкових даних і матем. точний розв'язок «збуреної» системи (1) може зникнути дуже далеким від стану реального процесу. В цьому разі для побудови розв'язку треба використати методи регуляризації для розв'язування вироджених Л. а. с. (див. Некоректно поставлені задачі способи розв'язування). Один з методів регуляризації полягає в тому, що замість системи (1) розв'язують завжди розв'язну систему

$$\alpha x + A^*Ax = A^*y, \quad (2)$$

де  $\alpha > 0$ ,  $A^*$  — спряжена з  $A$  матриця. При певній належності  $\alpha$  від точності початкових даних, напр., при  $\alpha = 1/\varepsilon$ , де  $\varepsilon > \max\{\|\delta A\|, \|\delta y\|, \|\delta A\| + \|\delta y\|\}$  — спектральні норми можливих варіацій відповідно  $A$  та  $y$ , розв'язок системи (2) зводиться, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , до т. з. норм. розв'язку системи (1) (до того ж векторів, який має мінім. значення  $\|Ax - y\|$  і має мінім. значення  $\|x\|$ ). Якщо варіювати  $\varepsilon$  неможливо, методи регуляризації можуть стати практично неефектив-

ними. В таких випадках необхідно переформулювати початкову задачу або змінити умови одержання початкових даних.

2. Відомо, що можливі варіації  $\delta A$  заданої невиродженої матриці  $A$  не можуть перетворити її на вироджену матрицю  $A_0 = A + \delta A$ , якщо виконується умова  $\|A^{-1}\delta A\| < 1$  або

$$\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1 \quad (3)$$

в будь-якій з норм Зокрема, в спектральній нормі це значить, що норма збурення  $\|\delta A\|$  має бути меншою за мінімальний модуль власного значення матриці  $A$  (в разі симетричної  $A$ ) або меншою від квадратного кореня з мінім. власного значення матриці  $A^*A$  (для довільної матриці  $A$ ). Інакше кажучи, виконання умови (3) гарантує вихід за межі 1-го випадку. Але ця умова аж ніяк не забезпечує близькості розв'язків справжньої, але невідомої нам системи  $\tilde{A}x = \tilde{y}$  і заданої наближеної системи  $Ax = y$  ( $\tilde{A} = A + \delta A$ ,  $\tilde{y} = y + \delta y$ ). Навіть точні розв'язки цих двох систем при виконанні умови (3) можуть дуже відрізнятися один від одного. Ф-ла

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \times \left( \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta y\|}{\|y\|} \right) \times \frac{1}{1 - \|\delta y\| \|y\|} (\delta x = \tilde{x} - x)$$

дає верхню границю для відносної похибки розв'язку через відносні похибки заданих матриць  $A$  та вектора  $y$  при виконанні умови (3). Оцінки, одержані за цією ф-лою, здебільшого дуже завищені. При достатньо малих  $\delta A$  та  $\delta y$  в рамках лінійної теорії  $\delta x = A^{-1} \times (-\delta A \tilde{x} + \delta y)$ , звідки  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \times \left( \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta y\|}{\|y\|} \right)$ . Взявши  $\delta y$  та  $\delta A$  за ви-

падкові нормально розподілені величини (див. Нормальний розподіл), одержуємо, що в рамках лінійної теорії  $\delta x$  також нормально розподілено, і область його можливих значень при заданій імовірності точно збігається з відповідним гіпер-еліпсоїдом розсіювання. При числовому розв'язанні Л. а. с. (1) досить покласти в будь-яку точку цього еліпсоїда, і це при великих його розмірах може полегшити розв'язання задачі, але при цьому сам розв'язок може втратити практичний сенс. У цьому разі доводиться мати справу з т. з. погано обумовленою системою, розв'язок якої має лише стійку проекцію на підпростір, утворений власними векторами матриці  $A^*A$ , що відповідають більшим власним значенням. Тому, коли не можна переформулювати задачу так, щоб одержати досить добре обумовлену систему, то для заданої погано обумовленої задачі є сенс знаходити лише згадану стійку проекцію. Один із способів відшукування цієї проекції може ґрунтуватися на попередньому відшукуванні необхідних власних чисел і векторів (див. Власні значення і власні вектори

матриць способи обчислювання), після чого

$$A^*y = \sum_{k=1}^n \frac{(A^*y, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k \quad \text{і шукана проекція}$$

$$x_{\text{пр}} = \sum_{k=m}^n \frac{(A^*y, e_k)}{\lambda_k (e_k, e_k)} e_k, \quad \text{де } \{\lambda_k\}_m - \text{обрані}$$

великі власні значення,  $e_k$  — одиничні вектори в напрямі взаємно-ортогональних осей. Часто за практичним смыслом задачі нас влаштовує будь-яке  $x$ , яке дає достатньо мале значення  $\|Ax - y\|$ . Якщо  $x_0$  тако, що  $\|Ax_0 - y\| < \delta$ , то  $\|\lambda x_0 - y\| < \delta + |\delta A| \|x_0\| + \|\delta y\|$ ; і ми маємо право обирати  $\delta$ , яке мінімізує одержану оцінку. Ф-ція  $\|Ax - y\|$  від  $x$  завжди опукла і квадратична. На цьому ґрунтується багато способів мінімізації  $\|Ax - y\|$  і тим самим — відшукування розв'язку  $\lambda$ , а с

Розглянуті вище системи — це певною мірою особливі системи, які на практиці трапляються не так уже й рідко. Методи розв'язування їх з'явилися недовго, і багато деталей алгоритмів, що реалізують їх, потребують ще подальшого вдосконалення.

3. Методи розв'язування добре обумовлених систем розроблено достатньо добре; вони стали «класичними». Завдання полягає в тому, щоб з цих різноманітних методів підібрати необхідний мінімум при створенні оптимальним, забезпечення конкретних машин і систем. Розглянемо докладніше окремі лише Л. а. в. р. с. р., до яких адаптуються найчастіше, розв'язуючи Л. а. с. на ЦОМ та АОМ. Прямі (точні) методи застосовують здебільшого при невеликому порядку системи. З таких методів розглянемо компактну схему методу Гаусса з аналогом вибирання гол. елемента за стовпчиком, метод відображень та метод квадратного кореня (цей останній — для додатно визначеної матриці). Сирізь вважаємо, що суми парних добутків компонент векторів обчислюються на ЦОМ із заокругленням лише результатів, при цьому ЦОМ працює в режимі з плаваючою комою. Компактна схема при  $A = \{a_{ij}\}_1^n$ ,  $y = \{y_i\}_1^n$  здійснює безпосереднє розкладання матриці  $A$  на дві трикутні  $A = LU$ , де  $L$  — нижня трикутна з одиницями на гол. діагоналі,  $U$  — верхня трикутна. Розкладання записують у вигляді допоміжної матриці

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

елементи якої обчислюють за ф-лами

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \leq n; \quad l_{ij} = - \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) : u_{jj}, \quad i > j.$$

Права частина перетворюється на вектор  $f$  за ф-лою  $f_i = y_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} f_k$ . Розв'язок обчислюють за ф-лою

$$x_i^* = \frac{1}{u_{ii}} \left( f_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k^* \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Щоб забезпечити аналог вибирання головного елемента за стовпчиком, обчислюють у такий спосіб. На кожному кроці  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ )

обчислюють вирази  $s_i = a_{ir} - \sum_{k=r+1}^{n-1} l_{ik} u_{kr}$ ,  $i = r, r+1, \dots, n$ . Якщо  $\max |s_i| = |s_r|$ , то рядки  $r$  та  $r'$  міняють місцями, і після цього

$$u_{rr} = s_r, \quad l_{ir} = \frac{s_i}{u_{rr}}, \quad u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj}, \quad j = r+1, \dots, n.$$

Аналогічні перетворення виконують і над елементами правої частини. Такий вибір головного елемента забезпечує  $|l_{ij}| \leq 1$ . Реалізація зазначеного алгоритму на ЦОМ вимагає зберігання  $n^2$  чисел, виконання  $n$  ділень,  $n^2/3$  множень,  $n^2$  додавань і порядку  $n^2$  логіч. операцій. При цьому тут і далі враховують лише гол. степені  $\lambda$ .

Для характеристик точності будь-якого з прямих методів можна використовувати поняття еквівалентного збурення (е. з.), що вказує, яка зміна початкових даних системи еквівалентна сумарному впливові похибок заокруглення на обчислюваний розв'язок. Позначимо символами з індексом  $i$  обчислені величини, де  $i$  — кількість двійкових розрядів мантиси маш. представлення числа. Розв'язок  $x_i$  точно задовольняє не систему (1), а систему  $(A + \delta A) x_i = y + \delta y$ , де  $\delta A$  та  $\delta y$  — відповідні е. з. Головну частину  $F$  е. з. в усіх прямих методах становлять похибки заокруглення, що виникають при розкладанні (перетворенні) матриці  $A$ . У випадку компактної схеми:  $L_i U_i \equiv A + F$ , де  $\|F\|_E \leq C_1 \times 2^{-i} \|A\|_E$ ;  $C_1$  — константа, що залежить від величини  $\max |u_{ij}|$ ,  $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ .

Метод відображень ґрунтується на ортогональному перетворенні початкової системи до системи з трикутною матрицею. Перетворення над початковою матрицею  $A = A_1$  виконують за правилом:  $A_{k+1} = U_k A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$  за допомогою матриць відображення  $U_k$ . За заданим вектором  $x$  та одиничним координатним вектором  $e$  завжди можна побудувати матрицю відображення  $U = I + 2WW^*$ ,  $\|W\| = 1$  ( $I$  — одинична матриця,  $W$  — матриця-стовпчик).

для якої  $Uz = \alpha e$ . Для цього досить взяти  $\alpha^2 = (z, z)$ ,  $W = \frac{1}{\rho} (z - \alpha e)$ ,  $\rho^2 = 2 \{ \alpha^2 - \alpha (z, e) \}$ . На 1-му кроці вважаємо  $z = a_1^{(0)}$ ,  $e = e_1$ , де  $a_1^{(0)}$  — 1-й стовпчик матриці  $A_1$ ,  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Тоді  $W_1 = \rho W^* = (a_{11} \pm \alpha, a_{21}, \dots, a_{n1})$ ,  $\alpha^2 = \sum_{i=1}^n a_{i1}^2$ , а знак  $a_{11}$ ,  $u_1 = 1 - kW_1 W_1^*$ , де  $k = \frac{1}{\alpha^2 \pm \alpha a_{11}}$ .

В результаті  $A_2 = U_1 A_1 = A_1 - kW_1 W_1^* A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , де  $B$  — матриця  $n-1$ -го порядку.

Далі процес повторюють для матриці  $B$ . Аналогічні перетворення виконують над правою частиною:  $b_{k+2} = u_k b_k$ . Одержану внаслідок цього систему з трикутною матрицею розв'язують простим методом послідовного виключення. Даний алгоритм потребує ще  $\frac{1}{2} n^2$  комірок пам'яті ЦОМ,  $2n-1$  ділень,  $\frac{1}{6} n^3$  множень,  $\frac{1}{6} n^3$  додавань,  $\frac{1}{2} n^3$  логічних операцій та  $n$  операцій добування квадратного кореня. Для нього

$$|F|_E \leq 3,35(n-1)|t| + 9,01 \cdot 2^{-1} n^{-2} \times \\ \times 2^{-1} |A|_E \approx C_2 n 2^{-1} |A|_E.$$

Обчислювальна схема методу квадратного кореня (для додатно визначеної матриці) полягає в представленні  $A$  у вигляді  $A = S^* S$ , де  $S$  — верхня трикутна матриця, і розв'язуванні двох трикутних систем  $S^* z = y$  та  $Sx = z$ . Елементи матриці  $S$  знаходять за ф-лами

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad s_{ii} = \\ = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}, \\ s_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} \right) : s_{ii}$$

При цьому потрібно мати  $n^2/2$  комірок пам'яті,  $n$  ділень,  $n^3/6$  множень,  $n^3/6$  додавань,  $n^3$  логіч. операцій та  $n$  операцій добування квадратного кореня. Тут  $|F|_E \leq C_2 \times \times 2^{-1} |A|_E$ . Статистичний аналіз помилок заокруглення показує, що мажорантну оцінку для методу відображень можна поліпшити в  $\sqrt{n}$ , а для методів квадратного кореня та компактної схеми в цій оцінці можна поліпшити лише постійні коефіцієнти.

Ітеративні методи розв'язування л. а. с. системи (1) на ЦОМ застосовують здебільшого при великих  $n$  та щоб уточнити розв'язок при будь-якому  $n$ . Одним з найпростіших ітеративних методів є метод послідов-

них наближень (м. п. н.):  $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + y$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ , де  $B = I - A$ ,  $x^{(0)}$  — задано. Для збіжності методу при будь-якому  $x^{(0)}$  потрібно й достатньо, щоб усі власні значення матриці  $B$  були за модулем менші за 1. Якщо  $|B| < 1$ , то похибка методу

$|x - x^{(p+1)}| \leq \frac{|B|^{p+1}}{1 - |B|} \|Ax^{(0)} - y\|$ . Якщо  $B$  представлено у вигляді  $B = T^{-1}GT$   $|G| < 1$ , то

$$|x - x^{(p+1)}| \leq |T^{-1}| |T| \frac{\|G\|^p}{1 - \|G\|} \|Ax^{(0)} - y\|$$

Для реалізації методу потрібно мати  $n^2$  множень та додавань. При великих  $p$  і парних  $n = 2l$  це число можна зменшити приблизно вдвічі, використовуючи тотожність

$$\sum_{j=1}^{2l} b_{ij} x_j^{(k)} = \sum_{u=1}^l (b_{i2u-1} + x_{2u}^{(k)}) \cdot (b_{i2u} + x_{2u-1}^{(k)}) - \\ - \sum_{u=1}^l x_{2u-1}^{(k)} x_{2u}^{(k)} - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2l,$$

де  $\alpha_i = \sum_{u=1}^l b_{i2u-1} \cdot b_{i2u}$  не залежать від номера ітерації  $k$  і обчислюють їх лише раз. В урахуванням заокруглення на кожному кроці м. п. н. лише  $x^{(k+1)}$  похибка заокруглення методу  $2^{-\tau} \max \|x^{(k)}\|$

$$|x^{(p+1)} - x^{(p+1)}| \leq \frac{2^{-\tau} \max \|x^{(k)}\|}{1 - q} (1 - q)^{p+1},$$

де  $q < 1$ , і дорівнює зазначеним вище  $|B|$  або  $|G|^{1-q}$ . М. п. н. у канонічній формі може бути представлений у вигляді  $x_c + Ax = y$ ,  $x^{(0)} = x_0$ .

де  $x_c = \frac{1}{\tau} (x^{(k+1)} - x^{(k)})$ ,  $x = x^{(k)}$  параметр  $\tau = 1$ . Якщо  $A$  — симетрична і додатно визначена матриця, то для розв'язання л. а. с. (1) можна застосовувати ітеративні методи з прискоренням збіжності, що їх реалізують за схемою

$$Cx_c + Ax = y, \quad x^{(0)} = x_0, \quad (4)$$

де  $C$  — симетрична й позитивно визначена матриця-регуляризатор, яку вибирають за умов економічності ітеративного процесу, напр., з умов, щоб кількість операцій на одній ітерації була якнайменша, а швидкість збіжності процесу — якнайбільша. Параметр  $\tau$  звичайно обчислюють за ф-лою  $\tau =$

$$= \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \text{ де } \gamma_1(Cx, x) \leq (Ax, x) \leq \gamma_2(Cx, x).$$

При цьому ітеративний процес (4) збігається зі швидкістю геом. прогресії, знаменник якої  $\rho = (\gamma_2 - \gamma_1) : (\gamma_2 + \gamma_1)$ . На відміну від однокрокових методів (4) двокрокові ітеративні методи в канонічній формі записують у вигляді

$$C(x_c + \kappa x_c) + Ax^{(k)} = y, \quad x^{(0)} = x_0, \quad x^{(1)} = x_1, \quad (5)$$

$$\text{де } x_0 = \frac{1}{2\tau} (x^{(k+1)} - x^{(k-1)}), \quad x_{1\tau} = \frac{1}{\tau^2} (x^{(k+1)} - 2x^{(k)} + x^{(k-1)}), \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}, \quad \kappa = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4}. \quad (5)$$

Для процесу (5)  $\rho = (\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}) : (\sqrt{\gamma_2} + \sqrt{\gamma_1})$ . Зазначені ітеративні методи є прикладами лінійних методів у тому розумінні, що чергове наближення є лінійною функцією попереднього наближення (або попередніх наближень).

Другу групу ітеративних методів становлять варіаційні методи: мінимізорного спуску, мінім. нев'язок, спряжених градієнтів та ін., побудовані на принципі мінімізації відповідної квадратичної ф-ції (про ці та деякі інші методи див. також *Операторные уравнения и методы их решения, Численные методы*). Системи лінійних алгебр. рівнянь з дійсними коефіцієнтами можна розв'язувати й на АОМ, користуючись методом аналогій або квазіаналогій. Суть методу аналогій полягає в тому, що з елементів АОМ складають коло, електр. стан якого описується системою рівнянь, подібною до системи, яку треба розв'язати. Метод квазіаналогій відрізняється тим, що складають коло, рівняння якого не подібні, а лише еквівалентні заданим у тому розумінні, що серед їхніх розв'язків містяться й розв'язки заданої системи. Метод квазіаналогій застосовують тоді, коли не існує кола, рівняння якого подібні до заданих, або тоді, коли таке коло існує, але є нестійким. Найперспективнішими є квазіаналогові моделі систем лінійних алгебр. рівнянь. Відповідно до їхніх властивостей їх можна поділити на три групи: 1) моделі, придатні для одержання нормального розв'язку сумісних систем, 2) моделі, придатні для одержання нормального розв'язку сумісних і несумісних систем за умови, що кількість рівнянь більша або дорівнює кількості невідомих, а ранг матриці дорівнює кількості невідомих, 3) моделі, придатні для розв'язування систем заг. вигляду, але вони дають розв'язок, наближений до нормального. В моделях останньої групи реалізують метод регуляризації Тихонова. В моделях, придатних для одержання нормального розв'язку несумісних систем, є напруги, пропорційні відхилам заданих рівнянь. Відносна похибка розв'язків систем алгебр. рівнянь, одержуваних на АОМ, залежно від обумовленості, адекватного кожнається в межах від кількох десятків процентів до кількох процентів.

Див. Пухов Г. Е., Борковская Е. А. Принципы построения квазианалоговых моделей систем линейных алгебраических уравнений. В кн. Доклады четвертой межвузовской конференции по применению физических и математических моделирования в различных отраслях техники. сб. 3. М., 1962. Фаддеев Д. Н. Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1963 (б. биогр. с. 677—734). Воеводина В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М., 1966 (б. биогр. с. 247—249). Фаддеев Д. Н., Кублаковская В. Н., Фаддеева В. Н. Линейные алгебраические системы с прямоугольными матрицами. В кн. Материалы Международной летней

школы по численным методам, в. 1. М., 1968. Глушак В. М., Молчанов И. И., Никольский Л. О наборе программ для решения систем линейных алгебраических уравнений на машинах серии «Мир». «Кибернетика», 1968. М. в. Форсайт Дж. Моттер Л. Численные решения систем линейных алгебраических уравнений. Пер с англ. М., 1968 (б. биогр. с. 160—161).

В. А. Воронцовый, В. В. Иванов, Л. Д. Никольский, И. М. Молчанов.

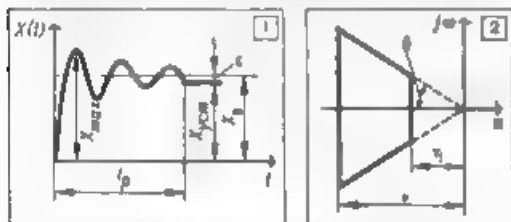
**ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ АНАЛІЗ** — дослідження впливу структури, числових значень параметрів і зовнішніх дій на динамічні властивості й поведінку лінійних систем. Аналіз здійснюють на основі визначення властивостей розв'язків дифер. рівнянь, які описують систему. В заг. випадку автомат. системи описують нелінійними дифер. рівняннями. Проте процеси, які відбуваються в деяких нелінійних системах, постійно відрізняються від процесів у лінійних системах, тому для аналізу таких систем можна застосовувати т. в. лінеаризовані рівняння першого наближення. За достатньо малих збурень, які діють на систему, з лінеаризованих рівнянь можна робити висновки про деякі важливі властивості первної системи. Питання про правомірність і межі застосовності методу лінеаризації в дослідженнях динаміки систем найпоширеніше й до кінця дослідів рос. математик О. М. Ляпунов (див. *Ляпунов, методы*). Для аналізу властивостей лінійних систем автомат. керування ефективними є методи, засновані на інтегральних перетвореннях Лапласа й Фур'є, т. в. операторні методи. Осн. аністом аналізу лінійних систем є дослідження стійкості, якості *перехідного процесу* й точності відтворення *керуючої дії*.

Дослідження стійкості є першою й основною задачею аналізу систем автомат. керування. Для того, щоб лінійна система з постійними параметрами була асимптотично стійкою, необхідно й достатньо, щоб дійсні частини коренів були від'ємними (див. *Стійкості неперервних систем теорія*). Проблему стійкості (як і взагалі аналізу лінійних систем) було б вичерпано, якби можна було достатньо просто обчислити корені. Але через важкість обчислювання коренів було розроблено методи оцінювання знаків дійсних частин безпосередньо шляхом, за коефіцієнтами характеристичного рівняння на основі т. в. *стійкості критеріїв*. Найпоширенішими є алгебр. критерій Гурвіца й Рауса, частотний критерій Найквіста й графоаналітичний критерій Михайлова (див. *Гурвіца теорема*).

Часто буває необхідно встановити, за яких значень параметрів, що входять у коефіцієнти характеристичного рівняння, система буде стійкою. Найпростішим і найефективнішим для цього є метод *D-розбиття*. Він полягає в побудові кривої, яка є відображенням уявної осі площини коренів на площині параметрів системи. Ця крива розбиває площину на ряд областей, кожній з яких відповідає певна кількість коренів з від'ємною дійсною частиною. Заштриховують, виділяють ту область, у якій найбільше таких коренів,

а потім, користуючись будь-яким критерієм стійкості, перевіряють стійкість для яких-небудь значень параметрів з цієї області. Якщо система стійка для цих контрольних значень параметрів, то вона буде стійкою для всіх значень параметра всередині цієї області.

Стійкість характеризує динамічні властивості системи далеко не повністю. Істотними є ще й інші показники, які в сукупності характеризують якість процесу регулювання. Ця якість певним способом пов'язана з якістю перехідного процесу —



1. Крива перехідного процесу  
2. Область значень коренів характеристичного рівняння

реакції системи на збідження типу однічного поштовху. Тому якість процесу регулювання можна аналізувати за показниками якості перехідного процесу (див. *Критерії якості систем автоматичного регулювання*). Якість перехідного процесу аналізують безпосередньо — на основі перехідної характеристики системи, якщо характеристики відомі чи її легко визначити, або ж посередньо — з коефіцієнтів характеристичного рівняння тощо. Застосовують такі показники якості перехідного процесу: час перехідного процесу  $t_p$ , величину абсолютної статичної помилки  $\epsilon = x_0 - x_{уст}$  або відносної статичної помилки  $\Delta = \frac{\epsilon}{x_0}$ , величину перерегулювання

$\sigma = \frac{x_{max} - x_0}{x_0}$ , величину коливальності  $\mu$

(число коливань за час  $t_p$ ) (маб. 1) тощо. Тут  $x_0$ ,  $x_{уст}$  і  $x_{max}$  — відповідно задане, установлене (за час  $t_p$ ) й макс. значення регульованої величини. Як і в разі аналізу стійкості, розроблено непрямі методи аналізу якості лінійних автомат. систем, які не потребують визначення перехідної характеристики та обчислювання коренів характеристичного рівняння. До непрямих методів аналізу якості перехідного процесу належать методи, засновані на вивченні розміщення коренів характеристичного рівняння на комплексній площині та на використанні частотних характеристик, інтегральні методи тощо. Якщо всі корені характеристичного рівняння розміщені всередині трапеції зліва від уявної осі комплексної площини (маб. 2), де  $\eta$  — ступінь стійкості, а  $\lg \theta = \mu$  — величина коливальності, то це свідчить про те, що показники якості будуть не гірші за задані значення  $\eta = \frac{\ln 1/\Delta}{t_p}$ .

$t_p$ ,  $\Delta$  і  $\mu$ , які визначають межі цієї трапеції. Задача аналізу якості й полягає у встановленні цього факту. Його можна достатньо просто виявити на основі т. з. методу зсунутого характеристичного рівняння. Зсуване рівняння  $A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_n = 0$  одержують заміною  $s$  на  $s - \eta$  у характеристичному рівнянні. Це відповідає перенесенню уявної осі площини коренів уліво на величину  $\eta$ . Крім того, поворотом уявної осі на кут  $(90^\circ - \theta)$  проти стрілки годинника й відповідним перетворенням характеристичного рівняння одержують перетворене характеристичне рівняння. Якщо корені перетвореного і зсунутого рівнянь мають від'ємні дійсні частини, то корені першого характеристичного рівняння всі розміщені всередині трапеції. Там достатньо просто можна не тільки встановити факт розміщення всіх коренів усередині бажаної області, заданої тех. умовами, а й вибрати параметри системи так, щоб усі корені входили до цієї області. Це здійснюють відповідним вибором параметрів системи, виходячи з умов стійкості зсунутого й перетвореного характеристичних рівнянь.

Для аналізу стійкості та якості перехідного процесу застосовують і *перенесеного зображення метод*. Він полягає в побудові коренових траєкторій — тобто геом. місця осей сукупності значень коренів характеристичного рівняння залежно від змін якого-небудь параметра системи. З цих траєкторій можна достатньо повно судити про стійкість і якість перехідного процесу системи. Істотною хибкою цього методу є складність побудови траєкторій коренів.

Розглянуті методи оцінки якості перехідного процесу мають одну спільну хибку: вони не враховують впливу правої частини дифер. рівняння системи, від якої теж істотно залежить якість перехідного процесу. Справді, перехідну характеристику визначають як розв'язок неоднорідного дифер. рівняння системи

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_n x(t) = b_0 \frac{d^m x_{вх}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{вх}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x_{вх}(t)$$

при одностичному вході  $x_{вх}(t) = 1(t)$  й нульових початкових умовах. Права частина рівняння залежить від того, до якого елемента системи прикладено діяння  $x_{вх}(t)$ , а ліва — не залежить. Зображення за Лапласом перехідної характеристики внаслідок цього рівняння буде

$$X(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{s}.$$

Враховуючи в аналізі якості лише ліву частину рівняння, користуються фактично сно-

твореною перехідною характеристикою

$$X(s) = \frac{1}{a^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{s}.$$

що безумовно впливає на результати аналізу якості. Але за інших однакових умов якість реального перехідного процесу загалом тим краща, чим кращі показники якості, одержані без урахування правої частини рівняння, тобто викладені методи, безперечно, мають цінність.

Велике значення мають частотні методи аналізу якості, що дають змогу оцінити якість за видом різних частотних характеристик системи.

Разом з розглянутими методами для оцінки якості широко застосовують і інтегральні методи, які дають змогу враховувати і знаменник, і чисельник передатної функції, тобто враховувати не лише дію, а й праву частину дифер. рівнянь системи. Найчастіше застосовують такі інтегральні оцінки

$$I_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt, \quad I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt, \quad I_3 = \int_0^{\infty} [x^2(t) + t x^2(t)] dt.$$

де  $x(t)$  — імпульсна перехідна характеристика. Якість системи тим краща, чим менші значення цих інтегралів. В аналізі якості інтегральними методами звичайно сталять дві задачі: 1) визначити величину інтеграла і 2) так підібрати параметри системи, щоб значення інтеграла було мінімальним. Обидві ці задачі розв'язують непряким способом, який не потребує визначення перехідної характеристики. Інтеграли  $I_1$ ,  $I_2$  і  $I_3$  можна виразити через коефіцієнти лівої і правої частини дифер. рівняння системи і, отже, за якими можна обчислити значення цих інтегралів або ж мінімізувати їх відповідним вибором настроювальних параметрів системи, які входять у ці коефіцієнти.

Однією з важливих задач аналізу лінійних систем керування є дослідження вимушених рухів, спричинених зовн. діями, тобто з навіс точності відтворення керуючого сигналу на фоні завад і шкідливих збурень. Про останні звичайно відомо лише те, що вони належать до певного класу функцій — детермінованих або випадкових. Якщо про збурення нічого не відомо, крім того, що вони змінюються в заданому діапазоні, то цю задачу іноді можна розв'язувати методами теорії інваріантності (див. *Інваріантність систем автоматичного керування*). При випадковому характері завад і збурень цю задачу розв'язують методами теорії випадкових функцій — статистичними методами, суть яких полягає, год. чин., в оцінці точності функціонування системи за величиною її середньоквадратичної похибки. Залежно від статистичних властивостей завад і збурень розроблено різні мето-

ди аналізу точності лінійних систем. Аналіз лінійних систем з погляду точності при зміні параметрів систем здійснюють на основі теорії чутливості (див. *Динамічних систем теорія чутливості*).

Характерно, що аналіз точності будь-якими методами не виключає аналізу стійкості та якості перехідного процесу. Для аналізу систем з багатьма регульованими величинами, крім розглянутого, розв'язують ще додатково задачу автономного керування (див. *Автономність*).

Лт Воронцов А. А. Основы теории автоматического управления, ч. 1 М.—Л., 1965 [Бібліоср. с. 382—392]. Теория автоматического регулирования, кн. 1 М., 1967 [Бібліоср. с. 743—763].

Л. Г. Шевельов.  
**ЛІНІЙНІ ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ**  
функції алгебри логіки, які можна представити у вигляді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \pmod{2}.$$

Кожна Л. ф. а. л. повністю визначається набором своїх коефіцієнтів  $a_0, \dots, a_n$ , які набувають значень 0 або 1. Звідси видно, що кількість усіх Л. ф. а. л. від  $n$  аргументів дорівнює  $2^{n+1}$ . Зокрема, всі ф-ції однієї змінної — лінійні. Клас усіх Л. ф. а. л. є класом важливим функцій алгебри логіки, більше того, він є класом передповним функцій алгебри логіки.

ЛІСП — спискова мова програмування. Первісну інформацію записують у вигляді списків. Напр., TIMES, ONE (plus, X, A), Y.

Програма мовою Л. — це рекурсивна функція символічних виразів, яка будується, як і арифм. ф-ції, з елементарних за допомогою умовного оператора та оператора суперпозиції. Умовний оператор має вигляд  $(p_1 \rightarrow i_1, \dots, p_n \rightarrow i_n)$ . Результатом його виконання буде вираз  $i_k$ , якщо  $p_k$  — істинне. Є п'ять елементарних ф-цій. atom — булева ф-ція, що визначає, чи є досліджуваний вираз атомом — неподільною одиницею інформації; eq — булева ф-ція, що встановлює рівність двох атомів; car, cdr — ф-ції, що виявляють із списку перший та решту елементів відповідно, cons — об'єднання двох списків в один. Є не тільки елементарні, а й складніші ф-ції, які будуються з елементарних, напр., підстановку у виразі  $x$  замість усіх входжень символу  $y$  виразу  $z$  записують у вигляді такої ф-ції:

$$\text{subst}[x; y; z] = [\text{atom}[x] \rightarrow \text{eq}[x; y] \rightarrow z;$$

$$[T \rightarrow z];$$

$$T \rightarrow \text{cons}[\text{subst}[x; y; \text{car}[z]];$$

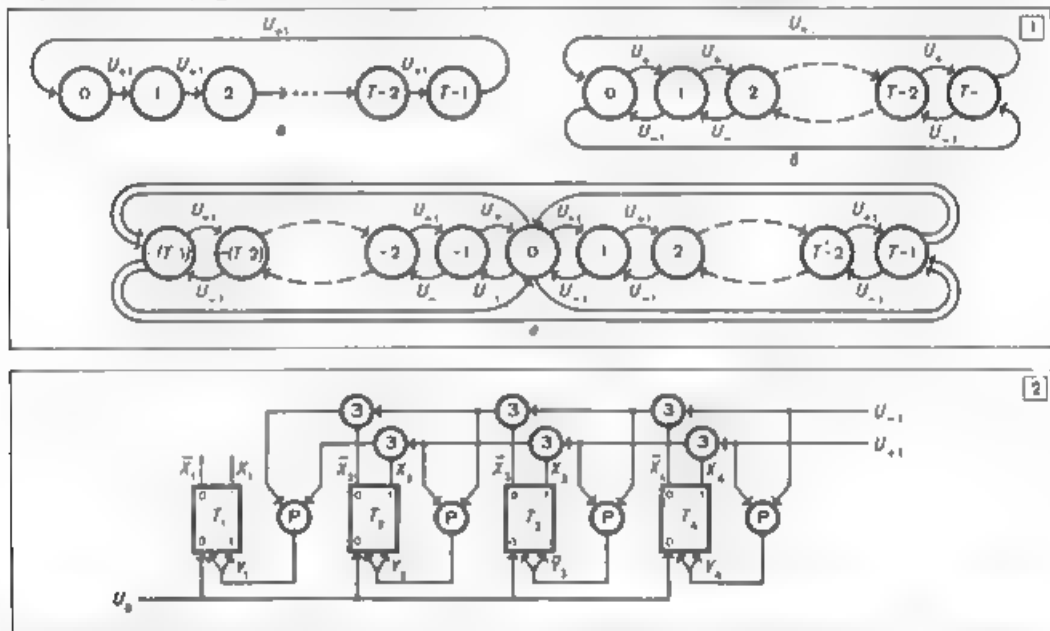
$$\text{subst}[x; y; \text{cdr}[z]]].$$

Тут  $T$  означає «істина». Цей запис є прикладом програми мовою Л. Ця мова набула дальшого розвитку в ряді ін. мов.

Лт Mc Carthy J. Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, part I «Communications of the Association of Computing Machinery», 1960, v. 3, № 4. Т. О. Гринченко

**ЛІЧІЛЬНИК** — пристрій для підрахування імпульсів у різноманітних засобах автоматизації, телемеханіки тощо; часто використовується як блок ЦОМ тиловий, який виконує операцію лічби одиниць. Л. має один або два види сусідніх переходів у заданій множині станів  $T$  (періоді). З будь-якого  $i$ -го стану під дією вхідного сигналу  $+1$  переходить у  $(i \oplus 1)$ -й стан, а під дією вхідного сигналу  $-1$  — у  $(i \ominus 1)$ -й стан відповідно до

цією (мал. 1, б). Під дією вхідного сигналу, який додається в початковий стан, а під дією вхідного сигналу, який віднімається ( $-1$ ), — з початкового стану в  $(T-1)$ -й стан, тобто лічба кількості різноманітних одиниць здійснюється в ньому за модулем  $T$ . В реверсивних двосторонніх Л. можливі стани з номерами  $i < 0$ , відповідно до чого граф переходів цих Л. складається з двох графів одно-



1. Графи переходів лічильників: а — простого; б — реверсивного одностороннього; в — реверсивного двостороннього ( $U_{+1}$ ,  $U_{-1}$  — сигнали  $+1$ ,  $-1$  відповідно, 0...  $T-1$  — стани лічильника)

2. Блок-схема реверсивного одностороннього лічильника з пасивними перенесеннями (З — імпульсно-потенціальний збіг; Р — імпульсний розподіл  $U_{+1}$ ,  $U_{-1}$  — відповідно вхідні сигнали  $+1$ ,  $-1$ ;  $Y_i$  — керуючий сигнал на входи тригера.  $U_0$  — сигнал устанавлення лічильника в початковий стан).

заданих модулів лічби ( $\oplus$  та  $\ominus$  — операції додавання та віднімання за модулем). Номери станів Л. відлічуються від якогось початкового стану з номером  $i = 0$ . Коли Л. досягає граничного стану ( $i_{\max} = T-1$ ), він черговим вхідним сигналом повертається в початковий стан. Крім того, в практичних схемах Л. звичайно передбачається можливість устанавлення Л. з будь-якого стану в початковий під впливом спец. установочного сигналу.

За видом переходів Л. розділяють на три осн. групи, прості, реверсивні односторонні й реверсивні двосторонні (мал. 1). На прості Л. надходять вхідні сигнали одного знака, звичайно  $+1$ , тобто їхні графи переходів характеризуються наявністю переходів лише в одному напрямі — прямому, визначуваному збільшенням номера станів до граничного значення  $i_{\max} = T-1$  (мал. 1, а). Реверсивні односторонні Л. мають переходи в двох напрямках — прямому й зворотному. Разом з тим у цих Л. немає станів з номерами  $i < 0$  (згідно з прийнятою нумера-

цією). Перехід такого Л. буде

$$T = T_{i>0} + T_{i<0} - 1,$$

де  $T_{i>0}$ ,  $T_{i<0}$  — множинами додатних і від'ємних станів Л. За станом двосторонніх реверсивних Л. визначається різниця кількостей ( $N'$ ) доданих ( $N_+$ ) і віднятих ( $N_-$ ) сигналів  $N' = N_+ - N_-$  із зазначенням її знака (на відміну від односторонніх реверсивних Л.). Це забезпечує можливість виконувати в таких Л. операції типу додавання й віднімання за умови, коли число-імпульсний код представляють числа, які додаються та віднімаються. За системами кодування станів розрізняють Л. трьох осей, типів: Л. з позиційним двійковим або десятковим кодуванням, Л. з позиційним одніичним або комбінованим кодуванням; Л. з непозиційним сусіднім кодуванням.

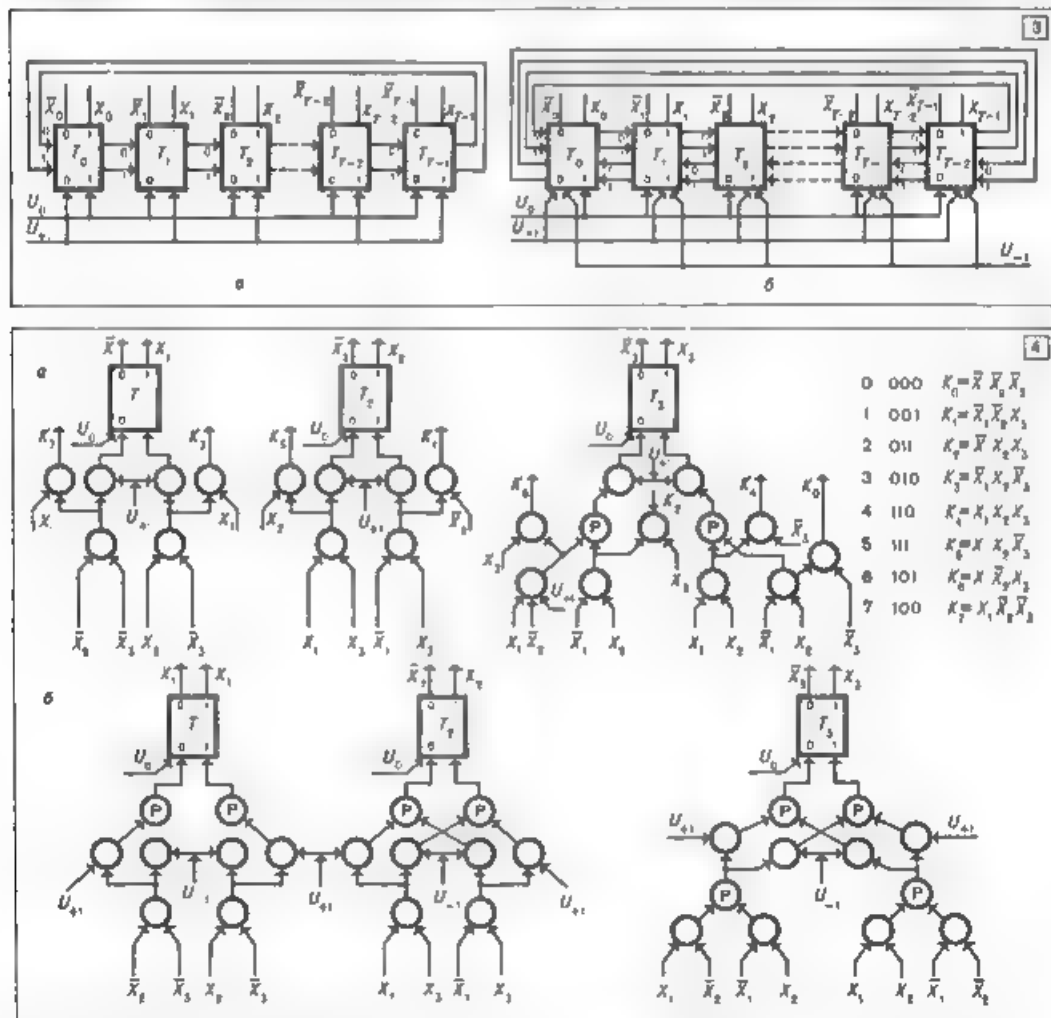
У Л. з позиційним двійковим або десятковим кодуванням коди станів ототожнюються з числами, вира-



женням у відповідних системах кодування. З цих Л. широко застосовують Л. з двійковим кодуванням (двійкові Л.) не лише через те, що двійкова система числення поширеніша, а й через меншу складність схем двійкових Л. порівняно з десятковими. Такі Л. можна виконати на тригерах з лічильним входом і в роздільних входах. Л. на тригерах з роздільними входами відрізняються від Л. на тригерах з лічильним входом умовно,

рівняному Л. (переходи в якому задано графом, як показано на мал. 1, б) використовують схему мал. 2 в поєднанні з додатковим ланцюгом розряду знака й керування. Щоб підвищити швидкість Л., застосовують способи частково-групових та групових процесів (див. *Ланцюг переносу*).

В потенціально-імпульсній елементній структурі блок-схема різних варіантів Л. збігається з їхніми загальними блок-схемами.



2. Блок-схеми лічильників з однією системою кодування. а — простого, б — реверсивного одностороннього. в — простого з вихідним дешифратором, г — реверсивного одностороннього ( $K_i$  — і-а константа стану лічильника).

оскільки в будь-якому випадку з кожному розряді реалізується функція підсумовування за модулем 2, і схема одного розряду являє собою лічильний каскад з додатковим формуванням сигналів перенесення та позитивання. Для прикладу наведено блок-схему реверсивного одностороннього Л. з наскрізними перенесеннями (мал. 2). В реверсивному двосто-

роному Л. (переходи в якому задано графом, як показано на мал. 1, б) використовують схему мал. 2 в поєднанні з додатковим ланцюгом розряду знака й керування. Щоб підвищити швидкість Л., застосовують способи частково-групових та групових процесів (див. *Ланцюг переносу*).

В потенціально-імпульсній елементній структурі блок-схема різних варіантів Л. збігається з їхніми загальними блок-схемами.

На вхід тригерів надходять імпульсні сигнали, а з їхніх виходів знімаються потенціальні сигнали. Тому всі вентилі повинні мати імпульсний вихід, тобто бути потенціально-імпульсними. Л. розглядають елементної структури зручно виконувати на тригерах з вихідними діодно-трансформаторними вентиллями. У потенціально-імпульсній елементній структурі

рі (див. *Потенціальні логічні елементи*) для реалізації Л. кількість тригерів подвоюється, бо кожний розряд являє собою лічильний тригерний каскад, який складається з двох тригерів, що мають відповідні вентилі. В імпульсній елементній структурі для Л. застосовують два варіанти тригерних лічильних каскадів. Один з них виконано на одному динамічному тригері, і в ньому немає інверсного виходу, а другий — на двох таких тригерах, які утворюють прямий та інверсний виходи каскаду. В обох варіантах перемикальні сигнали, які зникаються з вихідних вентилів тригерів, можна використовувати і як сигнали перенесення.

Розглянувши особливості побудови позиційних Л. на різних елементних структурах характерні для Л. з десятковим кодуванням. Кожний числовий розряд десятичного Л. може мати будь-яке з десяти значень і тому має складатися не менш як з чотирьох тригерів. Способи реалізації операцій додавання одиниці з цифрою, яка зберігається в десятковому розряді, і віднімання одиниці з цієї цифри залежать від способу кодування десятичних цифр. Проте незалежно від цього зв'язки між окремими десятковими розрядами в Л. з десятковим кодуванням аналогічні зв'язкам між двійковими розрядами в Л. з двійковим кодуванням.

У Л. з позиційним одиничним і комбінованим кодуванням числа визначаються місцеположенням маркуючого коду в регістрі тах, що при сусідніх місцеположеннях числа, представлені цими кодами, відрізняються на одну (одиничний код) або дві (парноодиничний код) одиниці. Отже, Л. з одиничним кодуванням являють собою зсувний регістр із заздалегідь введеним маркуючим кодом, який зсувається за допомогою вхідного сигналу ( $e+1$  або  $e-1$ ) на один розряд у бік, відповідний знакові одиниці, представленій даним сигналом. Простий і реверсивний односторонній Л. з одиничним кодуванням (мал. 3) являють собою звичайні асинхронні регістри, тому спосіб формування сигналів переносу в ланцюгах зсуву не показано. У наведених на мал. 3 схемах реалізуються всі переходи згідно з графами Л. на мал. 1, а та б. Кожний  $i$ -й стан Л. визначається перебуванням в одиничному стані тільки одного  $i$ -го розряду (або двох сусідніх розрядів при парноодиничному кодуванні). При такому кодуванні станів Л. виникає потреба в операції дешифрування кодів станів Л., тобто в наявності вихідного дешифратора, якщо треба, напр., утворити спец. сигнали, які взаємно однозначно відповідають певним станам Л. Реалізація розглядуваних Л. у різних елементних структурах не відрізняється від реалізації зсувних регістрів. Проте при побудові Л. з одиничним кодуванням у потенціальній елементній структурі доцільно використовувати маркуючий код з двома сусідніми одиницями, тобто 11; при цьому можна не подвоювати кількості тригерів у Л. (що є необхідним у звичайному зсувному регістрі на потенціальних елементах). Л. з комбінованим кодуванням складаються з  $k$  окремих (частковий) Л. з одиничним кодуванням. Кожний частковий Л. є відповідним розрядом усього Л. в загальному

$$\omega_i = \prod_{j=i+1}^n T_j$$

де  $i$  — номер даного розряду,  $T_j$  — період часткового Л.  $j$ -го розряду. Кожна комбінація можливих станів часткових Л. являє собою стан усього Л. і в разі потреби виділяється операцією дешифрування. Від вибору кількості часткових Л. і величин їхніх періодів залежить кількість апаратури в Л., складність функцій дешифрування та швидкість Л.

У Л. з неперемикальним сусіднім кодуванням стани кодується т. з. сусідніми кодами; коди будь-яких сусідніх станів Л. відрізняються на код одного розряду, тобто, щоб здійснити перехід з  $i$ -го стану в  $(i \oplus 1)$ -й або  $(i \ominus 1)$ -й стан, у Л. перемикають тільки один його розряд (тригер). На мал. 4 показано загальні блок-схеми простого Л. з сусіднім кодуванням з періодом  $T = 8$  (мал. 4, а) та реверсивного одностороннього Л. з сусіднім кодуванням (мал. 4, б). Двосторонній реверсивний Л. з сусіднім кодуванням найпростіше реалізується на основі використання одностороннього реверсивного Л. і спец. розряду знака при представленні від'ємних чисел додатковим до  $T$  кодом. Л. з сусіднім кодуванням будуть в усіх елементних структурах, по або на виходах тригерів встановлюють елементи затримки, або самі вихідні каскади тригерів є логіч. затримувальними елементами. Проте для побудови цих Л. у потенціальній елементній структурі можна обійтися без подвоєння числа тригерів на кожний розряд, якщо, чергуючи вхідні, рознесені в часі, сигнали до двох розділених ланцюгів, добитися незалежності функцій збудження тригерів Л., які викликають сусідні переходи, від одних і тих самих змінних.

Л. з сусіднім кодуванням за своєю структурою найбільш близькі до розглянутих позиційних Л. з двійковим кодуванням. Швидкодію Л. цих типів можна вважати однаковою. Проте функції дешифрування у Л. з сусіднім кодуванням простіші, ніж у Л. з двійковим кодуванням.

Лит.: Рабинович З. Л. Елементарне операційне вимислительних машинах. К., 1966 [Бібліогр. с. 299-301]. В. М. Новалі.

## ЛІЧІЛЬНО-РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ — див. Розв'язувальний пристрій

ЛОГІКА БАГАТОЗНАЧНА — галузь математики, яка вивчає властивості функцій, значеннями яких, як і значеннями їхніх аргументів, є елементи з заданої множини, сімейств і алгебр таких функцій, у яких роль операцій виконують операції суперпозиції й деякі їхні аналоги. Іноді предмет Л. б. розширюють, включаючи в неї різні логіч. числення. Нижче термін Л. б. розумітимемо без такого включення. Л. б. посідає проміжне місце між логікою

математичною, алгеброю і теор. кібернетикою. Спочатку Л. б. використовувалася для вивчення логік, числень (числення висловлювань і предикатів), у яких висловлюванням надавали будь-яку скінченну (більшу за 1) і шоді нескінченну множини значень істинності. Це давало змогу, крім загальних, розглядати й спец. задачі матем. логіки, пов'язані з оцінкою міри істинності модальних висловлювань та висловлювань, у яких не зазначено час і місце подій, і т. п. Історично першими системами Л. б. виявилися двозначні числення Дж. Буля (середина 19 ст.), пізніше оформлені зусиллями англ. логіка Б. Рассела (1872—1971), нім. логіка Д. Гільберта (1862—1943), амер. математика Е. Поста (1897—1954) та ін. у двозначну логіку (див. *Алгебра логіки*) трізначна логіка Лукасевича (1924) і  $k$ -значна логіка Е. Поста (1921). Одночасно Пост запропонував розглядати Л. б. як алгебри і встановив цілий ряд істотних властивостей цих алгебр. Відтоді Л. б. стала важливим об'єктом алгебри. Згодом (у 30—40-х роках 20 ст.) в процесі розвитку кібернетики в'ясувалося велике прикладне значення Л. б. Було встановлено, що мова Л. б. адекватна для описування функціонування складних електр. схем, і це стало новим поштовхом до її розвитку. Проміжне положення Л. б. відіграло велику роль у її формуванні й розвитку, бо забезпечило постановку нових задач і потребувало розробки нових методів для розв'язання їх.

Ось яку концепцію, що узагальнює побудову алгебри логіки, покладено в основу побудови Л. б. Виходять з деяких висловлювань, істинність значень яких градуйована й утворює якусь множину  $E$ . Абстрагуючись від змісту цих висловлювань, цікавляться насамперед їхніми значеннями щодо істинності, й це дає змогу поділити всі вихідні висловлювання на групи, які відповідають одному й тому значенню істинності. Ці значення, а також змінні з алфавіту  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , які приймають як значення вказані величини, наважуються елементарними висловлюваннями (константами і змінними відповідно). За аналогією з логікою суджень вводять деякі відношення над елементарними висловлюваннями, точніше функції, що, як і їхні аргументи, приймають як значення константи й відповідають різним логічним зв'язкам над висловлюваннями. Ці функції, що утворюють множину  $M$ , наз. елементарними. Множина  $M$  є підмножиною множини  $P_E$  всіх т. з.  $E$ -значної логіки, тобто функцій, які залежать від змінних з алфавіту  $X$  і набувають значення з  $E$  (тут через  $E$  позначено потужність  $E$ ). Потім вводять поняття формули, яке відповідає змістовому представленню складного висловлювання, побудованого з вихідних висловлювань. Ф-ли будуть з позначень (елементарних ф-л) виду  $f(x_1, \dots, x_n)$  елементарних ф-цій з  $M$  за правилами підстановки ф-цій однієї в одну замість деяких змінних і шляхом підстановки змінних з  $X$  замість змін-

них розглядуваних ф-цій (операції суперпозиції). В результаті одержуємо множину  $\langle M \rangle$  усіх ф-л над  $M$ . Змістові складні висловлювання під час фіксації в них значень істинності вихідних висловлювань також набувають значення істинності з  $E$ . Ці значення визначаються структурою складного висловлювання і логічними зв'язками, що входять до нього. Тим самим кожне складне висловлювання визначає якусь ф-цію  $E$  значної логіки (похідну зв'язку). Формально кожній ф-лі приписується ф-ція з  $P_E$  (суперпозиція над  $M$ ), яка є ф-цією, що звичайно визначається цією ф-лою. Кажуть також, що ф-ла реалізує приписану їй ф-цію. Всі суперпозиції над  $M$  утворюють множину  $[M] \subseteq P_E$ , яку наз. замиканням множини  $M$ . З погляду змісту побудова Л. б. завершується виконанням множини логіч. зв'язок, складних висловлювань і похідних зв'язок. За аналогією з цим і формально задавання Л. б. (точніше:  $E$ -значної логіки) буде еквівалентним задаванню множин  $M$ ,  $\langle M \rangle$  і  $[M]$ . Кажуть також, що Л. б. породжується множиною  $M$ . Цю модель, що відіграє важливу роль у матем. логіці й теор. кібернетичі, наз. формулою. Своєрідність підходу теор. кібернетики до Л. б. полягає в розгляді Л. б. як керуючої системи. Елементарні ф-ли при цьому відіграють роль елементів, що виконують повні операції, а ф-ли інтерпретуються як схеми, побудовані з елементів, і як такі, що здійснюють переробку вхідної інформації на вихідну. Такого роду керуючі системи, відомі в кібернетичі як схеми з функціональних елементів, відіграють фундаментальну роль у теор. і практ. вивченнях кібернетики.

Існує кілька загальних проблем Л. б., тішаних з позицій матем. логіки й алгебри та в позицій кібернетики. До них належать, наприклад, питання про включення  $M_2 \subseteq [M_1]$  при заданих  $M_1, M_2 \subseteq P_E$  (задача про виразність) і про вказівку множини всіх ф-л з  $\langle M_1 \rangle$ , що реалізують ф-ції з  $M_2$  при  $M_2 \subset [M_1]$  (задача про описування). Окремим випадком задачі про описування є важливе питання матем. логіки про вказівку всіх ф-л, які реалізують задану константу, а це, наприклад, є еквівалентним для числення висловлювань побудові всіх тотожно істинних або відповідно тотожно хибних висловлювань. Проміжним питанням між матем. логікою й алгеброю, яка примикає до задачі про описування, є задача про тотожні перетворення. В ній при заданій множині  $M$  потрібно виділити в якійсь розумній найпростішій підмножині пар рівних (тобто таких, що реалізують одну й ту саму ф-цію) ф-л з  $\langle M \rangle$ , яка дає змогу шляхом підстановки виділених рівних ф-л одної замість одної одержати з будь-якої ф-ли всі ф-ли, рівні їй. Аналогічне місце посідає одне з найважливіших питань Л. б. — т. з. проблема повноти, яка полягає в зазначенні всіх підмножин  $M_1$  задавої замкненої, тобто такої, що збігається зі своїм замиканням, множини  $M_2$ , таких, що

$[M_1] = M_2$ . До неї примикає задача про бязи, яка полягає в зазначенні всіх повних  $M_2$  підмножин  $M_1$ , жодна з яких підмножина яких уже не є повною. Глобальною задачею для Л. б. є задача про побудову структури замкнених множин у даній Л. б. і з'ясування її різних властивостей. Характерне для теорії керуючих систем питання про складність цих систем, природно, можна поставити й щодо ф-л і ф-цій з Л. б. При такому підході типовою є така задача про складність реалізації. На множині всіх елементарних ф-л певним способом вводять числову міру (складність ф-л), яку потім поширюють на множини всіх ф-л, наприклад, шляхом підсумовування мір усіх тих елементарних ф-л, які беруть участь у побудові заданої ф-л. Для заданої ф-ції треба вказати ту ф-лу (найпростішу ф-лу), яка реалізує цю ф-цію й має найменшу складність, а також в'ясувати, як де складність залежить від деяких властивостей розглядуваної ф-ції. Досліджують різні узагальнення цієї задачі. Широке коло питань, пов'язане з реалізацією ф-цій ф-лами з наперед заданими властивостями, в певному розумінні примикає до вже розглянутого питання про складність реалізації. Тут насамперед слід назвати задачу про реалізацію ф-цій алгебри логіки *двухзначними* чи *нормальними формами* і пов'язану з цим т. в. задачу мінімізації, а також узагальнення цієї задачі на ф-ції  $k$ -значної логіки при  $k > 2$ . Сюди ж належать задачі про реалізацію ф-цій ф-лами в певному розумінні обмеженої глибини, коли ланцюжок підставляваних одна в одну виділених елементарних ф-л не може перевищувати певної константи, в де за відповідної інтерпретації може бути пов'язане з надійністю або швидкістю обчислення ф-ції ф-лами, задачі про декомпозицію, тобто про реалізацію ф-ції від  $n$  змінних за допомогою ф-л, побудованих з елементарних ф-л, що реалізують ф-ції, залежні не менш, як від  $n$  змінних, і ряд інших.

Розглядаючи ряд задач і в тому числі про виразність, про повноту, про описування структури замкнених класів та інші, де на перший план висуваються відповідності типу множини  $M$  та її замикання  $[M]$  і затушовується інша роль ф-л над  $M$ , крім їхньої здатності породжувати нові ф-ції, часто переходять до іншої моделі Л. б. (термальної), в якій множини  $(M)$  замінюються множиною термів, що являють собою ті самі ф-ли, але побудовані не з імен індивідуальних ф-цій, а з узагальнених (змінних) імен ф-цій, а фіксуються для даного змінного імені аргументи. Ці терми фактично відіграють роль часткових операторів над множиною  $M$ . Наступний крок на цьому шляху, що в певному розумінні спрощує шойно введenu термальну модель, веде до розгляду Л. б. як алгебри. Найбільше жвавою є алгебра, яку запровадив рад. математик А. І. Мальцев (1909—88). Ця алгебра будується так. Спочатку уточнюють будову множини  $P_E$  припущенням про те, що кожна ф-ція  $f$  з урахуванням фіктивних змінних залежить

від змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , де  $n$  залежить від  $f$ . Потім визначають п'ять операцій  $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \circ$ . Перші чотири з них є унарними й фактично діють на множині індексів змінних ф-цій  $f(x_1, \dots, x_n)$  таким чином:

$$(\zeta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

$$(\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}).$$

При цьому для одноісної ф-ції вважають  $\zeta = \tau = \Delta = f$ . Операція  $\circ$  бінарна, де одночасно на індексах змінних розглядуваної пари ф-цій  $f(x_1, \dots, x_n)$  і  $g(x_1, \dots, x_m)$  і на саму пару, ставлячи їй у відповідність ф-цію  $(f \circ g)(x_1, x_2, \dots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{n+m-1})$ . Таким чином приходять до алгебри  $M_E = \langle M, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \circ \rangle$ , яку часто і вважають основною моделлю  $|E|$ -значної логіки (операторна модель) і називають алгеброю  $|E|$ -значної логіки. Крім перелічених задач, для цієї моделі характерна й задача про представлення, яка полягає в описуванні всіх підалгебр  $|E|$ -значної логіки, ізоморфних алгебри  $E_n$  значної логіки. Побудовані з операторів алгебри  $M_E$  після зазначення ф-цій, до яких їх застосовують, фактично легко можна інтерпретувати як ф-ли у формульній моделі Л. б. і тим самим значення формульній моделі Л. б., а також розгляд усіх агаданих вище задач можна здійснювати на алгебрі  $M_E$ . Слід відзначити, що всі загальні задачі для Л. б. набувають особливого змісту й значимості після відповідного уточнення постановок їх і розглядуваних моделей Л. б. і уточнення, що в загальному випадку вони, природно, мало оглядні. До найважливіших прикладів Л. б. можна віднести алгебри  $P_E = \langle P_E; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \circ \rangle$  при  $|E| = k, 2 \leq k < \aleph_0$ , і при  $|E| = \aleph_0$ , серед яких найдокладніше досліджено випадок  $k = 2$ . Найважливішим результатом тут є повний опис Е. Поста структури всіх підалгебр. Множина всіх підалгебр виявилася лічбовою, кожна підалгебра будується ефективно, ефективно й зазначається включення їх одна в одну. Е. Пост показав також, що в будь-якій підалгебрі є скінченний базис, і число ф-цій у ньому не перевищує чотирьох. З цих результатів легко можна одержати й розв'язання згаданих задач про виразність, про повноту і про базис. На основі результатів Е. Поста амер. логік Р. Ліндон розв'язав задачу про тотожність перетворення. Значно удосконалено для цієї алгебри й розв'язування задачі про складність реалізації. Щодо повних скінченних систем, то рад. математик О. Б. Лупанов (н. 1932) для майже всіх ф-цій указав певдинку міри складності «найпростіших» ф-л, які реалізують ці ф-ції, й побудував відповідний алгоритм синтезу ф-л. Значно удосконалено розв'язування задач про

побудову оптимальних за складністю ф-л, що реалізують ф-ції надійно або досить добре за швидкодією. Разом слід відзначити, що в зазначеному напрямі щодо сімейств ф-цій, які становлять незначну частку від усіх ф-цій, а також щодо індивідуальних ф-цій заг. теорія поки що є далекою від завершення. Досягнуто зрушень і в розв'язанні інших в уже згаданих вище задач. Слід підкреслити особливість випадку  $k = 2$ , з якою пов'язана пильна увага до цієї задачі з боку дослідників. Ця особливість полягає у відомому сполученні простоти розглядуваної алгебри з можливістю моделювати за її допомогою різні об'єкти, зокрема й шляхом відповідного кодування ф-ції й алгебри  $k$ -значних логік при  $k > 2$ , правда, одержувалі при цьому алгебри, які в декартових ступенях підальгобрі алгебри  $\mathcal{P}_k$ ,  $k = 2$ , природно, вже не матимуть такого набору операцій, як в алгебрах  $k$ -значних логік.

Менш глибоко досліджено алгебри скінченновзначних логік (при  $3 \leq k < \aleph_0$ ). Задачу про виразність остаточно розв'язано лише для скінчених систем  $M_1$  і  $M_2$ , при цьому визначено алгоритм розв'язування її. Найближчі розроблено питання, пов'язані з задачами про повноту, про представлення та базиси. Тут для  $\mathcal{P}_k$  слід назвати насамперед ефективне описування всіх максим. підальгобр, континуальності множини підальгобр та існування підальгобр, які мають базис будь-якої скінченної й лічбової потужності, й таких, які зовсім не мають базисів, а це свідчить про істотну відмінність випадків, коли  $k = 2$  і  $k > 2$ ; асимптотичні оцінки числа максим. підальгобр і числа т. з. простих базисів в  $\mathcal{P}_k$ , тобто таких, які втрачають властивість повноти після ототожнення будь-якої пари змінних у будь-якій з ф-цій цього базису, а також розв'язання А. І. Мальцевим задачі про представлення для алгебр  $\mathcal{P}_k$  і  $\mathcal{P}_k$ . В галузі оцінок складностей формул деякі принципові теореми, наприклад, про порядок складності найпростіших ф-л для майже всіх функцій можна поширити з випадку  $k = 2$  й на випадок довільного натурального  $k$ , однак такої самої глибокої теорії, як і в випадку  $k = 2$  тут не одержано. Її певні результати й у задачі про мінімізацію.

Менш досліджено й алгебру  $\aleph_0$ -значної логіки. Тут можна виділити для встановлення гіперконтинуальності множини максим. підальгобр і одержання деяких критеріїв повноти в припущенні, що розглядувані системи мають ряд наперед заданих властивостей, наприклад, мають усі одномісні ф-ції і т. п. Помітне місце в проблематиці Л. б. посідають питання дослідження спец. замкнених класів ф-цій Л. б., які становлять інтерес насамперед у зв'язку з питаннями інтерпретації різних логік. числень. Тут слід назвати ще згадану тризначну логіку Лукасевича, яку породжують ф-ції  $1 - x$ ,  $\min(1, 1 - x_1 + x_2)$ , де  $x_1, x_2$  приймають як значення 0,  $1/2$ , 1,  $k$ -значну логіку Поста, породжену ф-ціями

$x_1 + 1 \pmod k$  і  $\max(x_1, x_2)$ , де  $x_1, x_2$  набувають значень 0,  $1, \dots, k-1$ , а також Л. б., що відповідають матрицям Ст. Яськовського, М. Т. Мак Нотона та ін. Ці дослідження становлять інтерес і з погляду нагромадження фактів для побудови заг. теорії Л. б., і для встановлення за їхньою допомогою деяких нових властивостей інтерпретовуваних логік. числень.

Як зазначалося, до Л. б. можна віднести й такі алгебри функцій  $|E|$ -значних логік, у яких запас операцій дещо відрізняється від описаного вище. Як правило, це досягається або звуженням зазначеного запаса, або введенням до числа операцій деяких ф-цій розглядуваної алгебри. Її інші змістові задачі, які ведуть до нестандартних моделей Л. б. Найчастіше ці задачі пов'язані з виділенням спец. допустимих класів формул з  $\langle M \rangle$ , зазначення яких веде до певних часткових алгебр Л. б.

Лит. Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 54, Журавлев Ю. И. Термито-множественные методы в алгебре логики, «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу упрощенных систем — принципе локального кодирования «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, Гаврилов Г. П. О функциональной логике в сверхзначной логике «Проблемы кибернетики», 1965, в. 15, Яблонский С. В. Лаврилов Л. П., Бударяков В. Л. Функции алгебры логики и классы Поста М., 1956 (библиогр. с. 113—115), Мальцев А. И. Исследование алгебр и многообразия Поста. «Алгебра и логика», 1966, т. 5, в. 2, Novemborg I. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken «Нашправу Чехословенскé Akademie Vědy», 1970, т. 80, в. 4.

В. В. Кубриченко.  
ЛОГІКА КОНСТРУКТИВІА — розділ логіки математичної, що вивчає логічні аспекти конструктивної математики. Задачі Л. к. поділяють на дві групи. До першої групи належить: побудова формалізованих мов конструктивної математики, строгіші характеристики поняття істинної ф-л і побудова формальних апаратів логічного виведення для кожної з таких мов; до другої — вивчення класу конструктивних істинних ф-л і формального апарату логічного виведення конструктивної математики матем. методами. Задачі першої групи розв'язують на основі аналізу методів доведення, які складаються в процесі становлення й розвитку конструктивної математики (див. *Доведення теорії*). Характерні особливості формалізованих мов, поняття істинної ф-л і дедуктивних апаратів, що їх вивчають у Л. к., визначаються особливостями конструктивної математики, зокрема принципом, згідно з яким твердження про існування матем. об'єкта, що задовольняє якусь умову, вважають обґрунтованим лише тоді, коли вказано спосіб побудови такого об'єкта (див. *Конструктивний напрям у математиці*). Серед формалізованих мов, що їх розглядають у Л. к., розрізняють мови логіко-математичні й логічні. Ф-ла логіко-матем. мови відповідає лише одному судженню з якоїсь галузі конструктивної математики, а ф-ла логічної мови — цілому класови матем. су-

джень в однаковому логічному структурою (не зумовлено, напр., тим, що в таких формулах є змінні для суджень або предикатів). Найважливіші логіко-матем. мови — це логіко-арифм. мова, мови, які містять змінні для слів та алгоритмів, і мови з підпорядкованими змінними. Логічними мовами, які вивчають у Л. к., можуть бути, напр., мови числення висловлювань і числення предикатів.

Для схожих мов пропонували з деяких випадків нееквівалентні визначення поняття істинної ф-ли, і це свідчить про існування різних варіантів конструктивної математики. Найістотніші розходження між різними варіантами існують у поглядах на прийнятність тези Черча й принципу конструктивного підбору, що його висунув рад. математик А. А. Марков (п. 1903). Цей принцип полягає ось у чому. Якщо для властивості  $P$  натуральних чисел є алгоритм, який з'ясовує для всякого натурального числа  $n$ , чи має  $n$  властивість  $P$ , і якщо спростовано припущення про те, що жодне число цієї властивості не має, то існує натуральне число  $a$  з властивістю  $P$ .

Як обґрунтування сумісності цього принципу з осн. вимогою до доведень існування в конструктивній математиці, А. А. Марков вказує, що в описаній ситуації можна знайти число  $n$  з властивістю  $P$ , перебираючи натуральні числа (починаючи від нуля в порядку зростання їх) і перевіряючи для кожного розгляданого числа  $n$ , чи є в нього властивість  $P$ .

Одне з можливих визначень поняття конструктивної істинності формул логіко-арифм. мови ґрунтується на понятті рекурсивної реалізованості. Іздуцією за кількістю входжень логічних знаків у ф-лу  $P$  визначають відношення «натуральне число  $n$  реалізує ф-лу  $P$ ». За визначенням, напр., число  $n$  реалізує ф-лу  $A \vee B$ , якщо  $n$  є номером (у певному фіксованому упорядкуванні пар натуральних чисел) пари, перший член якої  $a$  є 0 або 1, а другий член  $b$  — числом, яке реалізує ф-лу  $A$  (якщо  $a = 0$ ) і ф-лу  $B$  (якщо  $a = 1$ ); число  $n$  реалізує ф-лу  $\forall x A(x)$ , якщо  $n$  — номер загальнонорекурсивної ф-ції  $\phi$ , такої, що для будь-якого  $k$  число  $\phi(k)$  реалізує ф-лу  $A(k)$ . Приймаючи тезу Черча, арифм. ф-лу вважати істинною тоді, коли є число, що її реалізує. Напр., ф-ла  $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$  може бути реалізована тоді і тільки тоді, коли існує алгоритм розпізнавання числа  $x$  з властивості  $P$ . Другим засобом характеристики поняття конструктивної істинної ф-ли є зазначення алгоритму, який переробляє довільну ф-лу на ф-лу якогось простого типу або на ф-лу простішої мови, ф-лу, що її розглядають як «роз'яснення» або «розшифрування» вихідної ф-ли. Таким є алгоритм виявлення конструктивної задачі, цей алгоритм переводить довільну ф-лу мови (по суті еквівалентної логіко-арифметичній мові), яка дає змогу формулювати судження про слова й алгоритми, в ф-лу виду  $\exists x_1 \dots x_n A$ , де  $A$  не містить знаків  $\vee$ ,  $\exists$ , або в ф-лу, в якій взагалі немає

цих знаків. В основу цього алгоритму покладено ідею, близьку до ідеї реалізованості, тезу Черча й принцип Маркова. Описано ще й алгоритм, які усувають у ф-лі підпорядковані змінні. Умовою істинності ф-ли логічної мови природно вважати істинність усіх ф-л певної логіко-матем. мови, що мають ту саму логіч. структуру. Таке, напр., поняття реалізованості ф-л числення висловлювань.

Дедуктивні системи Л. к. часто одержують з відповідних класичних систем, відкидаючи неприйнятні аксіоми, схеми аксіом або правила виведення, найчастіше — *виключеного третього закону* або закон подвійного заперечення. Так одержують конструктивне числення висловлювань, конструктивне числення предикатів і конструктивну арифметику. Ці системи можна розширити, напр., приєднуючи до них такі істинні конструктивно, але не класично, аксіоми, як формула  $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists / \forall x P(x, f(x))$ , де  $x, y$  — змінні для натуральних чисел,  $f$  — змінна для загальнонорекурсивних ф-цій.

Одним з осн. завдань Л. к. є дослідження коректності й повноти апаратів логіки, виведення (відносно того чи іншого визначення поняття конструктивно істинної ф-ли), тобто дослідження того, чи всяка ф-ла, яку можна довести, істинна (коректність) і чи всяку істинну ф-лу можна довести (повнота). З теорем про коректність для арифметики (всяку ф-лу логіко-арифм. мови, яку можна довести в конструктивній арифметиці, можна реалізувати) випливає реалізованість кожної пропозиційної ф-ли, яку можна довести в конструктивному численні висловлювань. *Гедола теорема про неповноту* справджується не лише для класичних, а й для конструктивних логіко-матем. числень, так що для всіх достатньо близьких логіко-матем. мов конструктивної математики не можна вказати повні апарати логік виведення. Питання про повноту важливих логічних числень у класичній логіці й у Л. к. розв'язують по-різному. Так, у класичній логіці числення висловлювань і числення предикатів будуть повними, а в конструктивному численні висловлювань існують реалізовані пропозиційні ф-ли, які з німому не можна довести. До завдань Л. к. входить ще дослідження логічних числень поза зв'язком з поняттям істинної ф-ли, зокрема, дослідження проблеми розв'язності, відшукування класів ф-л, для яких довідність у конструктивному численні еквівалентна довідності у відповідному класичному численні, побудова операцій закрючування з конструктивних числень у класичні та з класичних у конструктивні, побудова числень, пристосованих для пошуку логічного виведення і алгоритмів пошуку логічного виведення (див. *Генцена формальні системи*).

Значення Л. к. для розвитку конструктивної математики полягає в тому, що за допомогою понять і теорем Л. к. можна пояснювати конструктивне розуміння матем. суджень, досліджувати, наскільки глибокі відмінності

між конкретними теоріями конструктивної математики й відповідними класичними теоріями та між різними варіантами теорій конструктивної математики.

Лит. Шаєв Н. А. О конструктивном понимании математических суждений. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 52. Марков А. А. О конструктивной математике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1962, т. 67. Издальсон А. Я. Исчисления конструктивной логики с подчиненными переменными. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1964, т. 72. Шаєв Н. А. О рекурсивном математическом анализе и исчислениях арифметических отношений. Р. Л. Гузетейна. В кн. Гузетейна Р. Л. Рекурсивный математический анализ. Пер с англ. М., 1970. Kleene S. S. Introduction to metamathematics. New York Toronto, 1952. В. О. Лифшиц

**ЛОГІКА МАЖОРИТАРНА** — розділ структурної теорії автоматів, у якому розглядаються властивості мажоритарного базису та способи представлення в ньому логічних функцій. Мажоритарний базис складається з мажоритарної операції

$$\text{maj}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} a_0, & \text{коли } \sum_{i=1}^n x_i \geq a_0; \\ \sum_{j=1}^n x_j, & \text{коли } -a_1 < \sum_{i=1}^n x_i < a_0; \\ -a_1, & \text{коли } \sum_{i=1}^n x_i \leq -a_1 \end{cases}$$

де  $x_i$  — цілі числа,  $x_i \in \{-a_1, a_0\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  — непарне),  $a_0, a_1 > 0$ , операція діаметрального заперечення  $\bar{x} = a_1 - x$  (множина значень  $x$  повинна бути інваріантною відносно цієї операції) та констант  $\pm 1$ . Мажоритарний базис являє собою функціонально повну систему елементарних операторів при будь-якому непарному  $n \geq 3$ . Будь-яку логіч. функцію можна представити в мажоритарному базисі (з довільно-мисцевою мажоритарною операцією) за допомогою розкладання ф-цій за змінними, що відповідає каскадній побудові сітки (див. *Каскадні методи*), яка реалізує цю ф-цію. Мінімізація ф-цій у цьому разі зводиться до відповідного вибору способу та порядку виключення змінних. До економічності реалізації, як правило, приводять методи функціональної декомпозиції в мажоритарному базисі, коли образом декомпозиції є мажоритарна операція, а до складових декомпозиції ставлять кілька вимок, пов'язаних з простою реалізацією цих ф-цій. Розв'язування задачі декомпозиції зводиться до розв'язування систем логіч. рівнянь у мажоритарному базисі. Найбільшого розвитку методи Л. м. набули для тримісної мажоритарної операції у дво-значній логіці ( $a_1 = a_0 = 1$ ;  $x_i = -1, 1$ ;  $n = 3$ ).

Лит. Варшавський В. И. Мажоритарная логика. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 9; Варшавський В. И. Мажоритарная операция в многозначной логике. «Кибернетика», 1969, № 2; Овсисявич Б. Л., Розенблюм Л. И. Проектирование вычислительных и управляющих схем на мажоритарных элементах. Л., 1969 (библиогр. с. 34—35). Coon M., Lindeman H. Axiomatic majority-decision logic. «IRE transactions on electronic computers», 1961, v. EC-10, № 1.

В. Л. Овсисявич

**ЛОГІКА МАТЕМАТИЧНА**, формальна логіка — дедуктивна математична теорія, яка досліджує схеми або форми завжди істинних висловлювань, тобто схеми висловлювань, істинних для довільних сукупностей об'єктів. Вона тісно пов'язана з традиційною логікою, тобто наукою про побудову правильних умовиводів: кожній теоремі Л. м., яка містить певні умови, однозначно відповідає схема правильного умовиводу. Л. м. є основою сучас. логіки, поза її рамками лишається тільки небагато напрямів: індуктивна логіка, діалектична логіка. До Л. м. в широкому розумінні, крім власне логіч. числень, відносять деякі матем. науки, які виникли під впливом запиту логіки, такі, як *моделі теорії, алгоритмія теорії*, різні алгебри, що виникали при дослідженні логіч. конструкцій, та ін. До Л. м. відносять і конкретні дослідження різних наук, теорій, що їх проводять з метою з'ясувати їхню логіч. несуперечливість і дедуктивні можливості, напр., дослідження питань основ математики, логіч. дослідження мов тощо. Деякі з цих теорій тісно пов'язані з Л. м., інші відокремилися від неї й набули самостійного значення (напр., *булеві алгебри*), так що цітно окреслити границі Л. м. досить важко. У вузькому розумінні термін «Л. м.» означає науку, об'єктами вивчення якої є математика та інші дедуктивні системи, точніше логіч. слухаєть висновків і конструкцій, що розглядають у них, тобто цей термін відносять до логіки, яка розвивається відповідно до потреб математики. Її назв. також метаматематикою, або *металогікою*.

Логіка — наука про побудову правильних умовиводів суто формальним шляхом, коли виходять з вигляду засновків, а не їхнього змісту, має багатовікову історію. Досить велику частину формальної логіки викладено у вигляді фігур силлогізмів (див. *Силлогістика*) в працях Арістотеля. В такому вигляді формальна логіка розвивалася до середини 19 ст. Її розробляли як один з напрямів філософії, але помітного практичного застосування вона не набула.

В середині 19 ст. здійснено спроби зобразити логіку у вигляді алгебр. системи й вивчати її тими самими методами, що й інші розділи математики. Цей напрям, у розробці якого перші успішні кроки зробив англ. математик Дж. Буль (1815—64), виявився надзвичайно плідним. Тепер *алгебра логіки* відіграє важливу теор. і практичну роль. Дещо пізніше здійснено спроби знайти в логіці обґрунтування математики. Перші роботи в цьому напрямі належать нім. логікові Г. Фреге

(1848—1925), вгл. ученим А. Уайтхеда (1861—1947) та Б. Расселу (1872—1971). А. Уайтхед і Б. Рассел розробили теорію типів, відшукавши відомі антиномії теорії множин, у т. ч. й від антиномії Рассела, яка є в системі Фреге. У працях Фреге, Уайтхеда й Рассела розроблено логіку предикатів, причому в роботах Уайтхеда й Рассела вона тісно переплетена з теорією типів. Великий внесок у розвиток сучасної Л. м. зробив німецький математик Д. Гільберт (1882—1943). Хоч висунути ним програму обґрунтування математики виявилася неслухняною (див. *Формалізм у математиці*), *Гедель теорема про неможливість*, проте при спробі здійснити її було значною мірою розроблено проблеми логіки. Зокрема, Д. Гільберт виділив числення предикатів як систему, не залежну від теорії типів. Дальший розвиток Л. м. був пов'язаний, в основному, з запитом математики. Великі заслуги тут належать австр. математикові К. Геделю (нар. 1906), вмер. математикові А. Черчу (нар. 1903) рад. математикові А. І. Мальцеву (1908—68), амер. математику А. Тарському (нар. 1902) та ін.

Основою сучасної Л. м. становлять числення висловлювань і числення предикатів. Перше оперує висловлюваннями (твердженнями), які виступають як єдине ціле, не розглядаючи їхньої суб'єктно-предикатної структури. Складні висловлювання утворюються з простіших за допомогою логіч. зв'язок. У численні висловлювань використовують не конкретні висловлювання, а висловлювальні змінні, тому тут вивчають не конкретні висловлювання, а висловлювальні функції, які перетворюються на висловлювання, коли всі висловлювальні змінні, які входять до них, замінити висловлюваннями. Істинність чи хибність одержаного складного висловлювання залежить тільки від істинності чи хибності складових висловлювань і не залежить від їхнього змісту. Вивчення цього числення як алгебр. системи становить предмет алгебри логіки.

Усі поняття й теореми числення висловлювань використовують у ширшій логіч. теорії, що її наз. численням предикатів, у якому, на відміну від числення висловлювань, розглядають внаслідок простих висловлювань що з них потім утворюють складні висловлювання. А саме: у висловлюваннях виділяють підмет і присудок (предикат). Якщо в даному реченні виділяти підмет і на його місце підставити інший підмет, одержимо інше висловлювання. Таким чином, присудок (предикат) являє собою висловлювальну форму, являючи на множині об'єктів, які можуть виступати як підмети. Мова числення предикатів набагато виразніша, ніж мова числення висловлювань, за її допомогою вдається виразити значні фрагменти математики (див. *Елементарні теорії*).

Галузь застосування Л. м. розширюється. Л. м., крім вивчення побудови правильних міркувань у звичайній мові, займається аналізом осн. понять у науці (зокрема, в мате-

тиці). Для цього вона залучає поняття *механізм теорії* або *арифметизм*. Таким чином Л. м. набула широкого застосування в методології науки. Новою і дуже перспективною галуззю застосування Л. м. є *кібернетика*. Кібернетика не тільки використовує результати, одержані раніше в Л. м., а й стимулює нові дослідження та появу нових наук, зокрема. Напр., зв'язок між релейно-контактними схемами та формулами алгебри логіки стимулював розвиток алгебри логіки. Питання познати функції алгебри логіки, їхньої декомпозиції та мінімізації розроблено завдяки пошуковим методам синтезу оптим. схем.

Л. м. широко застосовували і в *автоматичній теорії*, зокрема для того, щоб описувати функціонування автоматів, щоб задавати умови функціонування автоматів, щоб вивчати їхню обчисл. здатність (див. *Міри складності в теорії автоматів*). Перспективним напрямом кібернетики є дослідження можливостей застосовувати машини для доведення теорем (див. *Автоматизований пошук доведень теорем*, *Доведення теорем на ЕОМ*).

Розвиток таких напрямів, як теорія зв'язків, автоматизація діагностики тощо вимагає розробки відповідних логіч. систем у рамках *логік неklasичних*. Важливі роботи проводять в області логіч. дослідження природних та штучних мов (див. *Лінгвістична математика*, *Мови програмування*).  
Лит.: Труды Математического института им. П. А. Стеклова АН СССР. 1958, т. 51, Гладушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1984 (Бібліогр. с. 319—322). Менделеев Э. Введение в математическую логику. Пер. с англ. М., 1971 (Бібліогр. с. 296—300). Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York—Toronto, 1952.

В. М. Гайдуков, М. І. Крижко

**ЛОГІКА МІНІМАЛЬНА** — те саме, що й *числення висловлювань мінімальне*.

**ЛОГІКА ПОРОГОВА** — розділ *структурної теорії автоматів*, у якому розглядаються питання аналізу й синтезу логічних схем з порогових елементів. Пороговий елемент можна визначити: ф-цією перетворення входів  $f(X)$ , областю визначення якої є булевий  $n$ -вимірний простір, а областю значень — множина дійсних чисел  $N$ ; упорядковану послідовність дійсних чисел  $T_1 > T_2 > \dots > T_k$ , що їх називають порогоми; початковою константою  $a \in \{0, 1\}$ . Закон функціонування порогового елемента можна описати *булевою функцією*  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що набуває значення  $a$  для всіх наборів  $\alpha$ , при яких  $T_1 < \varphi(\alpha) < T_{k+1}$ , де  $i \equiv 0 \bmod 2$  або  $i + 1 \equiv i \bmod 2$ , і набуває значення  $a$  для решти наборів. Розрізняють одно-, дво- і  $k$ -порогові елементи. Вид функціоналу перетворення входів і вид решти параметрів привів до різних моделей порогових елементів, з яких найхарактернішими є лінійні однопорогові елементи (ЛПЕ) з функціоналом перетворення входів  $f(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i + a$  з початковою константою  $a = 0$ . У цьому функціоналі кон-



станти  $w_i$  належать множині дійсних чисел; ці константи наз. вагами порогового елемента. ЛПЕ можна охарактеризувати вектором  $(w_1, w_2, \dots, w_n, T)$ , який наз. структурою ЛПЕ. Булеву ф-цію  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що для неї є структура ЛПЕ, який реалізує  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , наз. пороговою. Факт реалізації порогової функції  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ЛПЕ  $(w_1, w_2, \dots, w_n, T)$  фіксується так:  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (w_1, w_2, \dots, w_n, T)$ . Не всі булеві ф-ції є пороговими. Порогові ф-ції однорідні й повністю монотонні. Монотонну порогову ф-цію  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яку реалізують на ЛПЕ  $(w_1, w_2, \dots, w_n, T)$  з цілими додатними вагами й порогом, можна одержати з монотонної симетричної ф-ції  $C_T(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n_1}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,n_2}, \dots, x_{n,n_2}, w_n)$ , об'єднавши змінні з однаковим  $i$ -м індексом.

Найважливішими задачами Л. п. є задача аналізу й синтезу логічних схем з порогових елементів. Задача аналізу логічних схем з порогових елементів зводиться до визначення булевої функції за структурою ЛПЕ або за структурою сітки, що її реалізує. Задачу аналізування порогової ф-ції за структурою ЛПЕ наз. задачею аналізу порогового елемента.

Задача синтезу логічних схем з порогових елементів має такі осн. постановки: 1) визначення відповідно до обраного критерію опт. структури ЛПЕ для реалізації заданої порогової ф-ції; 2) побудова з порогових елементів сітки логічної, яка реалізує довільну булеву ф-цію, коли немає обмежень, накладуваних на параметри порогових елементів сітки; 3) побудова з порогових елементів логічної сітки, яка реалізує довільну булеву ф-цію, коли є обмеження, накладувані на параметри порогових елементів сітки. Найбільше розроблено задачу в 1-й постановці. Її зводять до розв'язування такої системи нерівностей

$$\sum_{i=1}^n w_i \alpha_{ij} > T \text{ при } \varphi(\bar{\alpha}_j) = 1;$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \alpha_{ij} \leq T \text{ при } \varphi(\bar{\alpha}_j) = 0,$$

де  $\alpha_{ij}$  — значення аргументу  $x_i$  на наборі  $n$  номером  $j$ ;  $\varphi(\bar{\alpha}_j)$  — значення булевої ф-ції  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на наборі аргументів  $\bar{\alpha}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ . Найбільший практичний інтерес становить задача відшукування такого розв'язку системи нерівностей, коли лінійна

форма  $R = T + \sum_{i=1}^n w_i$  досягає мінімуму

Особливістю другої постановки є наявність широкого нерегулярного базису. Як правило, розв'язок цієї задачі одержують стосовно до фіксованої структури сітки, напр., для однорядної, порогово-диз'юнктивної, порогово-кон'юнктивної тощо. При 3-й постановці задачі синтезу враховують характеристики

фіз. пристроїв, описуваних моделлю порогового елемента. Накладання деяких обмежень на параметри порогових елементів може привести до класичних постановок задачі синтезу, наприклад, до синтезу в базисі «І», «АБО», «НЕ» чи синтезу в мажоритарному базисі.

Оскільки система порогових елементів є функціонально розною, за допомогою логічної сітки з порогових елементів можна реалізувати будь-яку булеву ф-цію. Задача синтезу сітки з порогових елементів має неоднозначний розв'язок, тому при синтезі сітки вводять певні критерії якості складності сітки, її швидкодію, надійність тощо.

Лит. Равилов В. Н. [та ін.], Синтез схем на порогових елементах М. 1970 (бібліогр. с. 343, 304). Бугаков Г. А. Методи синтеза редукций устройств из пороговых элементов М. 1970 (бібліогр. с. 315, 328). Дегтярьов М. П. Пороговая логика (пер. с англ. М., 1987 (бібліогр. с. 337, 341)).

В. В. Литвинов.

**ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ ВИЩИХ СТУПЕНІВ** — комплекс напрямів у логіці математичній і основних математик, який досліджує мови вищих ступенів і логічні числення вищих ступенів. В основному, в такі мови, крім індивідуальних змінних, входять предикатні змінні (одного або кількох «ступенів» або «типів»). Їх дозволено зв'язувати кванторами, а також підставляти на місця аргументів інших предикатних змінних, якщо здійснюються певні умови, накладувані на типи змінних. Такі мови й пов'язані з ними числення виникли у зв'язку з теоретико-типовим підходом до основ математики, до якого ввійшли англ. учені В. Рассел (1872—1971) й А. Уайтхед (1861—1947), щоб побудувати основи математики, вільні від відомих теоретико-множинних і логічних парадоксів.

З появою праць польськ. (нині амер.) логіка А. Тарського (нар. 1902), якими закладено основи сучасної логіч. семантики, почався розвиток семантичного, або теоретико-модельного, напрямів у Л. п. в. с. Тепер цей напрям домінує настільки, що найчастіше саме його називають Л. п. в. с. Його важливість і необхідність, зокрема, пояснюється тим, що мови 1-го ступеня недостатні для того, щоб виразити найважливіші матем. концепції. До того ж уведення з розгляд нестандартних інтерпретацій для теорій вищих ступенів дає змогу застосовувати для вивчення їх розвинений апарат *моделей теорій*, а також знаходити для цих теорій нові інтересні витлумачення.

Видірані поняття Л. п. в. с. визначають так. Нехай  $\mathcal{J}$  — найменша з множин слів в алфавіті  $\{0, 1\}$ , які містять 0, і разом з будь-якими словами  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  слово  $(\tau_1 \dots \tau_n)$ . Елементи  $\mathcal{J}$  наз. т и п а м и. Приклади типів: 0, (0), (00), ((0)), ((00(0))). Поняття ступеня типу  $T$  (позначення —  $St$ ) визначають так:  $St\ 0 = 0$ ,  $St\ (\tau_1 \dots \tau_n) = 1 + \max\{St\ \tau_1, \dots, St\ \tau_n\}$ . Напр.,  $St\ (0) = 1 + \max\ St\ 0 = 1$ ,  $St\ (00) = 2$ ,  $St\ ((00)\ 0) = 1 + \max\ (St\ (00), St\ 0) = 2$ . Нехай  $A$  — якась множина, а  $(A^T)_{T \in \mathcal{J}}$  — сімейство множин, таке, що  $A^0 \supset A$

$A^{(\tau_1 \dots \tau_n)}$  — множина всіх підмножин декартового добутку  $A^{\tau_1} \times \dots \times A^{\tau_n}$ . Елементи множини  $A^{\tau}$  ( $\tau \in \mathcal{F}$ ) наз. *відношеннями типу  $\tau$  на  $A$* . Будь-яке, напр., двоїсне відношення  $R$  між елементами множини  $A$  взаємозв'язане з множиною  $A^{(00)} \in A^{(00)}$  такою, що  $\langle a_1, a_2 \rangle \in R \Leftrightarrow a_1 R a_2$ . Відповідність  $R \rightarrow A^{(00)}$  взаємно однозначна. Таке визначення поняття відношення — уточнює зміст уживаного матем. терміна «відношення» (див. *Предикат*). Відношення типу  $0$  на  $A$  — це елементи  $A$ ; відношення типу  $(00)$  — двоїсні відношення на  $A$ ; відношення типу  $((0))$  — набори підмножин  $A$  тощо. Формальна мова  $L^{\infty}$  містить символи логіч. операторів (логіч. зв'язки й квантори), рівність і для кожного типу  $\tau$  — послідовність  $x_1^{\tau}, x_2^{\tau}, \dots$  змінних типу  $\tau$ . Вира-

зи виду  $x_i^{\tau} = x_j^{\tau}$  й  $x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n} x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n}$  наз. атомарними формулами. Виходячи з поняття атомарної ф-ли, визначають (звичайно) поняття ф-ли й пропозиції. Ступенем ф-ли наз. найвищий із ступенів змінних, які входять до неї, збільшений на одиницю. Через  $L^{\infty}$  позначають фрагмент мови  $L^{\infty}$ , який має лише змінні таких типів  $\tau$ , що  $St \tau \leq n$ . Цей фрагмент наз. мовою  $n$ -го ступеня. Нехай  $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{F}}$  — таке сімейство множин, що  $A_{\tau} \subseteq A^{\tau}$  для будь-якого типу  $\tau$  і  $A_0 = A$ . Поняття здійсненості формули на  $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{F}}$  визначають за Тарським, змінні типу  $\tau$  інтерпретують як елементи  $A_{\tau}$ . Формулу наз. істинною на  $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{F}}$ , якщо вона справджується на  $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{F}}$  при всіх значеннях вільних змінних (які належать відповідним множинам  $A_{\tau}$ ).

За аксіоматикою з численнями предикатів  $1$ -го ступеня будують числення предикатів вищих ступенів. Сімейство  $(A_{\tau})_{\tau \in \mathcal{F}}$  наз. *правильним* для даного числення, якщо на ньому істинні всі аксіоми цього числення, а кожне правило виведення зберігає на ньому істинність. Амер. логік Л. Генкін довів, що всяка ф-ла числення предикатів вищих ступенів, істинна на всіх правильних (для цього числення) сімействах, доведена в цьому численні. Серед різних видів інтерпретацій мов вищих ступенів особливий інтерес становлять інтерпретації, стандартні в такому розумінні. Кажуть, що дана ф-ла стандартно справджується на множині  $A$ , якщо вона справджується на сімействі  $(A^{\tau})_{\tau \in \mathcal{F}}$ , де  $A^0 = A$ . Ф-ла стандартно істинна на  $A$ , якщо вона істинна на  $(A^{\tau})_{\tau \in \mathcal{F}}$ . Формула наз. стандартно здійсненою (загальноозначуною), якщо вона стандартно здійснена (істинна) на деякій (якій) непустій множині (див. *Тотожно істинна формула*). Вивчення питань, пов'язаних із стандартними інтерпретаціями, припускає досить змістовну теоретико-множинну базу. Чи є якась ф-ла стандартно загальноозначуною — це залежить від доладе-

ної в основу можим теорії. Напр., властивість множини бути цілком упорядковувальною можна виразити ф-лою  $2$ -го ступеня. Чи ця ф-ла стандартно загальноозначуна — це залежить від того, чи є в цій теорії множини аксіома вибору. Ф-ли  $\alpha$  й  $\beta$  наз. стандартно еквівалентними, якщо  $\alpha \leftrightarrow \beta$  є стандартно загальноозначуною формулою. Кажуть, що ф-ла  $\beta$  логічно, або стандартно, випливає з  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , якщо ф-ла  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$  стандартно загальноозначуна. Для числення предикатів  $1$ -го ступеня поняття логіч. і дедуктивного слідування збігаються завдяки повноті цього числення. З *Гедель теорема про неповноту* випливає, що для будь-якого числення вищих ступенів поняття дедуктивного слідування сильніше множини гедельських номерів усіляких кортежів  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \rangle$  ф-л цього числення, таких, що  $\beta$  логічно випливає з  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не тільки не є рекурсивно перерахуваним, а й не являється ні з яким розумному розширенні ієрархії Кліні — Мостовського (так що, зокрема, числення предикатів вищих ступенів не повні відносно загальноозначуності при стандартних інтерпретаціях, тобто для стандартних інтерпретацій введена вище теорема Генкіна не має місця). Тому в дослідженнях, належних до стандартних інтерпретацій, доводиться використовувати переважно теоретико-множинні засоби. Подані вище результати належать до стандартних інтерпретацій і довідні в рамках теорії множин Цермело — Френкеля. Для будь-якої ф-ли можна ефективно побудувати стандартно еквівалентну їй регулярну ф-лу того самого ступеня, тобто таку ф-лу в випередженій формі, в якій немає кванторів по змінній більшого ступеня, який іде за квантором по змінній меншого ступеня. Клас регулярних ф-л позначається через  $L$ . Ф-лу з  $L$  наз. *монадичною*, якщо типи зв'язаних змінних у ній належать множині  $\{0, (0), ((0)), \dots\}$ . Для монадичних тверджень  $2$ -го ступеня проблеми справджуваності, загальноозначуності й проблеми спектра (яка полягає у відшукуванні характеристик класів потужностей цих множин, на яких твердження істинні) розв'язуються ефективно. Становить змінюється для ф-л вищих ступенів: для будь-якої ф-ли  $n$ -го ступеня  $\sigma$  можна ефективно побудувати стандартно еквівалентну їй монадичну формулу  $(n+1)$ -го ступеня, якщо  $n \geq 3$ , то можна ефективно побудувати стандартно еквівалентну  $\sigma$  на нескінченних множинах монадичну ф-лу  $n$ -го ступеня. Отже, стосовно нескінченних множин виразальні можливості мови  $n$ -го ступеня ( $n \geq 3$ ) ті самі, що й для її монадичного фрагмента. Особливе місце класу  $L^2$  ф-л  $2$ -го ступеня займають такою теоремою:  $L^2$  є класом відомостей щодо справджуваності для  $L^{\infty}$ , тобто існує ефективна процедура, яка переводить будь-яку ф-лу в ф-лу з  $L^2$ , одночасно з нею здійснену або нездійснену. Нехай  $\aleph_n$  — найменший з таких кардиналів  $\aleph$ , що будь-яка справджувана ф-ла з  $L^{\infty}$  справ-

джується на множині потужності, не більшої за  $\aleph_1$ . Внаслідок теореми Лесентейма — Сколема  $\aleph_1 = \aleph_0$ . Для  $\lambda > 1$  кардинала  $\aleph_\lambda$  дорівнюють  $\aleph_1$  і «неозоро» великі: вони більші за багато які недосяжні й навіть вимірні кардинали (якщо такі є). Це показує, що вже проблеми семантики мови 2-го ступеня спричиняють необхідність розглядати дуже великі кардинали.

Моделлю формули  $\sigma$  наз. усіляку пару  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{P} \rangle$ , де  $\mathcal{A}$  — непушта множина, а  $\mathcal{P}$  — ф-ція, визначена на змінних  $x_i^A$ , які вільно входять у  $\sigma$ , і така, що 1)  $\mathcal{P}(x_i^A) \in \mathcal{A}^T$ , 2)  $\sigma$  справджується при інтерпретації кожної вільної змінної  $x_i^A$  як  $\mathcal{P}(x_i^A)$ , а при інтерпретації зв'язаних змінних  $x_i^A$  — як усіляких елементів  $\mathcal{A}^T$ . З наведених наслідків випливає, що вивчати загальні властивості класів моделей для ф-л 2-го ступеня (і навіть, як можна показати, для ф-л вигляду  $\forall x^{(n)} (\alpha)$ , де  $\alpha$  не містить зв'язаних предикатів, тобто неіндивідуальних, змінних) так само важко, як і вивчати властивості класів моделей для ф-л як загально високим ступенів. За цим очевидна безнадійність пошуків на традиційних шляхах сильних і загальних теорем, належних мові  $L^2$  і подібних до відомих теоретико-моделних теорем. У зв'язку з цим набуває інтересу вивчення семантики мов, проміжних між мовами 1-го й 2-го ступенів, і деяких їхніх модифікацій, зокрема, мов 2-го ступеня з одномісними предикатними змінними, інтерпретованими як скінченні підмножини індивідів, мов, які містять змінні, інтерпретовані як скінченні послідовності індивідів, і мов, які містять лише індивідуальні змінні, але допускають літбові кон'юнкції й дис'юнкції. Одну з таких проміжних мов застосовують в автоматичній теорії (див. Мова логічна для задавання автоматів). Стандартно здійсненню ф-лу  $\alpha$  з  $L^n$  наз.  $L^n$ -повненням, якщо для будь-якої ф-ли  $\beta$  з  $L^n$  є загальнозначущим  $\alpha \rightarrow \beta$  або  $\alpha \rightarrow \neg \beta$ .  $\alpha$  наз.  $L^n$ -повненням ф-ли  $\beta$  в  $L^n$ , якщо з  $\alpha$  логічно випливає  $\beta$ , а  $\alpha$  —  $L^n$ -повна. Стандартно здійсненню ф-лу наз. категоричною, якщо всі її моделі (інтерпретації) ізоморфні. В припущенні ґегелівської аксіоми конструктивності для будь-якої стандартно здійсненої ф-ли з  $L^n$  ( $n > 1$ ) існує її  $L^n$ -повнення, яке є категоричною ф-лою (і, отже, для будь-якої ф-ли з  $L^n$  її  $L^n$ -повнота рівносильна категоричності). Ця теорема в деякому розумінні дублює до ґегелівської теорема неповноти, яка встановлює, зокрема, що є здійсненна ф-ла 1-го ступеня, яка не має  $L^1$ -повнення. Разом з тим природа цих теорем одна й та сама: досить багаті виразальні можливості мов  $L^n$  (ще більше підсилювані аксіомою конструктивності), які зумовлюють внаслідок теореми Тарського невизначеність поняття істини для цих мов засобами самих цих мов. Розкриваючи обмеженість (у цьому

«метасемантичній») виразальних можливостей таких мов, теорема Тарського розкриває й обмеженість дедуктивних можливостей пов'язаних з ними числень, виявляючи як існуючі, так і дедуктивно неможливі формули. Літ. Вочаар Д. А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического рассуждения. Функциональная классификация. «Математический сборник. Новая серия», 1938, т. 4, в. 2; Вочаар Д. А. К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств. «Математический сборник. Новая серия» 1944, т. 15, в. 3; Зимова А. А. Проблема спектра в расширении исчисления предикатов. «Известия АН (С.С.С.Р.) Серия математическая», 1951, т. 17, № 1; Косадовский И. Р. К семантике теории типов. «Известия высших учебных заведений. Математика», 1958, № 1; Тагакі А. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. «Studium Phil. philosophica», 1938, v. 1, Heft 1; van der Waerden B. L. Non-standard analysis. «Proceedings of the Royal Academy of Sciences», 1936, vol. A, v. 84; Адамс А. Дж. Теория иерархий. В кн. Математическая логика и ее приложения. Пер. с англ. М., 1986; Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y. Foundations of set theory. Amsterdam 1958.

С. Р. Косадовський.

ЛОГІКИ НЕКЛАСИЧНІ — логічні системи, в основі яких лежить інше, ніж у класичній логіці тлумачення традиційних логічних операцій заперечення, кон'юнкції, дис'юнкції, імплікації та кванторів. У деяких Л. н. до перших традиційних логічних зв'язок додають такі, як «необхідно», «можливо», «дозволено», «буває» то ін.

Л. н., одні з яких з'явилися в сучас. логіці математичній, почали розвиватися на поч. 20 ст. Поява однієї з перших систем Л. н. — інтуїціоністської — пов'язана з критикою одного з осн. законів класичної логіки — виключеного третього закону: з будь-яких двох суперечливих одне одному судження одне є істинне. В матем. логіці цей закон сформульовано так: для кожного твердження  $A$  або  $A$ , або не  $A$ . З критикою цього закону виступили в 1908 годі. математик Л. Брауер. У своїй критиці він виходив з осн. принципу інтуїціонізму: існування в математиці — це те саме, що конструктивність (тобто можливість побудови). Відповідно до цього принципу, напр., твердження: існує  $x$ , який має властивість  $P$ , слід розуміти як можливість вказати конкретний  $x$  із властивістю  $P$ . Тепер припустимо, що вислів  $A$  є твердження: якийсь елемент множини має властивість  $P$ . Якщо йдеться про елементи якоїсь скінченної множини, то в принципі можна перебрати всі ці елементи й для кожного перевірити — має він властивість  $P$  чи ні. А якщо ця множина нескінченна, то такий перебір у принципі неможливий. Можна тільки сподіватися, що вдасться знайти елементи з потрібною властивістю або аналітично довести, що  $A$  хибне, напр., вивести з  $A$  суперечність. Проте заг. методу, який давав би змогу для будь-якого твердження  $A$  встановити, правильно воно чи ні, немає. Тому Брауер вважав за необхідне відмовитися від принципу виключеного третього. Класичній логіці було протиставлено інтуїціоністську логіку, яку формалізував голл. математик А. Гейтінг 1930. В 1910–13 рос. логик М. О. Васильєв запропонував логіку, яку він назвав «уявленою». Подібно до того, як

«уявлювана» геометрія Лобачевського була наслідком відмови від 5-го постулату Евкліда, «уявлювана» логіка виходила з відмови від закону суперечності, сформульованого так: жодній речі не належить предикат, який суперечить їй. В «уявлюваній» логіці можливі три типи суджень: судження тверде ( $C \rightarrow P$ ), заперечення ( $C \rightarrow \neg P$ ) й акцидентальне ( $C \rightarrow P$  і  $\neg P$ ). З істинності, напр., акцидентального судження випливає істинність твердого й заперечного, з неправдивості твердого й акцидентального суджень випливає істинність заперечного. Закон виключеного третього замінюють, отже, законом «виключеного четвертого». При цьому зберігається закон «несумісності суперечності»: одне й те саме судження не може бути одночасно і істинним, і хибним. Логіка Васильєва свого часу була маловідомою й не мала глибокого розвитку.

Широко відомим є *логіка багатозначна*, що її розробили польськ. логік Я. Лукасевич (1920) й амер. математик Е. Пост (1921). Вони є узагальненнями класичної логіки в такому розумінні. В  $k$ -значній логіці твердження можуть набувати будь-якого з  $k$ -істиннісних значень, подібно до того, як у класичній логіці твердження набувають двох значень «істинне» й «хибне». Напр., у тризначній логіці Лукасевича твердження можуть бути «істинними», «хибними» й «невизначеними».

В 1930 Я. Лукасевич і А. Тарський побудували ще й дескриптивнозначну логіку. Значення для висловлювання в цій логіці може бути будь-яке дійсне число з інтервалу від 0 до 1. Істиннісне значення розглядається в ній, як ймовірність правильності твердження. Висловлювання, які завжди набувають значення 1, є тавтологією цієї логіки.

З критикою т. в. «парадоксизм матеріальної імплікації», які суперечать інтуїтивному розумінню логік, слідування, пов'язується побудова логік *імплікації строгої*. Першу з таких логік розробив амер. логік К. Льюїс (1912—18). Дальшу формалізацію строгої імплікації запропонував 1936 нім. математик В. Аккерман. Чимало праць, які стосуються формалізації логік, слідування, належить рад. логікам О. О. Зінов'єву. Інший різновид імплікації, т. в. конексивна імплікація, він ніколи толі, коли було зроблено спробу побудувати логіку, в якій правильною є теза Арістотеля: жодне висловлювання не може імплікуватися своїм власним запереченням. Повну несуперечну логіку з такою імплікою цю побудував сучасний логік С. Мак Колл.

Розгляд суджень не лише істинних і хибних, а ще й можливих, необхідних і ін. привів до створення модальної логіки. В модальних логіках за початкові логічні зв'язки беруть, поряд з традиційними зв'язками, модальні оператори: необхідність, можливість тощо.

Ряд логік, чисельно модальної логіки побудував К. Льюїс. Тризначна й чотиризначна логіки Лукасевича теж є модальними логіками. Крім «абсолютних» модальностей розглядають і відносні, де судження можуть бути необхідними або можливими відносно інших

суджень. Близькими до модальних логік є деонтична логіка, в якій до числа початкових зв'язків входять оператори «дозволено» й «заборонено», часова логіка з початковим оператором «буде завжди», що... та інші Л. в.

Є два шляхи побудови Л. в. Один з них є узагальненням двозначності класичної логіки, де всі твердження інтерпретують на множині з двох значень. Він полягає в тому, що логіку задають за допомогою інтерпретації. При цьому ясно показують, яких «істиннісних» значень можуть набувати висловлювання та які з цих значень є виділеними або позначеними (аналог значення «істинне» в класичній логіці). *Логіки операції* задають як функції на множині істиннісних значень. Такими є, напр., багатозначні логіки Лукасевича й Поста. Другий шлях побудови Л. в. — аксіоматичний метод. Подібно до того, як класичну логіку можна задавати за допомогою системи аксіом і правил виведення, Л. в. можна заводити як числення, тобто вказати аксіоми й правила, які дають змогу з аксіом одержувати всі правильні в розглядуваній логіці формули. Таким способом будують інтуїціоністську логіку, логіку строгої імплікації та багато модальних логік.

При задаванні логіки як *числення* однією з осей, проблем є проблема інтерпретації, тобто побудова адекватної матриці для числення або прийняття класу таких матриць (по змозі, простих), щоб відповідність формули в численні була еквівалентна її загальнозначущості в цьому класі матриць. Коли логіку будують за допомогою інтерпретації, важливою проблемою є проблема аксіоматизації, тобто зображення логіки як числення, в якому визначені всі правильні в логіці формули й лише вони. Цю проблему розв'язано для великого класу багатозначних логік.

Чимало досліджень у галузі багатозначних логік стосується проблеми функціональної повноти. Ця проблема полягає в тому, щоб відшукати умови, за яких через зв'язки заданого довільного списку можна виразити всі ймовірні логічні зв'язки досліджуваної логіки. Як правило, Л. в., які містять лише традиційні логічні зв'язки, є частинною класичної логіки в такому розумінні. В Л. в. відкидають деякі постулати класичної логіки, проте всі формули, правильні в будь-якій з Л. в., є тавтологіями класичної логіки (винятком є логіка конексивної імплікації, в якій правильними є деякі тотожні хибні формули).

З класичною логікою узгоджуються й модальні логіки. Всі формули, які є правильними в модальній логіці й містять лише зв'язки класичної логіки, є тотожно істинними. Більше того, переважно більшість модальних, деонтичних та ін. логік оснований на класичній логіці, тобто правильними є й обернене будь-яка тавтологія класичної логіки є правильною й у цих Л. в.

Деякі Л. в. можна інтерпретувати за допомогою класичної логіки. Йдеться про семантику, що її запропонував сучасний амер. математик С. Кріпке для інтуїціоністських

І деяких модальних логік. Семантичні побудови Крипке варті уваги й тому, що вони дають змогу пояснити істинність у тій чи іншій Л. н. через класичну істинність у якійсь системі пов'язаних між собою суваюваних світів.

Вивчаючи Л. н. значну увагу приділяють з'ясуванню зв'язків між різними логіками. Крім звичайного відношення виключення (всі правильні формули однієї логіки є тавтологіями в іншій), великий інтерес становить переведеність однієї логіки в іншу. Напр., за будь-якою формулою інтуїціоністської логіки можна побудувати формулу модальної логіки  $S_4$ , тавтологічність якої в модальній логіці еквівалентна правильності першої формули в інтуїціоністській логіці. Це дає змогу явити багато проблем інтуїціоністської логіки до проблем модальної логіки. Модальні логіки є в певному розумінні універсальними, бо багато з цих логік можна перевести в підходящі модальні.

З Л. н. найпоширенішими є інтуїціоністська та близька до неї логіка конструктивна. Критику методів класичної математики, яка стверджує необхідність обмеження цих методів, викликають виявленням парадоксів у певній теорії множин. Усунути парадокси теорії множин можна на основі інших Л. н. Такою логікою є, напр., тріаціональна логіка А. Боччара. В ній розрізняють висловлювання, які мають сенс, і безсмісловні висловлювання. Твердження, які виражають парадокси теорії множин, виявляються тут безглуздими. З інших застосовували багатозначні логіки слід відзначити побудову спец логік систем для подолання труднощів у визначенні квантової механіки (логіки квантової механіки). Ріані Л. н. будуть при доведенні незалежності систем аксіом, зокрема, для класичної логіки. Щоб довести, що якусь аксіому не можна вивести з інших, досить знайти багатозначну логіку, в якій правильними є всі аксіомы, крім досліджуваної.

Будуючи й досліджуючи різного роду мікроскопічні моделі, часто натрапляють на логіку, відмінну від класичної. Так, напр., при прогнозуванні й діагностиці натрапляють на деякі різновиди модальної логіки, при дослідженні роботи керуючих пристроїв — на різні форми часових логік, логіку запинів і відповідей тощо. Апарат багатозначної логіки зручний для розв'язування питань аналізу й синтезу керуючих систем, для розробки методів контролю за їхньою роботою. Отже, кібернетика й обчисл. техніка, з одного боку, є споживачами Л. н., а з другого — джерелом виникнення й розвитку таких логік. Л. Л. Яблонський С. В. Функциональные построения в k-значной логике «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51. Применение логики в науке и технике. М., 1960. С. 111. Я. А. Теория модальностей в современной логике. В кн.: Логическая семантика и модальная логика. М., 1967. Зинков А. А. Очерк многозначной логики. В кн.: Проблемы логики и теории познания. М., 1968. Неклассическая логика. М., 1970. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. Пер. с англ. М., 1965 [Библ. стр. с. 152, 160, 194, 195].

Л. Л. Матислевич.

**ЛОГІКО-МАТЕМАТИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ** — формалізація математичної (або логічної) аксіоматичної теорії. Л.-м. ч. задають мовою логіко-математичною, списком постулатів (аксіом і правил виведення) і здебільшого забезпечують семантикою. Істотними рисами, якими Л.-м. ч. відрізняються від аксіоматичних теорій традиційної математики, є перехід від розмовної мови до точної формалізованої мови і виявлення використовуваних теорією логічних засобів за допомогою повного переліку всіх аксіом і всіх правил, що дають можливість виводити одне твердження з другого. Мова Л.-м. ч. і перелік його постулатів становлять синтаксис. Ось, одиниця мови Л.-м. ч. — формула, що її інтерпретують як висловлювання або як висловлювальну функцію (якщо формула містить вільні змінні). Ось, поняття теорії Л.-м. ч. — поняття виведення (а гіпотез). Формула  $A$  (або *секвенція* — для секвенціальних числень, — див. Генцена *формальні системи*), що не є аксіомою, — це виведення  $\Phi$ -л  $A$  із списку гіпотез  $A$ . Аксіома є своє власне виведення з пустого списку гіпотез. Якщо  $D_1, \dots, D_n$  — виведення  $\Phi$ -л  $A_1, \dots, A_n$ , з списків  $C_1, \dots, C_n$  і  $B$  одержується з  $A_1, \dots, A_n$  за одним з правил розглядуваного Л.-м. ч., то  $\{D_1, \dots, D_n, B\}$  є виведення  $A$  з списку  $C_1 \cup \dots \cup C_n$ .  $\Phi$ -ла є вивідною, якщо з її виведення з пустого списку припущень. За мовою Л.-м. ч. класифікують на числення першого й вищих порядків: числення 1-го порядку в свою чергу поділяють на кванторні й безкванторні. Найбільшим поділом Л.-м. ч. за семантичною ознакою є поділ на класичні й некласичні числення. Класичні числення містять (у тій чи іншій формі) постулат, який виражає в інтерпретації, що будь-яке висловлювання або істинне, або хибне. Здебільшого таким постулатом є *виключеного третього закон*  $A \vee \neg A$  або *принцип розгляду випадків*:  $A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B$  вивести  $B$ . Часто некласичними вважають і ті логіки, в яких є нетрадиційні логічні зв'язки [напр., модальні числення зі зв'язками  $\Box$  (необхідно) і  $\Diamond$  (можливо)], навіть якщо в них постульовано закон виключеного третього.

Два Л. м. ч. наз. *рівнооб'ємними* (еквівалентними), якщо збігаються множини об'єктів, що в них виводні. Іноді рівнооб'ємність розуміють ширше: досить, щоб збігалися множини вивідних об'єктів спец. виду. Так, порівнюючи числення предикатів, іноді обмежуються розглядом чистих  $\Phi$ -л (до яких ніяка змінна не входить ні вільно, ні зв'язано), а порівнюючи генцевські числення — розглядом секвенцій тільки виду  $\rightarrow A$  (тобто, по суті, формул). Часто розглядають множини не тільки вивідних  $\Phi$ -л, а й вивідних (похідних) правил: правило [множина  $(n + 1)$ -членних систем формул  $A_1, \dots, A_n / B$ , які наз. застосуваннями цього правила.  $A_1, \dots, A_n$  — *засновки*;  $B$  — *висновок*] є похідним у Л.-м. ч., якщо висновок кожного його

застосування є зведеним з його засновків. Від похідних слід відрізняти допустимі правила, прислання яких не змінює обсягу вивідних ф-л; правило підстановки замість пропозиційної змінної допустиме в класичному численні висловлювань (сформульованому в використанні схем аксіом), але не похідне в ньому. Л.-м. ч. поділяють на логічні й власне логіко-математичні (прикладні).

Логічні числення ґрунтуються на логіч. мовах; покяття ф-л, вивідної в логіч. численні, є уточненням і формалізацією поняття твердження, істинного через свою логічну форму, незалежно від тлумачення символів поняття та відношень, що входять у нього. Приклади: класичне числення висловлювань, числення предикатів та ін.

Числення висловлювань — це логіч. числення, в яких задано правила оперування з пропозиційними логіч. зв'язками (див. *Логічні операції*), але не передбачено правил оперування з кванторами ( $\forall$ ,  $\exists$ ) і предикатними змінними, хоч такі символи й можуть бути в мові числення. Постулати найчастіше поділяють на групи; їх відповідають оперуванню зі зв'язкою; II введенню (доведенню) ф-л, які містять зв'язку; I виключенню (використанню) вже доведених ф-л, які містять зв'язку). Приклади: правило  $\delta$ -введення  $\Gamma \rightarrow A; \Gamma \rightarrow B \vdash \Gamma \rightarrow A \& B$ ; аксіома  $\delta$ -введення  $(\gamma \supset a) \supset ((\gamma \supset b) \supset (\gamma \supset a \& b))$ ; правила  $\delta$ -виключення  $\Gamma \sim A \& B \vdash \Gamma \rightarrow A$ ;  $\Gamma \rightarrow A \& B \vdash \Gamma \rightarrow B$ . Аксіоми  $\delta$ -виключення одержують з правил, замінивши  $\vdash$  на  $\supset$ .

З неklasичних числень найчастіше згадуються багатозначні логіки й конструктивне (інтуїціоністське) числення висловлювань (див. *Логіка конструктивна*), аксіоматику якого одержують виключенням схем  $A \vee \neg A$  (або  $\neg \neg A \rightarrow A$ ) з аксіоматики класичного числення висловлювань.

Важливим методом дослідження структури числення висловлювань є використання матриць — скінченних таблиць для зв'язок числення, які аналогічні значним таблицям для булевих функцій, але мають, можливо, кілька виділених значень (що відповідають значенню «істина»). Формула загальноозначує на матриці, якщо за будь-яких комбінацій значень пропозиційних змінних вона набуває одного з виділених значень; формула спростована, якщо вона не загальноозначує. Матриця  $M$  коректна для числення, якщо всі вивідні формули загальноозначує на  $M$ . Числення наз. фінітно апроксимовним, якщо є послідовність  $M_n$  матриць, які є коректними для цього числення і такими, що будь-яка невивідна ф-ла спростовується на одній з матриць цієї послідовності. Для фінітно апроксимовного числення розв'язною є проблема розпізнавання вивідних ф-л; щоб дізнатися, чи вивідною є формула  $A$ , слід розгорнути процес породження формул з аксіом за правилами виведення і процес пошуку спростування

$A$  на матрицях з послідовності  $M_n$ . Один з цих процесів перерветься через скінченне число кроків і дасть шукану відповідь. Матриця  $M$  адекватна для певного числення, коли для будь-якої ф-ли загальноозначує на  $M$  є еквівалентною її вивідності. Звичайна булева матриця адекватна для класичного числення висловлювань; аналогічно цьому багатозначні матриці адекватні для багатозначних числень висловлювань. Для решти числень висловлювань адекватні матриці звичайно неможливі.

Числення предикатів (вузько) одержують звичайно з відповідного числення висловлювань, розширюючи мову й додаючи аксіоми  $\forall x A(x) \supset A(i)$  ( $\forall$ -виключення);  $A(i) \supset \exists x A(x)$  ( $\exists$ -введення), де  $i$  — терм, вільний для  $x$  в  $A(x)$ ; і з правил  $C \supset A(x) \vdash C \supset \forall x A(x)$  ( $\forall$ -введення);  $A(x) \supset C \vdash \exists x A(x) \supset C$  ( $\exists$ -виключення), де  $x$  не входить вільно в  $C$  (або відповідних правил для генерісного варіанта). У неklasичних численнях іноді додаються окремі аксіоми, що зв'язують пропозиційні зв'язки і квантори. Для числень з кількома сортами змінних в аксіомах  $\forall$ -виключення і  $\exists$ -введення треба, щоб  $i$  був термом того самого сорту, що й змінна  $x$ .

Числення предикатів в рівність — результат додавання до відповідного числення предикатів символа з аксіомами:  $\forall x (x = x)$ ,  $\forall x \forall y \forall z (x = y \supset (y = z \supset x = z))$  і  $\forall x \forall y (x = y \supset (A(x) \supset A(y)))$  для будь-якої формули  $A$ .

Прикладні числення звичайно являють собою формалізацію теорії деяких функцій і предикатів. Специфічні (тобто нелогічні) аксіоми виражають властивості цих ф-цій і предикатів, а логіч. апарат (за винятком безкванторного випадку) — відповідне числення предикатів (а рівність, якщо вона входить у мову розглядуваної системи). Безкванторні прикладні числення або забезпечують логіч. апарат числення висловлювань (найчастіше класичного, бо осн. предикати розв'язні; див. *Алгоритми теорії*), або оформлюють як числення рівностей (якщо єдиним предикатом є рівність). За аксіоми тоді вважають визначальні рівності розглядуваних ф-цій (напр.,  $x \cdot 0 = 0$ ,  $x \cdot y' = (x \cdot y) + x$ ), а правила виведення формалізують, по-перше, осн. властивості рівності (рефлексивність, симетричність, транзитивність, можливість заміни одного з рівних об'єктів іншим); по-друге, міркування методом матем. індукції (найчастіше за вразком:  $ez f(0) = g(0), f(x') = h(x, f(x)), g(x') = h(x, g(x))$  можна вивести  $f(x) = g(x)$ ); правило отождивовання ф-цій, що визначаються тією самою примітивною рекурсією; по-третє, міркування, що відповідають  $\forall$ -виключенню:  $ez A(x)$  можна вивести  $A(i)$  (правило підстановки замість вільної предметної змінної).

Прикладними численнями є, напр., примітивно рекурсивна арифметика (безкванторне прикладне числення), *арифметика формалі-*

на, аксіоматичні можливості теорії, елементарна група теорії, аксіоматична проективна геометрія та арифметика 2-го порядку з одиницями предикатами й кількома функціями слідування (прикладне числення 2-го порядку).

Семантика Л.-м. ч. задає інтерпретацію змінних матем. символів (символів предикатів та ф-цій) і логічних операцій. Тим самим визначають і моделі Л.-м. ч. Важлива властивість, яка є не в усіх Л.-м. ч., — це семантична повнота: формула, істинна на всіх моделях, є вивідною. Семантично повними виявляються класичне числення висловлювань, класичне числення предикатів *вужче* того. Дедуктивна повнота означає, що жодна формула *A* без вільних змінних вивідна або спростована (тобто вивідна  $\neg A$ ). З дедуктивної повноти Л.-м. ч. випливає розв'язність проблеми вивідності — існування алгоритму, який дає змогу з жодної формули дізнатися, вивідна вона чи ні. Найважливішим дедуктивно повним Л.-м. ч. є теорія дійсно замкнутаго поля (система Тарського). За *Геделя теоремою про неповноту* дедуктивно повної теорії трапляються рідко; будь-яке Л.-м. ч., що містить якийсь досить вузький фрагмент арифметики, дедуктивно (й семантично) неповне. Для ще ширшого класу Л.-м. ч. (що включає числення предикатів, формалізовану арифметику тощо) проблема вивідності нерозв'язна (теорема Черча).

Читання внутр. структури Л.-м. ч. — неупорядкованість, незалежність окремих постулатів, існування відокремлених аксіоматик (тобто таких, що будь-яка вивідна формула *A* має виведення, в якому використовуються постулати тільки для символів, що входять в *A* і, можливо, й для імплікації), існування інтерпретацій одних Л.-м. ч. з інших і т. д. — досліджуються в *доведення теорії*.

Лит. Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1959. Kleene S. C. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, 1952. Чарч А. Введение в математическую логику. Пер. с англ. т. 1. М., 1960. Карри Х. Б. Основания математической логики. Пер. с англ. М., 1969 (616 стр. с. 318 — 547).

**ЛОГІЧНА РОЗПІЗНАВАЛЬНА СИСТЕМА** — розпізнавальна система, в якій сигналами, що описують об'єкти розпізнавання, являють собою набори логічних змінних, а кожний клас об'єктів визначається якоюсь логічною (булевою) функцією від цих змінних. Фактичне значення (1 або 0) кожної зі змінних, що входять у сигнал, означає присутність або відсутність однієї з ознак, яка характеризує розпізнаваний об'єкт. Л. р. с. відносить об'єкт до класу, для якого відповідна логічна ф-ція дорівнює 1, якщо при цьому решта функцій дорівнює 0. У протилежному разі відбувається відмова від розпізнавання або зазначається не один, а кілька класів, до яких може належати об'єкт. Л. р. с. використовують, розв'язуючи деякі застосовні задачі розпізнавання образів, зокрема, в багатьох читачих автоматах. Придатні для цього ознаки й функції той, хто розробляє Л. р. с., звичайно вибирає

аручну, на інтуїтивному рівні, рідше — на основі автоматичного чи автоматизованого відбору з-поміж багатьох ознак та функцій, що генеруються випадково на ЕОМ. За приклад використання Л. р. с. можуть бути читачі автомата амер. фірми Ланді — Фаррінгтон, призначені для читання машинописних знаків стилізованого шрифту «Селфчек». За ознаки в них пралять відрізки прямих ліній, з яких складаєть ознаки шрифту: ГВ, ГС, ГН, КВЛ, КВП, КНЛ, КНП, ДЛ, ДП. Тут — Г — горизонтальний, К — короткий вертикальний, Д — довгий вертикальний, В — верхній, Н — нижній, С — середній, П — правий, Л — лівий. Логічні функції, які визначають класи, мають такий вигляд: для цифри 0:

$$\text{ГВ} \cdot \overline{\text{ГС}} \cdot \text{ГН} \cdot \text{ДЛ} \cdot \text{ДП};$$

для цифри 1:

$$\overline{\text{ГВ}} \cdot \overline{\text{ГС}} \cdot \text{ГН} \cdot \overline{\text{КВЛ}} \cdot \overline{\text{КНЛ}} \cdot \text{ДП};$$

для цифри 2:

$$\text{ГВ} \cdot \text{ГС} \cdot \text{ГН} \cdot \overline{\text{КВЛ}} \cdot \overline{\text{КВП}} \cdot \overline{\text{КНЛ}} \cdot \overline{\text{КНП}} \cdot \text{ДЛ} \cdot \overline{\text{ДП}}$$

і т. д. У зазначених логічних ф-ціях точка означає логічне множення, риска згорі — логічне заперечення. Якщо в розпізнаваному сигналі змінні ГВ, ГС, ГН, КВП та КНЛ дорівнюють 1, а змінні КВЛ, КНП, ДЛ та ДП дорівнюють 0, то відповідний знак буде розпізнано як цифру 2.

Г. Л. Гімельберг.

**ЛОГІЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЦОМ** — один з етапів проектування ЦОМ. Див. *Автоматизація проектування ЦОМ*.

**ЛОГІЧНИЙ ЕЛЕМЕНТ АОМ** — елемент, який використовують для вибору й комутації виміряних у схемі електричного моделювання і для формування команд перемикачів в схемі логічного керування шляхом розв'язку. Щоб реалізувати найпростіші логічні операції, неперервного вибору макс. або мінім. із кількох виміряних, використовують пасивні резистивно-діодні кола, аналогічні схемам абігу ЦОМ. Нелінійні ф-ції типу сигнатур, які використовують в АОМ для виконання логіч. операцій порівнювання й умовного переходу, реалізують за допомогою спец. схем з релейною характеристикою. Вихідна напруга такої схеми може набувати двох певних значень і щоразу стрибкоподібно змінюється, коли змінюється знак суми вхідних сигналів, тобто схема здійснює елементарне перетворення аналогових сигналів на цифрові команди, які можуть використовуватися для керування ключами, що забезпечують зміну структури моделюючого кода. В *гібридних обчислювальних машинах* набір схем з релейною характеристикою ставовить блок сигнатур, який формує вхідні команди цифрового керування з неперервних сигналів аналогового операційного пристрою. За найпростіший формувач цифрових керуючих команд може правити тригер Шмітта, напруга на виході якого змінюється, коли вхідний сигнал до-

свого встановленого значення. Порог спрацьовування такої схеми — 0,15—0,3 а.

При моделюванні різних процесів та систем на звичайних АОМ, а також на АОМ з періодичною роз'ясуванням широко використовують аналогові компаратори, побудовані на базі типових роз'ясуванням підсилювачів. Аналоговий компаратор складається з підсилювача постійного струму з великим коеф. підсилення і з обмежувачами рівня в ході зворотного зв'язку та резисторного пристрою порівнювання вхідних сигналів. Точність

до цих ознак вище розглянуто осн. типи цифрових двійкових Л. е.

Найпростішими функціональними типами Л. е. є схеми збігу, збірки схеми та інверторні, які реалізують *перемикальні функції* найпоширенішої функціональної повної системи (відповідно *кон'юнкцію, диз'юнкцію та інверсію*). Зазначені типи Л. е. найчастіше виконують у вигляді стандартних послань, напр., для реалізації універсальних Л. е. з Ф-цями  $X \vee Y, X \wedge Y, X \oplus Y, Z$  та ін. (див. *Дискретних елементів система*).

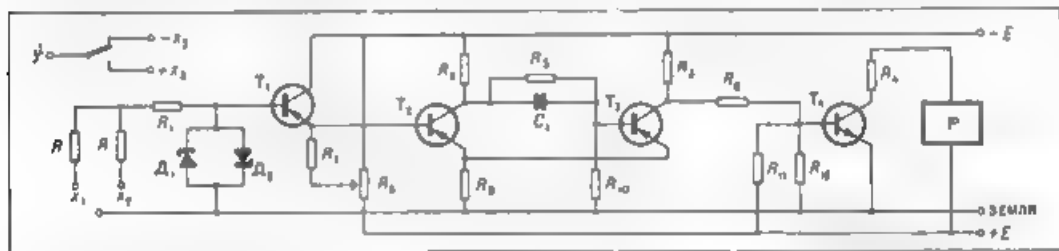


Схема блока операційного реле

виконання такою схемою операції порівняння без особливих труднощів може бути доведено до 0,01—0,02 а. Л. е. АОМ наз. також спец. блоки операційного реле, які використовують для перемикання в заданих місцях моделюючого кода. До складу блока входять схеми порівнювання, формувач та виконавчий елемент, який спрацює, коли вихідна величина досягне заданого рівня. На мал. наведено схему блока операційного реле, що його використовують у деяких вітчизняних АОМ. Входи та виходи блока виведені на *набірне коло*, де оператор відповідною комутацією реалізує залежності  $y = x_1 \text{ sign}(x_1 + x_2)$ ,  $y =$

$$= \frac{1 - \text{sign}(x_1 + x_2)}{2} x_2 \text{ та інші}$$

Лит., Ушаков В. В. [та ін.] Електронна лінійна аналогова висчислювальна машина МН-14. М., 1965. Корн Г. Корн Т. Електронне аналогове і аналого-цифрове висчислювальні машини. Пер. з англ. ч. 1—2. М., 1967—68 (Бібліогр. ч. 1, с. 453—456).

Ю. П. Космач  
**ЛОГІЧНИЙ ЕЛЕМЕНТ ЦОМ** — технічний пристрій для реалізації елементарної логічної функції, який має зовнішні входи для приймання й надання сигналів, що відповідають аргументам і значенню функції. Інформаційними сигналами сучасних Л. е. ЦОМ в основному служать дискретні значення напруги, струму тощо. Такі Л. е. ЦОМ наз. *дискретними*, або *цифровими*. Для спрощення тех. реалізації більшість дискретних Л. е. ЦОМ виконано як двопозиційні, при цьому один із станів позначають «0», другий «1». Проте застосовують і багатопозиційні дискретні Л. е. ЦОМ (див. *Багатопозиційні схеми*). Л. е. розрізняють, в основному, за функціональним призначенням, за способом подання інформації та способом зв'язку між ними, а також за використовуваними фіз. явищами й характерними компонентами, а яких побудовано Л. е. Відповідно

Набули розвитку й пороги Л. е., які утворюють «1» на виході у випадку, коли алгебрична сума сигналів на їхніх входах перевищить заданий пороговий рівень (див. *Логіка порога*). Л. е. ЦОМ, які виконують, крім логічних функцій, і функції підсилювання вихідних сигналів, наз. *активними*, а Л. е. ЦОМ без властивостей підсилювати ці сигнали — *пасивними*. Розрізняють Л. е. ЦОМ з запам'ятовуванням (див. *Логічний зберігальний елемент*) і без запам'ятовування. В елементах без запам'ятовування відключення інформації від входу переводить елемент у початковий стан, а в елементах із запам'ятовуванням таке відключення не веде до зміни стану.

За способом представлення інформації та способом зв'язку між собою Л. е. прийнято поділяти на Л. е. потенціального типу (див. *Потенціальна елементна структура ЦОМ*), Л. е. імпульсного типу (див. *Імпульсна елементна структура*) і Л. е. потенціально-імпульсного типу (див. *Потенціально-імпульсна елементна структура*).

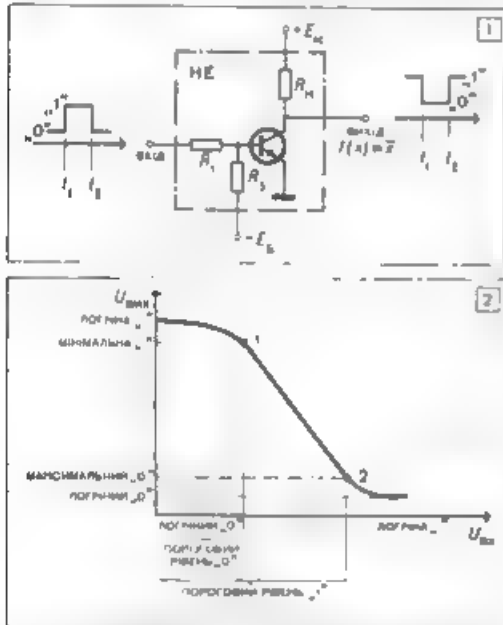
Залежно від використовуваних фіз. явищ і компонентів, Л. е. поділяють на напівпровідникові (діодні, транзисторні, діодно-транзисторні та ін.); магнітонапівпровідникові (феритодіодні, феритотранзисторні); електро-механічні (реле і контактори); Л. е. на вакуумних або наповнених газом лампах та ін., напр., оптичні, кріотронні й хімотронні. Найпоширеніші — напівпровідникові Л. е.

Осн. характеристиками цифрового двопозиційного Л. е., який виконує задані логічні функції, є сигнали для представлення логічного «0» й логічного «1» та завадостійкості; коеф. об'єднання за входами «1» та «АБО» й коеф. розгалуження за виходами, швидкість; габарити й вага; вартість і надійність.



розглядувана як сукупність властивостей безвідмовності, відмовляюваності та довговічності.

Коеф. об'єднання за входами Л. е. визначає його максимально можливу кількість логічних входів, а коеф. розгалуження за виходами показує, на яку кількість логічних виходів можна підключати одночасно вихід цього Л. е. Для конкретного Л. е. зазначають полярність і амплітуду, а іноді й тривалість входних і вихідних сигналів. Типовий цифровий Л. е. (інвертор), який реалізує функцію «НЕ», подано на мал. 1. Передавальні характеристики



1. Схема цифрового логічного елемента, який реалізує функцію «НЕ»  
2. Передавальні характеристики інвертора

на його (мал. 2) відображує залежність вихідної напруги  $U_{\text{вих}}$  від входної напруги  $U_{\text{вх}}$  і має вигляд кривої з двома прямокутними ділянками, які відповідають рівням логічних «1» та «0», і з вузькою перехідною ділянкою. Звичайно, щоб одержати необхідну надійність і швидко досягти стійких точок логічних «0» та «1» для Л. е., задають допустимі рівні вихідних сигналів. Причому внаслідок розкиду параметрів вхідних сигналів і компонент Л. е., залежно від зміни напруги живлення й температури навколишнього середовища, функціонування Л. е. визначають сім'ю передавальних характеристик. Крайні значення вхідного сигналу, за яких вихідний сигнал Л. е. дорівнює макс. сигналові «0» або мин. сигналові «1», наз. пороговими значеннями сигналів Л. е. (точки 1 і 2 на мал. 2). Швидкодію Л. е. характеризує середній час затримки в ньому поширення сигналу.

Конструктивно Л. е. найчастіше виконують в окремих корпусах або в одному корпусі розміщують кілька незалежних Л. е. Відомі й

варіанти з розміщенням одного Л. е. в кількох типізованих корпусах.

Цифрові Л. е. набули особливого поширення у зв'язку з розвитком цифрових електронних обчислювальних машин. Л. е. 1-го покоління будували на електронних лампах (підключених провідниками до опорів, конденсаторів та індуктивностей), у машинах 2-го покоління — на транзисторах. А ці, коли їхні можливості підвищувати ось, характеристики Л. е. з підключеними радіодеталями вичерпалися, поступилися місцем перед мікроелектронними інтегральними схемами (у машинах 3-го і 4-го покоління). Саме інтегральні схеми дають беззастережні найбільші можливості підвищувати швидкодію й надійність і зменшувати напругу, вагу й габарити Л. е. та споживання ними енергії. Дуже перспективним напрямком поліпшення характеристик Л. е. вважається використання можливостей квантово-оптичних приладів типу лазерів (у машинах 5-го покоління). Див. також *Потенціальні логічні елементи, Мікроелектронні елементи бази обчислювальної техніки*. Е. Г. Кошмар.

**ЛОГІЧНИЙ ЗАТРИМУВАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ** — елемент, у якому здійснюється строга фіксація в часі затримки між надходженням вхідної інформації та видаванням інформації на виході. Цього досягаються, застосовуючи тактичну серію імпульсів (сигналі опитування), які синхронізують увесь процес перетворення інформації в схемах на Л. з. е. У функціональному відношенні Л. з. е. подібний до звичайного логічного елемента ЦОМ. Як правило, Л. з. е. виконують на феритових осердях. Див. *Елементні структури на логічних затримувальних елементах*. І. І. Норіска.

**ЛОГІЧНІХ ВИРАЗІВ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ** — логічні вирази (формули) спеціального вигляду. В алгебрі логіки розрізняють дві нормальні форми диз'юнктивну й кон'юнктивну. Обидві ці форми — це формули, в яких із знаків логічних операцій є лише знаки  $\&$ ,  $\vee$  та  $\neg$  причому операція заперечення стосується тільки окремих змінних. Елементарною кон'юнкцією наз. кон'юнкцію певної кількості змінних або заперечень їх, таку, що кожна змінна трапляється в ній не більше одного разу. Аналогічно визначають елементарну диз'юнкцію, напр.,  $x_1 \& x_2 \& x_3$  є елементарною кон'юнкцією, а  $x_1 \vee x_2 \vee x_3$  — елементарною диз'юнкцією. Диз'юнктивною нормальною формою наз. диз'юнкцію певної кількості елементарних кон'юнкцій, уявлях без повторень, і аналогічно, кон'юнктивною нормальною формою наз. кон'юнкцію певної кількості елементарних диз'юнкцій. Напр., формула

$$(x_1 \& \bar{x}_2 \& x_3) \vee (\bar{x}_1 \& x_2)$$

є диз'юнктивною нормальною формою, формула

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2) \& (x_2 \vee x_3) —$$

кон'юнктивною нормальною формою, а формула

$$(x_1 \& \bar{x}_2 \vee x_3) \& \bar{x}_2 —$$

не є ні кон'юнктивною, ні диз'юнктивною нормальною формою.

У логіці предикатів застосовують ще й пренексні нормальні форми та нормальні форми Сколема. Формулу наз. пренексною нормальною формою, якщо всі квантори, які трапляються в ній, вписано спереду, а підкванторна частина має вигляд диз'юнктивної або кон'юнктивної нормальної форми, напр.,  $\forall x \exists y \exists z \forall u [(P(x, y) \wedge Q(z)) \vee \vee (P(y, z) \wedge Q(u))]$ . Для кожної формули алгебри логіки та логіки предикатів існує еквівалентна їй (тобто така, що набуває однакових із нею значень при однакових значеннях змінних) нормальна форма. Формулу наз. нормальною формою Сколема, якщо вона має вигляд пренексної нормальної форми і всі квантори існуювання, якщо вони є, передують усім кванторам загальності. В логіці предикатів не для кожної ф-ли існує еквівалентна нормальна форма Сколема, але для будь-якої ф-ли існує дедуктивно еквівалентна нормальна форма Сколема. Для числення предикатів поняття еквівалентності формули та дедуктивно еквівалентної формули не рівнозначні. Дві ф-ли  $\mathcal{A}$  і  $\mathcal{B}$  наз. дедуктивно еквівалентними, якщо з аксіом числення предикатів і формули  $\mathcal{A}$  за допомогою правил виведення можна вивести ф-лу  $\mathcal{B}$ , навпаки, з аксіом та формули  $\mathcal{B}$  можна вивести ф-лу  $\mathcal{A}$ . Очевидно, що еквівалентні ф-ли є дедуктивно еквівалентними, але не навпаки. Їх не ч. зручно використовувати при постановці та розв'язуванні різних проблем логіки математичної та її застосувань.

Лит. Новиков П. С. Элементы математической логики М., 1979. М. І. Кротко.

**ЛОГІЧНІ ОПЕРАЦІЇ** — операції, за допомогою яких з речень тієї або іншої мови утворюють нові вирази тієї ж мови. До Л. о. належать логічні зв'язки, квантори, оператор дескрипції, оператор абстракції та деякі інші оператори. Логічні зв'язки — це Л. о. над висловлюваннями, розглядуваними як одне ціле, не беручи до уваги їхньої суб'єктно-предикатної структури. У формалізованих мовах логічні зв'язки — це формалізація сполучників і сполучних слів «і», «або», «якщо... то», «тоді і тільки тоді», частки «не» тощо, які живляють у звичайних мовах. Різні підходи до формалізації змісту цих сполучних слів спричинилися до розвитку поряд з класичною логікою і логіки неklasичних. Логічні зв'язки можуть бути одномісними (сингулярні), двомісними (бінарні), тримісними (тернарні) та інші — залежно від кількості висловлювань, зв'язаних даною зв'язкою. У формалізованих численнях ці зв'язки задають або за допомогою аксіом в аксіоматичних численнях (див. Числення висловлювань), або за допомогою правил виведення — в натуральних численнях (див. Генцена формальні системи). В алгебрі логіки їх розглядають як алгебр. операції на множині з двох значень: «0» і «1». Константи «0» і «1» можна розглядати як нульові операції. Осн. одномісною логіч. зв'язкою є заперечення, яке позначають че-

рез  $\neg$ ,  $\neg$  (рисочка зверху) або  $\sim$  і визначають рівностями:  $\neg 0 = 1$ ,  $\neg 1 = 0$ . Висловлюванням  $\neg X$  наз. запереченням висловлювання  $X$ . Осн. двомісною логіч. зв'язкою наведено в табл.

У 1-му стовпчику таблиці подано формули вигляду  $X * Y$  з прийнятим позначенням для кожної зв'язки  $*$ , у 2-му — деякі інші зображення ф-ли, в 3-му — послідовність значень ф-ли  $X * Y$  для двох пар аргументів  $(X, Y)$ , які дорівнюють відповідно  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  і  $(1, 1)$ , у 4-му — назви зв'язки (і відповідної формули), які трапляються в логіці та її застосуваннях; у 5-му — формули з словами звичайної мови, які відповідають виведенню зв'язкам. Вираз  $\mathcal{A}$ , який щось стверджує про зміни об'єкти  $x_1, \dots, x_n$ , наз. висловлювальною формою з цими вільними входженнями змінних. Ця форма задає висловлювальну ф-цію (предикат) від аргументів  $x_1, \dots, x_n$ , тобто функцію зі значеннями «істинне» чи «хибне». Напр., « $x$  — є просте число», « $x > y$  і  $x^2 + y^2 = z$ ».

Застосування квантора спільності, квантора існування, оператора дескрипції, оператора абстракції,  $\epsilon$ -оператора до виразу  $\mathcal{A}$  позначають відповідно через

$$(\forall x)\mathcal{A}, (\exists x)\mathcal{A}, (\iota x)\mathcal{A}, (\lambda x)\mathcal{A}, \epsilon_x\mathcal{A}. \quad (1)$$

(де замість  $x$  може стояти й будь-яка інша змінна). Будь-яке входження змінної  $x$  у виразі (1) наз. входженням, зв'язаним відповідним оператором (якщо воно не було вже зв'язане певним оператором в  $\mathcal{A}$ ), а вираз  $\mathcal{A}$  наз. сферою дії даного оператора. Входження, не зв'язане жодним оператором, наз. вільним. Форма задає функцію лише від тих змінних, у яких є вільні входження в цю форму.

**Квантори** — це логічні оператори, які дають змогу формувати висловлювання загальності й існування і переводять одну висловлювальну форму в іншу (здебільшого в меншим числом входжень вільних змінних) чи у висловлювання. Якщо у висловлювальній формі  $\mathcal{A}(x)$  є вільні входження змінної  $x$ , то вираз  $(\forall x)\mathcal{A}(x)$  істинний у довільній області  $D$  тоді і тільки тоді, коли  $\mathcal{A}(x)$  є істинним для кожного елемента  $x \in D$ , а вираз  $(\exists x)\mathcal{A}(x)$  є істинним у  $D$  тоді і тільки тоді, якщо існує таке  $x \in D$ , що істинним є  $\mathcal{A}(x)$ . Очевидно, що за'язування квантором змінної, усі входження якої вже зв'язані, або змінної, яка взагалі не входить до формули, не змінює змісту виразу. Обидва квантори пов'язані між собою такою еквівалентністю:

$\neg(\forall x)\mathcal{A}(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\mathcal{A}(x)$ . Інші позначення квантора  $(\forall x: (x), (\lambda x), \bigcap_x, \bigwedge_x, \Pi_x$ ; квантора  $(\exists x): (\exists x), \bigcup_x, \bigvee_x, \Sigma_x$ . Окрім цих кванторів використовують і т. з. обмежені квантори  $(\forall x_{\mathcal{A}(x)})$ ,  $(\exists x_{\mathcal{A}(x)})$ , пов'язані з звичайними кванторами такими еквівалентностями:

$$(\forall x) \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow (\forall x) (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)),$$

$$(\exists x) \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow (\exists x) (\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}(x)).$$

Часто заміняють  $\forall$  квантор єдиності  $(\exists! x) \mathfrak{A}(x)$  («існує єдиний  $x$ , такий, що  $\mathfrak{A}(x)$ »), але й його можна виразити через квантори  $(\forall x)$  і  $(\exists x)$  так:

$$(\exists! x) \mathfrak{A}(x) \leftrightarrow (\exists x) \mathfrak{A}(x) \& (\forall y) (\forall z) (\mathfrak{A}(y) \& \mathfrak{A}(z) \rightarrow y = z).$$

входженнями. Цей терм задає певну функцію від  $x_1, \dots, x_n$ . Напр., «єдине ціле число  $x$ , більше за  $y$  і менше за  $y + 2$ » (це форма з єдиною змінною  $y$ , яка має відні входження в цю форму), « $\sin(x + y)$ » тощо. Оператор дескрипції (відповідно оператор абстракції) переводить висловлювальну (відповідно предметну і висловлювальну) форму в предметну, здебільшого з меншим числом змінних, які мають відні входження, або ж у назву певного предмета. Якщо  $\mathfrak{B}(x, y_1, \dots, y_n)$  — предикатна (відповідно висловлюваль-

| Позначення операції    | Інші позначення  | Таблиця істинності | Назва операції   | Як читати  |
|------------------------|--|--------------------|--|--|
| $X \& Y$               | $X \wedge Y$<br>$X \cdot Y$  | 0001               | кон'юнкція, логічний добуток, логічне «і», функція «ігу»   | $X$ і $Y$  |
| $X \vee Y$             |  | 0111               | диз'юнкція, логічна сума, логічне «або», функція поділу  | $X$ або $Y$ або $(X \text{ і } Y)$                     |
| $X \rightarrow Y$      | $X \supset Y$  | 1101               | матеріальна імплікація   | якщо $X$ , то $Y$ ; $X$ впливає $Y$ , $X$ імплікує $Y$ |
| $X \leftrightarrow Y$  | $X \equiv Y$<br>$X \sim Y$   | 1001               | еквівалентність, функція рівнозначності  | $X$ тоді і лише тоді, коли $Y$ , $X$ еквівалентне $Y$  |
| $X \oplus Y$           | $X \vee Y$<br>$\neg(X \rightarrow Y)$<br>$\neg(X \supset Y)$       | 0110               | сума за модулем 2, розподільна диз'юнкція, заперечення еквівалентності, функція нерівнозначності | або $X$ , або $Y$ , $X$ не еквівалентне $Y$            |
| $X \downarrow Y$       | $\neg(X \& Y)$<br>$X \wedge Y$                                     | 1110               | Шеффера стрічка, заперечення кон'юнкції, антикон'юнкція  | $X$ і $Y$ несумісні; неправильно, що $X$ і $Y$         |
| $X \uparrow Y$         | $\neg(X \vee Y)$<br>$X \vee Y$                                     | 1000               | Пирса стрічка, заперечення диз'юнкції, антидиз'юнкція, функція Вебба                             | ні $X$ , ні $Y$  |
| $X \nrightarrow Y$     | $X \supset Y$<br>$\neg(X \rightarrow Y)$<br>$\neg(X \supset Y)$    | 0010               | заперечення матеріальної імплікації, матеріальна антиімплікація                                  | $X$ , але не $Y$ , неправильно, що $X$ впливає $Y$     |
| $X \leftarrow Y$       | $X \subset Y$<br>$Y \rightarrow X$<br>$Y \supset X$                | 1011               | зворотна імплікація  | $X$ , якщо $Y$ ; якщо $Y$ , то $X$ ; $Y$ впливає $X$   |
| $X \nleftrightarrow Y$ | $X \not\equiv Y$<br>$\neg(Y \rightarrow X)$<br>$\neg(Y \supset X)$ | 0100               | заперечення зворотної імплікації, зворотна антиімплікація  | не $X$ , але $Y$ ; неправильно, що $Y$ впливає $X$     |

В розширеному численні предикатів кванторами можна зв'язувати й предикатні змінні, напр.,  $(\forall F) (\exists x) (F(x) \vee \neg F(x))$ . У формальних теоріях квантори визначають за допомогою аксіом і правил виведення.

Вираз  $\mathfrak{B}$ , який являє собою складену назву і в якому  $x_1, \dots, x_n$  — список усіх змінних, які мають відні входження  $\mathfrak{B}$ , наз. предметною формою (або термом) з цими змінними

на) форма, в якій  $x, y_1, \dots, y_n$  — список усіх змінних, що мають відні входження в  $\mathfrak{B}(x, y_1, \dots, y_n)$ , то  $(\lambda x) (\mathfrak{B}(x, y_1, \dots, y_n))$  означає при заданих значеннях  $y_1^0, \dots, y_n^0$  змінних  $y_1, \dots, y_n$  ту функцію (відповідно той предикат) від аргументу  $x$ , яка (який) можному значенню  $x_0$  аргументу  $x$  ставить у відповідність значення виразу  $\mathfrak{B}(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ . Отже, вираз

$(\lambda x) \mathcal{B}(x, y_1, \dots, y_n)$  являє собою предметну форму, що задає функцію від  $y_1, \dots, y_n$ , яка набуває як своїх значень певних функцій (відповідно деяких предикатів), а саме: для значень  $y_1^0, \dots, y_n^0$  аргументів  $y_1, \dots, y_n$  її значенням є функція (відповідно предикат), що задається виразом  $(\lambda x) \mathcal{B}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)$ . У формалізованих мовах, які містять оператор абстракції, здебільшого є правило перетворення виразу  $(\lambda x) \mathcal{B}(x)$  в вираз  $\mathcal{B}(a)$ , який одержують, замінюючи всі вільні входження змінної  $x$  у  $\mathcal{B}(x)$  на  $a$ . Відзначимо, що  $(\lambda x) (\lambda y) \mathcal{B} \neq (\lambda y) (\lambda x) \mathcal{B}$ . Вираз  $(\lambda x) 2$  називає одиницю функцію-константу 2. Вираз  $(\lambda x) \sin(y + x)$  є термом з вільними входженнями змінних  $y, x$ ; при будь-яких числових значеннях змінних  $y$  і  $x$ , напр., при  $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$  цей

терм називає одиницю функцію-константу. В цьому прикладі — функцію, яка набуває значення  $\sin(0 + \frac{\pi}{2}) = 1$  для кожного чис-

ла  $x$ . Амер. математик А. Черч (ш. 1903) показав, що будь-яку загальнокурсивну ф-цію (див. *Рекурсивні функції*) можна спеціальним способом визначити за допомогою певного виразу, утвореного з змінних, за допомогою двох операцій: зачленування й абстракції.

Якщо  $\mathcal{B}(x, y_1, \dots, y_n)$  — висловлювальна форма, в якій  $x, y_1, \dots, y_n$  — список усіх змінних, які мають вільні входження в  $\mathcal{B}(x, y_1, \dots, y_n)$ , і якщо для  $y_1^0, \dots, y_n^0$  існує єдиний  $x$ , такий, що є істинним  $\mathcal{B}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)$  (тобто виконується умова єдиності), то  $(\lambda x) \mathcal{B}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)$  означає той єдиний  $x$ , для якого є істинним  $\mathcal{B}(x, y_1, \dots, y_n)$ . Логіки неоднаково інтерпретують оператор дескрипції для тих випадків, коли зазначена вище умова єдиності не задовольняється. В деяких формальних системах використання оператора дескрипції допускається лише після того, як доведено умову єдиності. За такого підходу може виявитися нерозв'язною проблема, як визначити, які з виразів мови є формулами. Інші логіки обирають раз назавжди визначений об'єкт із області значень відповідних змінних, який вважають як значення результату застосування оператора дескрипції для випадку, коли не виконується умова єдиності. Таким об'єктом вважають, напр., число «0», якщо об'єктами системи є числа, або множину всіх таких  $x$ , що  $\mathcal{B}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)$ , або пусту множину, якщо в формальній системі немає відмінностей між об'єктами й множинами, або певну предметну сталу з відділенням для неї позначенням, напр.,  $a^0$ . Якщо за такий об'єкт вважають  $a^0$ , то вираз  $\mathcal{B}(\lambda x \mathcal{B}(x))$  визначають як еквівалентний такому виразу:

$$(\exists y) ((\forall x) (\mathcal{B}(x) \leftrightarrow x = y) \& \mathcal{B}(y)) \vee$$

$$\vee \bigwedge (\exists y) (\forall x) (\mathcal{B}(x) \leftrightarrow x = y) \& \mathcal{B}(a^0)$$

(або існує такий  $y$ , що  $\mathcal{B}(y)$  і  $y$  — єдиний предмет, для якого  $\mathcal{B}(y)$ ; або такого предиката нема і  $\mathcal{B}(a^0)$ ). Оператори дескрипції і абстракції можна використовувати не тільки в предметних змінних, але (у відповідних системах) і з предикатними та функціональними. У формальних системах, побудованих на численні предикатів, і ті й ті оператори можна елімінувати (виключити).

З метою обґрунтування математики, ім. математики Д. Гільберт (1862—1943) побудував числення з  $\epsilon$ -оператором, який робить зайвим квантори. Для висловлювальної форми  $\mathcal{B}(x)$  вираз  $\epsilon x \mathcal{B}(x)$  приблизно означає, якийсь об'єкт  $x$ , що задовольняє умову  $\mathcal{B}(x)$ , якщо такий існує, і якийсь довільний об'єкт у протилежному разі. В численніях з  $\epsilon$ -оператором є аксіомна схема  $\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{B}(\epsilon x \mathcal{B}(x))$ . Числення, в яких поєднано  $\epsilon$ -оператор і техніку природного введення, можуть становити певну зручність для машинного пошуку

*довести теорем на ЕОМ*

Л.м. Карнан Р. Значення й необхідність. Пер. саміт М., 1959. Ч. 1. Введення в математичну логіку. Пер. саміт, т. 1. М., 1960. Fraenkel A. A. Bar Hillel Y. Foundations of set theory Amsterdam, 1958.

В. Ф. Кошмарко.

**ЛОКАЛІЗОВАНІ ЗМІННІ** — змінні у мовах програмування з блоковою структурою, які описані у блоці програми і мають зміст, визначений цим описуванням, лише в цьому блоці. Змінні, описані на початку блока, називають змінними з блоку (див. *Глобальні змінні*). Ці змінні набувають значення на вході у блок і втрачають його на виході. Вияткою становлять власні змінні (див. *АЛГОЛ-60*). Їм, а. дають змогу використовувати у мовах програмування з блоковою структурою в різних блоках ті самі ідентифікатори, і, отже, складати блоки незалежно один від одного, а також дають змогу реалізувати динамічний принцип пам'яті розподілу.

А. І. Халілов.

**ЛОКАЛЬНОГО КОДУВАННЯ ПРИНЦИП** — загальний підхід до побудови методів синтезу схем, що реалізують *булеві функції* (або вектор-функції) з спеціальних класів функцій, оснований на кодуванні функцій наборами з нулів і одиниць, яке має особливі властивості. Для побудови асимптотично оптимального методу синтезу треба, щоб кодування було асимптотично оптим., щоб довжина коду асимптотично дорівнювала (двійковому) логарифму числа розглядаємих ф-цій (від аргументів). Кодування повинно бути локальним у тому розумінні, що для обчислення ф-ції / на кожному конкретному наборі її значень аргументів (для декодування) досить знати порівняно невеликий відрізок («кусочек») коду. Декодування повинне відтворюватися порівняно просто. По-перше, треба, щоб порівняно просто (в розумінні складності схеми) реалізації обчислювались «координати» куска коду; напр., номер куска коду, якщо код розбито на куски однакової довжини, номер першого розряду й довжина куска, якщо куски — різної довжини. По-друге,

треба, щоб за набором  $\tilde{\sigma}$ , куском коду ( $\tilde{f}$ , може «координатами» куску коду) порівняно просто обчислювалося значення  $f(\tilde{\sigma})$ .

У загальному вигляді схема, побудована для  $f(\tilde{x})$  відповідно до Л. к. ш., складається з кількох підсхем (мал.). Підсхема А за набором  $\tilde{\sigma}$  обчислює координати куску коду. Підсхема В за координатами куску коду видає частину коду (фіксованої довжини), яка містить потрібний кусок коду. Підсхема С виділяє в частині коду потрібний кусок коду. Нареш-

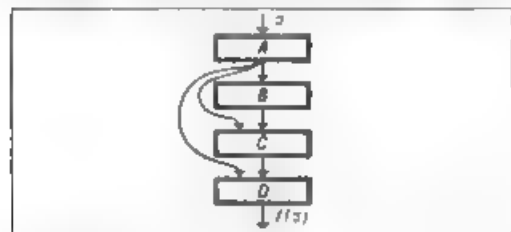


Схема обчислювання  $f(\tilde{x})$  за принципом локального кодування

ті, підсхема D обчислює  $f(\tilde{\sigma})$ . Звичайно підсхема С є універсальною (незалежно від відкладу  $F$  реалізованих ф-цій, від конкретної ф-ції  $f$ ), підсхеми А і D не залежать від  $f$ , але залежать від  $F$ ; підсхема В залежить від  $f$ , ця підсхема містить осн. частину елементів усієї схеми. Не обов'язково, щоб кодування було взаємно однозначним. У невеликій кількості додаткова інформація може міститися в підсхемі декодування D. Л. к. п. фактично зводять задачу синтезу схем до задачі кодування ф-цій, і осн. важкість задачі синтезу тепер зосереджується на цій задачі. Особливо зручний Л. к. п. у тому разі, коли схеми мають досить великі можливості (схеми з функціональних елементів, логіч. сітки й алгоритми).

Приклади асимптотично оптим. локального кодування

1. Нехай  $\mathcal{E}_n$  — клас симетричних ф-цій  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Кодом ф-ції  $f(x_1, \dots, x_n)$  є набір  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ , де  $\pi_i$  — значення ф-ції  $f$  на (будь-якому) наборі з  $i$  одиниць.

2. Нехай  $\mathcal{E}_n^{a,b}$  — клас ф-цій  $f(x_1, \dots, x_n)$ , які набувають значень 1 на  $a$  наборах  $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_a$  значень аргументів. Якщо  $\frac{\log a}{n} \rightarrow 0$ , то асимптотично оптим. локальним кодом є набір  $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_a$  (довжини  $kn$ ).

3. Нехай  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — набір з нулів і одиниць,  $|\tilde{\alpha}| = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 2^1 + \dots + \alpha_n 2^{n-1}$ ,  $\mathcal{E}_n$  — клас вектор-функцій  $F = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ , які задовольняють умову: якщо  $|\tilde{\alpha}| < |\tilde{\beta}|$ , то  $|F(\tilde{\alpha})| < |F(\tilde{\beta})|$ . Нелокальний (але асимптотично

оптим.) код вектор-функції  $F$  — це набір довжини  $2^{n+1} - 1$ , який має  $2^n$  нулів і  $2^n - 1$  одиниць, у якому число одиниць, які стоять перед  $i$ -м нулем, дорівнює  $|F(\tilde{\alpha})|$ , де  $|\tilde{\alpha}| = i - 1$ . Нехай набір  $\tilde{\pi}$  розбито на  $2^k$  частин:  $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_{2^k})$  ( $\tilde{\pi}_i$  має довжину  $2^{n-k+1}$ , крім  $\tilde{\pi}_{2^k}$ ) і  $\tilde{\rho}_i$  — набір довжини  $n$  такий, що  $|\tilde{\rho}_i|$  є число одиниць у наборі  $(\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_{i-1})$ . Асимптотично оптим. локальний код для  $F$  (при  $\frac{n}{2^{n-k}} \rightarrow 0$ ) — це набір  $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \dots$

...  $\tilde{\rho}_{2^k}, \dots$ . О. В. Лупінов  
ЛОКАЛЬНОГО ПОШУКУ МЕТОД — один з оптимізацій методів.

ЛЮДИНА-ОПЕРАТОР — людина, що бере участь у керуванні об'єктами й системами і є складовим елементом *ератичної системи*. У системі *людина-машина* Л.-о. може виступати як приймач і ретранслятор інформації, може аналізувати інформацію і приймати рішення, розробляти керуючі команди, здійснювати контроль справності елементів системи, програмувати роботу системи і її вузлів чи бути виконавцем тієї або іншої команди. Вагатованістю сприйняття і передавання інформації, раціональним використанням надлишкової інформації, здатністю після певного навчання діяти в системах керування і рішаних функціональними й структурними схемами тощо людина вигідно відрізняється від *автомата*. Мала пропускна здатність, порівняно швидка стомлюваність, здатність відволікатися й забувати, велика залежність від зовн. впливів та інші властивості, якими людина поступається перед здатностями автоматів, визначають раціональний розподіл функцій між людиною і автоматами в керуваннях системами.

В. Б. Кабачник

ЛЯПАС — мова програмування, орієнтована на описування логічних задач. До таких задач належать, напр., задачі *логіки математичної*, *автоматів теорії*, *булевої алгебри*, *теорії графів* та *кодування теорії*. Розробили її 1966. Л.-70 являє собою розвиток мови Л., запропонованої раніше для застосування переважно в галузі логічного синтезу дискретних автоматів пристроїв. Л.-70 має три рівні. Перший з них близький до *мов машинних* і дає змогу досить повно використовувати можливості сучасних ЦОМ. Його осн. операціями є булеві вектори й матриці, над якими визначається ряд елементарних операцій. Другий рівень містить апарат для розширення мови шляхом введення нових операторів, реалізованих *підпрограмами*, тому Л.-70 належить до відкритих, зростаючих мов. Третій рівень містить апарат сегментування, який полегшує складання великих програм, що не вміщуються цілком в оперативній пам'яті. Мову Л.-70 покладено в основу одноп'явної системи програмування, осн. блоком якої є швидкодіючий *транслятор*. Усі блоки си-

стеми оформлено як підпрограми, їх можна використати при розробці нових програм Систему Л.-70 реалізовано на вітчизняних обчисл. машинах «М-20», «БЭСМ-3М», «БЭСМ-4», «Минск-2», «М-220», «Минск-22» і «БЭСМ-6».

Лит. Автоматизация синтеза дискретных автоматов. «Труды Сибирского физико-технического института», 1968, в. 48. Записки А. Д. Алгоритмический язык ЛЯПАС и автоматизация синтеза дискретных автоматов. Томск, 1968. 166 стр. с 265—281. Логический язык для представления алгоритмов синтеза релейных устройств. М., 1966. Записки А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М., 1971. 161 стр. с 502—504.

Д. Захаревич.

**ЛЯПУНОВА МЕТОДИ** — методи, що дають змогу якісно досліджувати деякі важливі властивості (напр., стійкість, дисипативність) розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, не відшукуючи самих розв'язків. Розробив їх 1892 рос. математик О. М. Ляпунов. Вони становлять основу теорії стійкості розв'язків звичайних дифер. рівнянь. Проблема стійкості вперше поставила з практичних задач небесної механіки, але згодом виявилось, що вона виникає в усіх наук. задачах, пов'язаних з визначенням руху будь-яких матеріальних систем, описуваних звичайними дифер. рівняннями. Дослідження цієї проблеми до О. М. Ляпунова стосувалися окремих випадків руху й не завжди мали достатню матем. строгість. Строгі визначення стійкості, загальну постановку задачі, а також потужні й строгі методи розв'язування її (т. з. 1-й і 2-й Л. м.) вперше запропонував О. М. Ляпунов у своїй дисертації «Загальна задача про стійкість руху».

Розглянемо систему дифер. рівнянь, яка описує рух якоїсь динамічної системи:

$$\frac{dy_i}{dt} = g_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

або в матричній формі

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad (1)$$

де  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_n) = (n \times 1)$ -матриці (вектори-стовпчики),  $g_i = g_i(t, y)$  — деякі ф-ції незалежної змінної  $t$  (звичайно — часу) і вектора фазових координат системи  $y$ , які задовольняють умови існування і єдиності розв'язків системи (1). Припустимо, що необхідно вивчити якийсь окремий, т. з. не збурений, рух досліджуваної динамічної системи, якому відповідає окремий розв'язок  $y = y(t)$  системи дифер. рівнянь (1). Усі інші рухи системи, яким відповідають будь-які розв'язки  $y \neq y$ , називаються збуреними рухами, а різниця  $x = y - y$  — збуренням. Підставивши в рівняння (1)  $y = x + y$  (припускаємо, що  $x$  є відомою функцією  $t$ ), одержимо т. з. рівняння збуреного руху

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (2)$$

де  $f(t, x) = g(t, x + y) - g(t, y)$ .

Визначення 1. Незбурений рух називається (за Ляпуновим), якщо для всякого додатного числа  $\varepsilon$ , яким би малим воно не було, знайдеться додатне число  $\delta$ , таке, що для всіх збурень  $x(t)$  (або для всіх збурених рухів), для яких у початковий момент  $t = t_0$ , здійснюється нерівність

$$|x(t_0)| < \delta, \quad (3)$$

при всіх  $t > t_0$  — здійснюватиметься нерівність  $|x(t)| < \varepsilon$ , де  $\| \cdot \|$  — норма вектора.

Визначення 2. Якщо незбурений рух стійкий (згідно з визначенням 1) і якщо при якомусь  $\Delta > 0$  для всіх збурень, які задовольняють нерівність  $|x(t)| < \Delta$ , існує границя  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$ , то незбурений рух називається

асимптотично стійким (за Ляпуновим). Визначення 1 і 2, введені О. М. Ляпуновим, встановлюють зв'язок між поняттями стійкості й характером змін в часі (часто кажуть — зростанням) норми  $|x(t)|$  розв'язку  $x(t)$  рівняння (2). Ідея 1-го Л. м. полягала в тому, що зростання  $|x(t)|$  оцінюється за шкалою зростань, заданою певним упорядкованим сімейством відомих ф-цій  $\psi$ . О. М. Ляпунов використав ф-ції  $\psi$ , для яких показником зростання є параметр (дійсне число)  $\lambda$ . Відповідно до такої шкали показник зростання розв'язків  $x(t)$  визначається формулою

$$\lambda = \chi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|,$$

де символ  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$  означає верхню границю ф-ції  $\varphi(t)$ . У суцяс. літературі число  $\lambda$  називається характеристичним показником (показником Ляпунова) розв'язку  $x(t)$  (сам О. М. Ляпунов користувався числом  $\alpha = -\lambda$  і називав його характеристичним числом). Характеристичний показник  $\lambda$  є функціоналом, визначеним на множині ф-цій  $|x(t)|$ , заданих на відрізку  $(t_0, \infty)$ . Очевидно, що, коли  $\lambda > 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ , а якщо  $\lambda < 0$ , то  $|x(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Взагалі, чим більший показник  $\lambda$ , тим швидше зростає ф-ція  $|x(t)|$ . О. М. Ляпунов довів ряд теорем про характеристичні показники розв'язків рівнянь (2) і про вплив на показники різних перетворень, виконуваних над цими рівняннями. 1-й Л. м. дає змогу розв'язати задачу про стійкість, якщо за виглядом правої частини рівняння (2) вдасться обчислити характеристичні показники його розв'язків або, принаймні, знайти деякі оцінки їх. Найбільше досліджено цим методом лівійні системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (4)$$

де  $A(t) = (n \times n)$ -матриця, залежна від  $t$ . Важливі результати одержано для лінійних періодичних систем виду (4), в яких  $A(t) = A(t + \omega)$ ,  $\omega > 0$ , а також для ряду інших окремих випадків. Розвиваючи 1-й Л. м.,

пізніше дослідники використали як шкалу зростання двопараметричне сімейство ф-цій, напр.,  $\mu e^{\lambda t}$ . Ідеї 1-го Л. м. набули застосування й глибокого розвитку в працях багатьох вітчизняних та іноземних вчених.

Ідея 2-го (т. з. прямого) Л. м. сходить до відомої теореми Лагранжа про стійкість рівноваги консервативної мех. системи (1788). У цій теоремі твердилось, що стан рівноваги стійкий, якщо в ньому досягається мінімум потенціальної енергії системи. Строго доведення цієї теореми пізніше запропонував Л. Діріхле. Теорема Лагранжа — Діріхле стосується окремого випадку руху, а практично її важко використовувати через необхідність відшукувати потенціальну енергію системи, що далеко не завжди вдається зробити. Другий Л. м. в далекосхідним узагальненням ідеї Ж.-Л. Лагранжа. Для дослідження стійкості руху системи (1) О. М. Ляпунов запропонував використати спец. знаковозначені пробні ф-ції  $v(t, x)$  (т. з. ф у н к ц і я Л я п у н о в а, віддалений аналог енергетичної функції Лагранжа). Факт стійкості або нестійкості було пов'язано з наявністю такої ф-ції  $v(t, x)$ , похідна якої, взята згідно з рівняннями збуреного руху, має спец. властивості. Так, напр., незбурений рух системи

(1) стійкий, якщо похідна  $\frac{dv(t, x)}{dt}$  функції

Ляпунова, взята вздовж фазових траєкторій системи (2), знакопостійна й має знак, протилежний знакові  $v(t, x)$ . О. М. Ляпунов довів ряд теорем про ф-ції  $v(t, x)$ , які стали основою його 2-го методу, й за допомогою їх одержав деякі конкретні результати. Одним з найвідоміших таких результатів є строге обґрунтування методу дослідження стійкості за рівняннями 1-го наближення (метод лінеаризації). Цим методом без достатніх підстав користу-

валися раніше багато дослідників, проте О. М. Ляпунов показав, що в ряді випадків такий метод веде до помилкових результатів, і сформулював строгі умови, за яких до нього можна вдаватися.

Ідея 2-го Л. м. виявилася надзвичайно ефективною й плідною. Над застосуванням і подальшим розвитком цього методу працювало багато вчених. На основі 2-го Л. м. було розв'язано задачі про стійкість загалом (тобто за будь-яких збурень  $x(t)$ ) і в області, про абсолютну стійкість, про дисипативність (граничну обмеженість розв'язків), про стійкість на скінченному інтервалі часу і при постійно діючих збуреннях, про стійкість дискретних, стохастичних систем, систем із запізнюванням і з розподіленими параметрами, систем, заданих дифер. рівняннями в банаховому просторі, й багато ін. задач. Крім класичної проблеми про стійкість руху, 2-й Л. м. застосовують і в багатьох інших задачах, напр., у задачі про синтез оптим. систем автомат. керування. Л. м. є теоретичною основою розв'язування багатьох прикладних задач, у т. ч. й задач теорії автомат. керування (технічної кібернетики). Див. також *Стійкості дискретних систем теорія, Стійкості неперервних систем теорія*.

Лит.: Л я п у н о в А. М. Общия задача об устойчивости движения. М.—Л., 1950; З у б о в В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., 1957 [бібліогр. с. 238—239]; К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959 [бібліогр. с. 205—211]; Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. М., 1966; В ы л о в В. Ф. [та ін.]. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1968 [бібліогр. с. 558—565]; М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966; Д е м и д о в и ч В. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967 [бібліогр. с. 466—469]; Л а - С а л л я Ж., Л е ф - ш е ц С. Исследование устойчивости примым методом Ляпунова. Пер. с англ. М., 1964 [бібліогр. с. 160—161]. Ю. М. Чехович,

Адреса Головної редакції Української Радянської Енциклопедії: 252650, Київ-30, ГСП, вул. Леніна, 51.

В томі вміщено: 3 вклейки офсетного друку (8 кольорових ілюстрацій), в тексті — 239 ілюстрацій. Папір для тексту виготовлено на фабриці ім. Ю. Яноніса, вклейки й текстові ілюстрації — на Головному підприємстві республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР. Том задано до набору 19 січня 1973 р., підписано до друку 1 червня 1973 р.

БФ 05835. Тираж 7000. Формат 70X100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Фіз.-друк. аркушів 35,5+0,75 арк. вклейок, умовних друк. арк. 48,05; облік.-видав. аркушів 8<sup>2</sup>/<sub>16</sub>. Ціна одного тому 4 крб 96 коп. Зам. № 145.

Надруковано з матриць Головного підприємства республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР (Київ, вул. Дошиженка, 3) на Київській книжковій фабриці республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР, Київ, вул. Воровського, 24.









ЕНЦИКЛОПЕДІЯ КІБЕРНЕТИКИ

---

А · Л

---

1